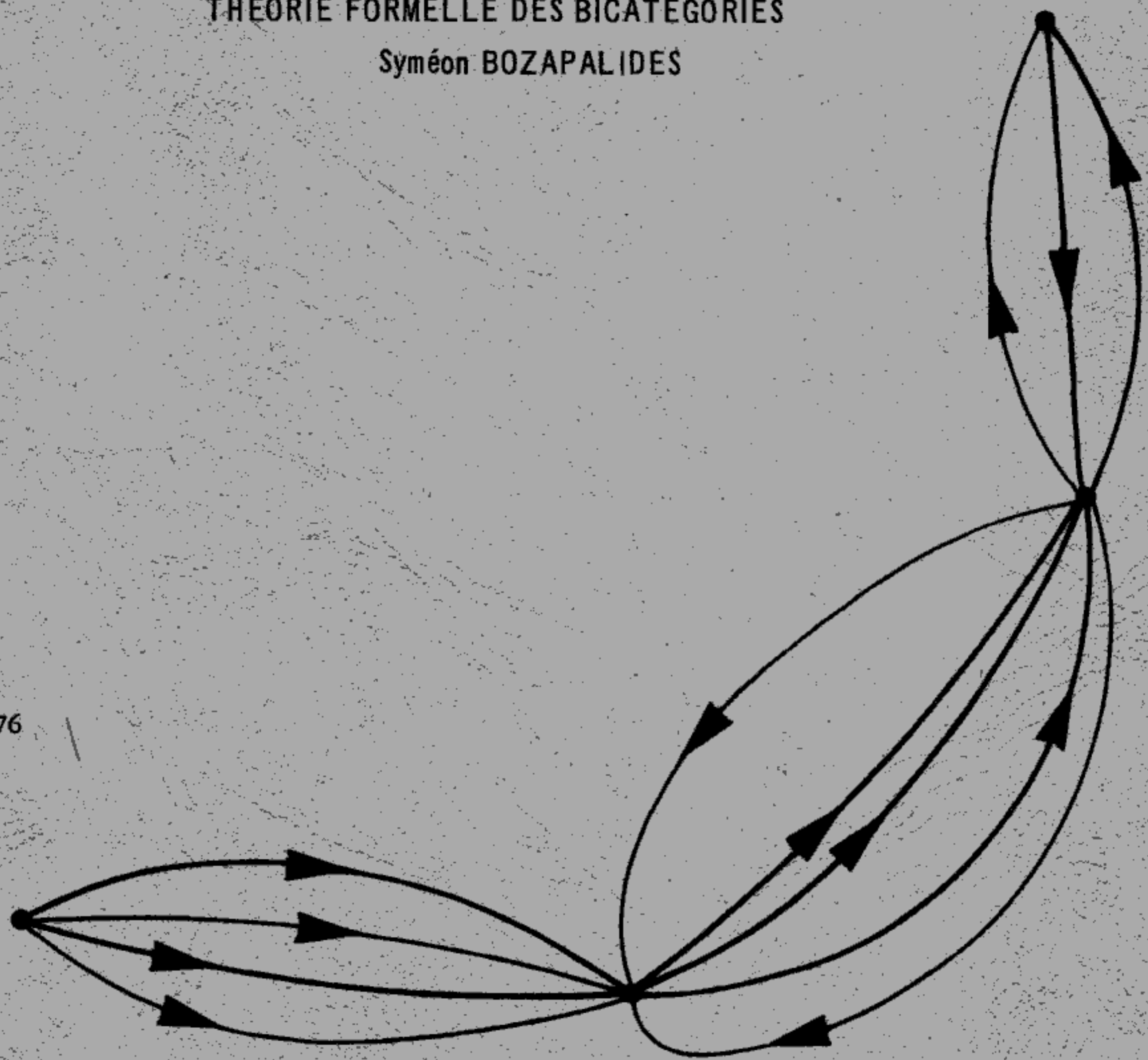
ESQUISSES MATHEMATIQUES

25

THEORIE FORMELLE DES BICATEGORIES

Syméon BOZAPALIDES



AMIENS 1976

ESQUISSES MATHEMATIQUES

Les «*Esquisses Mathématiques*» constituent une série de publications (commencée en 1970) contenant des travaux plus ou moins provisoires, en particulier des thèses, émanant de l'équipe de recherche :

Théorie et Applications des Catégories (T.A.C.).

Les textes sont dactylographiés par les soins des auteurs.

Directeur de la publication : *Charles EHRESMANN.*

Responsable de la rédaction : *Andrée BASTIANI.*

Toute la correspondance (rédaction, renseignements ou commandes) est à envoyer à :

Mme BASTIANI ou *M. EHRESMANN,*
U. E. R. de Mathématiques
33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS (France)

Liste des volumes parus.

1. R. GUITART, *Relations. Fermetures. Continuités.* 102 pages.
2. Ch. LAIR, *Constructions d'esquisses. Transformations naturelles généralisées.* 102 pages.
3. G. WEIDENFELD, *Objets injectifs et catégories de fractions.* 87 pages.
   M. WEIDENFELD, *Idéaux d'une catégorie préadditive.* 80 pages.
4. E. BURRONI, *Catégories discrètement structurées. Triples.* 88 pages.
5. A. BURRONI, *Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies.* 87 pages.
6. D. CHAMAILLARD, *Catégories structurées par des catégories non associatives.* 62 pages.
7. K. LELAHI, *Catégories préadditives structurées.* 74 pages.
8. L. COPPEY, *Morphismes entre catégories avec modèles.* 40 pages.
   G. LENGAGNE, *Sur les groupoïdes uniformes.* 35 pages.
   G. BOURDAUD, *Foncteurs à structures initiales.* 10 pages.
9. YUEN Ping Cheng, *Sur les prolongements de G-structures.* 169 pages.

THEORIE FORMELLE DES BICATEGORIES (*)

Syméon BOZAPALIDES

Mes remerciements vont à :

- *Monsieur C. EHRESMANN qui nous fait l'honneur de présider ce Jury de thèse,*
- *Madame A. BASTIANI qui nous a aidé considérablement pour achever ce travail,*
- *Monsieur N. A'CAMPO et Monsieur J. BENABOU qui ont bien voulu faire partie du Jury.*

(*) Thèse de 3[e] cycle soutenue à Paris 7, Mars 1976.

INTRODUCTION

Dans ce travail en utilisant les fins cartésiennes introduites en [8], on décrit formellement les notions de la théorie de bicatégories, ce qui nous permet de relativiser cette théorie.

Plus précisément:

- Au chapitre I on introduit la notion de limite sur un objet d'une bicatégorie par rapport aux tenseurs et aux cotenseurs, et on examine les relations existant entre ces deux notions et d'autres notions de limite.

- Dans le chapitre II on généralise la notion de fin cartésienne afin de donner une construction universelle de la bicatégorie Pseud($\mathbb{I}$,$\mathbb{A}$) dont les objets sont les morphismes de la bicatégorie $\mathbb{I}$ vers celle $\mathbb{A}$, les flèches les transformations quasi-naturelles, et les 2-cellules les modifications entre ces transformations.

- Au chapitre III on relativise par rapport à une 2-catégorie multiplicative les notions de bicatégorie, de morphisme entre bicatégories, de bicatégorie exacte, etc, et on construit le produit tensoriel de bicatégories relatives, la bicatégorie relative polynomiale $\mathbb{A}[\mathbb{I}]$ associée à une bicatégorie $\mathbb{I}$ et à une bicatégorie relative $\mathbb{A}$, et enfin les duales ${}^{op}\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^{op}$, ${}^{op}\mathbb{A}^{op}$, d'une bicatégorie relative $\mathbb{A}$.

- Le chapitre IV est consacré à l'étude des 2-catégories relatives. En utilisant les fins cartésiennes, on transporte la théorie des 2-catégories (transformations quasi-naturelles, modifications, 2-catégories commas, etc) au $\mathbb{V}$-cadre.

On définit la notion de $\mathbb{V}$-limite cartésienne et on donne des conditions pour leur existence; les quasi-extensions de Kan s'ensuivent.

- Enfin au chapitre V d'une part on relativise la bicatégorie Pseud($\mathbb{A}$,$\mathbb{B}$) dont les objets sont les $\mathbb{V}$-morphismes de la $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathbb{A}$ vers celle $\mathbb{B}$, les flèches les transformations $\mathbb{V}$-quasi-naturelles et les 2-cellules les $\mathbb{V}$-modifications, et d'autre part on construit la $\mathbb{V}$-bicatégorie Bim($\mathbb{A}$) des bimodules d'une $\mathbb{V}$-bicatégorie exacte $\mathbb{A}$.

TABLE DES MATIÈRES

C H A P I T R E 0

Afin de fixer les notations, on va décrire certaines bicatégories utilisées dans ce travail.

1) La 2-catégorie $\mathcal{C}at$.

Elle a comme objets les catégories légitimes, comme flèches les foncteurs et comme 2-cellules les transformations naturelles.

2) La 2-catégorie $\mathcal{U}$-$\mathcal{C}at$, où $\mathcal{U}$ est une catégorie multiplicative [5].

Ses objets sont les $\mathcal{U}$-catégories (ou catégories relatives à $\mathcal{U}$), ses flèches les $\mathcal{U}$-foncteurs et ses 2-cellules les transformations $\mathcal{U}$-naturelles.

3) La 2-catégorie $\mathcal{C}at(\underline{E})$, où $\underline{E}$ est une catégorie à produits fibrés.

Ses objets, appelés catégories internes à $\underline{E}$, sont des sextuplets

$$C=(C_0, C_1, \partial_0^C, \partial_1^C, \mu^C, n^C),$$

où

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dl, "\partial_0^C"'] \arrow[dr, "\partial_1^C"] & \\ C_0 & & C_0 \end{tikzcd}$$

est un span de $\underline{E}$ et où $n^C : C_0 \to C_1$ et $\mu^C : C_1 \times_{C_0} C_1 \to C_1$ sont des morphismes de $\underline{E}$ qui font commuter les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "n^C"] \arrow[d, "n^C"'] \arrow[dr, "1_{C_0}"] & C_1 \arrow[d, "\partial_0^C"] \\ C_1 \arrow[r, "\partial_1^C"'] & C_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[r, "\mu^C"] \arrow[d, "P_0"'] & C_1 \arrow[d, "\partial_0^C"] \\ C_1 \arrow[r, "\partial_0^C"'] & C_1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[r, "\mu^C"] \arrow[d, "p_1"'] & C_1 \arrow[d, "\partial_1^C"] \\
C_1 \arrow[r, "\partial_1^C"] & C_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_1 \times_{C_0} C_0 \arrow[r, "1 \times_{C_0} n^C"] \arrow[d, "\wr"'] & C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[dl, "\mu^C"] \\
C_1 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C_0 \times_{C_0} C_1 \arrow[r, "n^C \times_{C_0} 1"] \arrow[d, "\wr"'] & C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[dl, "\mu^C"] \\
C_1 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_1 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[r, "1 \times_{C_0} \mu^C"] \arrow[d, "\mu^C \times_{C_0} 1"'] & C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[d, "\mu^C"] \\
C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[r, "\mu^C"'] & C_1
\end{tikzcd} ,$$

où $C_1 \times_{C_0} C_1$ désigne le produit fibré

$$\begin{tikzcd}
& C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
C_1 \arrow[dr, "\partial_1^C"'] & & C_1 \arrow[dl, "\partial_0^C"] \\
& C_0 &
\end{tikzcd} .$$

Une flèche dans $\mathcal{C}at(\underline{E})$ de $C=(C_0, C_1, \partial_0^C, \partial_1^C, \mu^C, n^C)$ vers $D=(D_0, D_1, \partial_0^D, \partial_1^D, \mu^D, n^D)$, appelée foncteur interne à $\underline{E}$, est un couple de morphismes de $\underline{E}$

$$F=(F_0 : C_0 \to D_0 ,\ F_1 : C_1 \to D_1)$$

tel que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "\partial_0^C"'] & D_1 \arrow[d, "\partial_0^D"] \\
C_0 \arrow[r, "F_0"] & D_0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "\partial_1^C"'] & D_1 \arrow[d, "\partial_1^D"] \\
C_0 \arrow[r, "F_0"] & D_0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "n^C"] \arrow[d, "F_0"'] & C_1 \arrow[d, "F_1"] \\
D_0 \arrow[r, "n^D"'] & D_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[r, "\mu^C"] \arrow[d, "F_1 \times_{F_0} F_1"] & C_1 \arrow[d, "F_1"] \\
D_1 \times_{D_0} D_1 \arrow[r, "\mu^D"'] & D_1
\end{tikzcd}$$

En fait F_1 détermine F_0.

Enfin une 2-cellule dans $\mathbf{Cat}(\underline{E})$,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & D \end{tikzcd}$$

appelée transformation naturelle interne à $\underline{E}$, est un morphisme $\varphi : C_1 \longrightarrow D_1$ de $\underline{E}$ tel que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\partial_0^C"'] & D_1 \arrow[d, "\partial_0^D"] \\ C_0 \arrow[r, "F_0"'] & D_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\partial_1^C"'] & D_1 \arrow[d, "\partial_1^D"] \\ C_0 \arrow[r, "G_0"'] & D_0 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[r, "\varphi \times G_1"] \arrow[d, "\mu^C"'] & D_1 \times_{D_0} D_1 \arrow[d, "\mu^D"] \\ C_1 \arrow[r, "G_1"'] & D_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_1 \times_{C_0} C_1 \arrow[r, "F_1 \times \varphi"] \arrow[d, "\mu^C"'] & D_1 \times_{D_0} D_1 \arrow[d, "\mu^D"] \\ C_1 \arrow[r, "F_1"'] & D_1 \end{tikzcd} .$$

φ est complètement déterminée par $\varphi \cdot n^C$.

4) La 2-catégorie $\mathbf{Fib}(\underline{B})$.

Elle a comme objets les fibrations au-dessus de la catégorie $\underline{B}$, comme flèches les morphismes cartésiens entre fibrations et comme 2-cellules les transformations naturelles (au-dessus de $\underline{B}$) entre morphismes cartésiens.

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{D} : \mathbf{Fib}(\underline{B}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pseud}(\underline{B}^{op}, \mathbf{Cat}) ,$$

où le membre de droite désigne la 2-catégorie dont les objets sont les pseudo-foncteurs de $\underline{B}^{op}$ vers $\mathbf{Cat}$, les flèches les transformations iso-naturelles entre pseudo-foncteurs et enfin les 2-cellules les modifications entre telles transformations.

$\mathcal{D}$ associe, à la fibration $p : \underline{E} \longrightarrow \underline{B}$, le pseudo-foncteur

$$p:\underline{B}^{op} \longrightarrow \mathbb{C}at$$

défini par les formules :

$\mathcal{D}p(B)=p^{-1}(B)$, fibre de p au-dessus de B,

$\mathcal{D}p(f)=f^{*}_{p}$, foncteur "image inverse" au-dessus de f.

Si

$$\begin{tikzcd} \underline{E} \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "p"'] & & \underline{E}' \arrow[dl, "p'"] \\ & \underline{B} & \end{tikzcd}$$

est un morphisme cartésien, alors la transformation $\mathcal{D}T$ a comme composante

$$(\mathcal{D}T)_B : \mathcal{D}p(B) \longrightarrow \mathcal{D}p'(B) \quad , \quad \forall B \in Ob\underline{B},$$

la restriction

$$T_B = {}^{T}/p^{-1}(B)$$

de T à la fibre $p^{-1}(B)$.

5) La bicatégorie $\mathbb{D}$ist.

Elle a comme objets les catégories légitimes $\underline{A},\underline{B},\underline{C},\ldots$

Une flèche de $\underline{A}$ vers $\underline{B}$, appelée un distributeur, est un bifoncteur

$$\Phi : \underline{B}^{op} \times \underline{A} \longrightarrow \underline{Ens} \;;$$

on le note $\Phi : \underline{A} \dashrightarrow \underline{B}$.

Les 2-cellules sont les transformations naturelles entre tels bifoncteurs.

Enfin la composition de $\Phi : \underline{A} \dashrightarrow \underline{B}$ et $\Psi : \underline{B} \dashrightarrow \underline{C}$ est définie par

$$(\Psi \otimes \Phi)(C,A) = \frac{\coprod_{B \in Ob\underline{B}} \Phi(B,A) \times \Psi(C,A)}{R} \,,$$

où R est la relation d'équivalence engendrée par les couples

$$((\varphi\beta,y),(\varphi,\beta y)),$$

où $\varphi\in\Phi(B',A)$, $y\in\Psi(C,B)$, $\beta:B\longrightarrow B'\in Fl\underline{B}$ et où $\varphi\beta$, βy sont des abréviations de $\Phi(\beta,A)(\varphi)$, $\Psi(C,\beta)(y)$ respectivement.

6) <u>La bicatégorie $\mathcal{U}$-$\mathbb{D}$ist, où $\mathcal{U}$ est une catégorie multiplicative à limites inductives</u>.

Ses objets sont les $\mathcal{U}$-catégories $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\ldots$

Une flèche de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$, appelée un $\mathcal{U}$-distributeur, est la donnée

a) d'une application

$$\Phi : \mathrm{Ob}\mathcal{B}\times\mathrm{Ob}\mathcal{A}\longrightarrow \mathrm{Ob}\mathcal{U} \quad ,$$

b) de deux familles de morphismes de $\mathcal{U}$

$$\left\{\varphi_{AA'} : \Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A')\longrightarrow\Phi(B,A')\right\}_{A,A'\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}}$$

$$\left\{\varphi_{B'B} : \mathcal{B}(B',B)\otimes\Phi(B,A)\longrightarrow\Phi(B',A)\right\}_{B',B\in\mathrm{Ob}\mathcal{B}}$$

telles que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
\Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A')\otimes\mathcal{A}(A',A'') \arrow[r, "1\otimes c_{\mathcal{A}}"'] \arrow[d, "\varphi_{AA'}\otimes 1"'] & \Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A'') \arrow[d, "\varphi_{AA''}"] \\
\Phi(B,A')\otimes\mathcal{A}(A',A'') \arrow[r, "\varphi_{A'A''}"'] & \Phi(B,A'')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Phi(B,A)\otimes I \arrow[r, "1\otimes n_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "\sim"'] & \Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A) \arrow[d, "\varphi_{AA}"] \\
& \Phi(B,A)
\end{tikzcd} \quad ,$$

de même que deux diagrammes analoques pour l'action $\varphi_{B'B}$ et que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(B',B)\otimes\Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A') \arrow[r, "1\otimes\varphi_{AA'}"] \arrow[d, "\varphi_{B'B}\otimes 1"'] & \mathcal{B}(B',B)\otimes\Phi(B,A') \arrow[d, "\varphi_{B'B}"] \\
\Phi(B',A)\otimes\mathcal{A}(A,A') \arrow[r, "\varphi_{AA'}"'] & \Phi(B',A')
\end{tikzcd} .$$

On écrit alors $\Phi:\mathcal{A}\dashrightarrow\mathcal{B}$.

Une 2-cellule dans $\mathcal{U}$-$\mathcal{D}$ist de Φ vers $\Psi:\mathcal{A}\dashrightarrow\mathcal{B}$, est une collection de morphismes de $\mathcal{U}$

$$\left\{\lambda_{BA} : \Phi(B,A)\to\Psi(B,A)\right\}_{B\in\mathrm{Ob}\mathcal{B}\ ,A\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}}$$

qui font commuter les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}
\Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A') \arrow[r, "\varphi_{AA'}"'] \arrow[d, "\lambda_{BA}\otimes 1"'] & \Phi(B,A') \arrow[d, "\lambda_{BA'}"] \\
\Psi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A') \arrow[r, "y_{AA'}"'] & \Psi(B,A')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(B',B)\otimes\Phi(B,A) \arrow[r, "\varphi_{B'B}"'] \arrow[d, "1\otimes\lambda_{BA}"'] & \Phi(B',A) \arrow[d, "\lambda_{B'A}"] \\
\mathcal{B}(B',B)\otimes\Psi(B,A) \arrow[r, "y_{B'B}"'] & \Psi(B',A)
\end{tikzcd} .$$

Le composé de $\Phi:\mathcal{A}\dashrightarrow\mathcal{B}$ avec $\Psi:\mathcal{B}\dashrightarrow\mathcal{C}$ est donné par le conoyau suivant

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{B,B'\in\mathrm{Ob}\mathcal{B}}\Psi(C,B)\otimes\mathcal{B}(B,B')\otimes\Phi(B',A) \arrow[d, shift right, "\partial_0"'] \arrow[d, shift left, "\partial_1"] \\
\coprod_{B\in\mathrm{Ob}\mathcal{B}}\Psi(C,B)\otimes\Phi(B,A) \arrow[d] \\
(\Psi\otimes\Phi)(C,A)
\end{tikzcd} , \tag{1}$$

où

$$\partial_0\cdot\mathrm{in}_{(B,B')} = \mathrm{in}_B\,(1\otimes\varphi_{BB'}) \quad ,$$
$$\partial_1\cdot\mathrm{in}_{(B,B')} = \mathrm{in}_{B'}(y_{BB'}\otimes 1) \ .$$

7) <u>La bicatégorie $\mathbb{D}$ist(E), où E est une catégorie à produits fibrés et limites inductives finies commutant aux produits fibrés</u>.

Ses objets sont les catégories internes à $\underline{E}$.

Une flèche de $D=(D_0,D_1,\partial_0^D,\partial_1^D,\mu^D,n^D)$ vers $C=(C_0,C_1,\partial_0^C,\partial_1^C,\mu^C,n^C)$, appelée un distributeur interne à $\underline{E}$, est un span de $\underline{E}$

$$\begin{tikzcd} & \Phi \arrow[dl, "\partial_0^\Phi"'] \arrow[dr, "\partial_1^\Phi"] & \\ C_0 & & D_0 \end{tikzcd}$$

et deux morphismes de $\underline{E}$

$$\mu_C^D : C_1 \underset{C_0}{\times} \Phi \longrightarrow \Phi \ , \quad \mu_D^\Phi : \Phi \underset{D_0}{\times} D_1 \longrightarrow \Phi \ ,$$

qui font commuter les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd} C_1 \underset{C_0}{\times} C_1 \underset{C_0}{\times} \Phi \arrow[r, "1 \underset{C_0}{\times} \mu_C^\Phi"'] \arrow[d, "\mu^C \underset{C_0}{\times} 1"'] & C_1 \underset{C_0}{\times} \Phi \arrow[d, "\mu_C^\Phi"] \\ C_1 \underset{C_0}{\times} \Phi \arrow[r, "\mu_C^\Phi"'] & \Phi \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_0 \underset{C_0}{\times} \Phi \arrow[r, "n^C \underset{C_0}{\times} 1"] \arrow[dr, "\wr"'] & C_1 \underset{C_0}{\times} \Phi \arrow[d, "\mu_C^\Phi"] \\ & \Phi \end{tikzcd}$$

et deux diagrammes analogues pour l'action μ_D^Φ,

$$\begin{tikzcd} C_1 \underset{C_0}{\times} \Phi \underset{D_0}{\times} D_1 \arrow[r, "\mu_C^\Phi \underset{D_0}{\times} 1"'] \arrow[d, "1 \underset{C_0}{\times} \mu_D^\Phi"'] & \Phi \underset{D_0}{\times} D \arrow[d, "\mu_D^\Phi"] \\ C_1 \underset{C_0}{\times} \Phi \arrow[r, "\mu_C^\Phi"'] & \Phi \end{tikzcd} .$$

On écrit alors

$$\Phi = (\Phi, \partial_0^\Phi, \partial_1^\Phi, \mu_C^\Phi, \mu_D^\Phi) : D \dashrightarrow C.$$

Une 2-cellule de Φ vers

$$\Psi = (\Psi, \partial_0^\Psi, \partial_1^\Psi, \mu_C^\Psi, \mu_D^\Psi) : D \dashrightarrow C$$

est un morphisme $\lambda : \Phi \to \Psi$ de $\underline{E}$ tel que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \Phi \arrow[dl, "\partial_0^\Phi"'] \arrow[dr, "\partial_1^\Phi"] \arrow[dd, "\lambda"] & \\ C_0 & & D_0 \\ & \Psi \arrow[ul, "\partial_0^\Psi"] \arrow[ur, "\partial_1^\Psi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_1 \times_{C_0} \Phi \arrow[r, "\mu_C^\Phi"] \arrow[d, "1 \times_{C_0} \lambda"'] & \Phi \arrow[d, "\lambda"] \\ C_1 \times_{C_0} \Psi \arrow[r, "\mu_C^\Psi"] & \Psi \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Phi \times_{D_0} D_1 \arrow[r, "\mu_D^\Phi"] \arrow[d, "\lambda \times_{D_0} 1"'] & \Phi \arrow[d, "\lambda"] \\ \Psi \times_{D_0} D_1 \arrow[r, "\mu_D^\Phi"'] & \Psi \end{tikzcd} .$$

La composition du distributeur

$$\Psi = (\Psi, \partial_0^\Psi, \partial_1^\Psi, \mu_B^\Psi, \mu_C^\Psi) : C \dashrightarrow B$$

avec le distributeur

$$\Phi = (\Phi, \partial_0^\Phi, \partial_1^\Phi, \mu_D^\Phi, \mu_C^\Phi) : D \dashrightarrow C$$

est définie par le conoyau

$$\Phi \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} \Psi \overset{\mu_C^\Psi \times_{C_0} 1}{\underset{1 \times_{C_0} \mu_C^\Phi}{\rightrightarrows}} \Phi \times_{C_0} \Psi \longrightarrow \Psi \otimes \Phi \quad . \tag{2}$$

CHAPITRE I

OBJETS À LIMITES DANS LES BICATÉGORIES

On introduit la notion de limite sur un objet d'une bicatégorie par rapport aux tenseurs et aux cotenseurs et on examine les relations existant entre ces deux notions et d'autres notions de limite.

§1. Bicatégories à tenseurs

Définition. La bicatégorie $\mathbb{B}$ est à tenseurs si pour chaque petite catégorie $\mathbb{I}$ et pour chaque objet X de $\mathbb{B}$, l'homomorphisme $A \longmapsto \mathbb{C}at(\mathbb{I},(X,A))$ est représentable, i.e.

$$\mathbb{C}at(\mathbb{I},(X,A)) \simeq \mathbb{B}(\mathbb{I}\boxtimes X, A).$$

Cela équivaut à donner, pour tout objet X de $\mathbb{B}$ et pour toute petite catégorie $\mathbb{I}$, un système $\{\partial_i, \partial_f\}_{i\in Ob\mathbb{I}, f\in Fl\mathbb{I}}$ constitué de flèches de $\mathbb{B}$

$$\partial_i : X \longrightarrow \mathbb{I}\boxtimes X \ , \ i\in Ob\mathbb{I} \ ,$$

et de 2-cellules de $\mathbb{B}$

$$\partial_f : \partial_i \longrightarrow \partial_j : X \longrightarrow \mathbb{I}\boxtimes X \ , \ f: i \longrightarrow j\in Fl\mathbb{I},$$

vérifiant les équations $\partial_f \cdot \partial_g = \partial_{fg}$, $\forall (f,g)\in \mathbb{I}^*$ (où $\mathbb{I}^*$ désigne l'ensemble des couples de flèches composables de $\mathbb{I}$) et ayant la propriété universelle suivante:

tout système

$$\left\{q_i : X \longrightarrow A \ , \ q_f : q_i \longrightarrow q_j : X \longrightarrow A\right\}_{i\in Ob\mathbb{I}, f\in Fl\mathbb{I}}$$

avec $q_f \cdot q_g = q_{fg}$, $\forall (f,g)\in \mathbb{I}^*$, induit une seule flèche $q : \mathbb{I}\boxtimes X \longrightarrow A$

telle que

$$\begin{cases} q\cdot\partial_i = q_i, & \forall i\in \mathrm{Ob}\mathbb{I}, \\ q\cdot\partial_f = q_f, & \forall f\in \mathrm{Fl}\mathbb{I}, \end{cases}$$

et toute famille de 2-cellules

$$\left\{\mu_i : q_i \longrightarrow \bar{q}_i : X \longrightarrow A\right\}_{i\in \mathrm{Ob}\mathbb{I}}$$

(où $\{\bar{q}_i,\bar{q}_f\}$ est un autre système avec $\bar{q}_f\cdot\bar{q}_g=\bar{q}_{fg}$, etc...) telle que

$$\bar{q}_f \circ \mu_{\partial_0 f} = \mu_{\partial_1 f}\circ q_f \ , \ \forall f\in \mathrm{Fl}\mathbb{I},$$

induit une seule 2-cellule $\mu : q \longrightarrow \bar{q} : \mathbb{I}\boxtimes X \longrightarrow A$ (où $\bar{q}$ est induite par $\{\bar{q}_i,\bar{q}_f\}$) qui vérifie l'équation $\mu\cdot\partial_i = \mu_i$, $\forall i\in\mathrm{Ob}\mathbb{I}$.

<u>Remarque</u>. $\mathbb{I}\boxtimes X$ n'est rien d'autre que la cofin cartésienne du foncteur constant $\ulcorner X\urcorner : \mathbb{I}\to\mathbb{B}$, $\ulcorner X\urcorner(i)=X$ (v. [8]).

<u>Exemples</u>. 1°. $\mathbb{B}=\mathbb{O}\mathrm{rd}$, la 2-catégorie des ensembles ordonnés; alors $\mathbb{I}\boxtimes X$ est le produit dans $\mathbb{O}\mathrm{rd}$ de X avec l'ensemble ordonné associé à $\mathbb{I}$.

2°. $\mathbb{B}=\mathbb{C}\mathrm{at}$; alors $\mathbb{I}\boxtimes X$ est tout simplement le produit des catégories $\mathbb{I}$ et X. Le système $\{\partial_i,\partial_f\}$ est défini par

$$\begin{cases} \partial_i(x)=(i,x) \ , \ \forall x\in X \ , \ \forall i\in\mathbb{I}, \\ (\partial_f)_x=(f,x) \ , \forall x\in \mathrm{Ob}X \ , \ \forall f\in\mathrm{Fl}\mathbb{I} \ . \end{cases}$$

3°. $\mathbb{B}=\mathcal{U}\text{-}\mathbb{C}\mathrm{at}$, la 2-catégorie des $\mathcal{U}$-catégories, $\mathcal{U}$ étant bien complète à droite [5]. Dans ce cas le tenseur $\mathbb{I}\boxtimes X$ sera la $\mathcal{U}$-catégorie qui a comme objets les couples (i,x) , $x\in\mathrm{Ob}X$, $i\in\mathrm{Ob}\mathbb{I}$. L'objet des morphismes $(\mathbb{I}\boxtimes X)((i,x),(j,y))$ est donné par la somme suivante

$$\coprod_{f\in\mathbb{I}(i,j)} X(x,y)_f \quad , \quad X(x,y)_f=X(x,y) \ , \ \forall f\in\mathbb{I}(i,j).$$

Il est facile de voir que $\mathbb{I}\boxtimes X$ ainsi défini est une $\mathcal{U}$-catégorie.

Les $\mathcal{U}$-foncteurs $\partial_i : X \longrightarrow \mathbb{I} \boxtimes X$ sont définis par:

$$\partial_i(x) = (i,x) \ ,$$

$$(\partial_i)_{xy} : X(x,y) = X(x,y)_{1_i} \xrightarrow[\mathrm{in}_{1_i}]{} \coprod_{f \in \mathbb{I}(i,j)} X(x,y)_f \ ,$$

où in_{1_i} désigne l'injection canonique d'indice 1_i dans la somme.

Les transformations $\mathcal{U}$-naturelles $\partial_f : \partial_i \to \partial_j$ ont comme composantes

$$(\partial_f)_x : I \longrightarrow (\mathbb{I} \boxtimes X)((i,x),(i,x))$$

les morphismes

$$I \xrightarrow[x]{} X(x,x) \xrightarrow[\mathrm{in}_f]{} \coprod_{f \in \mathbb{I}(i,j)} X(x,x)_f \ .$$

Le cas $\mathcal{U} = \mathbb{C}\mathrm{at}$ est d'un intérêt particulier.

4°. $\mathbb{B} = \mathbb{C}\mathrm{at}(\underline{E})$, la 2-catégorie des catégories internes à $\underline{E}$, où $\underline{E}$ est une catégorie cartésienne à sommes universelles.

Soit $C = (C_o, C_1, \partial_o^C, \partial_1^C, \mu^C, \eta^C)$ une catégorie interne à $\underline{E}$; alors la catégorie interne $\mathbb{I} \boxtimes C$ est définie par

1) $(\mathbb{I} \boxtimes C)_o = \coprod_{i \in \mathrm{Ob}\mathbb{I}} C_{oi} \quad , \quad C_{oi} = C_o \quad , \ \forall i \in \mathrm{Ob}\mathbb{I} \ .$

2) $(\mathbb{I} \boxtimes C)_1 = \coprod_{f \in \mathrm{F1}\mathbb{I}} C_{1f} \quad , \quad C_{1f} = C_1 \quad , \ \forall f \in \mathrm{F1}\mathbb{I} \ .$

3) $\partial_k^{\mathbb{I} \boxtimes C} : (\mathbb{I} \boxtimes C)_1 \longrightarrow (\mathbb{I} \boxtimes C)_o$, où

$$\partial_K^{\mathbb{I} \boxtimes C} \cdot \mathrm{in}_f = \mathrm{in}_{\partial_K f} \cdot \partial_K^C \quad , \ K = 0,1 \ .$$

4)
$$\begin{tikzcd}
\mu^{\mathbb{I} \boxtimes C} : (\mathbb{I} \boxtimes C)_1 \underset{(\mathbb{I} \boxtimes C)_o}{\times} (\mathbb{I} \boxtimes C)_1 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (\mathbb{I} \boxtimes C)_1 \arrow[d, equal] \\
\coprod_{(f,g) \in \mathbb{I}^*} C_{1f} \underset{C_o}{\times} C_{1g} & \coprod_{f \in \mathrm{F1}\mathbb{I}} C_{1f} \ ,
\end{tikzcd}$$

où

$$\mu^{\mathbb{I}\boxtimes C}\cdot in_{(f,g)}=in_{fg}\cdot\mu^{C}\ .$$

5) $\eta^{\mathbb{I}\boxtimes C}:(\mathbb{I}\boxtimes C)_0\longrightarrow(\mathbb{I}\boxtimes C)_1$, où

$$\eta^{\mathbb{I}\boxtimes C}\cdot in_i=in_{1_i}\cdot\eta^{C}\ .$$

Les foncteurs internes $\partial_i:C\longrightarrow(\mathbb{I}\boxtimes C)$ sont définis par

$$(\partial_i)_0=in_i:C_0\longrightarrow(\mathbb{I}\boxtimes C)_0\ ,$$

$$(\partial_i)_1=in_{1_i}:C_1\longrightarrow(\mathbb{I}\boxtimes C)_1$$

et finalement les transformations internes $\partial_f:\partial_i\longrightarrow\partial_j$ sont définies par

$$\partial_f=in_f:C_0\longrightarrow(\mathbb{I}\boxtimes C)_1\ .$$

5°. $\mathbb{B}=\mathbb{F}ib(\underline{B})$, la 2-catégorie des fibrations au-dessus de $\underline{B}$.
Soit $p:\underline{E}\longrightarrow\underline{B}$ une fibration et considérons le composé (v.ch.0)

$$\underline{B}^{op}\xrightarrow[\mathcal{Z}p]{}\mathbb{C}at\xrightarrow[\mathbb{I}\times -]{}\mathbb{C}at\ ;$$

alors $\mathcal{Z}^{-1}((\mathbb{I}\times -)\cdot\mathcal{Z}p)$ joue le rôle de $\mathbb{I}\boxtimes p$ dans $\mathbb{F}ib(\underline{B})$. Elle a comme objets les couples (i,x), $i\in Ob\mathbb{I}$, $x\in Ob\underline{E}$; un morphisme de (i,x) vers (j,y) sera un couple (k,z), où $k:p(x)\longrightarrow p(y)$ et où z est un morphisme de (i,x) vers $(j,k_p^*(y))$, si k_p^* désigne le foncteur image inverse au-dessus de k.
Autrement dit la fibre de $\mathbb{I}\boxtimes p$ au-dessus de $B\in Ob\underline{B}$ est $\mathbb{I}\times p(B)$, tandis que le foncteur image inverse au-dessus de $k:B\longrightarrow B'$ est $\mathbb{I}\times k_p^*$.

6°. $\mathbb{B}=\mathbb{F}ib\mathbb{NS}(\underline{B})$, la 2-catégorie des fibrations normales scindées au-dessus de $\underline{B}$, dont les flèches sont les morphismes stricts.
On a une construction analogue à celle de 5.

7°. $\mathbb{B}=\mathbb{D}ist$, la bicatégorie des distributeurs; alors $\mathbb{I}\boxtimes X=\mathbb{I}\times X$.
En effet soient

$$\left\{\partial_i:X\longrightarrow\mathbb{I}\times X\ ,\quad \partial_f:\partial_i\longrightarrow\partial_j:X\longrightarrow\mathbb{I}\times X\right\}$$

le système universel de l'exemple 2 et

$$\left\{ \Phi_{\partial_i} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{I}\times X}(-,\partial_i -),\ \Phi_{\partial_f} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{I}\times X}(-,\partial_f -) \right\}$$

les distributeurs et les transformations entre distributeurs associés aux ∂_i et ∂_f respectivement.

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
& \mathbb{I}\times X & \\
& X \arrow[u, dashed, bend left=70, "\Phi_{\partial_j}"] \arrow[u, dashed, bend left=20, "\Phi_{\partial_i}"'] \arrow[u, bend right=20, "\partial_i"] \arrow[u, bend right=70, "\partial_j"'] \arrow[u, phantom, shift right=14, "\xrightarrow{\partial_f}"] \arrow[u, phantom, shift left=14, "\xleftarrow{\Phi_{\partial_f}}"] &
\end{tikzcd}$$

Le système $\left\{\Phi_{\partial_i}, \Phi_{\partial_f}\right\}$ répond à la question, car, si $\{\Psi_i, \Psi_f\}$ est un système avec $\Psi_f \cdot \Psi_g = \Psi_{fg}$, $\forall (f,g) \in \mathbb{I}^*$,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dashed, bend left, "\Psi_i"{name=U}] \arrow[rr, dashed, bend right, "\Psi_j"'{name=D}] & & A \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\Psi_f"]
\end{tikzcd} ,$$

alors le distributeur $\Psi : \mathbb{I}\times X \dashrightarrow A$ défini par

$$\begin{cases} \Psi(a,i,x) = \Psi_i(a,x) , & a \in \mathrm{Ob}A ,\ i \in \mathrm{Ob}\mathbb{I} ,\ x \in \mathrm{Ob}X , \\ \Psi(m,i,f) = \Psi_i(m,f) , & m: a' \longrightarrow a \in \mathrm{Fl}A ,\ f: x \longrightarrow x' \in \mathrm{Fl}X , \\ \Psi(1,g,1) = \Psi_g & ,\ g: i \longrightarrow i' \in \mathrm{Fl}\mathbb{I} , \end{cases}$$

est la solution unique cherchée.

8°. $\mathbb{B} = \mathcal{U}$-$\mathbb{D}$ist, la bicatégorie des distributeurs relatifs à $\mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est une catégorie multiplicative, symétrique, bien complète à droite. Il y a une construction analogue à celle de l'exemple précédent.

9°. $\mathbb{B} = \mathbb{D}$ist($\underline{E}$), la bicatégorie des distributeurs internes à $\underline{E}$, où $\underline{E}$ est cartésienne à limites inductives universelles. Soient $C = (C_0, C_1, \partial_0^C, \partial_1^C, \mu^C, \eta^C)$ une catégorie interne à $\underline{E}$ et $\mathbb{I}\otimes C$ son tenseur avec $\mathbb{I}$ (exemple 4); alors le span

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \Phi_i = \coprod_{\partial_1 f = i} C_{1f} \arrow[dl, "\partial_1^{\Phi_i}"'] \arrow[dr, "\partial_0^{\Phi_i}"] & \\ C_0 & & (\mathbb{I} \boxtimes C)_0 = \coprod_{j \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I}} C_{0j} \end{tikzcd} ,$$

où

$$\begin{cases} \partial_1^{\Phi_i} \cdot \mathrm{in}_f = \partial_1^C , \\ \partial_0^{\Phi_i} \cdot \mathrm{in}_f = \mathrm{in}_{\partial_0 f} \cdot \partial_0^C , \end{cases}$$

muni des deux morphismes

$$\mu_C^{\Phi_i} : \Phi_i \underset{C_0}{\times} C_1 \longrightarrow \Phi_i \ , \quad \mu_{\mathbb{I}\boxtimes C}^{\Phi_i} : (\mathbb{I}\boxtimes C)_1 \underset{(\mathbb{I}\boxtimes C)_0}{\times} \Phi_i \longrightarrow \Phi_i \ ,$$

définis par

$$\mu_C^{\Phi_i} \cdot \mathrm{in}_f = \mathrm{in}_f \cdot \mu^C ,$$

$$\mu_{\mathbb{I}\boxtimes C}^{\Phi_i} \cdot \mathrm{in}_f = \mathrm{in}_{fg} \cdot \mu^C ,$$

constitue un distributeur interne

$$\Phi_i = \left(\Phi_i, \partial_0^{\Phi_i}, \partial_1^{\Phi_i}, \mu_C^{\Phi_i}, \mu_{\mathbb{I}\boxtimes C}^{\Phi_i} \right)$$

de C vers $\mathbb{I}\boxtimes C$.

Pour tout $f : i \longrightarrow j$ dans $\mathbb{I}$, on a le morphisme de distributeurs

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{I}\boxtimes C)_0 & \\ \Phi_i \arrow[ur, "\partial_0^{\Phi_i}"] \arrow[rr, "\Phi_f"] \arrow[dr, "\partial_1^{\Phi_i}"'] & & \Phi_j \arrow[ul, "\partial_0^{\Phi_j}"'] \arrow[dl, "\partial_1^{\Phi_j}"] \\ & C_0 & \end{tikzcd}$$

défini par la formule

$$\Phi_f \cdot \mathrm{in}_g = \mathrm{in}_{fg} \ , \ \forall g \in \mathrm{Fl}\,\mathbb{I} .$$

Alors le système cherché est $\{\Phi_i, \Phi_f\}$.

En effet, soient

$$\Psi_i = (\Psi_i, \partial_0^{\Psi_i}, \partial_1^{\Psi_i}, \mu_C^{\Psi_i}, \mu_D^{\Psi_i}) : C \dashrightarrow D$$

une famille de distributeurs internes à $\underline{E}$ et

$$\left\{\Psi_f : \Psi_i \longrightarrow \Psi_j : C \dashrightarrow D\right\}_{f\in \mathrm{Fl}\,\mathbb{I}}$$

une famille de morphismes de distributeurs avec $\Psi_g\cdot\Psi_f = \Psi_{fg}$.

Le distributeur

$$\Psi = (\Psi, \partial_0^{\Psi}, \partial_1^{\Psi}, \mu_D^{\Psi}, \mu_{\mathbb{I}\boxtimes C}^{\Psi}) : \mathbb{I}\boxtimes C \dashrightarrow D$$

défini par les équations suivantes

1) $\Psi = \coprod_{i\in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I}} \Psi_i$,

2) $\partial_1^{\Psi}\cdot in_i = in_i\cdot \partial_1^{\Psi_i}$,

3) $\partial_0^{\Psi}\cdot in_i = \partial_0^{\Psi_i}$,

4) $\mu_{\mathbb{I}\boxtimes C}^{\Psi}\cdot in_f = in_{\partial_0 f}\cdot \mu_C^{\Psi_{\partial_0 f}}$,

5) $\mu_D^{\Psi}\cdot in_i = in_i\cdot \mu_D^{\Psi_i}$,

est tel que $\Psi\otimes\Phi_i \simeq \Psi_i$ ce qui résulte du diagramme conoyau contractible suivant

$$\begin{tikzcd}
\Psi \underset{(\mathbb{I}\boxtimes C)_0}{\times} (\mathbb{I}\boxtimes C)_1 \underset{(\mathbb{I}\boxtimes C)_0}{\times} \Phi_i \arrow[r, shift left, "\mu^{\Psi}_{\mathbb{I}\boxtimes C} \underset{(\mathbb{I}\boxtimes C)_0}{\times} 1"] \arrow[r, shift right, "1 \underset{(\mathbb{I}\boxtimes C)_0}{\times} \mu^{\Phi_i}_{\mathbb{I}\boxtimes C}"'] \arrow[d, "\wr"'] & \Psi \underset{(\mathbb{I}\boxtimes C)_0}{\times} \Phi_i \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \Psi\otimes\Phi_i \\
\coprod\limits_{\substack{(f,g)\in\mathbb{I}^* \\ \partial_1 f = i}} \Psi_{\partial_0 g} \underset{C_0}{\times} C_{1g} \underset{C_0}{\times} C_{1f} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \coprod\limits_{\partial_1 f = i} \Psi_{\partial_0 f} \underset{C_0}{\times} C_{1f} \arrow[r] \arrow[l, bend right, "b"'] & \Psi_i \arrow[l, bend right, "a"']
\end{tikzcd} \qquad (\mathrm{I})$$

où a et $b\cdot in_f$ sont les composés

$$\Psi_i \xrightarrow{\ \sim\ } \Psi_i \underset{C_0}{\times} C_0 \xrightarrow{1 \underset{C_0}{\times} n^C} \Psi_i \underset{C_0}{\times} C_1 \xrightarrow{in_{1_i}} \coprod_{\partial_1 f = i} \Psi_{\partial_0 f} \underset{C_0}{\times} C_{1f}$$

et

$$\Psi_{\partial_0 f} \underset{C_0}{\times} C_{1f} \xrightarrow{\ \sim\ } \Psi_{\partial_0 f} \underset{C_0}{\times} C_0 \underset{C_0}{\times} C_{1f} \xrightarrow{1 \underset{C_0}{\times} n^C \underset{C_0}{\times} 1} \Psi_{\partial_0 f} \underset{C_0}{\times} C_1 \underset{C_0}{\times} C_{1f} \xrightarrow{in_{(f,1_i)}} \coprod_{\partial_1 f = i} \Psi_{\partial_0 g} \underset{C_0}{\times} C_{1g} \underset{C_0}{\times} C_{1f}$$

respectivement.

On montre de même que $\Psi \otimes \Phi_f \simeq \Psi_f$.

<u>Unicité</u>. Soit

$$\overline{\Psi} = (\overline{\Psi}, \partial_0^{\overline{\Psi}}, \partial_1^{\overline{\Psi}}, \mu_{\mathbb{I} \boxtimes C}^{\overline{\Psi}}, \mu_D^{\overline{\Psi}}) : \mathbb{I} \boxtimes C \dashrightarrow D$$

un distributeur tel que

$$\begin{cases} \overline{\Psi} \otimes \Phi_i \simeq \Psi_i \ , \ \forall i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I} \\ \overline{\Psi} \otimes \Phi_f \simeq \Psi_f \ , \ \forall f \in \mathrm{Fl}\,\mathbb{I}. \end{cases}$$

En utilisant le fait que les sommes dans $\underline{E}$ sont universelles, on peut écrire le morphisme

$$\partial_1^{\overline{\Psi}} : \overline{\Psi} \longrightarrow \coprod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I}} C_{oi}$$

sous forme d'une somme

$$\partial_1^{\overline{\Psi}} = \coprod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I}} \partial_1^{\overline{\Psi}_i} : \coprod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I}} \overline{\Psi}_i \longrightarrow \coprod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I}} C_{oi} .$$

On définit

$$\partial_0^{\overline{\Psi}_i} = \partial_0^{\overline{\Psi}} \cdot in_i \ , \forall i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I} .$$

Pour munir le span

$$\begin{tikzcd} & \overline{\Psi}_i \arrow[dl, "\partial_0^{\overline{\Psi}_i}"'] \arrow[dr, "\partial_1^{\overline{\Psi}_i}"] & \\ D_o & & C_o \end{tikzcd}$$

d'une structure de distributeur de C vers D, on procède de la façon suivante:

En prenant l'image inverse de l'injection canonique

$$in_j : C_{oj} \longrightarrow \coprod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I}} C_{oi}$$

le long des deux morphismes égaux suivants

$$\begin{tikzcd} \coprod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I}} \overline{\Psi}_i \times_{D_o} D_1 \arrow[r, "\mu_D^{\overline{\Psi}}"'] \arrow[d, "\coprod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I}} \bar{q}_i"'] & \coprod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I}} \overline{\Psi}_i \arrow[d, "\partial_1^{\overline{\Psi}}"] \\ \coprod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I}} \overline{\Psi}_i \arrow[r, "\partial_1^{\overline{\Psi}}"'] & \coprod_{i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I}} C_{oi} \end{tikzcd}$$

où $\bar{q}_i$ figure dans le produit fibré

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \overline{\Psi}_i \times_{D_0} D_1 \arrow[dl, "\bar{q}_i"'] \arrow[dr] & \\ \overline{\Psi}_i \arrow[dr, "\partial_0^{\overline{\Psi}_i}"'] & & D_1 \arrow[dl, "\partial_1^D"] \\ & D_0 & \end{tikzcd},$$

on trouve que

$$(\mu_D^{\overline{\Psi}})^*(in_j)=in_j : \overline{\Psi}_j \times_{D_0} D_1 \longrightarrow \coprod_{i\in Ob\mathbb{I}} \overline{\Psi}_i \times_{D_0} D_1 .$$

Donc

$$\mu_D^{\overline{\Psi}} = \coprod_{i\in Ob\mathbb{I}} \mu_D^{\overline{\Psi}_i} ,$$

avec

$$\mu_D^{\overline{\Psi}_i} : \overline{\Psi}_i \times_{D_0} D_1 \longrightarrow \overline{\Psi}_i .$$

De même on a

$$\mu_{\mathbb{I}\boxtimes C}^{\overline{\Psi}} = \coprod_{i\in Ob\mathbb{I}} \mu^{(i)} ,$$

avec

$$\mu^{(i)} : \coprod_{\partial_1 f=i} C_{1f} \times_{C_0} \overline{\Psi}_{\partial_0 f} \longrightarrow \overline{\Psi}_i .$$

On pose alors

$$\mu_{\mathbb{I}\boxtimes C}^{\overline{\Psi}_i} = \mu^{(i)} \cdot in_{1_i} : C_1 \times_{C_0} \overline{\Psi}_i \longrightarrow \overline{\Psi}_i .$$

Les $(\overline{\Psi}_i, \partial_0^{\overline{\Psi}_i}, \partial_1^{\overline{\Psi}_i}, \mu_{\mathbb{I}\boxtimes C}^{\overline{\Psi}_i}, \mu_D^{\overline{\Psi}_i})$ s'organisent en un distributeur de C vers D, pour chaque $i\in Ob\mathbb{I}$.

Un diagramme conoyau contractible semblable à (I) nous montre que $\overline{\Psi}\otimes\Phi_i \simeq \overline{\Psi}_i$, d'où $\overline{\Psi}_i \simeq \Psi_i$, $i\in Ob\mathbb{I}$. De même $\overline{\Psi}\otimes\Phi_f \simeq \overline{\Psi}_f$ entraîne $\overline{\Psi}_f \simeq \Psi_f$.

La démonstration est donc terminée.

10°. $\mathbb{B}=\mathbb{M}on$, la 2-catégorie des monoïdes, dont les flèches sont les homomorphismes de monoïdes. Une 2-cellule $h:f\to g:M\to N$ dans $\mathbb{M}on$ sera un élément $h\in N$, tel que

$$h\cdot f(m)=g(m)\cdot h \quad , \forall m\in M.$$

$\mathbb{M}on$ ainsi construite est la sous-2-catégorie pleine de $\mathbb{C}at$, ayant comme objets les catégories à un seul objet.

Maintenant si M est un monoïde et $\mathbb{I}$ une petite catégorie, alors $\mathbb{I}\boxtimes M$ est le monoïde projection de la catégorie $\mathbb{I}\times M$, défini de la façon suivante:

On considère la somme ensembliste

$$P=\Big(\sum_{i\in \mathrm{Ob}\mathbb{I}} M^{(i)}\Big)+\big\{h_f/f\in \mathrm{F1}\mathbb{I}\big\},$$

où $M^{(i)}\simeq M$, $\forall i\in \mathrm{Ob}\mathbb{I}$, les h_f étant des symboles en bijection avec les morphismes de $\mathbb{I}$, et on construit le monoïde libre engendré par P; notons-le $L(P)$.

Soit "$\sim$" la relation d'équivalence engendrée par a)-d) ci-dessous:

a) $x\, 1^{(i)}\, y \sim x\, y \sim x\, h_{1_i}\, y$, $\forall i\in \mathrm{Ob}\mathbb{I}$,

b) $x\, m^{(i)}\, n^{(i)}\, y \sim x\, (mn)^{(i)}\, y$, $\forall n^{(i)}, m^{(i)}\in M^{(i)}, \forall i\in \mathrm{Ob}\mathbb{I}$,

c) $x\, h_f\, m^{(\partial_0 f)}\, y \sim x\, m^{(\partial_1 f)}\, h_f\, y$, $\forall f\in \mathrm{F1}\mathbb{I}$,

d) $x\, h_f\, h_g\, y \sim x\, h_{fg}\, y$, $\forall (f,g)\in \mathbb{I}^*$,

et

$$\mathbb{I}\boxtimes M={}^{L(P)}/_{\sim}$$

le quotient de $L(P)$ par $\sim$; alors $\mathbb{I}\boxtimes M$ est un monoïde avec multiplication donnée par $[x][y]=[xy]$ (où $[x]$ désigne la classe d'équivalence mod$\sim$ de x) et on a des homomorphismes $\partial_i: M\longrightarrow \mathbb{I}\boxtimes M$ et des 2-cellules $\partial_f:\partial_i\longrightarrow \partial_j$ définis par:

$$\partial_i(m)=[m^{(i)}],\ \forall m\in M,$$
$$\partial_f=[h_f]\qquad ,\ \forall f\in \mathrm{F1}\mathbb{I}.$$

Pour montrer l'universalité du système $\{\partial_i,\partial_f\}$, soit $\{q_i,q_f\}$ un système tel que $q_g\cdot q_f=q_{gf}$, $\forall (g,f)\in \mathbb{I}^*$;

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, bend left, "q_i"] \arrow[rr, bend right, "q_j"'] \arrow[rr, phantom, "q_f\Downarrow"] \arrow[dr, "\partial_i"] \arrow[dr, bend right=50, "\partial_j"'] \arrow[dr, phantom, bend right=25, "\partial_f"] & & N \\
& \mathbb{I}\boxtimes M \arrow[ur, dashed, "k"'] &
\end{tikzcd}$$

alors l'homomorphisme $k:\mathbb{I}\boxtimes M \to N$ défini par

$$k([\ldots m^{(i)} \ldots h_f \ldots]) = \ldots q_i(m) \ldots q_f \ldots$$

est la flèche répondant à la question.

Remarques. a) Si M est un groupe, c'est-à-dire une catégorie à un seul objet dont tout morphisme est inversible, alors la construction précédente de $\mathbb{I}\boxtimes M$ ne nous donne pas en général un groupe. La bonne notion de $\mathbb{I}\boxtimes M$ dans $\mathbb{G}r$ (= la 2-catégorie des groupes) est le groupe projection du monoïde $\mathbb{I}\boxtimes M$, qui s'obtient en ajoutant à P l'ensemble

$$Q = \{h'_f / \ f \in F1\mathbb{I}\}$$

dont les éléments se trouvent en bijection avec les morphismes de $\mathbb{I}$, et en exigeant dans L(P+Q) que

$$d') \ x\, h'_f\, h'_g\, y \sim x\, h'_{gf}\, y \ , \ \forall (g,f) \in \mathbb{I}^*,$$

$$e) \ x\, h'_f\, h_f\, y \sim x\, y \sim x\, h_g\, h'_g\, y \ , \ \forall f,g \in F1\mathbb{I}.$$

b) Si $\mathbb{I}$ est aussi un monoïde (resp. groupe), alors $\mathbb{I}\boxtimes M$ est isomorphe au produit ordinaire des monoïdes (resp. groupes). Cela veut dire que le foncteur qui à tout monoïde X associe l'ensemble C(M,N;X) des couples (f,g) d'homomorphismes $f:M \to X$, $g:N \to X$ tels que

$$f(m)\cdot g(n) = g(n)\cdot f(m) \ , \forall m \in M \ , \ \forall n \in N,$$

est représentable, le couple

$$i_M : M \longrightarrow M\times N \ , \ i_N : N \longrightarrow M\times N$$

$$i_M(m) = (m,1) \ , \ \forall m \in M,$$
$$i_N(n) = (1,n) \ , \ \forall n \in N,$$

étant le représentant.

c) Si $\mathbb{I}$ est discrète, alors $\mathbb{I}\boxtimes M$ n'est rien d'autre que le produit libre de $\mathbb{I}$ copies de M.

La 2-catégorie $\mathbb{M}$on (resp. $\mathbb{G}$r) n'est pas représentable. Le monoïde (resp. groupe) multiplicatif de $^{Z}/2Z$ nous sert de contre-exemple. En effet on a les 2-cellules suivantes dans $\mathbb{M}$on (resp. $\mathbb{G}$r)

$$0,1: {}^{Z}/2Z \xrightarrow[\mathrm{Id}]{} {}^{Z}/2Z\ ,$$

donc s'il existait un cotenseur $(^{Z}/2Z)^{2}$, sa propriété universelle nous amènerait à la contradiction 0=1.

<u>Remarque</u>. $\mathbb{M}$on et $\mathbb{G}$r répondent à la question suivante de J.W.GRAY posée au séminaire EHRESMANN [17] :
"existe-t-il une 2-catégorie dans la nature qui n'est pas au moins faiblement représentable?".

§2. <u>Propriétés des tenseurs</u>

<u>Proposition 2.1</u>. Dans une bicatégorie $\mathbb{B}$ à tenseurs on a

a) $\mathbb{J}\boxtimes(\mathbb{I}\boxtimes X)\simeq(\mathbb{J}\times\mathbb{I})\boxtimes X$, $\mathbb{1}\boxtimes X\simeq X$,

b) $(\varinjlim_i \mathbb{I}_i)\boxtimes(\varinjlim_j X_j)\simeq \varinjlim_{i,j}(\mathbb{I}_i\boxtimes X_j)$.

<u>Preuve</u>. Montrons b :

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}((\varinjlim \mathbb{I}_i)\boxtimes(\varinjlim X_j),A) &\simeq \mathbb{C}\mathrm{at}(\varinjlim \mathbb{I}_i,\ \mathbb{B}(\varinjlim X_j,A)) \simeq\\
&\simeq \varprojlim \mathbb{C}\mathrm{at}(\mathbb{I}_i,\ \mathbb{B}(\varinjlim X_j,A)) \simeq\\
&\simeq \varprojlim(\mathbb{C}\mathrm{at}(\mathbb{I}_i,\varprojlim \mathbb{B}(X_j,A))) \simeq\\
&\simeq \varprojlim \mathbb{C}\mathrm{at}(\mathbb{I}_i,\ \mathbb{B}(X_j,A)) \simeq\\
&\simeq \varprojlim \mathbb{B}(\mathbb{I}_i\boxtimes X_j,A) \simeq\\
&\simeq \mathbb{B}(\varinjlim \mathbb{I}_i\boxtimes X_j,A)\ .\ \blacksquare
\end{aligned}$$

<u>Corollaire 2.2</u>. Si la bicatégorie $\mathbb{B}$ est coreprésentable (i.e. si le tenseur $2\boxtimes X$ existe pour tout $X\in\mathrm{Ob}\mathbb{B}$) et admet des Cat-limites inductives finies, alors elle admet tous les tenseurs $\mathbb{I}\boxtimes X$, pour $\mathbb{I}$ de présentation finie.

<u>Preuve</u>. On sait que toute catégorie $\mathbb{I}$ de présentation finie est écrite comme le but d'un conoyau de la forme

$$\coprod 2 \rightrightarrows \coprod 2 \longrightarrow \mathbb{I},$$

où les sommes sont finies.

Donc si on applique $\mathfrak{b}$, on obtient le conoyau

$$\coprod 2\boxtimes X \rightrightarrows \coprod 2\boxtimes X \longrightarrow \mathbb{I}\boxtimes X . \blacksquare$$

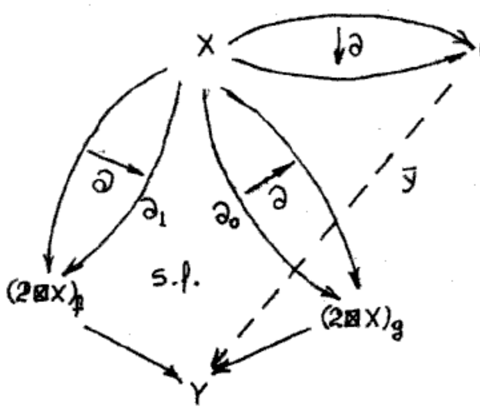
Pour $\mathbb{I}$ une catégorie petite quelconque, on a le théorème suivant:

<u>Théorème 2.3</u>. L'existence dans $\mathbb{B}$ des tenseurs $2\boxtimes X$ et des Cat-limites inductives petites entraîne l'existence des tenseurs $\mathbb{I}\boxtimes X$, où $\mathbb{I}$ petite.

<u>Preuve</u>. Soit X un objet de $\mathbb{B}$. À tout morphisme f de $\mathbb{I}$ non unité, on associe la 2-cellule

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\partial_0"] \arrow[r, bend right, "\partial_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\partial"] & 2\boxtimes X \end{tikzcd} .$$

Pour f, g composables, on a le diagramme commutatif suivant



où Y est la Cat-somme fibrée des flèches ∂_0, ∂_1 et où $\bar{y}$ est la seule flèche induite par la 2-cellule $m\cdot\partial \circ n\cdot\partial$.

On fait cette construction pour tout couple de morphismes composables (g,f) de $\mathbb{I}$ et puis on considère la Cat-limite inductive du cône extérieur.■

<u>Remarque</u>. Le théorème précédent nous montre en particulier que la coreprésentabilité de $\mathbb{B}$ et la présence de Cat-limites inductives finies dans $\mathbb{B}$ entraînent l'existence des tenseurs $\mathbb{I}\boxtimes X$, $\mathbb{I}$ finie, d'où une différence entre th.2.3 et cor.2.2.

La propriété universelle de $\mathbb{I}\boxtimes X$ fait de cette construction un homomorphisme de la bicatégorie $\mathbb{B}$ dans elle-même, $\mathbb{I}\boxtimes\_ : \mathbb{B}\to\mathbb{B}$.

<u>Proposition 2.4</u>. $\mathbb{I}\boxtimes\_ : \mathbb{B}\to\mathbb{B}$ détermine un 2-cotriple.

<u>Preuve</u>. La counité de ce cotriple est la codiagonale

$$\nabla_X : \mathbb{I}\boxtimes X \longrightarrow X,$$

définie par $\nabla_X\cdot\partial_i = 1_X$, $\forall i\in \mathrm{ob}\,\mathbb{I}$ et $\nabla_X\cdot\partial_f = 1_{1_X}$, $\forall f\in \mathrm{Fl}\,\mathbb{I}$.

La comultiplication

$$c_X : \mathbb{I}\boxtimes X \longrightarrow \mathbb{I}\boxtimes(\mathbb{I}\boxtimes X)\simeq(\mathbb{I}\times\mathbb{I})\boxtimes X$$

est donnée par $c_X\cdot\partial_i=\partial_{(i,i)}$, $c_X\cdot\partial_f=\partial_{(f,f)}$.■

De plus tout foncteur $F:\mathbb{J}\to\mathbb{I}$ induit une flèche (unique) $F\boxtimes X:\mathbb{J}\boxtimes X\longrightarrow\mathbb{I}\boxtimes X$, telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{J}\boxtimes X \arrow[rr, "F\boxtimes X"'] & & \mathbb{I}\boxtimes X \\
& X \arrow[ul, bend left=40, "\partial_j"] \arrow[ul, bend right=20, "\partial_{j'}"'] \arrow[ul, phantom, "\Rightarrow\partial_f"] \arrow[ur, bend left=20, "\partial_{Fj}"] \arrow[ur, bend right=40, "\partial_{Fj'}"'] \arrow[ur, phantom, "\Rightarrow\partial_{Ff}"] &
\end{tikzcd}$$

et toute transformation naturelle $\eta:F\to G:\mathbb{J}\to\mathbb{I}$ induit une (seule) 2-cellule

$$\eta\boxtimes X : F\boxtimes X \longrightarrow G\boxtimes X : \mathbb{J}\boxtimes X \longrightarrow \mathbb{I}\boxtimes X$$

telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{J}\boxtimes X \arrow[rr, bend left, "F\boxtimes X"] \arrow[rr, bend right, "G\boxtimes X"'] \arrow[rr, phantom, "\swarrow \eta\boxtimes X"] & & \mathbb{I}\boxtimes X \\
X \arrow[u, "\partial_j"] \arrow[urr, bend left, "\partial_{Fj}"] \arrow[urr, bend right, "\partial_{Gj}"'] \arrow[urr, phantom, "\searrow \partial\eta_j"] & &
\end{tikzcd}$$

En résumant :

<u>Proposition 2.5</u>. $\_\boxtimes\_ : \mathbb{C}at \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ est une biopération à gauche de $\mathbb{C}at$ (munie du produit de catégories) sur $\mathbb{B}$, c'est-à-dire est un bihomomorphisme de bicatégories vérifiant les conditions a de la prop.2.1.■

§3. <u>Limites sur un objet par rapport aux tenseurs</u>.

Soit $\mathbb{B}$ une bicatégorie à tenseurs.

<u>Définition</u>. On dit que l'objet A de $\mathbb{B}$ admet des <u>limites projectives</u> (resp. <u>inductives</u>) <u>par rapport aux tenseurs</u> ,en abrégé $\check{\varprojlim}$ (resp. $\check{\varinjlim}$), si pour chaque petite catégorie $\mathbb{I}$, pour chaque objet X de $\mathbb{B}$ et pour chaque flèche $f: \mathbb{I}\boxtimes X \longrightarrow A$, l'extension de Kan à droite (resp. à gauche)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I}\boxtimes X \arrow[r, "\nabla_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[dl, "R(f,\nabla_X)"] \arrow[dl, phantom, "\Leftarrow m"', pos=0.8] \\
A &
\end{tikzcd}
\qquad \left(\text{resp.} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{I}\boxtimes X \arrow[r, "\nabla_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[dl, "L(f,\nabla_X)"] \arrow[dl, phantom, "\Rightarrow n"', pos=0.8] \\
A &
\end{tikzcd} \right)$$

de f le long de la codiagonale ∇_X existe et est préservée par chaque flèche $g: Y \longrightarrow X$, c'est-à-dire

$$R(f,\nabla_X)\cdot g \simeq R(f\cdot(\mathbb{I}\boxtimes g),\nabla_Y) ,$$

$$L(f,\nabla_X)\cdot g \simeq L(f\cdot(\mathbb{I}\boxtimes g),\nabla_Y) .$$

<u>ies</u>. Les bicatégories $\mathbb{D}$ist, $\mathcal{U}$-$\mathbb{D}$ist, $\mathbb{D}$ist($\underline{E}$) étant exactes, tous leurs objets sont à $\check{\varprojlim}$ et à $\check{\varinjlim}$.

<u>Proposition 3.1</u>. L'objet A de $\mathbb{B}$ est à $\check{\varprojlim}$ (resp. $\check{\varinjlim}$) si, pour chaque objet X de $\mathbb{B}$, la catégorie $\mathbb{B}(X,A)$ est à limites projectives (resp. inductives) preservées par le foncteur $\mathbb{B}(g,A)$, $\forall g \in \mathrm{Fl}\,\mathbb{B}$.

<u>Preuve</u>. Résulte immediatement de la définition. ∎

<u>Proposition 3.2</u>. A est à $\check{\varprojlim}$ si et seulement si, pour tout foncteur $F:\mathbb{I}\longrightarrow\mathbb{J}$ et pour toute flèche $f:\mathbb{I}\boxtimes X\longrightarrow A$, l'extension de Kan à droite

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I}\boxtimes X \arrow[rr, "F\boxtimes X"] \arrow[d, "f"'] & & \mathbb{J}\boxtimes X \arrow[dll, "R(f{,}F\boxtimes X)"] \arrow[dll, phantom, shift right=4ex, "\Leftarrow"] \\
A & &
\end{tikzcd}$$

existe et est préservée par toute flèche $g:Y\longrightarrow X$.

<u>Preuve</u>. Résulte de la prop.3.1 et du théorème de Kan. ∎

<u>Définition</u>. On dit que la flèche $f:A\longrightarrow B$ <u>préserve</u> les $\check{\varprojlim}$ (resp. $\check{\varinjlim}$) si pour tout objet X de $\mathbb{B}$ le foncteur

$$\mathbb{B}(X,f):\ \mathbb{B}(X,A)\longrightarrow\mathbb{B}(X,A)$$

préserve les limites projectives (resp. inductives).

<u>Proposition3.3</u>. La situation d'adjonction $f\dashv g$ dans $\mathbb{B}$, entraîne que f préserve les $\check{\varinjlim}$ et g les $\check{\varprojlim}$.

<u>Preuve</u>. Résulte de la prop. 3.1 et du fait qu'un foncteur adjoint à gauche (resp. à droite) préserve les limites inductives (resp. projectives). ∎

§4. <u>Bicatégories à cotenseurs</u>

<u>Définition</u>. On dit que la bicatégorie $\mathbb{B}$ est à <u>cotenseurs</u> si, pour chaque objet X de $\mathbb{B}$ et pour chaque petite catégorie $\mathbb{I}$, l'homomorphisme

$$Y\longmapsto \mathbb{C}\mathrm{at}(\mathbb{I},\ (Y,X))$$

est représentable. On note $X^{\mathbb{I}}$ un représentant.

En termes élémentaires cela équivaut à la donnée d'un système

$$\{\partial_i : X^{\mathbb{I}} \longrightarrow X \ , \ \partial_f : \partial_i \longrightarrow \partial_j : X^{\mathbb{I}} \longrightarrow X\}_{i \in \mathrm{Ob}\mathbb{I}, f \in \mathrm{Fl}\mathbb{I}}$$

vérifiant les équations $\partial_f \cdot \partial_g = \partial_{fg}$, $\forall (f,g) \in \mathbb{I}^*$, et ayant la propriété universelle suivante:

Chaque système

$$\{q_i : A \longrightarrow X \ , q_f : q_i \longrightarrow q_j : A \longrightarrow X\}_{i \in \mathrm{Ob}\mathbb{I}, f \in \mathrm{Fl}\mathbb{I}}$$

avec $q_f \cdot q_g = q_{fg}$, $\forall (f,g) \in \mathbb{I}^*$, induit une seule flèche $q : A \longrightarrow X^{\mathbb{I}}$ telle que

$$\begin{cases} \partial_i \cdot q = q_i \ , & \forall i \in \mathrm{Ob}\mathbb{I} \\ \partial_f \cdot q = q_f \ , & \forall f \in \mathrm{Fl}\mathbb{I}, \end{cases}$$

et chaque famille de 2-cellules

$$\{\mu_i : q_i \longrightarrow \bar{q}_i : A \longrightarrow X\}_{i \in \mathrm{Ob}\mathbb{I}}$$

(où $\{\bar{q}_i, \bar{q}_f\}$ = autre système avec $\bar{q}_f \cdot \bar{q}_g = \bar{q}_{fg}$, etc,...) telle que

$$\bar{q}_f \cdot \mu_{\partial_0 f} = \mu_{\partial_1 f} \cdot q_f \ , \ \forall f \in \mathrm{Fl}\mathbb{I},$$

induit une seule 2-cellule $\mu : q \longrightarrow \bar{q} : A \longrightarrow X$ (où $\bar{q}$ est induite par $\{\bar{q}_i, \bar{q}_f\}$) qui vérifie la relation $\mu \cdot \partial_i = \mu_i$, $\forall i \in \mathrm{Ob}\mathbb{I}$.

<u>Exemples</u> 1°. $\mathcal{U}$-Cat, où $\mathcal{U}$ est une catégorie multiplicative à limites projectives. Soit $\mathcal{C}$ une $\mathcal{U}$-catégorie; alors la $\mathcal{U}$-catégorie $\mathcal{C}^{\mathbb{I}}$ a comme objets les foncteurs de $\mathbb{I}$ vers la catégorie $|\mathcal{C}|$ sous-jacente à $\mathcal{C}$. L'objet des flèches $\mathcal{C}^{\mathbb{I}}(F,G)$, où $F,G : \mathbb{I} \longrightarrow |\mathcal{C}|$, est donné par le noyau

$$(5) \qquad \mathcal{C}^{\mathbb{I}}(F,G) \xrightarrow{\tau} \prod_{i \in \mathrm{Ob}\mathbb{I}} \mathcal{C}(Fi,Gi) \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} \prod_{\substack{i,j \in \mathrm{Ob}\mathbb{I} \\ f \in \mathbb{I}(i,j)}} \mathcal{C}(Fi,Gj)_f$$

où

$$\mathcal{C}(Fi,Gj)_f = \mathcal{C}(Fi,Gj) \ , \ \forall f \in \mathbb{I}(i,j),$$

$$pr_{(i,j,f)}\cdot\partial_0 = \mathcal{C}(1,f)\cdot pr_{\partial_0 f}\ ,$$

$$pr_{(i,j,f)}\cdot\partial_1 = \mathcal{C}(f,1)\cdot pr_{\partial_1 f}\ .$$

2°. $\mathbb{C}at(\underline{E})$, où $\underline{E}$ est à limites projectives.

Soit $C=(C_0,C_1,\partial_0^C,\partial_1^C,\mu^C,\eta^C)$ une catégorie interne à $\underline{E}$; alors on construit d'abord C^2 comme ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
 & & C^2 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddll, bend right, "\partial_0^{C^2}"'] \arrow[ddrr, bend left, "\partial_1^{C^2}"] & & \\
 & C_1\times_{C_0}C_1 \arrow[dl, "pr_1"'] \arrow[dr, "\mu^C"] & \text{p.f.} & C_1\times_{C_0}C_1 \arrow[dl, "\mu^C"'] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
C_0^2=C_1 & & C_1 & & C_1=C_0^2
\end{tikzcd}$$

et puis on applique le dual du th.2.3 pour obtenir $C^{\mathbb{I}}$.

$C^{\mathbb{I}}$ est caractérisée par l'isomorphisme suivant

$$\mathrm{Hom}(X,C^{\mathbb{I}})\simeq \mathbb{C}at(\mathbb{I},\mathrm{Hom}(X,C))\ ,\quad X\in\mathrm{Ob}\underline{E}\ ,$$

naturel en X, où Hom(X,C) désigne la (vraie) catégorie

$$(\mathrm{Hom}(X,C_0),\mathrm{Hom}(X,C_1)\ ,\mathrm{Hom}(X,\partial_0^C),\mathrm{Hom}(X,\partial_1^C),\mathrm{Hom}(X,\mu^C),\mathrm{Hom}(X,\eta^C)).$$

3°. $\mathbb{F}ib(\underline{B})$. Si $p:\underline{E}\longrightarrow\underline{B}$ est une fibration, alors p est la fibration dont les fibres et les foncteurs images inverses sont définis par:

$$(p^{\mathbb{I}})^{-1}(B)=(p^{-1}(B))^{\mathbb{I}}\ ,\quad f^*_{p^{\mathbb{I}}}=(f^*_p)^{\mathbb{I}}\ .$$

§5. Bimodules et tenseurs

Soit $\mathbb{B}$ une bicatégorie exacte, i.e. telle que les foncteurs $\mathbb{B}(X,f)$ et $\mathbb{B}(f,Y)$ admettent des adjoints à droite, $\forall f\in\mathrm{Fl}\mathbb{B}$.

La bicatégorie $\mathrm{Bim}(\mathbb{B})$ des bimodules de $\mathbb{B}$ a comme objets les couples $(A,\mathbb{T})$, où A est un objet de $\mathbb{B}$ et

$$\mathbb{T}=(T:A\longrightarrow A,\ \eta_T:\mathrm{Id}_A\longrightarrow T,\ \mu_T:T^2\longrightarrow T)$$

une monade sur A.

Une flèche de $(A,\mathbb{T})$ vers $(A',\mathbb{T}')$, appelée un bimodule, est un

$$M=(m,\varphi_m,y_m) \ ,$$

où

$$m:A' \longrightarrow A \ , \quad \varphi_m : mT' \longrightarrow m \ , \quad y_m : Tm \longrightarrow m \ ,$$

(φ_m et y_m sont appelées 2-cellules structurales de M) rendent commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd} mT'^2 \arrow[r, "m\mu'_T"] \arrow[d, "\varphi_m T'"'] & mT' \arrow[d, "\varphi_m"] \\ mT' \arrow[r, "\varphi_m"'] & m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2m \arrow[r, dash, "\mu_T m"] \arrow[d, dash, "Ty_m"'] & Tm \arrow[d, dash, "y_m"] \\ Tm \arrow[r, dash, "y_m"'] & m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TmT' \arrow[r, dash, "T\varphi_m"] \arrow[d, dash, "y_m T'"'] & Tm \arrow[d, dash, "y_m"] \\ mT' \arrow[r, dash, "\varphi_m"'] & m \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} m\cdot \mathrm{Id}_{A'} \arrow[r, "m\cdot n_{T'}"] \arrow[dr, "\sim"'] & mT' \arrow[d, "\varphi_m"] \\ & m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Id}_A\cdot m \arrow[r, "n_T\cdot m"] \arrow[dr, "\sim"'] & Tm \arrow[d, "y_m"] \\ & m \end{tikzcd} .$$

Enfin une 2-cellule $a:M \longrightarrow M'$ dans Bim($\mathbb{B}$) est une 2-cellule $a:m \longrightarrow m'$ dans $\mathbb{B}$ qui fait commuter les diagrammes

$$\begin{tikzcd} mT' \arrow[r, "\varphi_m"] \arrow[d, "aT'"'] & m \arrow[d, "a"] \\ m'T' \arrow[r, "\varphi_{m'}"'] & m' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Tm \arrow[r, "y_m"] \arrow[d, "Ta"'] & m \arrow[d, "a"] \\ Tm' \arrow[r, "y_{m'}"'] & m' \end{tikzcd} .$$

Le composé des bimodules

$$(A,\mathbb{T}) \xrightarrow{M=(m,\varphi_m,y_m)} (A',\mathbb{T}') \xrightarrow{M'=(m',\varphi_{m'},y_{m'})} (A'',\mathbb{T}'')$$

est donné par le conoyau suivant

$$mT'm' \underset{\varphi_m m'}{\overset{m\,\psi_{m'}}{\rightrightarrows}} mm' \longrightarrow M'\otimes M$$

(les 2-cellules structurales en résultent).

<u>Théorème 5.1</u>. Si $\mathbb{B}$ est exacte et à cotenseurs, alors $\mathrm{Bim}(\mathbb{B})$ est (exacte) à tenseurs.

<u>Preuve</u>. Soient $(A,\mathbb{T})\in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Bim}(\mathbb{B})$,

$$\{\partial_i : A^{\mathbb{I}} \longrightarrow A,\ \partial_f : \partial_i \longrightarrow \partial_j : A^{\mathbb{I}} \longrightarrow A\}$$

le système définissant $A^{\mathbb{I}}$ et $(T^{\mathbb{I}}, \mu_T^{\mathbb{I}}, \eta_T^{\mathbb{I}})$ la monade induite par $\mathbb{T}=(T,\mu_T,\eta_T)$. Alors pour tout $i\in \mathrm{Ob}\mathbb{I}$, les triplets

$$P_i=(T\partial_i : A^{\mathbb{I}} \longrightarrow A,\ \mu_T\partial_i : T^2\partial_i \longrightarrow T\partial_i\ ,\ \mu_T\partial_i : T\partial_i T^{\mathbb{I}} \longrightarrow T\partial_i)$$

constituent des flèches de $(A,\mathbb{T})$ vers $(A^{\mathbb{I}},\mathbb{T}^{\mathbb{I}})$, tandis que les 2-cellules

$$P_f=T\partial_f : T\partial_i \longrightarrow T\partial_j\ ,\ \forall f : i \longrightarrow j\in \mathrm{Fl}\mathbb{I},$$

sont des 2-cellules de $\mathrm{Bim}(\mathbb{B})$.

Le système cherché est

$$\{P_i : (A,\mathbb{T}) \longrightarrow (A^{\mathbb{I}},\mathbb{T}^{\mathbb{I}}),\ P_f : P_i \longrightarrow P_j\} .$$

En effet, soit

$$\{M_i=(m_i,\varphi_{m_i},\psi_{m_i}) : (A,\mathbb{T}) \longrightarrow (A',\mathbb{T}'),\quad m_f : M_i \longrightarrow M_j\}$$

un autre système et $k : A' \longrightarrow A^{\mathbb{I}}$ la seule flèche dans $\mathbb{B}$ qui vérifie les équations

$$\begin{cases} k\cdot\partial_i=m_i\ ,\ \forall i\in \mathrm{Ob}\mathbb{I}\ , \\ k\cdot\partial_f=m_f\ ,\ \forall f\in \mathrm{Fl}\mathbb{I}\ . \end{cases}$$

On munit k de la structure de bimodule de $(A,\mathbb{T})$ vers $(A',\mathbb{T}')$, dont les 2-cellules structurales

$$\varphi_k : T^{\mathbb{I}}k \longrightarrow k \ , \ y_k : kT' \longrightarrow k \ ,$$

sont définies par les formules

$$\begin{cases} \partial_i \cdot \varphi_k = \varphi_{m_i} & , \forall i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I} \\ \partial_i \cdot y_k = y_{m_i} & , \forall i \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{I}. \end{cases}$$

Alors le diagramme conoyau contractible qui suit

$$\begin{tikzcd} T\cdot\partial_i\cdot T^{\mathbb{I}}\cdot k = T^2\cdot m_i \arrow[r, shift left, "T\cdot\varphi_{m_i}"] \arrow[r, shift right, "\mu_T\cdot m_i"'] & T\cdot\partial_i\cdot k = T\cdot m_i \arrow[l, bend left=50, "\eta_T\cdot T\cdot m_i"] \arrow[r, "\varphi_{m_i}"] & m_i \arrow[l, bend left=50, "\eta_T\cdot m_i"] \end{tikzcd}$$

donne $P_i \otimes K \simeq M_i$, où $K=(k,\varphi_k,y_k)$, et de même $P_f \otimes K \simeq M_f$.

<u>Unicité</u>. Soit

$$K' = (k',\varphi_{k'},y_{k'}) : (A^{\mathbb{I}},\mathbb{T}^{\mathbb{I}}) \longrightarrow (A',\mathbb{T}')$$

une flèche dans $\mathrm{Bim}(\mathbb{B})$ telle que $M_f \simeq P_f \otimes K'$; donc m_i est le conoyau des 2-cellules suivantes

$$T\cdot\partial_i\cdot T^{\mathbb{I}}\cdot k' = \partial_i\cdot(T^{\mathbb{I}})^2\cdot k' \ \underset{\partial_i\cdot T^{\mathbb{I}}\varphi_{k'}}{\overset{\partial_i\cdot\mu_T^{\mathbb{I}}\cdot k'}{\rightrightarrows}} \ \partial_i\cdot T^{\mathbb{I}}\cdot k' \qquad (4)$$

et, comme $\mathbb{B}$ est exacte et que k' est le conoyau des $\mu_T^{\mathbb{I}}\cdot k'$, $T^{\mathbb{I}}\cdot\varphi_{k'}$, il en résulte que $\partial_i\cdot k'$ est le conoyau (4), d'où $\partial_i\cdot k' = m_i$ et de même $\partial_f\cdot k' = m_f$; par conséquent $k=k'$ et par un argument analogue $K=K'$. ■

§6. <u>Objets à limites par rapport aux cotenseurs</u>

Soit $\mathbb{B}$ une bicatégorie à tenseurs.

<u>Définition</u>. On dit que l'objet A de $\mathbb{B}$ admet des <u>limites</u>

__projectives__ (resp. __inductives__) __par rapport aux cotenseurs__, en abrégé $\hat{\varprojlim}$ (resp. $\hat{\varinjlim}$), si la flèche diagonale

$$\Delta_A : A \longrightarrow A^{\mathbb{I}}$$

admet un adjoint à droite (resp. à gauche), pour toute petite catégorie $\mathbb{I}$.

On dit que A est à __produits__ (resp. __noyaux__) __par rapport aux cotenseurs__ si pour chaque petite ensemble X (resp. pour la catégorie $\cdot \rightrightarrows \cdot$) la flèche diagonale

$$\Delta_A : A \longrightarrow A^X \quad (\text{resp. } \Delta_A : A \longrightarrow A^{\cdot \rightrightarrows \cdot})$$

admet un adjoint à droite.

1. $\mathbb{B}=\mathcal{U}$-Cat; on a le résultat suivant:

__Théorème 6.1.__ Une $\mathcal{U}$-catégorie $\mathcal{A}$ est à $\hat{\varinjlim}$ (resp. $\hat{\varprojlim}$) si et seulement si elle est à $\mathcal{U}$-limites inductives (resp. projectives), c'est-à-dire si la catégorie $|\mathcal{A}|$ est à limites inductives (resp. projectives) préservées par les foncteurs

$$\mathcal{A}(-,A) : |\mathcal{A}|^{op} \longrightarrow \mathcal{U} \qquad (6)$$

$$(\text{resp. } \mathcal{A}(A,-) : |\mathcal{A}| \longrightarrow \mathcal{U}) .$$

__Preuve.__ Supposons $\mathcal{A}$ à $\mathcal{U}$-limites inductives.

Le $\mathcal{U}$-foncteur $\underrightarrow{L} : \mathcal{A}^{\mathbb{I}} \to \mathcal{A}$ est défini sur les objets de $\mathcal{A}^{\mathbb{I}}$ par

$$\underrightarrow{L}(F) = \varinjlim F , \quad F : \mathbb{I} \to |\mathcal{A}| .$$

Pour $F,G : \mathbb{I} \to |\mathcal{A}| \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}^{\mathbb{I}}$, le morphisme

$$\underrightarrow{L}_{F,G} : \mathcal{A}^{\mathbb{I}}(F,G) \longrightarrow \mathcal{A}(\varinjlim F, \varinjlim G) \simeq \varprojlim_i (Fi, \varinjlim G)$$

est induit par le cône projectif suivant (diagramme extérieur)

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A}^{\mathbb{I}}(F,G) \arrow[dll, "pr_i \cdot \tau"'] \arrow[drr, "pr_j \cdot \tau"] & & \\
\mathcal{A}(Fi,Gi) \arrow[drr, "\mathcal{A}(1{,}Gf)"] \arrow[dd, "\mathcal{A}(1{,}c_i)"'] & & & & \mathcal{A}(Fj,Gj) \arrow[dll, "\mathcal{A}(Ff{,}1)"'] \arrow[dd, "\mathcal{A}(1{,}c_j)"] \\
 & & \mathcal{A}(Fi,Gj) \arrow[dll, "\mathcal{A}(1{,}c_j)"'] & & \\
\mathcal{A}(Fi,\varinjlim G) & & & & \mathcal{A}(Fj,\varinjlim G) \arrow[llll, "\mathcal{A}(Ff{,}1)"]
\end{tikzcd}$$

où $c_i:Gi \longrightarrow \underrightarrow{\lim} G$ désigne l'injection dans la limite iductive et τ est le noyau (5).

La $\mathcal{U}$-adjonction $\underrightarrow{L} \dashv \Delta$, ou

$$\mathcal{C}(\underrightarrow{\lim} F, A) \simeq \mathcal{C}^{\mathbb{I}}(F, \Delta A) \ ,$$

s'écrit

$$\mathcal{C}(\underrightarrow{\lim} F, A) \simeq \underleftarrow{\lim}_i \mathcal{C}(Fi, A) \ ,$$

ce qui exprime que le foncteur (6) préserve les limites inductives.

Supposons $\mathcal{C}$ à $\widehat{\underrightarrow{\lim}}$; alors on a un $\mathcal{U}$-foncteur $\underrightarrow{L}: \mathcal{C}^{\mathbb{I}} \to \mathcal{C}$ tel que $\underrightarrow{L} \dashv \Delta$, ou

$$\mathcal{C}(\underrightarrow{L}F, A) \simeq \mathcal{C}^{\mathbb{I}}(F, \Delta A) \ ,$$

ou

$$\mathcal{C}(\underrightarrow{L}F, A) \simeq \underleftarrow{\lim}_i \mathcal{C}(Fi, A) \ . \qquad (7)$$

De (7) on obtient

$$|\mathcal{C}|(\underrightarrow{L}F, A) \simeq \underleftarrow{\lim}_i |\mathcal{C}|(Fi, A)$$

de manière naturelle en A; par conséquent $\underrightarrow{L}F$ est la limite inductive de $F:\mathbb{I} \to |\mathcal{C}|$ dans $|\mathcal{C}|$.

Enfin l'isomorphisme (7) exprime le fait que les foncteurs (6) préservent les limites projectives, d'où le résultat. ∎

2. $\mathbb{B} = \mathbb{C}at(\underline{E})$; alors $C=(C_0, C_1, \partial_0^C, \partial_1^C, \mu^C, \eta^C)$ est à $\widehat{\underleftarrow{\lim}}$ (resp. $\widehat{\underrightarrow{\lim}}$) si et seulement si pour chaque objet X de $\underline{E}$ la catégorie Hom(X,C) est à limites projectives (resp. inductives) préservées par les foncteurs

$$\mathrm{Hom}(f,C):\mathrm{Hom}(Y,C) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,C) \ , \quad f:Y \to X \in \mathrm{Fl}\underline{E}.$$

3. $\mathbb{B} = \mathbb{F}ib(\underline{B})$; alors la fibration $p:\underline{E} \longrightarrow \underline{B}$ est à $\widehat{\underleftarrow{\lim}}$ (resp. $\widehat{\underrightarrow{\lim}}$) si et seulement si chaque fibre de p est à limites projectives (resp. inductives) préservées par chaque foncteur "image inverse".

§7. Comparaison des $\hat{\lim}$ aux $\check{\lim}$

On a besoin des lemmes suivants:

Lemme 7.1. Soient

$$X \underset{u}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$$

deux flèches dans une 2-catégorie $\mathbb{B}$; alors les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $f \dashv u$ dans $\mathbb{B}$;

ii)a) pour tout objet A de $\mathbb{B}$ on a $\mathbb{B}(A,f) \dashv \mathbb{B}(A,u)$ et

b) pour toute flèche $m:B \to A$ de $\mathbb{B}$ on a

$$\mathbb{B}(m,X)\cdot \eta_A = \eta_B \cdot \mathbb{B}(m,X) \ ,$$

où η_A, η_B sont les unités des adjonctions a ;

iii)a)pour tout objet A de $\mathbb{B}$ on a $\mathbb{B}(A,f) \dashv \mathbb{B}(A,u)$ et

b) pour toute flèche $m:B \to A$ de $\mathbb{B}$ on a

$$\mathbb{B}(m,Y)\cdot \varepsilon_A = \varepsilon_B \cdot \mathbb{B}(m,Y) \ ,$$

où ε_A, ε_B sont les counités des adjonctions a .

Preuve. i) $\Rightarrow$ ii),iii) trivial.

ii) $\Leftrightarrow$ iii), car on a les morphismes d'adjonctions [19]

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}(A,X) \arrow[r, shift left, "\mathbb{B}(A,f)"] \arrow[d, "\mathbb{B}(m,X)"'] & \mathbb{B}(A,Y) \arrow[l, shift left, "\mathbb{B}(A,u)"] \arrow[d, "\mathbb{B}(m,Y)"] \\
\mathbb{B}(B,X) \arrow[r, shift left, "\mathbb{B}(B,f)"] & \mathbb{B}(B,Y) \arrow[l, shift left, "\mathbb{B}(B,u)"]
\end{tikzcd} \ .$$

ii),iii) $\Rightarrow$ i) :

De b on obtient

$$\eta_A(x)\cdot m = \eta_B(x\cdot m) \ , \quad x:A \to X \ ,$$

donc

$$\eta_X(1_X)\cdot x=\eta_A(x) \quad , \quad x:A\longrightarrow X \ ,$$

où

$$\eta=\eta_X(1_X):1_X\longrightarrow uf.$$

De même on définit

$$\varepsilon=\varepsilon_Y(1_Y):fu\longrightarrow 1_Y$$

par $\varepsilon_A(y)=\varepsilon\cdot y$.

L'adjonction a au point $X\in \mathrm{Ob}\mathbb{B}$ donne

$$\varepsilon_X\cdot \mathbb{B}(X,f)\cdot \mathbb{B}(X,f)\cdot \varepsilon_X= \mathbb{B}(X,f) \ ,$$

d'où, en évaluant en 1_X, on trouve que

$$\varepsilon_X(f)\cdot f\eta=f$$

et comme $\varepsilon_X(f)=\varepsilon f$, on obtient finalement

$$\varepsilon f\circ f\eta =f.$$

L'autre identité triangulaire se prouve pareillement.■

<u>Lemme 7.2</u>. Soit $u:A\longrightarrow B$ une flèche dans une 2-catégorie $\mathbb{B}$; alors les conditions suivantes sont équivalentes:

i)a) pour tout objet X de $\mathbb{B}$ le foncteur $\mathbb{B}(X,u)$ admet un adjoint à gauche noté F_X, de façon que les carrés

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{B}(X,B) & \xrightarrow{F_X} & \mathbb{B}(X,A) \\
{\scriptstyle \mathbb{B}(m,B)}\Big| & & \Big|{\scriptstyle \mathbb{B}(m,A)} \\
\mathbb{B}(Y,B) & \xrightarrow{F_Y} & \mathbb{B}(Y,A)
\end{array}$$

commutent $\forall m:Y\longrightarrow X\in \mathrm{Fl}\mathbb{B}$;

b) On a

$$\mathbb{B}(m,B)\cdot \eta_X= \eta_Y\cdot \mathbb{B}(m,B) \ ,$$

où η_X, η_Y sont les unités des adjonctions a .

iii) La condition ii)a est vérifiée ainsi que la relation

$$\mathbb{B}(m,A)\cdot \varepsilon_X = \varepsilon_Y\cdot \mathbb{B}(m,A) \ ,$$

où ε_A, ε_B sont les counités des adjonctions ii)a .

<u>Preuve</u>. Tout revient à montrer que ii),iii) $\Rightarrow$ i).

Il est facile de voir que i) équivaut à la condition i') ci-après:

i')a) pour tout objet X de $\mathbb{B}$ le foncteur $\mathbb{B}(X,u)$ admet un adjoint à gauche F_X, tel que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}(X,B) \arrow[r, "F_X"] \arrow[d, bend right] \arrow[d, bend left] \arrow[d, phantom, "\underset{\longrightarrow}{\mathbb{B}(\varphi,B)}"] & \mathbb{B}(X,A) \arrow[d, bend right] \arrow[d, bend left] \arrow[d, phantom, "\underset{\longrightarrow}{\mathbb{B}(\varphi,A)}"] \\
\mathbb{B}(Y,B) \arrow[r, "F_X"] & \mathbb{B}(Y,A)
\end{tikzcd} \qquad \text{(II)}$$

commutent $\forall \varphi : m \longrightarrow m' : Y \longrightarrow X$.

b) $\mathbb{B}(m,B)\cdot \eta_X = \eta_Y\cdot \mathbb{B}(m,B)$, $\forall m : Y \longrightarrow X \in \mathrm{Fl}\,\mathbb{B}$.

Il est clair que i') $\Rightarrow$ ii).

Pour montrer l'inverse il suffit de montrer que (II) est commutatif, ou bien que

$$F_X(x)\cdot\varphi = F_Y(x\cdot\varphi) \ , \ \forall x : X \longrightarrow B \qquad (8) .$$

Premons

$$\eta_x : x \longrightarrow u\cdot F_X(x) \ ;$$

en vertu de ii)b on a

$$\begin{cases} \eta_{xm} = \eta_x\cdot m : x\cdot m \longrightarrow u\cdot F_X(x)\cdot m \\ \eta_{xm'} = \eta_x\cdot m' : x\cdot m' \longrightarrow u\cdot F_X(x)\cdot m' \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} F_Y(x\cdot m) = F_X(x)\cdot m \\ F_Y(x\cdot m') = F_X(x)\cdot m' \ . \end{cases}$$

Par construction $F_Y(x\cdot\varphi)$ est la seule 2-cellule qui rend commutatif le carré

$$\begin{tikzcd} x\cdot m \arrow[r, "\eta_{xm}"] \arrow[d, "x\cdot\varphi"'] & u\cdot F_X(x)\cdot m \arrow[d, "u\cdot F_X(x)\cdot\varphi"] \\ x\cdot m' \arrow[r, "\eta_{x\cdot m'}"'] & u\cdot F_X(x)\cdot m' \end{tikzcd},$$

d'où (8).■

<u>Corollaire 7.4.</u> Si la 2-catégorie $\mathbb{B}$ est à tenseurs et cotenseurs, alors les notions de limites correspondantes coïncident, i.e. $\widehat{\lim} \equiv \check{\lim}$.

<u>Preuve.</u> Résulte du lemme 7.2 et de la prop. 3.1.■

<u>Corollaire 7.4.</u> Dans une 2-catégorie $\mathbb{B}$ à cotenseurs les propositions suivantes sont équivalentes:

i) L'objet A est à limites projectives par rapport aux cotenseurs,

ii) A est à produits et noyaux par rapport aux cotenseurs,

iii) (Kan) pour tout foncteur $F:\mathbb{J}\longrightarrow\mathbb{I}$, la flèche $A^F:A^{\mathbb{I}}\longrightarrow A^{\mathbb{J}}$ admet un adjoint à droite.■

<u>Corollaire 7.5.</u> Les $\underleftarrow{\widehat{\lim}}$ sur un objet A d'une bicatégorie $\mathbb{B}$ à cotenseurs commutent entre elles.

<u>Preuve.</u> Résulte du lemme 7.2 et de la prop. 3.3.■

§8. <u>Comparaison avec les limites absolues</u>

D'abord quelques rappels concernant les cosmos élémentaires [20],[21]. Soient $\mathbb{B}$ une 2-catégorie et $\mathbb{P}$ une classe distinguée d'objets de $\mathbb{B}$, appelés <u>petits objets</u>.

On appelle <u>profoncteur</u> de A vers B un objet comma

$$A \xleftarrow{\partial_0} (f,g) \xrightarrow{\partial_1} B$$

tel que, pour tout couple de flèches $m:M\longrightarrow A$, $k:K\longrightarrow B$, où $M,K\in\mathbb{P}$, la limite projective du diagramme

$$M \xrightarrow{m} A \xleftarrow{\partial_0} (f,g) \xrightarrow{\partial_1} B \xleftarrow{k} K$$

appartient à $\mathbb{P}$.

La flèche $f:A \longrightarrow B$ est dite <u>admissible</u> si l'objet comma

$$A \xleftarrow{\partial_0} (f,B) \xrightarrow{\partial_1} B$$

est un profoncteur .

Enfin l'objet A est dit <u>légitime</u> si la flèche $A \xrightarrow{1_A} A$ est admissible.

Un <u>cosmos élémentaire</u> est une 2-catégorie $\mathbb{B}$ et une classe des petits objets $\mathbb{P}$ telles que:

C_1) $\mathbb{B}$ admet des limites cartésiennes projectives finies et $\mathbb{P}$ est stable par ces limites ,

C_2) Pour chaque objet légitime A, il existe un objet ΓA et une équivalence naturelle de catégories

$$r:\ \mathbb{B}(B,\Gamma A) \simeq \mathrm{Prof}(A,B) \ ,$$

où $\mathrm{Prof}(A,B)$ désigne la catégorie des profoncteurs de A vers B.

On note $Y_A : A \longrightarrow \Gamma A$ l'image par r^{-1} de $A \xleftarrow{\partial_0} A^2 \xrightarrow{\partial_1} A$.

C_3) Si A est petit , alors ΓA est légitime.

C_4) Si A est petit et $f:A \longrightarrow B$ admissible, alors $f:\ \Gamma A \longrightarrow \Gamma B$ admet un adjoint à gauche $\exists f:\ \Gamma A \longrightarrow \Gamma B$.

On dit que l'objet A de $\mathbb{B}$ est <u>absolument cocomplet</u> si sa flèche de Yoneda $Y_A : A \longrightarrow \Gamma A$ admet un adjoint à gauche lex_A:

$$\Gamma A \underset{Y_A}{\overset{\mathrm{lex}_A}{\rightleftarrows}} A \ , \quad \mathrm{lex}_A \dashv Y_A \ .$$

Pour comparer la cocomplètion absolue aux $\underline{\hat{\lim}}$, on a besoin du lemme suivant:

<u>Lemme 8.1</u>. Si A est absolument cocomplet, alors pour chaque flèche $f:X \longrightarrow A$, X petit, l'extension de Kan à gauche

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[dl, bend left] \\ A & \end{tikzcd}$$

, Y légitime,

de f le long de chaque $m:X \longrightarrow Y$ existe et est préservée par toute flèche $g:X' \longrightarrow X$.

<u>Preuve</u>. Considérons d'abord le cas $m=Y_X$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "Y_X"] \arrow[d, "f"'] & & \Gamma X \arrow[d, shift right, "\exists f"'] \\ A \arrow[rr, shift right, "Y_A"'] & & \Gamma A \arrow[ll, shift right, "\mathrm{lex}_A"'] \arrow[u, shift right, "\Gamma f"'] \end{tikzcd}$$

Des relations

$$\mathrm{lex}_A \dashv Y_A \ , \quad \exists f \dashv \Gamma f \ ,$$

on tire que

$$\mathrm{lex}_A \cdot \exists f \dashv \Gamma f \cdot Y_A = \mathrm{hom}(f,1) \ ,$$

donc

$$\mathrm{lex}_A \cdot \exists f = \mathrm{lex}_f .$$

En combinant le résultat ci-dessus avec le th. 16 [21] , on achève la preuve.■

<u>Proposition 8.2</u>. Si le cosmos $\mathbb{B}$ est à tenseurs et si la classe $\mathbb{P}$ des petits objets est stable par tenseurs, alors A absolument cocomplet entraîne A à $\widehat{\varprojlim}$.

<u>Preuve</u>. Découle du lemme 8.1.■

§9. <u>Autres notions de limite</u>

Soient $\mathbb{B}$ une 2-catégorie cartésienne fermée (i.e. telle que, pour tout $A \in \mathrm{Ob}\mathbb{B}$, le 2-foncteur $A\times - : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ admet un Cat-adjoint à droite) et P une classe d'objets de $\mathbb{B}$.

<u>Définition</u> (Penon). On dit que l'objet A de $\mathbb{B}$ est à P-$\widetilde{\varprojlim}$ (resp. P-$\widetilde{\varinjlim}$) si, pour tout objet $I \in P$, la flèche

$$\Delta : A \longrightarrow A^I \qquad (1)$$

admet un adjoint à droite (resp. à gauche), où Δ est l'image par adjonction cartésienne de la projection $A\times I \longrightarrow A$.

<u>Proposition 9.1</u>. L'objet A est à P-$\widetilde{\varprojlim}$ (resp. P-$\widetilde{\varinjlim}$) si et seulement si, pour chaque objet I de P, pour chaque objet X de $\mathbb{B}$ et pour chaque flèche $f: I\times X \longrightarrow A$, l'extension de Kan à droite (resp. à gauche)

$$\begin{tikzcd} I\times X \arrow[r, "pr_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[dl, "R(f{,}pr_X)"] \\ A & \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} I\times X \arrow[r, "pr_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[dl, "L(f{,}pr_X)"] \\ A & \end{tikzcd} \right)$$

de f le long de la projection pr_X existe et est préservée par chaque flèche $g: Y \longrightarrow X$.

<u>Preuve</u>. La flèche (i) admet un adjoint à droite si et seulement si, pour tout $X\in \mathrm{Ob}\,\mathbb{B}$, le foncteur

$$\mathbb{B}(X,A) \xrightarrow[\mathbb{B}(X,\Delta)]{} \mathbb{B}(X,A^I) \simeq \mathbb{B}(X\times I,A)$$

admet un adjoint à droite R_X, de façon cohérente (v. lemme 7.2), ce qui s'exprime explicitement par l'énoncé de la proposition. ∎

<u>Remarques</u>. 1°. Si $P\subset P'$, alors une P'-$\widetilde{\lim}$ est une P-$\widetilde{\lim}$.

2°. Si $\mathbb{B} = \mathbb{C}\mathrm{at}$ et P=classe des petites catégories, alors les P-$\widetilde{\lim}$ sont exactement les limites ordinaires.

En fait on a la proposition générale suivante:

<u>Proposition 9.2</u>. Si la 2-catégorie $\mathbb{B}$ est à tenseurs et si

$$P=\{\mathbb{I}\boxtimes 1 / \mathbb{I} \text{ petite catégorie}\},$$

où 1 désigne l'objet final de $\mathbb{B}$, alors

$$P\text{-}\widetilde{\lim} \equiv \check{\lim} .$$

<u>Preuve</u>. Résulte de la prop. 9.1, de la définition de $\check{\lim}$ et de l'isomorphisme

$$(\mathbb{I}\boxtimes 1)\times Y \simeq \mathbb{I}\boxtimes Y$$

qui est une conséquence du fait que le 2-foncteur $\_\times Y : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ commute avec les tenseurs, parce que

$$\_\times Y \dashv_{\mathbf{Cat}} (\_)^Y \quad . \blacksquare$$

<u>Proposition 9.3</u>. Soit $\mathbb{B}$ une 2-catégorie cartésienne fermée; alors

i) l'objet A est à $\underline{\tilde{\lim}}$ ssi A^X l'est , $\forall X \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{B}$,

ii) si de plus $\mathbb{B}$ est à tenseurs (resp. cotenseurs), l'objet A est à $\underline{\check{\lim}}$ (resp. $\underline{\hat{\lim}}$) ssi A^X l'est, $\forall X \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{B}$.

<u>Preuve</u>.i) On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} A^X \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta^X"'] & (A^X)^I \arrow[d, phantom, "\wr\!\!\mid"] \\ & (A^I)^X \end{tikzcd}$$

Donc si $\Delta : A \to A^I$ admet un adjoint à droite, alors il en est de même de Δ^X, et par conséquent la flèche $\Delta : A^X \longrightarrow (A^X)^I$ admet un adjoint à droite.

ii) D'abord on établit l'isomorphisme

$$(A^{\mathbb{I}})^X \simeq (A^X)^{\mathbb{I}} \ ,$$

à l'aide des isomorphismes

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(Y,(A^X)^{\mathbb{I}}) &\simeq \mathbb{B}(Y,A^X) \quad \simeq \\ &\simeq \mathbb{B}(Y\times X,A)^{\mathbb{I}} \ \simeq \\ &\simeq \mathbb{B}(Y\ X,A^{\mathbb{I}}) \ \simeq \\ &\simeq \mathbb{B}(Y,(A^{\mathbb{I}})^X) \ , \end{aligned}$$

et ensuite on utilise un argument analogue à i) pour les $\underline{\hat{\lim}}$. En ce qui concerne les $\underline{\check{\lim}}$ on utilise la prop.3.1.$\blacksquare$

§10. <u>Bicatégories avec "op"</u>

Soit $\mathbb{B}$ une bicatégorie.

<u>Définition</u>. Un <u>opérateur "op"</u> sur $\mathbb{B}$ est une loi qui à tout

objet A de $\mathbb{B}$ associe un objet noté A^{op}, de façon que:

$$\text{i) } (A^{op})^{op} \simeq A \text{ , ii) } \mathbb{B}(X,A^{op}) \simeq \mathbb{B}(X^{op},A)^{op}. \qquad (9)$$

<u>Remarque</u>."op" s'il existe n'est pas unique en général.

<u>Exemples</u>. 1°. Un "op" dans $\mathbb{O}$rd, c'est le choix de l'ordre opposé.

2°. Dans $\mathbb{C}$at, on obtient un opérateur "op" à partir de la notion de catégorie duale; de même dans $\mathbb{M}$on, $\mathbb{G}$r ($\subset \mathbb{C}$at).

3°. $\mathbb{B} = \mathbb{C}\mathrm{at}(\underline{E})$; Si $C=(C_0,C_1,\partial_0^C,\partial_1^C,\mu^C,n^C)$ est une catégorie interne à $\underline{E}$, alors on définit $C^{op}=(C_0^{op},C_1^{op},\partial_0^{C^{op}},\partial_1^{C^{op}},\mu^{C^{op}},n^{C^{op}})$ par

$$C_0^{op}=C_0 \quad C_1^{op}=C_1 , \quad \partial_0^{C^{op}} = \partial_1^C, \quad \partial_1^{C^{op}} = \partial_0^C , \ \mu^{C^{op}} = \mu^C , \ n^{C^{op}} = n^C .$$

4°. $\mathbb{B}=\mathcal{U}$-Cat, où $\mathcal{U}$ est symétrique.

Si $(\mathrm{Ob}\mathcal{A},\mathcal{A},c_{\mathcal{A}},n_{\mathcal{A}})$ est une $\mathcal{U}$-catégorie, alors on définit $(\mathrm{Ob}\mathcal{A}^{op},\mathcal{A}^{op},c_{\mathcal{A}^{op}},n_{\mathcal{A}^{op}})$ par

$$\mathrm{Ob}\mathcal{A}^{op}=\mathrm{Ob}\mathcal{A} , \quad \mathcal{A}^{op}(A,B)=\mathcal{A}(B,A),$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{op}(A,B)\otimes\mathcal{A}^{op}(B,C) \arrow[rr, "c_{\mathcal{A}^{op}}"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & & \mathcal{A}^{op}(A,C) \arrow[d, phantom, "\parallel"] \\
\mathcal{A}(B,A)\otimes\mathcal{A}(C,B) \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] & & \mathcal{A}(C,A) \\
\mathcal{A}(C,B)\otimes\mathcal{A}(B,A) \arrow[urr, "c_{\mathcal{A}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

5°. $\mathbb{B}=\mathbb{F}\mathrm{ib}(\underline{B})$. Soit $p:\underline{E}\to\underline{B}$ une fibration et $\mathfrak{F}p:\underline{B}^{op}\to \mathbb{C}$at le pseudo-foncteur associé; alors la fibration associée au pseudo-foncteur

$$\underline{B}^{op} \xrightarrow{\mathfrak{F}p} \mathbb{C}\mathrm{at} \xrightarrow{\text{"op"}} \mathbb{C}\mathrm{at}$$

notée p^{op}, est bien un opérateur "op" sur $\mathbb{F}\mathrm{ib}(\underline{B})$.

Ses fibres et images inverses sont données par

$$(p^{op})^{-1}(B)=(p^{-1}(B))^{op},$$

$$f^*_{(p^{op})}=(f^*_p)^{op} \quad ,$$

respectivement.

<u>Proposition 10.1</u>. Si $\mathbb{B}$ a un opérateur "op", alors

i) $(A^{op})^{\mathbb{I}} \simeq (A^{\mathbb{I}^{op}})^{op}$ (internalisation de (9)ii));

ii) $(\mathbb{I} \boxtimes A)^{op} \simeq \mathbb{I}^{op} \boxtimes A^{op}$.

<u>Preuve</u>. i) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(X,(A^{\mathbb{I}^{op}})^{op}) &\simeq \mathbb{B}(X^{op},A^{\mathbb{I}^{op}})^{op} &\simeq \\ &\simeq \mathbb{C}at(\mathbb{I}^{op}, \mathbb{B}(X^{op},A))^{op} &\simeq \\ &\simeq \mathbb{C}at(\mathbb{I}, \mathbb{B}(X^{op},A)^{op}) &\simeq \\ &\simeq \mathbb{C}at(\mathbb{I}, \mathbb{B}(X,A^{op})) &\simeq \\ &\simeq \mathbb{B}(X,(A^{op})^{\mathbb{I}}). \end{aligned}$$

ii) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{B}(\mathbb{I}^{op} \boxtimes A^{op},X) &\simeq \mathbb{C}at(\mathbb{I}^{op}, \mathbb{B}(A^{op},X)) &\simeq \\ &\simeq \mathbb{C}at(\mathbb{I}, \mathbb{B}(A^{op},X)^{op})^{op} &\simeq \\ &\simeq \mathbb{C}at(\mathbb{I}, \mathbb{B}(A,X^{op}))^{op} &\simeq \\ &\simeq \mathbb{B}(\mathbb{I} \boxtimes A,X). \blacksquare \end{aligned}$$

<u>Proposition 10.2</u>. Si l'objet A est à $\underline{\check{\text{lim}}}$ (resp. $\underline{\text{lim}}$, $\underline{\hat{\text{lim}}}$, $\underline{\hat{\text{lim}}}$), alors l'objet A^{op} est à $\underline{\text{lim}}$ (resp. $\underline{\check{\text{lim}}}$, $\underline{\hat{\text{lim}}}$, $\underline{\hat{\text{lim}}}$).

<u>Preuve</u>. C'est la combinaison de (9)ii) et de la prop.3.1. $\blacksquare$

CHAPITRE II

LES FINS CARTÉSIENNES GÉNÉRALISÉES

On généralise les fins cartésiennes [8] afin de donner une construction universelle de la bicatégorie Pseud($\mathbb{I}$, $\mathbb{A}$).

§1. Bimorphismes et fins cartésiennes généralisées

Soient $\mathbb{A}$ une bicatégorie et $\mathbb{V}$ une 2-catégorie.

Définition. Un bimorphisme $T: \mathbb{A}^{op} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{V}$ est la donnée

1) d'une fonction $T: \mathrm{Ob}\mathbb{A} \times \mathrm{Ob}\mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{Ob}\mathbb{V}$,

2) pour chaque objet A de $\mathbb{A}$, d'un morphisme "partiel"

$$T(A,-): \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{V} ;$$

on note

$$\varphi_{fg} : T(A,f)\cdot T(A,g) \longrightarrow T(A,fg) \ , \forall (f,g) \in \mathbb{A}^*,$$

$$\eta_B : 1_{T(A,B)} \longrightarrow T(A,I_B) \ , \quad \forall B \in \mathrm{Ob}\mathbb{A} \ ,$$

les multiplications et les unités resp. du morphisme $T(A,-)$,

3) pour chaque objet A de $\mathbb{A}$, d'un morphisme "partiel"

$$T(-,A): \mathbb{A}^{op} \longrightarrow \mathbb{V} ;$$

on note

$$\varphi^{fg} : T(g,A)\cdot T(f,A) \longrightarrow T(fg,A), \ \forall (f,g) \in \mathbb{A}^*,$$

$$\eta^B : 1_{T(B,A)} \longrightarrow T(I_B,A) , \ \forall B \in \mathrm{Ob}\mathbb{A},$$

les multiplications et les unités resp. du morphisme $T(-,A)$.

$\mathbb{A}^*$ et I_B désignent les couples de flèches composables de $\mathbb{A}$ et les flèches "identités" resp. de la bicatégorie $\mathbb{A}$.

De plus, on impose que

$$T(\lambda,B')\cdot T(A,\mu) = T(A',\mu)\cdot T(\lambda,B)$$

pour tout couple de 2-cellules de $\mathbb{A}$

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda"] & A \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mu"] & B' \end{tikzcd} .$$

<u>Exemples</u>. 1°. Soit $\mathbb{A}$ une 2-catégorie; alors un 2-foncteur

$$T : \mathbb{A}^{op} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{V}$$

est un cas particulier de bimorphisme.

2°. Un bimorphisme $\mathbb{1}^{op} \times \mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{V}$, est un couple de monades commutatives sur un objet V:

$$T\,T' = T'\,T,$$

$$\eta T' = T'\eta \ , T\eta' = \eta' T,$$

$$\mu T' = T'\mu \ , T\mu' = \mu' T.$$

3°. Soient $F,G : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ deux morphismes de bicatégories; alors

$$\mathbb{B}(F(\_),G(\_)) : \mathbb{A}^{op} \times \mathbb{A} \to \mathbb{C}at$$

est un bimorphisme. C'est l'exemple typique.

Soient $T : \mathbb{A}^{op} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$ un bimorphisme et X un objet de $\mathbb{V}$.

<u>Définition</u>. Un <u>quasi-wedge projectif</u> de base T et de sommet X est une collection de flèches de $\mathbb{V}$

$$\left\{ \omega_A : X \longrightarrow T(A,A) \right\}_{A \in Ob\mathbb{A}}$$

et de 2-cellules de $\mathbb{V}$

$$\left\{ \omega_f : T(\partial_0 f, f) \cdot \omega_f \longrightarrow T(f, \partial_1 f) \cdot \omega_f \right\}_{f \in F1\mathbb{A}}$$

de façon que

QW_1) pout objet A de $\mathbb{A}$ le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\omega_A"'] \arrow[dr, "\omega_A"] & \\
T(A,A) \arrow[rr, phantom, "\overset{\omega_{1_A}}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, bend right=40, "T(A,I_A)"'] \arrow[dr, bend left=20, "1_{T(A,A)}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\eta_A}{\Leftarrow}"] & & T(A,A) \arrow[dl, bend right=20, "1_{T(A,A)}"'] \arrow[dl, bend left=40, "T(I_A,A)"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\eta^A}{\Rightarrow}"] \\
& T(A,A) &
\end{tikzcd}$$

i.e.

$$\omega_{1_A}\circ\eta_A\cdot\omega_A=\eta^A\cdot\omega_A \quad ;$$

QW_2) pour toute 2-cellule $\lambda:f\longrightarrow g:A\longrightarrow B$ de $\mathbb{A}$ le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\omega_A"'] \arrow[dr, "\omega_B"] & \\
T(A,A) \arrow[rr, phantom, "\overset{\omega_f}{\Rightarrow}\;\overset{\omega_g}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, bend right=40, "T(A,g)"'] \arrow[dr, "T(A,f)"] \arrow[dr, phantom, bend right=20, "\overset{T(A,\lambda)}{\Leftarrow}"] & & T(B,B) \arrow[dl, "T(f,B)"'] \arrow[dl, bend left=40, "T(g,B)"] \arrow[dl, phantom, bend left=20, "\overset{T(\lambda,B)}{\Rightarrow}"] \\
& T(A,B) &
\end{tikzcd}$$

i.e.

$$\omega_g\circ T(A,\lambda)\cdot\omega_A=T(\lambda,B)\cdot\omega_B\circ\omega_f \quad ;$$

QW_3) pour tout couple de flèches composables $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ de $\mathbb{A}$ le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dll, "\omega_A"'] \arrow[drr, "\omega_C"] \arrow[dd, "\omega_B"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\omega_f}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\omega_g}{\Rightarrow}"] & & \\
T(A,A) \arrow[dd, "T(A,f)"'] \arrow[dddrr, "T(A,gf)"] \arrow[ddr, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Rightarrow}"] & & & & T(C,C) \arrow[dd, "T(g,C)"] \arrow[dddll, "T(gf,C)"'] \arrow[ddl, phantom, "\overset{\varphi^{gf}}{\Leftarrow}"] \\
 & & T(B,B) \arrow[dll, "T(f,B)"] \arrow[drr, "T(B,g)"'] \arrow[dd, phantom, "\overset{\omega_{gf}}{\Rightarrow}"] & & \\
T(A,B) \arrow[drr, "T(A,g)"'] & & & & T(B,C) \arrow[dll, "T(f,C)"] \\
 & & T(A,C) & &
\end{tikzcd}$$

i.e.

$$\varphi^{gf} \cdot \omega_C \circ T(f,C) \cdot \omega_g \circ T(A,g) \cdot \omega_f = \omega_{gf} \circ \varphi_{gf} \cdot \omega_A \ .$$

Par exemple un quasi-wedge projectif de sommet X et de base le 2-foncteur T : $\mathbb{A}^{op} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$ ($\mathbb{A}$ = 2-catégorie)[8] est un cas particulier de la notion ci-dessus.

Soient $\{\omega_A, \omega_f\}$ et $\{\sigma_A, \sigma_f\}$ deux quasi-wedges projectifs de base T : $\mathbb{A}^{op} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$ et de sommet X.

<u>Définition</u>. Une <u>modification</u> de $\{\omega_A, \omega_f\}$ vers $\{\sigma_A, \sigma_f\}$ est une collection de 2-cellules

$$\{m_A : \omega_A \longrightarrow \sigma_A\}_{A \in \mathrm{Ob}\mathbb{A}}$$

telle que le diagramme suivant commute

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\omega_A"'] \arrow[dl, bend right=60, "\sigma_A"'] \arrow[dl, phantom, bend right=30, "\Leftarrow m_A"] \arrow[dr, "\omega_B"] \arrow[dr, bend left=60, "\sigma_B"] \arrow[dr, phantom, bend left=30, "m_B \Rightarrow"] & \\
T(A,A) \arrow[dr, "T(A,f)"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\omega_f}{\Rightarrow}\ \underset{\sigma_f}{\Rightarrow}"] & & T(B,B) \arrow[dl, "T(f,B)"] \\
 & T(A,B) &
\end{tikzcd}
\qquad f : A \to B
$$

i.e.

$$\sigma_f \circ T(A,f) \cdot m_A = T(f,B) \cdot m_B \circ \omega_f \; .$$

<u>Définition</u>. Le quasi-wedge projectif $\{\omega_A, \omega_f\}$ de base le bimorphisme $T : \mathbb{A}^{op} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$ et de sommet X est dit <u>fin cartésienne généralisée</u> si, pour tout quasi-wedge projectif $\{\sigma_A, \sigma_f\}$ de même base et de sommet X', il existe une seule flèche $\sigma : X' \to X$ telle que

$$\begin{cases} \omega_A \cdot \sigma = \sigma_A & , \forall A \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{A}, \\ \omega_f \cdot \sigma = \sigma_f & , \forall f \in \mathrm{Fl}\,\mathbb{A}, \end{cases}$$

et si, de plus, toute modification $\{m_A\}$ de $\{\sigma_A, \sigma_f\}$ vers $\{\bar{\sigma}_A, \bar{\sigma}_f\}$ induit une seule 2-cellule $m : \sigma \to \bar{\sigma}$ ($\bar{\sigma}$ est induite par $\{\bar{\sigma}_A, \bar{\sigma}_f\}$) telle que

$$\omega_A \cdot m = m_A \quad , \forall A \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{A}.$$

Dans ce cas on écrit $\mathrm{Cart}\text{-}\int_A^u T(A,A) = X$.

<u>Remarque</u>. Si on renverse le sens des 2-cellules ω_f, σ_f, etc,... dans les définitions ci-dessus on obtient une notion duale de fin cartésienne généralisée, notée $\mathrm{Cart}\text{-}\int_A^d T(A,A)$.

Si on suppose que les 2-cellules ω_f, σ_f, etc,... sont des identités, alors on obtient une notion de fin cartésienne généralisée, notée $\mathrm{Cart}\text{-}\int_A^e T(A,A)$.

<u>Exemples</u>. 1°. La fin cartésienne définie dans [8] est un cas particulier de la notion ci-dessus.

2°. Soient

$$T : \mathbb{A}^{op} \to \mathbb{W} \quad , \quad S : \mathbb{A} \to \mathbb{V}$$

deux morphismes et

$$\bigcirc : \mathbb{W} \times \mathbb{V} \to \mathbb{B}$$

un 2-foncteur; alors la cofin cartésienne généralisée du bimorphisme

$$\mathbb{A}^{op} \times \mathbb{A} \xrightarrow{(T,S)} \mathbb{W} \times \mathbb{V} \xrightarrow{\bigcirc} \mathbb{B}$$

est appelée <u>O-produit</u> deT et S, notée

$$T \underset{x}{\bigcirc} S = \text{Cart-}\int_x^A \bigcirc(TA, SA) \quad , \; x = u,d,e.$$

2_a) $\mathbb{W} = \mathbb{V}$, et $\mathbb{V}$ est à Cat-produits,

$$\bigcirc(-,-) = - \times - : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}.$$

2_b) $\mathbb{W} = \mathbb{C}at$ et $\mathbb{V}$ est à tenseurs,

$$\bigcirc(-,-) = - \boxtimes - : \mathbb{C}at \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}.$$

3°. Soient

$$T : \mathbb{A} \to \mathbb{W} \quad , \quad S : \mathbb{A} \to \mathbb{V}$$

deux morphismes et

$$\{-,-\} : \mathbb{W}^{op} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{B}$$

un 2-foncteur; alors la fin cartésienne généralisée du bimorphisme

$$\mathbb{A}^{op} \times \mathbb{A} \xrightarrow{(T^{op},S)} \mathbb{W}^{op} \times \mathbb{V} \xrightarrow{\{-,-\}} \mathbb{B}$$

est appelée $\{\ \}$-hom de T vers S:

$$\{T,S\}_x = \text{Cart-}\int_A^x \{TA, SA\} \quad , \; x = u,d,e.$$

3_a) $\mathbb{W} = \mathbb{V}$ et $\mathbb{V}$ est 2-cartésienne fermée,

$$\{-,-\} = (-)^{(-)} : \mathbb{V}^{op} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}.$$

3_b) $\mathbb{W} = \mathbb{C}at$ et $\mathbb{V}$ est à tenseurs:

$$\{-,-\} = (-)^{(-)} : \mathbb{C}at^{op} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}.$$

3_c) $\mathbb{W}=\mathbb{V}$ et

$$\{\_,\_\}=\mathbb{V}(\_,\_):\mathbb{V}^{op}\times\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{C}at.$$

§2. Existence de fins généralisées

Soient $T:\mathbb{A}^{op}\times\mathbb{A}\longrightarrow\mathbb{C}at$ un bimorphisme et $QF(T)$ la catégorie qui a comme objets les couples

$$X=(\{x_A\}_{A\in Ob\mathbb{A}},\ \{x_f\}_{f\in Fl\mathbb{A}}), \qquad (1)$$

où x_A est un objet de $T(A,A)$ et x_f est un morphisme dans $T(\partial_0 f,\partial_1 f)$ de $T(\partial_0 f,f)(x_{\partial_0 f})$ vers $T(f,\partial_1 f)(x_{\partial_1 f})$ de façon que:

i) pour tout couple de flèches composables $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ de $\mathbb{A}$ le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
g_A f_A(x_A) \arrow[r, "g_A(x_f)"] \arrow[d, "(\varphi_{gf})_{x_A}"] & g_A f^B(x_B)=f^C g_B(x_B) \arrow[r, "f^C(x_g)"] & f^C g^C(x_C) \arrow[d, "(\varphi^{gf})_{x_C}"] \\
(gf)_A(x_A) \arrow[rr, "x_{gf}"] & & (GF)^C(x_C)
\end{tikzcd} ;$$

ii) pour toute 2-cellule $\lambda:f\to g:A\to B$ de $\mathbb{A}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
f_A(x_A) \arrow[r, "(\lambda_A)_{x_A}"] \arrow[d, "x_f"'] & g_A(x_a) \arrow[d, "x_g"] \\
f^B(x_B) \arrow[r, "(\lambda_B)_{x_B}"] & g^B(x_b)
\end{tikzcd} ;$$

iii) pour tout objet A de $\mathbb{A}$ le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
x_A \arrow[r, bend left, "(\eta_A)_{x_A}"] \arrow[dr, bend right, "(\eta^A)_{x_A}"'] & (I_A)_A(x_A) \arrow[d, "x_{1_A}"] \\
& (I_A)^A(x_A)
\end{tikzcd}$$

On a posé pour simplifier l'écriture

$$T(A,g)=g_A \ ,T(f,B)=g^B,\ T(\lambda,A)=\lambda^A,\ T(B,\lambda)=\lambda_B,\ \text{etc...}$$

Un morphisme dans QF(T) de l'objet (1) vers l'objet

$$Y = (\{y_A\}_{A\in \mathrm{Ob}\mathbb{A}}, \{y_f\}_{f\in \mathrm{Fl}\mathbb{A}})$$

est une famille

$$\{m_A : x_A \longrightarrow y_A\}_{A\in \mathrm{Ob}\mathbb{A}}$$

telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
f_A(x_A) \arrow[r, "f_A(m_A)"] \arrow[d, "x_f"'] & f_A(y_A) \arrow[d, "y_f"] \\
f^B(x_B) \arrow[r, "f^B(m_B)"'] & f^B(y_B)
\end{tikzcd} ,$$

pour toute flèche $f:A \longrightarrow B$ de $\mathbb{A}$.

Alors il est facile de voir que QF(T) est une catégorie; on a les foncteurs projections

$$pr_A : QF(T) \longrightarrow T(A,A)$$

définis par

$$\begin{cases} pr_A(\{x_B\}_{B\in \mathrm{Ob}\mathbb{A}}, \{x_f\}_{f\in \mathrm{Fl}\mathbb{A}}) = x_A \\ pr_A\{m_A\}_{A\in \mathrm{Ob}\mathbb{A}} = m_A \end{cases}$$

et les transformations naturelles

$$pr_f : T(A,f)\cdot pr_A \longrightarrow T(f,B)\cdot pr_B \ ,\ f:A\longrightarrow B,$$

définies par

$$(pr_f)(\{x_C\},\{x_B\}) = x_f : f_A(x_A) \longrightarrow f^B(x_b).$$

Le lecteur vérifiera que le système $\{pr_A, pr_f\}$ est la u-fin cartésienne généralisée de T.

Applications.

1. Soient $F,G : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ deux morphismes de bicatégories et

$$\mathbb{B}(F(-),G(-)) : \mathbb{A}^{op} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{C}at$$

le bimorphisme associé.

Dans ce cas les objets de $QF(\mathbb{B}(F(-),G(-)))$ sont les familles de flèches de $\mathbb{B}$

$$\{\sigma_A : FA \longrightarrow GA\}_{A \in Ob\mathbb{A}}$$

et de 2-cellules de $\mathbb{B}$

$$\{\sigma_f : Gf \cdot \sigma_{\partial_0 f} \longrightarrow \sigma_{\partial_1 f} \cdot Ff\}_{f \in F1\mathbb{A}}$$

telles que

i) pour tout $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ dans $\mathbb{A}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[rrd, "Fgf"'] \arrow[dd, "\sigma_A"'] & FB \arrow[rd, "Fg"] \arrow[dd, "\sigma_B"] \arrow[d, phantom, "\varphi_{gf}"] & \\
 & \; & FC \arrow[dd, "\sigma_C"] \\
GA \arrow[r, "Gf"] \arrow[rrd, "Ggf"'] \arrow[r, phantom, bend left, "\sigma_f"] & GB \arrow[rd, "Gg"] \arrow[d, phantom, "\varphi_{gf}"] & \arrow[d, phantom, "\sigma_{gf}\ \sigma_g"] \\
 & \; & GC
\end{tikzcd}$$

;

ii) pour $\lambda : f \to g : A \to B$ dans $\mathbb{A}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, bend left, "Ff"] \arrow[r, bend right, "Fg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\lambda"] \arrow[d, "\sigma_A"'] & FB \arrow[d, "\sigma_B"] \arrow[d, phantom, shift right=3ex, "\sigma_g\ \sigma_f"] \\
GA \arrow[r, bend left, "Gf"] \arrow[r, bend right, "Gg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow G\lambda"] & GB
\end{tikzcd}$$

;

iii) pour tout $A \in Ob\mathbb{A}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=huge]
FA \arrow[r, bend left, "I_{FA}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "F(I_A)"'{name=D}] \arrow[d, "\sigma_A"'] & FA \arrow[d, "\sigma_A"] \\
GA \arrow[r, bend left, "I_{GA}"{name=U2}] \arrow[r, bend right, "G(I_A)"'{name=D2}] & GA
\arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "n_A"]
\arrow[Rightarrow, from=U2, to=D2, "n_A"]
\end{tikzcd}
\quad \sigma_{I_A}$$

Enfin les morphismes de QF($\mathbb{B}$(F(_),G(_))) sont les familles de 2-cellules de $\mathbb{B}$

$$\{m_A : \sigma_A \longrightarrow \bar{\sigma}_A\}_{A \in \mathrm{Ob}\mathbb{A}}$$

qui font commuter les diagrammes de la forme

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, bend right, "\sigma_A"'{name=L}] \arrow[d, bend left, "\bar{\sigma}_A"{name=R}] & FB \arrow[d, bend right, "\sigma_B"'{name=L2}] \arrow[d, bend left, "\bar{\sigma}_B"{name=R2}] \\
GA \arrow[r, "Gf"'] & GB
\arrow[Rightarrow, from=L, to=R, "m_A"']
\arrow[Rightarrow, from=L2, to=R2, "m_B"']
\end{tikzcd}
\quad \sigma_f,\ \bar{\sigma}_f .$$

Donc

$$\text{QF}(\mathbb{B}(F(\_),G(\_))) = \text{Pseud}(\mathbb{A},\mathbb{B})(F,G) \qquad [14],$$

c'est-à-dire

$$\text{Pseud}(\mathbb{A},\mathbb{B})(F,G) = \text{Cart-}\int_A^{u} \mathbb{B}(FA,GA).$$

2\. Soit $M: \mathbb{1}^{op} \times \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{C}at$ un bimorphisme, i.e. un couple de monades commutatives sur une catégorie $\underline{A}$ (v. ex.2,§1).

$$\begin{tikzcd}
\underline{A} \arrow[loop left, "T"] \arrow[loop right, "T'"]
\end{tikzcd}$$

Alors la catégorie QF(M) a comme objets les couples (a,h),où $a \in \mathrm{Ob}\underline{A}$ et $h: Ta \longrightarrow T'a$, de façon que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} T^2a \arrow[r, "Th"] \arrow[d, "\mu_T"'] & TT'a=T'Ta \arrow[r, "T'h"] & T'^2a \arrow[d, "\mu_{T'}"] \\ Ta \arrow[rr, "h"] & & T'a \end{tikzcd}$$

ii)
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[dr, "\eta'_a"'] & Ta \arrow[d, "h"] \\ & T'a \end{tikzcd} ,$$

μ, μ' et η, η' étant les multiplications et les unités des monades T et T' respectivement.

Un morphisme dans QF(M) de (a,h) vers (b,k) est un morphisme $f: a \to b$ de $\underline{A}$ tel que

$$\begin{tikzcd} Ta \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "h"'] & Tb \arrow[d, "k"] \\ T'a \arrow[r, "T'f"'] & T'b \end{tikzcd} .$$

En d'autres termes

$$\text{Cart-}\int_1^u M(1,1) = \mathcal{A}lg(\mathrm{Id}) ,$$

où $\mathcal{A}lg(\mathrm{Id})$ désigne la catégorie des algèbres par rapport à la loi distributive

$$\mathrm{Id}: TT' \Rightarrow T'T \quad [3].$$

Par exemple si T' est la monade identique sur $\underline{A}$, on a

$$\mathcal{A}lg(\mathrm{Id}) = \mathcal{A}lg(T).$$

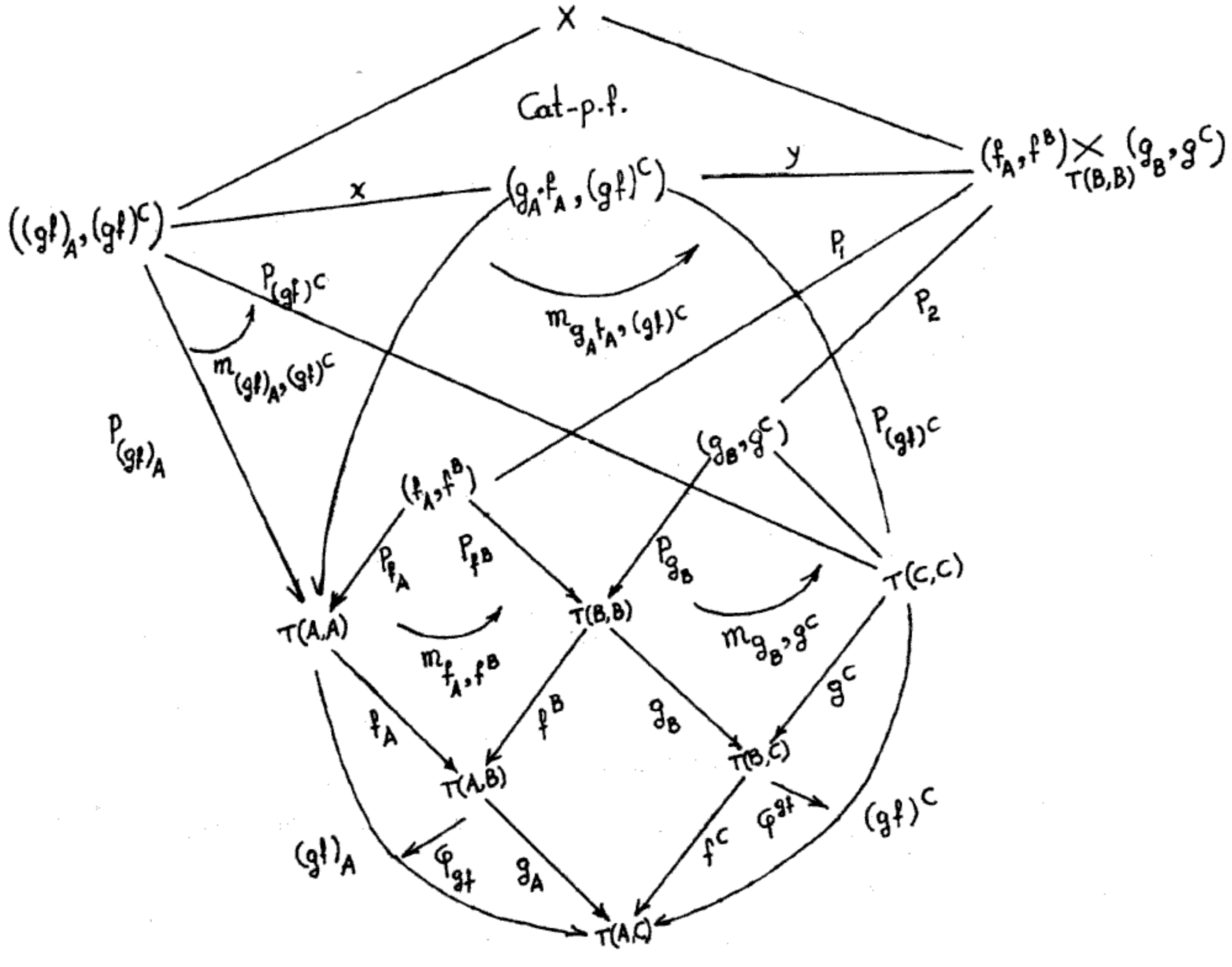
<u>Théorème d'existence de fins cartésiennes généralisées</u>.

Une 2-catégorie $\mathbb{V}$ admet des fins cartésiennes généralisées projectives dès qu'elle possède des objets commas et Cat-limites projectives.

Par exemple, les 2-catégories $\mathbb{C}$at, $\mathcal{U}$-$\mathbb{C}$at, $\mathbb{C}$at($\underline{E}$), $\mathbb{F}$ib($\underline{B}$), $\mathbb{O}$rd, etc, sont à fins cartésiennes généralisées.

<u>**Preuve**</u>. Soit T: $\mathbb{A}^{op} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$ un bimorphisme.

Pour tout couple de flèches composables $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ de $\mathbb{A}$, on construit le cône suivant



où: f_A, g^B, etc, sont les abréviations des T(A,f), T(g,B), etc,

$$\begin{tikzcd}
 & (a,b) \arrow[dl, "p_a"'] \arrow[dr, "p_b"] & \\
\cdot \arrow[dr, "a"'] \arrow[rr, phantom, "m_{a,b}"] & & \cdot \arrow[dl, "b"] \\
 & \cdot &
\end{tikzcd}$$

désigne l'objet comma des flèches a et b respectivement, y et x sont les flèches induites pat les 2-cellules

$$\varphi^{gf} \cdot p_{gC} \cdot p_2 \circ f^C \cdot m_{g_B, g^C} \cdot p_2 \circ g_A \cdot m_{f_A, f^B} \cdot p_1$$

et

$$m_{(gf)_A, (gf)^C} \circ \varphi_{gf} \cdot p_{(gf)_A}$$

respectivement et enfin X est le Cat-produit fibré de x et y. D'une manière analogue on construit pour toute 2-cellule $\lambda : f \longrightarrow g : A \longrightarrow B$ de $\mathbb{A}$ et pour tout objet A de $\mathbb{A}$, des cônes dont les bases sont

$$\begin{tikzcd}
T(A,A) \arrow[r, bend left, "T(A,f)"] \arrow[r, bend right, "T(A,g)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow T(A,\lambda)"] & T(A,B) & T(B,B) \arrow[l, bend right, "T(f,B)"'] \arrow[l, bend left, "T(g,B)"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow T(\lambda,B)"]
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
T(A,A) \arrow[r, bend left, "1_{T(A,A)}"] \arrow[r, bend right, "T(A,I_A)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta_A"] & T(A,A) & T(A,A) \arrow[l, bend right, "1_{T(A,A)}"'] \arrow[l, bend left, "T(I_A,A)"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow \eta^A"]
\end{tikzcd}$$

respectivement, et ensuite en prenant la Cat-limite projective de tous ces cônes on trouve la fin cartésienne généralisée désirée. ∎

C H A P I T R E   III

BICATÉGORIES RELATIVES À UNE 2-CATÉGORIE MULTIPLICATIVE

Dans ce chapitre on "relativise" les notions de bicatégorie, de morphisme (pseudo-foncteur) entre bicatégories, de bicatégorie exacte, etc. Ensuite on construit le produit tensoriel de bicatégories relatives, la bicatégorie polynomiale relative associée à une bicatégorie $\mathbb{I}$ et à une bicatégorie relative $\mathbb{A}$ et enfin les duales ${}^{op}\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^{op}$, ${}^{op}\mathbb{A}^{op}$, etc, d'une bicatégorie relative $\mathbb{A}$.

§1. <u>2-catégories multiplicatives</u>

Une <u>2-catégorie multiplicative</u> est un sextuplet $(\mathbb{V},\otimes,I,\alpha,\lambda,\rho)$, où

1) $\mathbb{V}$ est une 2-catégorie,
2) $\otimes:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ est un 2-foncteur,
3) I est un objet de $\mathbb{V}$,
4) α, λ et ρ sont des isomorphismes Cat-naturels

$$\alpha_{UVW}:(U\otimes V)\otimes W \xrightarrow{\sim} U\otimes(V\otimes W) \ ,$$
$$\lambda_V: I\otimes V \xrightarrow{\sim} V \ ,$$
$$\rho_V: V\otimes I \xrightarrow{\sim} V.$$

Ces données sont assujetties à vérifier les conditions de cohérence habituelles.

Une 2-catégorie multiplicative $(\mathbb{V},\otimes,I,\alpha,\lambda,\rho)$ est dite <u>symétrique</u> si, pour tous $V,W\in \mathrm{Ob}\mathbb{V}$, on a un isomorphisme Cat-naturel

$$s_{V,W}: V\otimes W \xrightarrow{\sim} W\otimes V$$

et la cohérence usuelle.

Une 2-catégorie multiplicative $(\mathbb{V},\otimes,I,\alpha,\lambda,\rho)$ est dite <u>fermée</u> si, pour tout objet V de $\mathbb{V}$, le 2-foncteur $V\otimes\_ : \mathbb{V}\to\mathbb{V}$ admet un Cat-adjoint à droite $(\_)^V : \mathbb{V}\to\mathbb{V}$, à savoir

$$\mathbb{V}(V\otimes W,U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(W,U^V).$$

<u>Exemples</u>. 1°. Soit $\mathbb{V}$ une 2-catégorie. Le <u>Cat-produit</u> des objets V et U de $\mathbb{V}$ est défini par l'isomorphisme

$$\mathbb{V}(W,V\times U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(W,V)\times\mathbb{V}(W,U)$$

naturel en W.

L'objet 1 de $\mathbb{V}$ est dit <u>Cat-terminal</u> si $\mathbb{V}(V,1)=\mathbb{1}$, $V\in \mathrm{Ob}\,\mathbb{V}$, où $\mathbb{1}$ désigne la catégorie terminale.

$\mathbb{V}$ est <u>cartésienne</u> si elle admet un objet Cat-terminal et si le Cat-produit $V\times U$ existe, $\forall V,U\in \mathrm{Ob}\,\mathbb{V}$.

Il y a beaucoup d'exemples de 2-catégories cartésiennes:

1_a) $\mathbb{C}\mathrm{at}$, la 2-catégorie de petites catégories, est cartésienne fermée.

1_b) $\mathbb{F}\mathrm{ib}(\underline{B})$, la 2-catégorie de fibrations au dessus de $\underline{B}$; tenant compte de l'isomorphisme $\mathcal{Z}$ (ch.0), le Cat-produit des fibrations $p:\underline{E}\to\underline{B}$ et $p':\underline{E}'\to\underline{B}'$ sera la fibration $p\times p'$, dont la fibre au-dessus de l'objet B de $\underline{B}$ est le produit des fibres $p^{-1}(B)\times p'^{-1}(B)$ tandis que le foncteur "image inverse" au-dessus de $f\in \mathrm{Fl}\,\underline{B}$ est le produit $f^*_p\times f^*_{p'}$. Donc $\mathbb{F}\mathrm{ib}(\underline{B})$ est cartésienne.

Elle est aussi fermée. Pour démontrer ceci, soit $B\in \mathrm{Ob}(\underline{B})$; alors on a un foncteur $\partial_0^B:(\underline{B},B)\to\underline{B}$ (où $(\underline{B},B)$ désigne la catégorie comma des foncteurs $\underline{B}\xrightarrow{Id}\underline{B}\xleftarrow{\ulcorner B\urcorner}\mathbb{1}$)

qui au morphisme $f:C\to B$ associe sa source C.

Il est facile de voir que ∂_0^B est une fibration avec la propriété que, pour toute fibration $p: \underline{E} \longrightarrow \underline{B}$, on a

$$\mathbb{F}\mathrm{ib}(\underline{B})(\partial_0^B, p) \simeq p^{-1}(B) . \qquad (1)$$

Si donc on se donne deux fibrations p et p', alors en utilisant (1) on définit la fibration $p^{p'}$ par la formule

$$p^{p'}(B) = \mathbb{F}\mathrm{ib}(\underline{B})(\partial_0^B \times p', p).$$

1_c) $\mathbb{C}\mathrm{at}(\underline{E})$, la 2-catégorie des catégories internes à $\underline{E}$, où $\underline{E}$ est à limites projectives finies. Si $C=(C_0, C_1, \partial_0^C, \partial_1^C, \mu^C, n^C)$ et $D=(D_0, D_1, \partial_0^D, \partial_1^D, \mu^D, n^D)$ sont deux catégories internes, alors le produit $C\times D$ sera la catégorie interne

$$(C_0\times D_0, C_1\times D_1, \partial_0^C\times\partial_0^D, \partial_1^C\times\partial_1^D, \mu^C\times\mu^D, n^C\times n^D) .$$

Si de plus $\underline{E}$ est cartésienne fermée, $\mathbb{C}\mathrm{at}(\underline{E})$ est fermée.

2°. $\mathbb{V}=\mathcal{U}$-$\mathbb{C}\mathrm{at}$, la 2-catégorie des $\mathcal{U}$-catégories, où $\mathcal{U}$ est une catégorie multiplicative symétrique. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des $\mathcal{U}$-catégories, alors $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ est la $\mathcal{U}$-catégorie définie par :

$$\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} = \mathrm{Ob}\mathcal{A}\times\mathrm{Ob}\,\mathcal{B} ,$$

$$(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})((A,B),(A',B')) = \mathcal{A}(A,A')\otimes\mathcal{B}(B,B') \text{ , etc,...}$$

$\mathcal{U}$-$\mathbb{C}\mathrm{at}$ est fermée si $\mathcal{U}$ est fermée à limites projectives. En effet la $\mathcal{U}$-catégorie $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ a comme objets les $\mathcal{U}$-foncteurs de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$ tandis que, pour $F,G:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ $\mathrm{Ob}\in\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$, l'objet $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(F,G)$ est donné par le noyau

$$\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(F,G) \longrightarrow \prod_{A\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}} \mathcal{B}(FA,GA) \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} \prod_{A,B\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}} \mathcal{B}(FA,GB)^{\mathcal{A}(A,B)} , \qquad (2)$$

où $\overline{\mathrm{pr}_{(A,B)}\cdot\partial_0}$ et $\overline{\mathrm{pr}_{(A,B)}\cdot\partial_1}$ sont les composés

$$\mathcal{B}(FA,GA)\otimes\mathcal{A}(A,B) \xrightarrow[1\otimes G_{AB}]{} \mathcal{B}(FA,GA)\otimes\mathcal{B}(GA,GB) \xrightarrow[\text{comp.}]{} \mathcal{B}(FA,GB) ,$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{B}(FA,GB)\otimes\mathcal{A}(A,B) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{A}(A,B)\otimes\mathcal{B}(FB,GB) \arrow[rr, "F_{AB}\otimes 1"'] & & \mathcal{B}(FA,FB)\otimes\mathcal{B}(FB,GB) \arrow[d, "\text{comp.}"] \\
& & & \mathcal{B}(FA,GB)
\end{tikzcd}$$

respectivement, le $\tilde{g}$ signifiant l'image de g par l'adjonction

$$\mathcal{U}(V,U^W)\simeq\mathcal{U}(W\otimes V,U).$$

3° Une 2-catégorie multiplicative localement discrète est une catégorie multiplicative.

4° Soient $\mathbb{V}$ une 2-catégorie multiplicative et $\mathbb{I}$ une 2-catégorie; alors la 2-catégorie $\mathrm{Fun}(\mathbb{I},\mathbb{V})$ (v. [14]) dont les objets sont les 2-foncteurs de $\mathbb{I}$ vers $\mathbb{V}$, les flèches les transformations quasi-naturelles et les 2-cellules les modifications entre ces transformations est aussi multiplicative.

En effet le 2-foncteur

$$\otimes:\mathrm{Fun}(\mathbb{I},\mathbb{V})\times\mathrm{Fun}(\mathbb{I},\mathbb{V})\longrightarrow\mathrm{Fun}(\mathbb{I},\mathbb{V})$$

est défini point par point, i.e. pour $F,G\in\mathrm{Ob}\,\mathrm{Fun}(\mathbb{I},\mathbb{V})$ on a

$$(F\otimes G)_x=Fx\otimes Gx\ ,$$

où x désigne un objet, ou une flèche, ou bien une 2-cellule de $\mathbb{I}$. De la même façon $\otimes$ est défini sur les flèches et les 2-cellules de $\mathrm{Fun}(\mathbb{I},\mathbb{V})$.

Enfin l'objet "neutre" de $\mathrm{Fun}(\mathbb{I},\mathbb{V})$ est le 2-foncteur constant $J_{\mathbb{V}}:\mathbb{I}\to\mathbb{V}$ prenant la valeur I.

5° Soit $\mathbb{I}$ une 2-catégorie; alors la 2-catégorie $2\text{-}\mathrm{Cat}(\mathbb{I},\mathbb{I})=\mathbb{I}^{\mathbb{I}}$ des endo-2-foncteurs de $\mathbb{I}$, dont les flèches sont les transformations Cat-naturelles et les 2-cellules les modifications entre ces transformations, est multiplicative, le produit tensoriel étant la composition.

Un morphisme de la 2-catégorie multiplicative $(\mathbb{V},\otimes,I,\alpha,\lambda,\rho)$

vers la 2-catégorie multiplicative $(\mathbb{V}',\otimes',I',\alpha',\lambda',\rho')$ consiste à donner

1) Un 2-foncteur $\Phi:\mathbb{V}\to\mathbb{V}'$;

2) pour tous $U,V\in\mathrm{Ob}\mathbb{V}$, une transformation Cat-naturelle

$$\varphi_{UV}: \Phi U\otimes'\Phi V \to \Phi(U\otimes V) \text{ , et}$$

3) une flèche de $\mathbb{V}'$

$$\varphi_0 : I' \longrightarrow \Phi I.$$

Ces données sont assujetties à vérifier les conditions de cohérence habituelles.

Si les φ,φ_0 sont des isomorphismes (resp. identités), on parle d'un <u>homomorphisme</u> (resp. <u>homomorphisme strict</u>).

<u>Exemples</u>.1°. Un morphisme de 2-catégories multiplicatives localement discrètes (=catégories multiplicatives) est un morphisme de catégories multiplicatives.

2°. Pour chaque 2-catégorie multiplicative $\mathbb{V}$ le 2-foncteur

$$\mathbb{V}(I,-):\mathbb{V}\longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{at}$$

est muni d'une structure de morphisme (de 2-catégories multiplicatives) de manière canonique.

3°. Tout foncteur $F:\underline{E}\to\underline{E}'$ commutant avec les limites projectives finies induit un 2-foncteur

$$\mathbb{C}\mathrm{at}(F): \mathbb{C}\mathrm{at}(\underline{E})\longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{at}(\underline{E}')$$

défini par

$$\mathbb{C}\mathrm{at}(F)(D_0,D_1,\partial_0^D,\partial_1^D,\mu^D,n^D)=(FD_0,FD_1,F\partial_0^D,F\partial_1^D,F\mu^D,Fn^D).$$

Il est facile de voir que $\mathbb{C}\mathrm{at}(F)$ est un homomorphisme de 2-catégories multiplicatives.

4°. Tout morphisme $\Phi:\mathcal{U}\to\mathcal{U}'$ de catégories multiplicatives induit de manière canonique un morphisme

$$\Phi\text{-}\mathbb{C}\mathrm{at}: \mathcal{U}\text{-}\mathbb{C}\mathrm{at}\longrightarrow \mathcal{U}'\text{-}\mathbb{C}\mathrm{at}$$

de 2-catégories multiplicatives.

5° Tout foncteur $F:\underline{B}' \longrightarrow \underline{B}$ induit un 2-foncteur

$$\mathbb{F}\mathrm{ib}(F):\mathbb{F}\mathrm{ib}(\underline{B}) \to \mathbb{F}\mathrm{ib}(\underline{B}') \quad ,$$

qui envoie la fibration $p:\underline{E} \to \underline{B}$ sur la fibration associée au pseudo-foncteur

$$\underline{B}'^{op} \xrightarrow[F^{op}]{} \underline{B}^{op} \xrightarrow[p]{} \mathbb{C}\mathrm{at} \; .$$

$\mathbb{F}\mathrm{ib}(F)$ est en réalité un homomorphisme, comme il résulte du diagramme suivant

$$\underline{B}'^{op} \xrightarrow[F^{op}]{} \underline{B}^{op} \xrightarrow[(p,p')]{} \mathbb{C}\mathrm{at}\times\mathbb{C}\mathrm{at} \xrightarrow[-\times-]{} \mathbb{C}\mathrm{at} \quad ,$$

i.e.

$$\mathbb{F}\mathrm{ib}(F)(p\times p') \simeq \mathbb{F}\mathrm{ib}(F)(p) \times \mathbb{F}\mathrm{ib}(F)(p') \quad .$$

6° On a un homomorphisme canonique

$$R:\mathbb{C}\mathrm{at}(\underline{E}) \to \mathbb{F}\mathrm{ib}(\underline{E}) \quad ,$$

qui à chaque catégorie interne $D=(D_o,D_1,\partial_o^D,\partial_1^D,\mu^D,n^D)$ de $\underline{E}$ associe la fibration $R(D):\underline{E}^{op} \to \mathbb{C}\mathrm{at}$, définie par

$$R(D)(E)=(\mathrm{Hom}(E,D_o),\mathrm{Hom}(E,D_1),\mathrm{Hom}(E,\partial_o^D),\mathrm{Hom}(E,\partial_1^D),\mathrm{Hom}(E,\mu^D),\mathrm{Hom}(E,n^D)).$$

7° Si $(\Phi,\varphi,\varphi_o):\mathbb{V} \to \mathbb{V}'$ est un morphisme de 2-catégories multiplicatives, alors le 2-foncteur

$$\mathrm{Fun}(\mathbb{I},\Phi):\mathrm{Fun}(\mathbb{I},\mathbb{V}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbb{I},\mathbb{V}')$$

est aussi un morphisme de 2-catégories multiplicatives:

$$y_{FG}:\Phi F\otimes'\Phi G \to \Phi(F\otimes G) \quad ,$$

$$(y_{FG})_x=\varphi_{FxGx}:\Phi Fx\otimes'\Phi Gx \to \Phi(Fx\otimes Gx) \quad ,$$

$$(y_o)_x=\varphi_o : I' \to \Phi I \; .$$

$\mathrm{Fun}(\mathbb{I},\Phi)$ est un homomorphisme (resp. isomorphisme) ssi Φ l'est.

8°. Le 2-foncteur

$$\Phi : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}^{\mathbb{V}},$$

défini par

$$\Phi(x) = x \otimes - ,$$

où x désigne un objet, ou bien une flèche, ou bien une 2-cellule de $\mathbb{V}$, est un homomorphisme de 2-catégories multiplicatives ($\mathbb{V}^{\mathbb{V}}$ munie de la composition).

§2. <u>$\mathbb{V}$-Bicatégories</u>

Soit $(\mathbb{V}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho)$ une 2-catégorie multiplicative.

Une <u>bicatégorie relative à $\mathbb{V}$</u>, ou une <u>$\mathbb{V}$-bicatégorie</u>, consiste à se donner:

1) Une classe d'objets $A, B, C, \ldots$, notée $\mathrm{Ob}\mathbb{A}$;

2) Une fonction

$$\mathbb{A}(-,-) : \mathrm{Ob}\mathbb{A} \times \mathrm{Ob}\mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{Ob}\mathbb{V};$$

3) Pour tous $A, B, C \in \mathrm{Ob}\mathbb{A}$, une flèche de $\mathbb{V}$

$$(\circ_{\mathbb{A}})_{ABC} : \mathbb{A}(A,B) \otimes \mathbb{A}(B,C) \longrightarrow \mathbb{A}(A,C) \quad ;$$

4) Pour tout $A \in \mathrm{Ob}\mathbb{A}$, une flèche de $\mathbb{V}$

$$(n_{\mathbb{A}})_A : I \longrightarrow \mathbb{A}(A,A) \quad ;$$

5) Pour tous $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}\mathbb{A}$, une 2-cellule inversible de $\mathbb{V}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,C)\otimes\mathbb{A}(C,D) \arrow[r, "1\otimes\circ_{\mathbb{A}}"] \arrow[d, "\circ_{\mathbb{A}}\otimes 1"'] & \mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,D) \arrow[d, "\circ_{\mathbb{A}}"] \\
\mathbb{A}(A,C)\otimes\mathbb{A}(C,D) \arrow[r, "\circ_{\mathbb{A}}"'] \arrow[ur, phantom, "(a_{\mathbb{A}})_{ABCD}"] & \mathbb{A}(A,D)
\end{tikzcd}$$

6) Pour tous $A,B\in \mathrm{Ob}\mathbb{A}$, deux 2-cellules inversibles de $\mathbb{V}$

$$\begin{tikzcd}
I\otimes\mathbb{A}(A,B) \arrow[r, "(n_{\mathbb{A}})_A\otimes 1"] \arrow[dr, "\lambda"', "\sim"] & \mathbb{A}(A,A)\otimes\mathbb{A}(A,B) \arrow[d, "\circ_{\mathbb{A}}"] \arrow[dl, phantom, "(r_{\mathbb{A}})_{AB}"] \\
 & \mathbb{A}(A,B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(A,B)\otimes I \arrow[r, "1\otimes(n_{\mathbb{A}})_B"] \arrow[dr, "\rho"', "\sim"] & \mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,B) \arrow[d, "\circ_{\mathbb{A}}"] \arrow[dl, phantom, "(l_{\mathbb{A}})_{AB}"] \\
 & \mathbb{A}(A,B)
\end{tikzcd}$$

Ces données sont assujetties à vérifier les conditions de cohérence B_1) et B_2) ci-après:

B_1) Pour tous $A,B,C,D,E\in \mathrm{Ob}\mathbb{A}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,C)\otimes\mathbb{A}(C,D)\otimes\mathbb{A}(D,E) \arrow[rrr, "1\otimes 1\otimes\circ_{\mathbb{A}}"] \arrow[dr, "1\otimes\circ_{\mathbb{A}}\otimes 1"] \arrow[dd, "\circ_{\mathbb{A}}\otimes 1\otimes 1"'] & & & \mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,C)\otimes\mathbb{A}(C,E) \arrow[dr, "1\otimes\circ_{\mathbb{A}}"] \arrow[dd, "\circ_{\mathbb{A}}\otimes 1"' near start] \arrow[d, phantom, "1\otimes a_{\mathbb{A}}"] & \\
 & \mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,D)\otimes\mathbb{A}(D,E) \arrow[rrr, "1\otimes\circ_{\mathbb{A}}"] \arrow[dd, "\circ_{\mathbb{A}}\otimes 1"] & & \arrow[d, phantom, "/\!/"] & \mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,E) \arrow[dd, "\circ_{\mathbb{A}}"] \\
\mathbb{A}(A,C)\otimes\mathbb{A}(C,D)\otimes\mathbb{A}(D,E) \arrow[rrr, "1\otimes\circ_{\mathbb{A}}"] \arrow[dr, "\circ_{\mathbb{A}}\otimes 1"'] \arrow[r, phantom, "a_{\mathbb{A}}\otimes 1"] & & & \mathbb{A}(A,C)\otimes\mathbb{A}(C,E) \arrow[dr, "\circ_{\mathbb{A}}"] \arrow[r, phantom, "a_{\mathbb{A}}"] & \\
 & \mathbb{A}(A,D)\otimes\mathbb{A}(D,E) \arrow[rrr, "\circ_{\mathbb{A}}"'] & & \arrow[r, phantom, "a_{\mathbb{A}}\quad a_{\mathbb{A}}"] & \mathbb{A}(A,E)
\end{tikzcd}$$

B_2) Pour tous $A,B,C\in \mathrm{Ob}\mathbb{A}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{A}(A,B)\otimes I\otimes\mathbb{A}(B,C) \arrow[dll, "1\otimes(\eta_{\mathbb{A}})_B\otimes 1"'] \arrow[dd, "\wr"] \arrow[drr, "\wr"] \arrow[drr, phantom, bend left=60, "1\otimes l_{\mathbb{A}}"'] & & & \\
\mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,B)\otimes\mathbb{A}(B,C) \arrow[rrrr, "1\otimes\circ_{\mathbb{A}}"] \arrow[drr, "\circ_{\mathbb{A}}\otimes 1"'] \arrow[drr, phantom, bend left=40, "r_{\mathbb{A}}\otimes 1"] & & & & \mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,C) \arrow[dr, "\circ_{\mathbb{A}}"] \arrow[d, phantom, "a_{\mathbb{A}}"] & \\
 & & \mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,C) \arrow[rrr, "\circ_{\mathbb{A}}"'] & & & \mathbb{A}(A,C)
\end{tikzcd}$$

<u>Cas speciaux</u>. a) Une $\mathbb{V}$-bicatégorie dont les 2-cellules a, l, r sont des identités est dite <u>$\mathbb{V}$-2-catégorie</u>.

b) Une $\mathbb{V}$-bicatégorie à un seul objet est dite <u>catégorie $\mathbb{V}$-multiplicative</u>.

<u>Exemples</u>. 1°. Les $\mathbb{C}$at-bicatégories (resp. $\mathbb{C}$at-2-catégories, catégories $\mathbb{C}$at-multiplicatives) sont les bicatégories (resp. les 2-catégories, les catégories multiplicatives) ordinaires.

2°. $\mathbb{V}=\mathbb{F}\text{ib}(\underline{B})$; on a le résultat suivant :

<u>Proposition 2.1</u>. Il y a une bijection R entre la classe des $\mathbb{F}$ib($\underline{B}$)-bicatégories et la classe des pseudofoncteurs F de $\underline{B}^{op}$ vers la bicatégorie H·Bicat[2] (dont les objets sont les bicatégories, les flèches les homomorphismes de bicatégories et les 2-cellules les transformations isonaturelles entre homomorphismes) tels que

i) $\mathrm{Ob}\,F(B)=\mathrm{Ob}\,F(B')$, $\forall B,B'\in \mathrm{Ob}\underline{B}$ et

ii) $F(f)=\mathrm{Id}:\mathrm{Ob}F(B')\longrightarrow \mathrm{Ob}F(B)$, $\forall f\in \mathrm{Fl}\underline{B}, f:B\to B'$.

<u>Preuve</u>. Soit $\mathbb{P}$ une $\mathbb{F}\mathrm{ib}(\underline{B})$-bicatégorie; alors le pseudofoncteur $R(\mathbb{P})$ est défini comme suit:

$R(\mathbb{P})(B)$, $\forall B\in \mathrm{Ob}\underline{B}$, est la bicatégorie dont les objets sont ceux de $\mathbb{P}$, tandis que

$$R(\mathbb{P})(B)(X,Y)=\mathbb{P}_{XY}^{-1}(B)\quad,\quad \forall X,Y\in \mathrm{Ob}\mathbb{P},$$

où on a posé $\mathbb{P}_{XY}$ pour la fibration $\mathbb{P}(X,Y)$.

Enfin $R(\mathbb{P})(f)$, $\forall f:B\longrightarrow B'\in \mathrm{Fl}\underline{B}$, est l'homomorphisme qui est l'identité sur les objets, tandis que

$$R(\mathbb{P})(f)_{XY}=\mathbb{P}_{XY}^{-1}(f):R(\mathbb{P})(B')(X,Y)\longrightarrow R(\mathbb{P})(B)(X,Y).\ \blacksquare$$

3°. Pour $\mathbb{V}$ localement discrète on obtient la notion d'une $\mathbb{V}$-catégorie [4].

4°. $\mathbb{V}$=2-$\mathbb{C}$at munie du produit tensoriel de 2-catégories (resp. du produit de 2-catégories); alors les 2-$\mathbb{C}$at-bicatégories sont une notion un peu moins générale que les 2-$\mathbb{C}\mathrm{at}_{\otimes}$-bicatégories (resp. les tricatégories) de J.W.GRAY [14].

5°. $\mathbb{V}=\mathcal{U}$-$\mathbb{C}$at, où $\mathcal{U}$ est une catégorie multiplicative fermée, complète et cocomplète; alors la notion d'une $\mathcal{U}$-$\mathbb{C}$at-bicatégorie, ou simplement <u>$\mathcal{U}$-bicatégorie</u>, est intéressante:

On a une classe d'objets, $\mathrm{Ob}\mathbb{A}$; pour tous $A,B\in\mathrm{Ob}\mathbb{A}$, on a une $\mathcal{U}$-catégorie $\mathbb{A}(A,B)$; pour tous $A,B,C\in\mathrm{Ob}\mathbb{A}$, on a des $\mathcal{U}$-foncteurs $n_A:I\longrightarrow\mathbb{A}(A,A)$, $\circ_{ABC}:\mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,C)\longrightarrow\mathbb{A}(A,C)$ et enfin on a des $\mathcal{U}$-transformations naturelles $a:\circ\cdot(\circ\otimes 1)\longrightarrow\circ\cdot(1\otimes\circ)$, $r:\lambda\to\circ\cdot(n\otimes 1)$, $\ell:\rho\to\circ\cdot(1\otimes n)$, qui vérifient B_1) et B_2).

Si les a,r,ℓ sont des identités, on a les <u>$\mathcal{U}$-2-catégories</u>.

Citons quelques exemples de telles structures:

(a) La Ab-bicatégorie $\mathbb{B}$imod des bimodules, qui est définie comme suit:

Ses objets sont les anneaux A,B,C,...

Si A et B sont des anneaux, alors $\mathbb{B}\mathrm{imod}(A,B)$ est la Ab-catégorie des (A,B)-bimodules.

Enfin si $M\in \mathbb{B}\mathrm{imod}(A,B)$ et $N\in \mathbb{B}\mathrm{imod}(B,C)$, alors leur composé est le (A,C)-bimodule $M\underset{B}{\otimes}N$.

(b) $\mathcal{U}$-$\mathbb{C}\mathrm{at}$ elle-même est une $\mathcal{U}$-2-catégorie, quand $\mathcal{U}$ est fermée à limites projectives. On va esquisser comment on obtient les $\mathcal{U}$-foncteurs de composition. Soient

$$\mathcal{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathcal{B} \underset{\bar{G}}{\overset{\bar{F}}{\rightrightarrows}} \mathcal{C}$$

quatre $\mathcal{U}$-foncteurs. Définir un morphisme de $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(F,G)\otimes\mathcal{C}^{\mathcal{B}}(\bar{F},\bar{G})$ vers $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}(\bar{F}F,\bar{G}G)$, c'est définir deux morphismes

$$\prod_{A\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}}\mathcal{B}(FA,GA)\otimes\prod_{B\in\mathrm{Ob}\mathcal{B}}\mathcal{C}(\bar{F}B,\bar{G}B)\xrightarrow{\;f\;}\prod_{A\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}}\mathcal{C}(\bar{F}FA,\bar{G}GA)\ ,$$

$$\begin{gathered}\prod_{A,A'\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}}\mathcal{B}(FA,GA')^{\mathcal{A}(A,A')}\otimes\prod_{B,B'\in\mathrm{Ob}\mathcal{B}}\mathcal{C}(\bar{F}B,\bar{G}B')^{\mathcal{B}(B,B')}\\ \Big\downarrow g\\ \prod_{A,A'\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}}\mathcal{C}(\bar{F}FA,\bar{G}GA')^{\mathcal{A}(A,A')}\end{gathered}$$

tels que les ∂_0-et ∂_1-carrés commutent (§1,(2)).

On pose

$$\mathrm{pr}_A\cdot f=\prod_{A\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}}\mathcal{B}(FA,GA)\otimes\prod_{B\in\mathrm{Ob}\mathcal{B}}\mathcal{C}(\bar{F}B,\bar{G}B)\xrightarrow[\mathrm{pr}_A\otimes\mathrm{pr}_{GA}]{}\mathcal{B}(FA,GA)\otimes\mathcal{C}(\bar{F}GA,\bar{G}GA)$$

$$\xrightarrow[\bar{F}_{FA,GA}\otimes 1]{}\mathcal{C}(\bar{F}FA,\bar{F}GA)\otimes\mathcal{C}(\bar{F}GA,\bar{G}GA)\xrightarrow[\mathrm{comp.}]{}\mathcal{C}(\bar{F}FA,\bar{G}GA)$$

et

$$\mathrm{pr}_{(A,A')}\cdot g=\hat{K}\cdot(\mathrm{pr}_{(A,A')}\otimes\mathrm{pr}_{(FA,GA')})\ ,$$

où $\hat{K}$ est l'image par adjonction cartésienne du morphisme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A,A')\otimes \mathcal{B}(FA,GA')^{\mathcal{A}(A,A')} \otimes \mathcal{C}(\bar{F}FA,\bar{G}GA')^{\mathcal{B}(FA,GA')} \arrow[d, "ev \otimes 1"] \\
\mathcal{B}(FA,GA')\otimes \mathcal{C}(\bar{F}FA,\bar{G}GA')^{\mathcal{B}(FA,GA')} \arrow[d, "ev"] \\
\mathcal{C}(\bar{F}FA,\bar{G}GA')
\end{tikzcd}$$

La vérification est longue mais immédiate.

(c) Passons maintenant à la bicatégorie $\mathcal{U}$-Dist, des $\mathcal{U}$-distributeurs.

<u>Proposition 2.2.</u> $\mathcal{U}$-Dist admet une structure canonique de $\mathcal{U}$-bicatégorie, si $\mathcal{U}$ est un cosmos (i.e. est symétrique, fermée, à limites projectives et inductives).

<u>Preuve</u>. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{U}$-catégories.

i) <u>$\mathcal{U}$-Dist$(\mathcal{A},\mathcal{B})$ est une $\mathcal{U}$-catégorie</u>.

En effet si $\Phi,\Phi' : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B}$ sont des $\mathcal{U}$-distributeurs, alors l'objet $\mathcal{U}$-Dist$(\mathcal{A},\mathcal{B})(\Phi',\Phi)$ est le noyau suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}\text{-Dist}(\mathcal{A},\mathcal{B})(\Phi',\Phi) \arrow[r] & \displaystyle\prod_{A\in \mathrm{Ob}\mathcal{A},\, B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}} \Phi'(B,A)^{\Phi(B,A)} \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] & \displaystyle\prod_{\substack{A\in \mathrm{Ob}\mathcal{A},\, A'\in \mathrm{Ob}\mathcal{A} \\ B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B},\, B'\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}}} \Phi'(B',A')^{\mathcal{B}(B',B)\otimes \Phi(B,A)\otimes \mathcal{A}(A,A')}
\end{tikzcd} \qquad (3)$$

où

$$pr_{(A,A',B,B')}\cdot \partial_0 = \hat{f}\cdot pr_{(A',B')} \quad ,$$

$\hat{f}$ étant l'image par adjonction cartésienne du composé

$$\begin{array}{c}
\mathcal{B}(B',B)\otimes\Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A')\otimes\Phi'(B',A')^{\Phi(B',A')} \\
\Big\downarrow {\scriptstyle 1\otimes(\varphi_{B'B}\cdot\varphi_{AA'})} \\
\Phi(B',A')\otimes\Phi'(B',A')^{\Phi(B',A')} \\
\Big\downarrow {\scriptstyle ev} \\
\Phi'(B',A')
\end{array}$$

et $\qquad pr_{(A,A',B,B')}\cdot\partial_1=\hat{g}\; pr_{(A,B)}$,

$\hat{g}$ étant l'image par adjonction cartésienne du composé

$$\begin{array}{c}
\mathcal{B}(B',B)\otimes\Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A')\otimes\Phi'(B,A)^{\Phi(B,A)} \\
\Big\downarrow \wr \\
\mathcal{B}(B',B)\otimes\mathcal{A}(A,A')\otimes\Phi(B,A)\otimes\Phi'(B,A)^{\Phi(B,A)} \\
\Big\downarrow {\scriptstyle 1\otimes 1\otimes ev} \\
\mathcal{B}(B',B)\otimes\mathcal{A}(A,A')\otimes\Phi'(B,A) \\
\Big\downarrow \wr \\
\mathcal{B}(B',B)\otimes\Phi'(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A') \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \varphi'_{B'B}\cdot\varphi_{AA'}} \\
\Phi'(B',A') .
\end{array}$$

ii)<u>Les $\mathcal{U}$-catégories $\mathcal{U}$-$\mathcal{D}$ist$(\mathcal{A},\mathcal{B})$ s'organisent en une $\mathcal{U}$-bicatégorie.</u>

Soient

$$\mathcal{A} \overset{\Phi}{\underset{\Phi'}{\rightrightarrows}} \mathcal{B} \overset{\Psi}{\underset{\Psi'}{\rightrightarrows}} \mathcal{C}$$

quatre distributeurs.

Définir un morphisme de $\mathcal{U}$-Dist$(\mathcal{A},\mathcal{B})(\Phi,\Phi')\otimes\mathcal{U}$-Dist$(\mathcal{B},\mathcal{C})(\Psi,\Psi')$ vers $\mathcal{U}$-Dist$(\mathcal{A},\mathcal{B})(\Psi\circ\Phi,\Psi'\circ\Phi')$, c'est définir deux morphismes

$$\prod_{\substack{A\in \mathrm{Ob}\mathcal{A}\\ B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}}} \Phi'(B,A)^{\Phi(B,A)} \otimes \prod_{\substack{B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}\\ C\in \mathrm{Ob}\mathcal{C}}} \Psi'(C,B)^{\Psi(C,B)} \xrightarrow{\ k\ } \prod_{\substack{A\in \mathrm{Ob}\mathcal{A}\\ C\in \mathrm{Ob}\mathcal{C}}} (\Psi'\circ\Phi')(C,A)^{(\Psi\circ\Phi)(C,A)},$$

$$\begin{array}{c}
\displaystyle\prod_{\substack{A,A'\in \mathrm{Ob}\mathcal{A}\\ B,B'\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}}} \Phi'(B',A')^{\mathcal{B}(B',B)\otimes\Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A')} \otimes \prod_{\substack{B,B'\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}\\ C,C'\in \mathrm{Ob}\mathcal{C}}} \Psi'(C',B')^{\mathcal{C}(C',C)\otimes\Psi(C,B)\otimes\mathcal{B}(B,B')}\\
\Big\downarrow \lambda\\
\displaystyle\prod_{\substack{A,A'\in \mathrm{Ob}\mathcal{A}\\ C,C'\in \mathrm{Ob}\mathcal{C}}} (\Psi'\circ\Phi')(C',A')^{\mathcal{C}(C',C)\otimes(\Psi\circ\Phi)(C,A)\otimes\mathcal{A}(A,A')}
\end{array}$$

de façon que les ∂_0-et ∂_1-carrés commutene (v.(3)).

On pose

$$\mathrm{pr}_{(A,C)}\cdot k=\hat{x}_{C,A}\cdot\tilde{\mathrm{pr}}_{C,A}\ ,$$

où $\tilde{\mathrm{pr}}_{C,A}$ est la projection

$$\prod_{\substack{A\in \mathrm{Ob}\mathcal{A}\\ B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}}} \Phi'(B,A)^{\Phi(B,A)} \otimes \prod_{\substack{B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}\\ C\in \mathrm{Ob}\mathcal{C}}} \Psi'(C,B)^{\Psi(C,B)} \longrightarrow \prod_{B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}} \Phi'(B,A)^{\Phi(B,A)} \otimes \prod_{B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}} \Psi'(C,B)^{\Psi(C,B)}$$

et où $x_{C,A}$ est défini comme suit:

Étant donné que $(\Psi\circ\Phi)(C,A)$ est le conoyau (2),ch.0, il suffit de trouver deux morphismes

$$\begin{array}{c}
\coprod_{\bar{B}\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}} \Psi(C,\bar{B})\otimes \Phi(\bar{B},A)\otimes\left\{\prod_{B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}} \Phi'(B,A)^{\Phi(B,A)} \otimes \prod_{B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}} \Psi'(C,B)^{\Psi(C,B)}\right\} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mu} \\
\coprod_{B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}} \Psi'(C,B)\otimes \Phi'(B,A)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\coprod_{B,B'\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}} \Psi(C,B)\otimes \mathcal{B}(B,B')\otimes \Phi(B',A)\otimes\left\{\prod_{B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}} \Phi'(B,A)^{\Phi(B,A)} \otimes \prod_{B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}} \Psi'(C,B)^{\Psi(C,B)}\right\} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \nu} \\
\coprod_{B,B'\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}} \Psi'(C,B)\otimes \mathcal{B}(B,B')\otimes \Phi'(B',A)
\end{array}$$

qui rendent commutatifs les ∂_0- et ∂_1-carrés.

On pose

$$\mu \cdot \mathrm{in}_B = \mathrm{in}_{\bar{B}} \cdot \hat{\rho} \ ,$$

où $\hat{\rho}$ est l'image par adjonction cartésienne du composé suivant

$$\begin{array}{c}
\Psi(C,\bar{B})\otimes \Phi(\bar{B},A)\otimes\left\{\prod_{B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}} \Phi'(B,A)^{\Phi(B,A)} \otimes \prod_{B\in \mathrm{Ob}\mathcal{B}} \Psi'(C,B)^{\Psi(C,B)}\right\} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle 1\otimes 1\otimes \mathrm{pr}_{\bar{B}}\otimes \mathrm{pr}_{\bar{B}}} \\
\Psi(C,\bar{B})\otimes \Phi(\bar{B},A)\otimes \Phi'(\bar{B},A)^{\Phi(\bar{B},A)} \otimes \Psi'(C,\bar{B})^{\Psi(C,\bar{B})} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle 1\otimes \mathrm{ev}\otimes 1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Big\downarrow {\scriptstyle 1\otimes ev\otimes 1} \\ \Psi(C,\bar{B})\otimes\Phi'(\bar{B},A)\otimes\Psi'(C,\bar{B})^{\Psi(C,\bar{B})} \\ \Big\downarrow \wr \\ \Phi'(\bar{B},A)\otimes\Psi(C,\bar{B})\otimes\Psi'(C,\bar{B})^{\Psi(C,\bar{B})} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle 1\otimes ev} \\ \Phi'(\bar{B},A)\otimes\Psi'(C,\bar{B}) \; , \end{array}$$

et

$$V\cdot \mathrm{in}_{(\bar{B},\bar{B}')}=\mathrm{in}_{(\bar{B},\bar{B}')}\cdot\hat{\xi} \; ,$$

où ξ est le morphisme suivant:

$$\begin{array}{c} \Psi(C,\bar{B})\otimes\mathcal{B}(\bar{B},\bar{B}')\otimes\Phi(\bar{B}',A)\otimes\left\{\prod_{B\in Ob\mathcal{B}}\Phi'(B,A)^{\Phi(B,A)}\otimes\prod_{B\in Ob\mathcal{B}}\Psi'(C,B)^{\Psi(C,B)}\right\} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle 1\otimes 1\otimes 1\otimes pr_{\bar{B}'}\otimes pr_{\bar{B}}} \\ \Psi(C,\bar{B})\otimes\mathcal{B}(\bar{B},\bar{B}')\otimes\Phi(\bar{B}',A)\otimes\Phi'(\bar{B}',A)^{\Phi(\bar{B}',A)}\otimes\Psi'(C,\bar{B})^{\Psi(C,\bar{B})} \\ \Big\downarrow \wr \\ \mathcal{B}(\bar{B},\bar{B}')\otimes\Phi(\bar{B}',A)\otimes\Phi'(\bar{B}',A)^{\Phi(\bar{B}',A)}\otimes\Psi(C,\bar{B})\otimes\Psi'(C,\bar{B})^{\Psi(C,\bar{B})} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle 1\otimes ev\otimes ev} \\ \mathcal{B}(\bar{B},\bar{B}')\otimes\Phi'(\bar{B}',A)\otimes\Psi'(C,\bar{B}) \\ \Big\downarrow \wr \\ \Psi'(C,\bar{B})\otimes\mathcal{B}(\bar{B},\bar{B}')\otimes\Phi'(\bar{B}',A) \; . \end{array}$$

On vérifie avec peine que ce sont les morphismes désirés, d'où l'existence de k. L'existence de λ résulte d'un argument analogue. Toutes les autres assertions se prouvent à l'aide de larges diagrammes. ■

Un autre exemple de $\mathcal{U}$-bicatégorie est $\mathbb{M}at(\mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ est un cosmos, définie comme suit:

$Ob\,\mathbb{M}at(\mathcal{U})$= les petits ensembles I,J,K,...

$\mathbb{M}at(\mathcal{U})(I,J)$ est la $\mathcal{U}$-catégorie dont les objets sont les familles $(A_{ij})_{i\in I, j\in J}$, $A_{ij}\in Ob\,\mathcal{U}$;

pour $(A_{ij}),(B_{ij})\in Ob\,\mathbb{M}at(\mathcal{U})(I,J)$ on a

$$\mathbb{M}at(\mathcal{U})(I,J)((A_{ij}),(B_{ij}))= \prod_{(i,j)\in I\times J} B_{ij}{}^{A_{ij}} .$$

6° $\mathbb{V}=\mathbb{C}at(\underline{E})$, où $\underline{E}$ est à produits fibrés; alors la notion d'une $\mathbb{C}at(\underline{E})$-bicatégorie, ou simplement $\underline{E}$-bicatégorie, est intéressante: on a une classe d'objets $Ob\mathbb{A}$; pour tous $A,B\in Ob\mathbb{A}$ on a une catégorie $\mathbb{A}(A,B)$ interne à $\underline{E}$; pour tous $A,B,C\in Ob\mathbb{A}$ on a des foncteurs $\circ_{ABC}$: $\mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,C)\longrightarrow \mathbb{A}(A,C)$ et $\eta_A:1\longrightarrow\mathbb{A}(A,A)$ internes à $\underline{E}$, et enfin on a les transformations naturelles internes à $\underline{E}$ $a:\circ.(\circ\times 1)\longrightarrow \circ\cdot(1\times\circ)$, $r:can\longrightarrow\circ\cdot(\eta\times 1)$, $\ell:can\longrightarrow\circ\cdot(1\times\eta)$, qui vérifient les axiomes B_1) et B_2).

Un exemple d'une $\underline{E}$-2-catégorie est $\mathbb{C}at(\underline{E})$ elle-même [11] .

<u>Remarque</u>. On peut supposer que, dans la définition d'une $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathbb{A}$, les 2-cellules a,ℓ,r ne sont pas inversibles en général. On obtient alors la notion de <u>$\mathbb{V}$-bicatégorie généralisée</u> (resp. <u>catégorie $\mathbb{V}$-multiplicative généralisée</u>).

7° Soit $\mathbb{I}$ une 2-catégorie; alors une catégorie $\mathbb{I}^{\mathbb{I}}$-multiplicative généralisée est simplement une 2-monade [16].

Une $\mathbb{I}^{\mathbb{I}}$-bicatégorie généralisée est un cas spécial d'une 2-polyade.

Soient $\mathbb{A}=(\mathrm{Ob}\mathbb{A},\mathbb{A},\circ,n,a,\ell,r)$, $\mathbb{A}'=(\mathrm{Ob}\mathbb{A}',\mathbb{A}',\circ',n',a',\ell',r')$ deux $\mathbb{V}$-bicatégories.

Un <u>$\mathbb{V}$-morphisme</u> de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{A}'$ consiste à donner:

1) une fonction

$$F:\mathrm{Ob}\mathbb{A}\longrightarrow \mathrm{Ob}\mathbb{A}',$$

2) pour tous $A,B\in\mathrm{Ob}\mathbb{A}$, une flèche de $\mathbb{V}$

$$F_{AB}:\mathbb{A}(A,B)\longrightarrow\mathbb{A}'(FA,FB)\quad\text{et}$$

3) pour tous $A,B,C\in\mathrm{Ob}\mathbb{A}$, des 2-cellules de $\mathbb{V}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,C) \arrow[r, "\circ"'] \arrow[d, "F_{AB}\otimes F_{BC}"'] \arrow[dr, phantom, "\varphi_{ABC}"] & \mathbb{A}(A,C) \arrow[d, "F_{AC}"] \\
\mathbb{A}'(FA,FB)\otimes\mathbb{A}'(FB,FC) \arrow[r, "\circ'"'] & \mathbb{A}'(FA,FC)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "(n)_A"] \arrow[dr, "(n')_{FA}"'] & \mathbb{A}(A,A) \arrow[d, "F_{AA}"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "\varphi_A"] \\
& \mathbb{A}'(FA,FA)
\end{tikzcd}\ .$$

Ces données sont assujetties à vérifier les conditions de cohérence ci-après:

M_1) pour tous $A,B,C,D\in\mathrm{Ob}\mathbb{A}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,C)\otimes\mathbb{A}(C,D) \arrow[rrr, "1\otimes\circ"] \arrow[dr, "\circ\otimes 1"'] \arrow[dd, "F_{AB}\otimes F_{BC}\otimes F_{CD}"'] & & & \mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,D) \arrow[dr, "\circ"] \arrow[dd, "F_{AB}\otimes F_{BD}"' near start] \arrow[d, phantom, shift right=10ex, "a"] & \\
& \mathbb{A}(A,C)\otimes\mathbb{A}(C,D) \arrow[rrr, "\circ"'] \arrow[dd, "F_{AC}\otimes F_{CD}" near start] \arrow[rr, phantom, shift left=-8ex, "1\otimes\varphi_{BCD}"] & & & \mathbb{A}(A,D) \arrow[dd, "F_{AD}"] \arrow[dd, phantom, shift right=6ex, "\varphi_{ABD}"] \\
\mathbb{A}'(FA,FB)\otimes\mathbb{A}'(FB,FC)\otimes\mathbb{A}'(FC,FD) \arrow[rrr, "1\otimes\circ'"'] \arrow[dr, "\circ'\otimes 1"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4ex, "\varphi_{ABC}\otimes 1"] & & & \mathbb{A}'(FA,FB)\otimes\mathbb{A}'(FB,FD) \arrow[dr, "\circ'"] \arrow[d, phantom, shift right=10ex, "a'"] & \\
& \mathbb{A}'(FA,FC)\otimes\mathbb{A}'(FC,FD) \arrow[rrr, "\circ'"'] \arrow[rrr, phantom, shift left=4ex, "\varphi_{ACD}" near end] & & & \mathbb{A}'(FA,FD)
\end{tikzcd}$$

M_2) pour tous $A,B\in Ob\mathbb{A}$, les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
I\otimes\mathbb{A}(A,B) \arrow[rr, "\eta_A\otimes 1"] \arrow[dr, "l"'] \arrow[dd, "1\otimes F_{AB}"'] & {} \arrow[d, phantom, "r_{AB}"] & \mathbb{A}(A,A)\otimes\mathbb{A}(A,B) \arrow[dl, "\circ"] \arrow[dd, "F_{AA}\otimes F_{AB}"] \\
& \mathbb{A}(A,B) \arrow[dd, "F_{AB}"] & {} \arrow[d, phantom, "\varphi_A\otimes 1"] \\
I\otimes\mathbb{A}'(FA,FB) \arrow[rr, "\eta'_{FA}\otimes 1"] \arrow[dr, "l"'] & {} \arrow[d, phantom, "\varphi_{AAB}\quad r'_{FA,FB}"] & \mathbb{A}'(FA,FA)\otimes\mathbb{A}'(FA,FB) \arrow[dl, "\circ'"] \\
& \mathbb{A}'(FA,FB) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(A,B)\otimes I \arrow[rr, "1\otimes\eta_B"] \arrow[dr, "l"'] \arrow[dd, "F_{AB}\otimes 1"'] & {} \arrow[d, phantom, "\ell_{AB}"] & \mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,B) \arrow[dl, "\circ"] \arrow[dd, "F_{AB}\otimes F_{BB}"] \\
& \mathbb{A}(A,B) \arrow[dd, "F_{AB}"] & {} \arrow[d, phantom, "1\otimes\varphi_B"] \\
\mathbb{A}'(FA,FB)\otimes I \arrow[rr, "1\otimes\eta'_{FB}"] \arrow[dr, "l"'] & {} \arrow[d, phantom, "\varphi_{ABB}\quad \ell'_{FA,FB}"] & \mathbb{A}'(FA,FB)\otimes\mathbb{A}'(FB,FB) \arrow[dl, "\circ'"] \\
& \mathbb{A}'(FA,FB) &
\end{tikzcd}$$

<u>Cas spéciaux</u>. a) Si les $\mathbb{A},\mathbb{A}'$ sont des $\mathbb{V}$-2-catégories et si les 2-cellules φ_{ABC} et φ_A sont des identités, alors on parle d'un <u>$\mathbb{V}$-2-foncteur</u>.

b) Si les $\mathbb{A},\mathbb{A}'$ sont des catégories $\mathbb{V}$-multiplicatives, on a la notion d'un <u>morphisme</u> entre catégories $\mathbb{V}$-multiplicatives.

c) Si les 2-cellules φ_{ABC} et φ_A sont des isomorphismes (resp. des identités), F est appelé <u>$\mathbb{V}$-homomorphisme</u> (resp. <u>$\mathbb{V}$-homomorphisme strict</u>).

d) Si les 2-cellules φ_A sont des identités, F est appelé <u>$\mathbb{V}$-morphisme unitaire</u>.

<u>Exemples</u>. 1°. $\mathbb{V}$=$\mathbb{C}$at; alors les $\mathbb{C}$at-morphismes (resp. $\mathbb{C}$at-homomorphismes, $\mathbb{C}$at-2-foncteur, etc...) sont les morphismes ordinaires [4],[14] (resp. les homomorphismes ordinaires, les 2-foncteurs, etc).

2°. $\mathbb{V}$=$\mathbb{F}$ib($\underline{B}$), $\mathbb{F}$ib$\mathbb{NS}$($\underline{B}$).

Soient $\mathbb{A},\mathbb{A}'$ deux $\mathbb{F}$ib($\underline{B}$)-bicatégories (resp. $\mathbb{F}$ib$\mathbb{NS}$($\underline{B}$)-bicatégories) et R($\mathbb{A}$), R($\mathbb{A}'$) les pseudo-foncteurs (resp. foncteurs) de $\underline{B}^{op}$ vers H$\cdot$Bicat[2] qui correspondent à $\mathbb{A},\mathbb{A}'$ (v. prop. 2.1).

<u>Proposition 2.3</u>. Il y a une bijection R entre la classe des $\mathbb{F}$ib($\underline{B}$)-homomorphismes (resp.$\mathbb{F}$ib$\mathbb{NS}$($\underline{B}$)-homomorphismes) de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{A}'$ et la classe des transformations iso-naturelles (resp. naturelles) de R($\mathbb{A}$) vers R($\mathbb{A}'$).■

3°. Pour $\mathbb{V}$ localement discrète, on a la notion de foncteur relatif à V (ou $\mathbb{V}$-foncteur).

4°. $\mathbb{V}$=2-$\mathbb{C}$at munie du produit tensoriel de 2-catégories (resp. produit de 2-catégories); alors les 2-$\mathbb{C}$at-morphismes sont des foncteurs quasi-enrichis [14] vérifiant une condition supplémentaire (resp. les morphismes de tricatégories).

5°. $\mathbb{V}$=$\mathcal{U}$-$\mathbb{C}$at, où $\mathcal{U}$ est une catégorie multiplicative. Alors un $\mathcal{U}$-$\mathbb{C}$at-morphisme, ou simplement un <u>$\mathcal{U}$-morphisme</u>, de la $\mathcal{U}$-bicatégorie $\mathbb{A}$ vers la $\mathcal{U}$-bicatégorie $\mathbb{A}'$, est un quadruplet

$$(F, \{F_{AB}\}_{A,B\in Ob\mathbb{A}}, \{F_{ABC}\}_{A,B,C\in Ob\mathbb{A}}, \{F_A\}_{A\in Ob\mathbb{A}})$$

où F est une fonction de Ob$\mathbb{A}$ vers Ob$\mathbb{A}'$, où F_{AB} est un $\mathcal{U}$-foncteur et où F_{ABC}, F_A sont des $\mathcal{U}$-transformations naturelles satisfaisant aux axiomes M_1) et M_2).

Par exemple on a un $\mathcal{U}$-homomorphisme de la $\mathcal{U}$-2-catégorie $\mathcal{U}$-$\mathbb{C}$at vers la $\mathcal{U}$-bicatégorie $\mathcal{U}$-$\mathbb{D}$ist, qui est l'identité sur les objets et qui à tout $\mathcal{U}$-foncteur f de la $\mathcal{U}$-catégorie $\mathcal{A}$ vers la $\mathcal{U}$-catégorie $\mathcal{B}$ fait correspondre le $\mathcal{U}$-distributeur

$$\Phi_f = \mathcal{B}(-,F-) : \mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{B} \qquad (\text{v. [6]}).$$

6° $\mathbb{V}$=$\mathbb{C}$at($\underline{E}$), où $\underline{E}$ est une catégorie à limites projectives finies. Un $\mathbb{C}$at($\underline{E}$)-morphisme, ou simplement un <u>$\underline{E}$-morphisme</u>, de la $\underline{E}$-bicatégorie $\mathbb{A}$ vers la $\underline{E}$-bicatégorie $\mathbb{A}'$ consiste à donner une fonction $F: \mathrm{Ob}\mathbb{A} \to \mathrm{Ob}\mathbb{A}'$, des foncteurs internes $F_{AB}: \mathbb{A}(A,B) \to \mathbb{A}'(FA,FB)$ et des transformations naturelles internes φ_{ABC}, φ_A qui vérifient M_1) et M_2).

<u>Théorème 2.4</u>. Les $\mathbb{V}$-bicatégories et les $\mathbb{V}$-morphismes entre elles constituent une catégorie, notée $\mathbb{V}$-Bicat[1].

<u>Preuve</u>. On définit la composition des $\mathbb{V}$-morphismes

$$\mathbb{A} \xrightarrow{(F, F_{AA'}, \varphi_{AA'A''}, \varphi_A)} \mathbb{B} \xrightarrow{(G, G_{BB'}, y_{BB'B''}, y_B)} \mathbb{C}$$

comme étant le quadruplet

$$(GF, G_{FA,FA'} \circ F_{AA'}, \varphi \circ y \cdot (F_{AA'} \otimes F_{A'A''}), G_{FA,FA} \cdot \varphi_A \circ y_{FA}) \qquad (5)$$

où "$\circ$" et "$\cdot$" désignent les compositions verticale et horizontale respectivement dans $\mathbb{V}$.

On vérifie à l'aide de larges diagrammes que (5) est un $\mathbb{V}$-morphisme de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{C}$.

Enfin la composition définie plus haut est associative et unitaire à droite et à gauche.■

On note $\mathcal{U}$-Bicat[1] (resp. $\underline{E}$-Bicat[1]) la catégorie des $\mathcal{U}$-bicatégories (resp. E-bicatégories) et des $\mathcal{U}$-morphismes (resp. E-morphismes).

<u>Théorème 2.5</u>. (Changement de base)

A tout morphisme $(\Phi,\varphi,\varphi_0):\mathbb{V}\to\mathbb{V}'$ de 2-catégories multiplicatives correspond un foncteur de $\mathbb{V}\text{-Bicat}^{[1]}$ vers $\mathbb{V}'\text{-Bicat}^{[1]}$, cette correspondance étant fonctorielle.

<u>Preuve</u>. Soit $\mathbb{A}=(\mathrm{Ob}\mathbb{A},\mathbb{A},o_{\mathbb{A}},n_{\mathbb{A}},a_{\mathbb{A}},\ell_{\mathbb{A}},r_{\mathbb{A}})$ une $\mathbb{V}$-bicatégorie.
A $\mathbb{A}$ on fait correspondre la $\mathbb{V}'$-bicatégorie

$$\Phi\mathbb{A}=(\mathrm{Ob}\,\Phi\mathbb{A},\Phi\mathbb{A},o_{\Phi\mathbb{A}},n_{\Phi\mathbb{A}},a_{\Phi\mathbb{A}},\ell_{\Phi\mathbb{A}},r_{\Phi\mathbb{A}})\ ,$$

où:

1) $\mathrm{Ob}\,\Phi\mathbb{A}=\mathrm{Ob}\,\mathbb{A}$;

2) $(\Phi\mathbb{A})(A,A')=\Phi\mathbb{A}(A,A')$, $\forall A,A'\in\mathrm{Ob}\mathbb{A}$;

3)
$$\begin{tikzcd}
\Phi\mathbb{A}(A,A')\otimes'\Phi\mathbb{A}(A',A'') \arrow[rr, "o_{\Phi\mathbb{A}}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & & \Phi\mathbb{A}(A,A'') \\
& \Phi\{\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{A}(A',A'')\} \arrow[ur, "\Phi o_{\mathbb{A}}"'] &
\end{tikzcd}$$
;

4)
$$\begin{tikzcd}
I' \arrow[r, "n_{\Phi\mathbb{A}}"'] \arrow[d, "\varphi_0"] & \Phi\mathbb{A}(A,A) \\
\Phi I \arrow[ur, "\Phi n_{\mathbb{A}}"'] &
\end{tikzcd}$$
;

5)
$$\begin{tikzcd}
\Phi\mathbb{A}(A,A')\otimes'\Phi\mathbb{A}(A',A'')\otimes'\Phi\mathbb{A}(A'',A''') \arrow[r, "1\otimes'\varphi"'] \arrow[d, "\varphi\otimes'1"] \arrow[dr, phantom, "="] & \Phi\mathbb{A}(A,A')\otimes'\Phi\{\mathbb{A}(A',A'')\otimes\mathbb{A}(A'',A''')\} \arrow[r, "1\otimes'\Phi o_{\mathbb{A}}"'] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "="] & \Phi\mathbb{A}(A,A')\otimes'\Phi\mathbb{A}(A',A''') \arrow[d, "\varphi"] \\
\Phi\{\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{A}(A',A'')\}\otimes'\Phi\mathbb{A}(A'',A''') \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Phi o_{\mathbb{A}}\otimes'1"] \arrow[dr, phantom, "="] & \Phi\{\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{A}(A',A'')\otimes\mathbb{A}(A'',A''')\} \arrow[r, "\Phi\{1\otimes o_{\mathbb{A}}\}"'] \arrow[d, "\Phi\{o_{\mathbb{A}}\otimes 1\}"] \arrow[dr, phantom, "\Phi a_{\mathbb{A}}"] & \Phi\{\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{A}(A',A''')\} \arrow[d, "\Phi o_{\mathbb{A}}"] \\
\Phi\mathbb{A}(A,A'')\otimes'\Phi\mathbb{A}(A'',A''') \arrow[r, "\varphi"'] & \Phi\{\mathbb{A}(A,A'')\otimes\mathbb{A}(A'',A'')\} \arrow[r, "\Phi o_{\mathbb{A}}"'] & \Phi\mathbb{A}(A,A''')
\end{tikzcd}$$

6)

$$\begin{tikzcd}
I'\otimes'\Phi\mathbb{A}(A,B) \arrow[rr, "(n_{\Phi\mathbb{A}})_A\otimes' 1"] \arrow[dr, "\varphi\cdot(\varphi_0\otimes 1)"'] & & \Phi\mathbb{A}(A,A)\otimes'\Phi\mathbb{A}(A,B) \arrow[d, "\varphi"] \\
& \Phi\{I\otimes\mathbb{A}(A,B)\} \arrow[r, "\Phi\{(n_{\mathbb{A}})_A\otimes 1\}"] \arrow[dr, "\sim"', "\Phi r_{\mathbb{A}}"] \arrow[ur, phantom, "="] & \Phi\{\mathbb{A}(A,A)\otimes\mathbb{A}(A,B)\} \arrow[d, "\Phi o_{\mathbb{A}}"] \\
& & \Phi\mathbb{A}(A,B)
\end{tikzcd}\quad ;$$

7)

$$\begin{tikzcd}
\Phi\mathbb{A}(A,B)\otimes' I' \arrow[rr, "1\otimes'(n_{\Phi\mathbb{A}})_A"] \arrow[dr, "\varphi\cdot\{1\otimes'\varphi_0\}"'] & & \Phi\mathbb{A}(A,B)\otimes'\Phi\mathbb{A}(B,B) \arrow[d, "\varphi"] \\
& \Phi\{\mathbb{A}(A,B)\otimes I\} \arrow[r] \arrow[dr, "\sim"', "\Phi \ell_{\mathbb{A}}"] \arrow[ur, phantom, "="] & \Phi\{\mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,B)\} \arrow[d, "\Phi o_{\mathbb{A}}"] \\
& & \Phi\mathbb{A}(A,B)
\end{tikzcd}\quad .$$

Maintenant au $\mathbb{V}$-morphisme

$(G, G_{AB}, g_{ABC}, g_A) : (\mathrm{ob}\mathbb{A}, \mathbb{A}, o_{\mathbb{A}}, n_{\mathbb{A}}, r_{\mathbb{A}}, \ell_{\mathbb{A}}) \longrightarrow (\mathrm{ob}\mathbb{B}, \mathbb{B}, o_{\mathbb{B}}, n_{\mathbb{B}}, r_{\mathbb{B}}, \ell_{\mathbb{B}})$

on fait correspondre le $\mathbb{V}'$-morphisme $(\Phi G, (\Phi G)_{AB}, (\Phi g)_{ABC}, (\Phi g)_A)$

de $\Phi\mathbb{A}$ vers $\Phi\mathbb{B}$, où:

1) $\Phi G = G$;

2) $(\Phi G)_{AB} = \Phi G_{AB}$;

3)

$$\begin{tikzcd}
\Phi\mathbb{A}(A,B)\otimes'\Phi\mathbb{A}(B,C) \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "\Phi G_{AB}\otimes'\Phi G_{BC}"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & \Phi\{\mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,C)\} \arrow[r, "\Phi\circ_{\mathbb{A}}"'] \arrow[d, "\Phi\{G_{AB}\otimes G_{BC}\}"'] \arrow[dr, phantom, "\Phi g_{ABC}"] & \Phi\mathbb{A}(A,C) \arrow[d, "\Phi G_{AC}"] \\
\Phi\mathbb{B}(GA,GB)\otimes'\Phi\mathbb{B}(GB,GC) \arrow[r, "\varphi"'] & \Phi\{\mathbb{B}(GA,GB)\otimes\mathbb{B}(GB,GC)\} \arrow[r, "\Phi\circ_{\mathbb{B}}"'] & \Phi\mathbb{B}(GA,GC)
\end{tikzcd}\quad ;$$

4)

$$\begin{tikzcd}
I' \arrow[r, "\varphi_\circ"'] & \Phi I \arrow[r, "\Phi n_{\mathbb{A}}"] \arrow[dr, "\Phi n_{\mathbb{B}}"'] & \Phi\mathbb{A}(A,A) \arrow[d, "\Phi G_{AA}"] \arrow[dl, phantom, "\Phi g_A"] \\
 & & \Phi\mathbb{B}(GA,GA)
\end{tikzcd}\quad .$$

<u>Corollaire 2.6</u>. A tout foncteur $\underline{E}\longrightarrow\underline{E}'$ qui commute avec les limites projectives finies (resp. à tout morphisme $\mathcal{U}\to\mathcal{U}'$ de catégories multiplicatives) correspond un foncteur de $\underline{E}$-Bicat[1] vers $\underline{E}$'-Bicat[1] (resp. de $\mathcal{U}$-Bicat[1] vers $\mathcal{U}'$-Bicat[1]). Enfin le morphisme canonique $R:\mathbb{C}\mathrm{at}(\underline{E})\to\mathbb{F}\mathrm{ib}(\underline{E})$ identifie $\underline{E}$-Bicat[1] à une sous-catégorie pleine de $\mathbb{F}$ib($\underline{E}$)-Bicat[1].■

En appliquant le théorème de changement de base au morphisme

$$\mathbb{V}(I,-):\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{C}\mathrm{at},$$

on trouve sous chaque $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathbb{A}$ une (vraie) bicatégorie, notée $|\mathbb{A}|$ et appelée <u>bicatégorie sous-jacente à $\mathbb{A}$</u>.
Pour une $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathbb{A}$ le choix des 'hom' objets $\mathbb{A}(A,B)$ constitue en réalité un homomorphisme

$$\mathbb{A}(-,-):|\mathbb{A}|^{op}\times|\mathbb{A}|\longrightarrow\mathbb{V}.$$

<u>Théorème 2.7</u>. Si la 2-catégorie de base $\mathbb{V}$ est <u>bonne</u>, c'est-

à-dire si elle est à limites cartésiennes inductives et si les 2-foncteurs $-\otimes V$, $V\otimes -$, commutent avec ces limites, alors le foncteur

$$|-| : \mathbb{V}\text{-Bicat}^{[1]} \longrightarrow \text{Bicat}^{[1]}$$

admet un adjoint à gauche noté $I[-]$.

<u>Preuve</u>. Soit $\mathbb{I}$ une bicatégorie; alors $I[\mathbb{I}]$ a comme objets ceux de $\mathbb{I}$, tandis que, pour $i,j \in \mathrm{Ob}\, I[\mathbb{I}]$,

$$I[\mathbb{I}](i,j) = \mathbb{I}(i,j) \boxtimes I ,$$

où I est l'objet unité de $\mathbb{V}$ et où $\boxtimes$ désigne les tenseurs dans $\mathbb{V}$. Il est facile de démontrer, en utilisant les hypothèses, que $I[\mathbb{I}]$ est une $\mathbb{V}$-bicatégorie; on donne seulement les formules de définition de

$$\circ_{I[\mathbb{I}]} : I[\mathbb{I}](i,j) \otimes I[\mathbb{I}](j,k) \longrightarrow I[\mathbb{I}](i,k) ,$$
$$\eta_{I[\mathbb{I}]} : I \longrightarrow I[\mathbb{I}](i,i) .$$

Ce sont

$$(\circ_{I[\mathbb{I}]})_{f,g} \cdot (\partial_f \otimes \partial_g) \cdot \rho_I^{-1} = \partial_{gf} ,$$
$$(\eta_{I[\mathbb{I}]})_i = \partial_{1_i} ,$$

où $\rho_I^{-1} : I \xrightarrow{\sim} I \otimes I$ et où les ∂ désignent les systèmes définissant les tenseurs (v. ch. I).

Maintenant se donner un $\mathbb{V}$-morphisme

$$F : I[\mathbb{I}] \longrightarrow \mathbb{A} ,$$

c'est-à-dire un quadruplet

$$(F, \{F_{ij}\}_{i,j \in \mathrm{Ob}\mathbb{I}}, \{F_{ijk}\}_{i,j,k \in \mathrm{Ob}\mathbb{I}}, \{F_i\}_{i \in \mathrm{Ob}\mathbb{I}})$$

où :

$$F : \mathrm{Ob}\, I[\mathbb{I}] \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbb{A} ,$$
$$F_{ij} : I[\mathbb{I}](i,j) = \mathbb{I}(i,j) \boxtimes I \longrightarrow \mathbb{A}(Fi,Fj) ,$$

$$\begin{tikzcd}
\left(\mathbb{I}(i,j)\boxtimes I\right)\otimes\left(\mathbb{I}(j,k)\boxtimes I\right) \arrow[r, "\circ_{I[\mathbb{I}]}"'] \arrow[d, "F_{ij}\otimes F_{jk}"'] & \mathbb{I}(i,k)\boxtimes I \arrow[d, "F_{ik}"] \\
\mathbb{A}(Fi,Fj)\otimes\mathbb{A}(Fj,Fk) \arrow[r, "\circ_{\mathbb{A}}"'] \arrow[ur, phantom, "F_{ijk}"] & \mathbb{A}(Fi,Fk)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "n_{I[\mathbb{I}]}"] \arrow[dr, "n_{\mathbb{A}}"'] & \mathbb{I}(i,i)\boxtimes I \arrow[d, "F_{ii}"] \arrow[dl, phantom, "F_i"] \\
 & \mathbb{A}(Fi,Fi)
\end{tikzcd}$$

les données étant cohérentes,

c'est se donner un quadruplet

$$(\hat{F}, \{\hat{F}_{ij}\}_{i,j\in\mathrm{Ob}\mathbb{I}}, \{\hat{F}_{ijk}\}_{i,j,k\in\mathrm{Ob}\mathbb{I}}, \{\hat{F}_i\}_{i\in\mathrm{Ob}\mathbb{I}}),$$

où:

$$\hat{F}=F:\mathrm{Ob}\mathbb{I} \longrightarrow \mathrm{Ob}|\mathbb{A}| \quad ,$$

$$\hat{F}_{ij}: \mathbb{I}(i,j) \longrightarrow |\mathbb{A}|(\hat{F}i,\hat{F}j) \quad ,$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{I}(i,j)\times\mathbb{I}(j,k) \arrow[r, "\circ_{\mathbb{I}}"'] \arrow[d, "\hat{F}_{ij}\times\hat{F}_{jk}"'] & \mathbb{I}(i,k) \arrow[d, "\hat{F}_{ik}"] \\
|\mathbb{A}|(\hat{F}i,\hat{F}j)\times|\mathbb{A}|(\hat{F}j,\hat{F}k) \arrow[r, "\circ_{|\mathbb{A}|}"'] \arrow[ur, phantom, "\hat{F}_{ijk}"] & |\mathbb{A}|(\hat{F}i,\hat{F}k)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "1_i"'] \arrow[dr, "1_{\hat{F}_i}"'] & \mathbb{I}(i,i) \arrow[d, "\hat{F}_{ii}"] \arrow[dl, phantom, "\hat{F}_i"] \\
 & |\mathbb{A}|(\hat{F}i,\hat{F}i)
\end{tikzcd}$$

ces données étant cohérentes

($\hat{F}_{ij}$, etc, désigne l'image de F_{ij}, etc, par l'adjonction

$$\mathbb{V}(\mathbb{I}(i,j)\boxtimes I,\ \mathbb{A}(Fi,Fj)) \simeq \mathbb{C}at(\mathbb{I}(i,j),\ \mathbb{V}(I,\ \mathbb{A}(Fi,Fj))\ )\ ),$$

c'est-à-dire un morphisme

$$\hat{F}: \mathbb{I} \longrightarrow |\mathbb{A}|,$$

d'où la bijection cherchée

$$\mathbb{V}\text{-Bicat}^{[1]}(I[\mathbb{I}],\mathbb{A}) \simeq \text{Bicat}^{[1]}(\mathbb{I},|\mathbb{A}|)\ .\blacksquare$$

$I[\mathbb{I}]$ est un cas particulier de la construction suivante. Soient $\mathbb{A}$ une $\mathbb{V}$-bicatégorie ($\mathbb{V}$ est toujours bonne) et $\mathbb{I}$ une bicatégorie; alors la <u>$\mathbb{V}$-bicatégorie polynomiale $\mathbb{A}[\mathbb{I}]$</u> est définie par:

1) $\mathrm{Ob}\mathbb{A}[\mathbb{I}] = \mathrm{Ob}\mathbb{I} \times \mathrm{Ob}\mathbb{A}$,
2) $\mathbb{A}[\mathbb{I}]((i,A),(j,B)) = \mathbb{I}(i,j) \boxtimes \mathbb{A}(A,B)$,
3) $(\circ_{\mathbb{A}[\mathbb{I}]})_{(i,A)(j,B)(k,C)} = (\circ_{\mathbb{I}})_{ijk} \boxtimes (\circ_{\mathbb{A}})_{ABC}$,
4) $(n_{\mathbb{A}[\mathbb{I}]})_{(i,A)} : I \longrightarrow \mathbb{A}[\mathbb{I}]((i,A),(i,A))$

est donné par

$$I \xrightarrow[(n_{\mathbb{A}})_A]{} \mathbb{A}(A,A) \xrightarrow[\partial 1_i]{} \mathbb{I}(i,i) \boxtimes \mathbb{A}(A,A)\ .$$

De la même manière on construit $a_{\mathbb{A}[\mathbb{I}]}$, $\ell_{\mathbb{A}[\mathbb{I}]}$ et $r_{\mathbb{A}[\mathbb{I}]}$.
Il est évident maintenant que $I[\mathbb{I}]$ est la $\mathbb{V}$-bicatégorie polynomiale construite à partir de $\mathbb{I}$ et de la $\mathbb{V}$-bicatégorie triviale I à un seul objet $\star$ telle que $I(\star,\star)=I$; donc

<u>Proposition 2.8</u>. La catégorie $\text{Bicat}^{[1]}$ munie du produit de bicatégories opère à droite sur $\mathbb{V}\text{-Bicat}^{[1]}$ moyennant l'opération de construction de la $\mathbb{V}$-bicatégorie polynomiale, i.e. on a

i) $\mathbb{A}[\mathbb{I}][\mathbb{J}] \simeq \mathbb{A}[\mathbb{I}\times\mathbb{J}]$, ii) $\mathbb{A}[\mathbb{1}] \simeq \mathbb{A}$, et cohérence. ■

§3. <u>$\mathbb{V}$-bicatégories exactes.</u>

Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{V}$-bicatégorie.

On dit que $\mathbb{A}$ est <u>exacte</u> si pour tous $A,B\in\mathrm{Ob}\mathbb{A}$, l'objet $\mathbb{A}(A,B)$ est à limites projectives et inductives finies (v. ch.I) et si pour toute flèche $f:B\to C$ de $|\mathbb{A}|$ les flèches

$$\mathbb{A}(A,B)\xrightarrow[\mathbb{A}(A,f)]{}\mathbb{A}(A,C) \qquad \mathbb{A}(C,A)\xrightarrow[\mathbb{A}(f,A)]{}\mathbb{A}(B,C)$$

admettent des adjoints à droite dans $\mathbb{V}$.

Pour $\mathbb{A}$ une $\mathbb{C}$at-bicatégorie (=bicatégorie) par exemple, on retrouve la notion classique d'exactitude d'une bicatégorie [6].

<u>Proposition 3.1</u>. $\mathbb{A}$ exacte entraîne $|\mathbb{A}|$ exacte. ■

<u>Théorème 3.2.</u> Si la catégorie multiplicative $\mathcal{U}$ est un cosmos, alors la $\mathcal{U}$-bicatégorie $\mathcal{U}$-$\mathbb{D}$ist est exacte.

<u>Preuve</u>. D'abord les $\mathcal{U}$-catégories $\mathcal{U}$-$\mathbb{D}\mathrm{ist}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ sont $\mathcal{U}$-complètes et $\mathcal{U}$-cocomplètes [6] et par conséquent elles sont à limites finies projectives et inductives (ch.I).

D'autre part on doit construire un $\mathcal{U}$-adjoint à droite du $\mathcal{U}$-foncteur

$$\mathcal{U}\text{-}\mathbb{D}\mathrm{ist}(\mathcal{B},\mathcal{C})\xrightarrow{\mathcal{U}\text{-}\mathbb{D}\mathrm{ist}(\Phi,\mathcal{C})}\mathcal{U}\text{-}\mathbb{D}\mathrm{ist}(\mathcal{A},\mathcal{C})\ ,$$

où $\Phi:\mathcal{A}\dashrightarrow\mathcal{B}$ est un $\mathcal{U}$-distributeur de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$.

Soit donc $\Psi:\mathcal{A}\dashrightarrow\mathcal{C}$; on définit le $\mathcal{U}$-distributeur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Phi,\Psi):\mathcal{B}\dashrightarrow\mathcal{C}$ par le noyau suivant

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Phi,\Psi)\longrightarrow\prod_{A\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}}\Psi(C,A)^{\Phi(B,A)}\ \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}}\ \prod_{A,A'\in\mathrm{Ob}\mathcal{A}}\Psi(C,A')^{\Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A')} \qquad (6)$$

où

$$\mathrm{pr}_{(A,A')}\cdot\partial_0=\hat{x}\cdot\mathrm{pr}_A \quad ,$$

$$pr_{(A,A')}\cdot\partial_1=\hat{y}\cdot pr_{A'} \qquad ,$$

$\hat{x}$ et $\hat{y}$ étant les images par adjonction cartésienne des morphismes

$$\Psi(C,A)^{\Phi(B,A)}\otimes\Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A')\xrightarrow{ev\otimes 1}\Psi(C,A)\otimes\mathcal{A}(A,A')\xrightarrow{\Psi_{AA'}}\Psi(C,A') \quad \text{et}$$

$$\Psi(C,A')^{\Phi(B,A')}\otimes\Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A')\xrightarrow[1\otimes\Phi_{AA'}]{}\Psi(C,A')^{\Phi(B,A')}\otimes\Phi(B,A')\xrightarrow[ev]{}\Psi(C,A')$$

respectivement.

i) $Hom_{\mathcal{A}}(\Phi,-)$ est un $\mathcal{U}$-foncteur;

établissons par exemple les morphismes

$$\mathcal{U}\text{-}\mathbb{D}ist(\mathcal{A},\mathcal{B})(\Psi,\Psi')\xrightarrow[Hom_{\mathcal{A}}(\Phi,-)_{\Psi\Psi'}]{}\mathcal{U}\text{-}\mathbb{D}ist(\mathcal{B},\mathcal{C})(Hom_{\mathcal{A}}(\Phi,\Psi),Hom_{\mathcal{A}}(\Phi,\Psi')) \qquad (7);$$

comme le but de (7) est un noyau, il suffit de trouver deux morphismes

$$\prod_{\substack{A\in ob\mathcal{A}\\ C\in ob\mathcal{C}}}\Psi'(C,A)^{\Psi(C,A)}\xrightarrow{k}\prod Hom_{\mathcal{A}}(\Phi,\Psi')(C,B)^{Hom_{\mathcal{A}}(\Phi,\Psi)(C,B)} \quad ,$$

$$\prod_{\substack{A,A'\in ob\mathcal{A}\\ C,C'\in ob\mathcal{C}}}\Psi'(C',A')^{\mathcal{C}(C',C)\otimes\Psi(C,A)\otimes\mathcal{A}(A,A')}\xrightarrow{\lambda}\prod_{\substack{B,B'\in ob\mathcal{B}\\ C,C'\in ob\mathcal{C}}}Hom_{\mathcal{A}}(\Phi,\Psi')(C',B')^{\mathcal{C}(C',C)\otimes Hom_{\mathcal{A}}(\Phi,\Psi)(C,B)\otimes\mathcal{B}(B,B')} \quad ,$$

tels que les ∂_0- et ∂_1-carrés commutent (v.§2, (3)).

On pose

$$pr_{(C,B)}\cdot k=\hat{z}_B\cdot\widetilde{pr}_C \qquad ,$$

où $\widetilde{pr}_C$ est la projection canonique

$$\prod_{C,A}\Psi'(C,A)^{\Psi(C,A)}\longrightarrow\prod_{A}\Psi'(C,A)^{\Psi(C,A)}$$

et où z_B est induit par les morphismes $z_B^{(1)}$, $z_B^{(2)}$ suivants

$$\begin{tikzcd}
\{\prod_A \Psi'(C,A)^{\Psi(C,A)}\}\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Phi,\Psi)(C,B) \arrow[r, "z_B"'] \arrow[d, "1\otimes \text{noyau } (6)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Phi,\Psi')(C,B) \arrow[d, "\text{noyau } (6)"] \\
\{\prod_A \Psi'(C,A)^{\Psi(C,A)}\}\otimes\{\prod_A \Psi(C,A)^{\Phi(B,A)}\} \arrow[r, "z_B^{(1)}"'] \arrow[d, shift right, "1\otimes\partial_0"'] \arrow[d, shift left, "1\otimes\partial_1"] & \prod_A \Psi'(C,A)^{\Phi(B,A)} \arrow[d, shift right, "\partial_0"'] \arrow[d, shift left, "\partial_1"] \\
\{\prod_A \Psi'(C,A)^{\Psi(C,A)}\}\otimes\{\prod_{A,A'} \Psi(C,A')^{\Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A')}\} \arrow[r, "z_B^{(2)}"'] & \prod \Psi'(C,A')^{\Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A')}
\end{tikzcd}$$

$$pr_A \cdot z_B^{(1)} = \hat{y}_B^{(1)} \cdot (pr_A \otimes pr_A) \quad ,$$

$$pr_{(A,A')} \cdot z_B^{(2)} = \hat{y}_B^{(2)} \cdot (pr_{A'} \otimes pr_{(A,A')}) \quad ,$$

où $y_B^{(1)}$ et $y_B^{(2)}$ sont les morphismes

$$\Psi'(C,A)^{\Psi(C,A)} \otimes \Psi(C,A)^{\Phi(B,A)} \otimes \Phi(B,A) \xrightarrow[1\otimes ev]{} \Psi'(C,A)^{\Psi(C,A)} \otimes \Psi(C,A) \xrightarrow[ev]{} \Psi'(C,A)$$

et

$$\begin{tikzcd}
\Psi'(C,A')^{\Psi(C,A')} \otimes \Psi(C,A')^{\Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A')} \otimes \Phi(B,A)\otimes\mathcal{A}(A,A') \arrow[r, "1\otimes ev"] & \Psi'(C,A')^{\Psi(C,A')} \otimes \Psi(C,A') \arrow[d, "ev"] \\
 & \Psi'(C,A')
\end{tikzcd}$$

respectivement.

La construction de λ est analogue.

ii) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Phi,\_)$ est $\mathcal{U}$-adjoint à droite de $\mathcal{U}$-$\mathbb{D}$ist$(\Phi,\mathcal{C})$, c'est-à-dire on a l'isomorphisme $\mathcal{U}$-naturel

$$\mathcal{U}\text{-}\mathbb{D}\mathrm{ist}(\mathcal{B},\mathcal{C})(\Theta,\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Phi,\Psi)) \simeq \mathcal{U}\text{-}\mathbb{D}\mathrm{ist}(\mathcal{A},\mathcal{C})(\Theta\circ\Phi,\Psi)\,, \qquad (8)$$

où Θ est un $\mathcal{U}$-distributeur de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.

Comme les deux membres de (8) sont les noyaux suivants

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}\text{-Dist}(\mathfrak{B},\mathfrak{C})(\theta,\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\Phi,\Psi)) \arrow[r] & \prod_{C,B}\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\Phi,\Psi)(C,B)^{\theta(C,B)} \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] \arrow[dl, "\xi"] & \prod \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\Phi,\Psi)(C',B')^{\mathfrak{C}(C',C)\otimes\theta(C,B)\otimes\mathfrak{B}(B,B')} \arrow[dl, "\zeta"] \\
\mathcal{U}\text{-Dist}(\mathfrak{A},\mathfrak{C})(\theta\circ\Phi,\Psi) \arrow[r] & \prod_{C,A}\Psi(C,A)^{(\theta\circ\Phi)(C,A)} \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] & \prod_{\substack{A,A'\\ C,C'}}\Psi(C',A')^{\mathfrak{C}(C',C)\otimes(\theta\circ\Phi)(C,A)\otimes\mathfrak{A}(A,A')}
\end{tikzcd}$$

on a un morphisme

$$i_{\theta,\Psi} : \mathcal{U}\text{-Dist}(\mathfrak{B},\mathfrak{C})(\theta,\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\Phi,\Psi)) \longrightarrow \mathcal{U}\text{-Dist}(\mathfrak{A},\mathfrak{C})(\theta\circ\Phi,\Psi)$$

dès qu'on peut trouver deux morphismes ξ et ζ tels que les ∂_0-et ∂_1-carrés ci-dessus commutent.

On pose

$$\mathrm{pr}_{(C,A)}\cdot\xi = \hat{\xi}'\cdot\widetilde{\mathrm{pr}}_C \quad ,$$

où ξ' est le morphisme

$$\begin{tikzcd}
\prod_B \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\Phi,\Psi)(C,B)^{\theta(C,B)}\otimes\theta(C,B)\otimes\Phi(B,A) \arrow[d, "\mathrm{pr}_B\otimes 1\otimes 1"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\Phi,\Psi)(C,B)^{\theta(C,B)}\otimes\theta(C,B)\otimes\Phi(B,A) \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes 1"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\Phi,\Psi)(C,B)\otimes\Phi(B,A) \arrow[d, "(\mathrm{pr}_A\cdot\tau)\otimes 1"] \\
\Psi(C,A)^{\Phi(B,A)}\otimes\Phi(B,A) \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
\Psi(C,A)
\end{tikzcd}$$

où τ est le noyau (6).

De même on pose

$$pr_{(C,A,C',A')}\cdot\zeta = \hat{\zeta}'\cdot\widetilde{pr}_{C,C'} \quad ,$$

où ζ' est la flèche

$$\begin{array}{c}
\{\prod_{B,B'} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\Phi,\Psi)(C',B')^{\mathcal{C}(C',C)\otimes\Theta(C,B)\otimes\Phi(B,B')}\}\otimes\mathcal{C}(C',C)\otimes\Theta(C,B)\otimes\Phi(B,A)\otimes\mathfrak{A}(A,A') \\
\Big\downarrow {\scriptstyle pr_{(B,B)}\otimes 1} \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\Phi,\Psi)(C',B)^{\mathcal{C}(C',C)\otimes\Theta(C,B)\otimes\Phi(B,B)}\otimes\mathcal{C}(C',C)\otimes\Theta(C,B)\otimes\Phi(B,A)\otimes\mathfrak{A}(A,A') \\
\Big\downarrow {\scriptstyle Id^{1\otimes\theta_{BB}}\otimes 1} \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\Phi,\Psi)(C',B)^{\mathcal{C}(C',C)\otimes\Theta(C,B)}\otimes\mathcal{C}(C',C)\otimes\Theta(C,B)\otimes\Phi(B,A)\otimes\mathfrak{A}(A,A') \\
\Big\downarrow {\scriptstyle ev\otimes 1} \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\Phi,\Psi)(C',B)\otimes\Phi(B,A)\otimes\mathfrak{A}(A,A') \\
\Big\downarrow {\scriptstyle (pr_A\cdot\tau)\otimes 1} \\
\Psi(C',A)^{\Phi(B,A)}\otimes\Phi(B,A)\otimes\mathfrak{A}(A,A') \\
\Big\downarrow {\scriptstyle ev\otimes 1} \\
\Psi(C',A)\otimes\mathfrak{A}(A,A') \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \psi_{AA'}} \\
\Psi(C',A').
\end{array}$$

Les autres assertions se prouvent de même à l'aide de larges diagrammes. ■

D'une manière analogue on montre que

<u>Théorème 3.3.</u> Si $\mathcal{U}$ est un cosmos, alors la $\mathcal{U}$-bicatégorie $\mathbb{M}\mathrm{at}(\mathcal{U})$ est exacte. ■

§4. Produit tensoriel de $\mathbb{V}$-bicatégories et dualité.

a. Soient $\mathbb{V}$ une 2-catégorie multiplicative symétrique, et $\mathbb{A},\mathbb{B}$ deux $\mathbb{V}$-bicatégories; alors le produit tensoriel de $\mathbb{A}$ par $\mathbb{B}$ est la $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}$ définie comme suit:

1) $\mathrm{Ob}\,\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}=\mathrm{Ob}\,\mathbb{A}\times\mathrm{Ob}\,\mathbb{B}$;

2) $(\mathbb{A}\otimes\mathbb{B})((A,B),(A',B'))=\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{B}(B,B')$;

3) $(o_{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}})_{(A,B)(A',B')(A',B')}=\{(o_{\mathbb{A}})_{AA'A'}\otimes(o_{\mathbb{B}})_{BB'B'}\}\cdot s$,

où s est l'isomorphisme canonique

$$\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{B}(B,B')\otimes\mathbb{A}(A',A'')\otimes\mathbb{B}(B',B'')\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{A}(A',A'')\otimes\mathbb{B}(B,B')\otimes\mathbb{B}(B',B'')\ ;$$

4) $(n_{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}})_{(A,B)}=\{(n_{\mathbb{A}})_A\otimes(n_{\mathbb{B}})_B\}\cdot t$,

où t est l'isomorphisme canonique $I\xrightarrow{\sim}I\otimes I$;

5) $(a_{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}})_{(A,B)(A',B')(A'',B'')(A''',B''')}=\{(a_{\mathbb{A}})_{AA'A''A'''}\otimes(a_{\mathbb{B}})_{BB'B''B'''}\}\cdot s$,

où s est l'isomorphisme canonique

$$\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{B}(B,B')\otimes\mathbb{A}(A',A'')\otimes\mathbb{B}(B',B'')\otimes\mathbb{A}(A'',A''')\otimes\mathbb{B}(B'',B''')\otimes\mathbb{A}(A''',A'''')\otimes\mathbb{B}(B''',B'''')\xrightarrow{\sim}$$
$$\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{A}(A',A'')\otimes\mathbb{A}(A'',A''')\otimes\mathbb{A}(A''',A'''')\otimes\mathbb{B}(B,B')\otimes\mathbb{B}(B',B'')\otimes\mathbb{B}(B'',B''')\otimes\mathbb{B}(B''',B'''')\ ;$$

6) $(r_{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}})_{(A,B)(A',B')}=\{(r_{\mathbb{A}})_{AA'}\otimes(r_{\mathbb{B}})_{BB'}\}\cdot t'$,

où t' est l'isomorphisme canonique

$$I\otimes\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{B}(B,B')\xrightarrow{\sim}I\otimes\mathbb{A}(A,A')\otimes I\otimes\mathbb{B}(B,B')\ ;$$

7) $(\ell_{\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}})_{(A,B)(A',B')}=\{(\ell_{\mathbb{A}})_{AA'}\otimes(\ell_{\mathbb{B}})_{BB'}\}\cdot t''$,

où t'' est l'isomorphisme canonique

$$\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{B}(B,B')\otimes I\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}(A,A')\otimes I\otimes\mathbb{B}(B,B')\otimes I\ .$$

Proposition 4.1. La catégorie $\mathbb{V}$-Bicat[1] munie du produit tensoriel de $\mathbb{V}$-bicatégories devient une catégorie multiplicative; en plus on a

$$\mathbb{A}\otimes I[\mathbb{I}]\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}[\mathbb{I}]\ .\blacksquare$$

b. Dualité. Soit $\mathbb{V}$ une 2-catégorie quelconque; on rappelle que:

Un opérateur "op" sur $\mathbb{V}$ est une loi qui à tout objet V de $\mathbb{V}$ fait correspondre un objet V^{op} de $\mathbb{V}$ de façon qu'on ait les isomorphismes naturels suivants

1) $(V^{op})^{op} \xrightarrow{\sim} V$, 2) $\mathbb{V}(W,V^{op}) \simeq \mathbb{V}(W^{op},V)^{op}$.

Une 2-catégorie multiplicative $\mathbb{V}$ avec "op" est une 2-catégorie multiplicative munie d'un opérateur "op" de façon que:

i) $(W \otimes V)^{op} \xrightarrow[\varphi_{WV}]{\sim} W^{op} \otimes V^{op}$

et φ_{WV} est Cat-naturelle,

ii) $I^{op} \xrightarrow[\varphi_0]{\sim} I$.

Dans une 2-catégorie cartésienne, par exemple, munie d'un opérateur "op" ($\mathbb{C}$at, $\mathbb{C}$at($\underline{E}$), $\mathbb{F}$ib($\underline{B}$), etc...) les isomorphismes i) et ii) ci-dessus existent toujours; en effet on a

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X,(V\times W)^{op}) &\simeq \mathbb{V}(X^{op},V\times W)^{op} \xrightarrow{\sim}\\ &\xrightarrow{\sim} \{\mathbb{V}(X^{op},V)\times \mathbb{V}(X^{op},W)\}^{op} \xrightarrow{\sim}\\ &\xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(X^{op},V)^{op}\times \mathbb{V}(X^{op},W)^{op} \xrightarrow{\sim}\\ &\xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(X,V^{op})\times \mathbb{V}(X,W^{op}) \xrightarrow{\sim}\\ &\xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(X,V^{op}\times W^{op})\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{V}(X,1^{op}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{V}(X^{op},1)^{op} \simeq \mathbb{1}^{op} = \mathbb{1} .$$

Un autre exemple est la 2-catégorie $\mathcal{U}$-$\mathbb{C}$at munie de l'opérateur "op" cité au ch.I.

Soient maintenant $\mathbb{V}$ une 2-catégorie multiplicative avec "op" et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{V}$-bicatégorie; alors la $\mathbb{V}$-bicatégorie ${}^{op}\mathbb{A}$ est définie par

1) $\mathrm{Ob}\,{}^{op}\mathbb{A} = \mathrm{Ob}\,\mathbb{A}$;

2) ${}^{op}\mathbb{A}(A,B) = \mathbb{A}(A,B)^{op}$;

3) $(\circ_{{}^{op}\mathbb{A}})_{ABC} = (\circ_{\mathbb{A}})^{op}_{ABC} \cdot \varphi$,

où φ est l'isomorphisme

$$\mathbb{A}(A,B)^{op}\otimes\mathbb{A}(B,C)^{op}\xrightarrow{\sim}\{\mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,C)\}^{op} \quad ;$$

4) $(n_{op\mathbb{A}})_A=(n_{\mathbb{A}})_A^{op}\cdot\varphi_o$;

5) $(a_{op\mathbb{A}})_{ABC}=(a_{\mathbb{A}})_{ABC}^{op}\cdot\varphi'$,

où φ' est l'isomorphisme

$$\mathbb{A}(A,B)^{op}\otimes\mathbb{A}(B,C)^{op}\otimes\mathbb{A}(C,D)^{op}\xrightarrow{\sim}\{\mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,C)\otimes\mathbb{A}(C,D)\}^{op} \quad ;$$

6) $(r_{op\mathbb{A}})_{AB}=(r_{\mathbb{A}})_{AB}^{op}\cdot t$,

où t est l'isomorphisme

$$I\otimes\mathbb{A}(A,B)^{op}\xrightarrow{\sim}\{I\otimes\mathbb{A}(A,B)\}^{op} \quad ;$$

7) $(\ell_{op\mathbb{A}})_{AB}=(\ell_{\mathbb{A}})_{AB}^{op}\cdot t'$,

où t' est l'isomorphisme

$$\mathbb{A}(A,B)^{op}\otimes I\xrightarrow{\sim}\{\mathbb{A}(A,B)\otimes I\}^{op} .$$

Supposant en plus que $\mathbb{V}$ est symétrique, on peut associer à $\mathbb{A}$ une autre $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathbb{A}^{op}$ de la manière suivante:

1) $Ob\mathbb{A}^{op}=Ob\mathbb{A}$;

2) $\mathbb{A}^{op}(A,B)=\mathbb{A}(B,A)$;

3) $(o_{\mathbb{A}^{op}})_{ABC}=(o_{\mathbb{A}})_{CBA}\cdot s$,

où s est l'isomorphisme

$$\mathbb{A}(B,A)\otimes\mathbb{A}(C,B)\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}(C,B)\otimes\mathbb{A}(B,A) \quad ;$$

4) $(n_{\mathbb{A}^{op}})_A=(n_{\mathbb{A}})_A$;

5) $(a_{\mathbb{A}^{op}})_{ABCD}=(a_{\mathbb{A}})_{DCBA}\cdot s'$,

où s' est l'isomorphisme

$$\mathbb{A}(B,A)\otimes\mathbb{A}(C,B)\otimes\mathbb{A}(D,C)\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}(D,C)\otimes\mathbb{A}(C,B)\otimes\mathbb{A}(B,A) \quad ;$$

6) $(r_{\mathbb{A}^{op}})_{AB}=(r_{\mathbb{A}})_{BA}\cdot s''$,

où s'' est l'isomorphisme

$$I\otimes\mathbb{A}(B,A)\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}(B,A)\otimes I \quad ;$$

7) $(\ell_{\mathbb{A}^{op}})_{AB}=(\ell_{\mathbb{A}})_{BA}\cdot\hat{s}$,

où $\hat{s}$ est l'isomorphisme

$\mathbb{A}(B,A)\otimes I \cong I\otimes\mathbb{A}(B,A)$.

En combinant ces deux espèces de dualités on peut définir la $\mathbb{V}$-bicatégorie ${}^{op}\mathbb{A}^{op}$ par

1) $\mathrm{Ob}\,{}^{op}\mathbb{A}^{op}=\mathrm{Ob}\,\mathbb{A}$;

2) ${}^{op}\mathbb{A}^{op}(A,B)=\mathbb{A}(B,A)^{op}$, etc.

<u>Proposition 4.2</u>. Étant donné une $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathbb{A}$, alors on a
i) $|\mathbb{A}^{op}|=|\mathbb{A}|^{op}$, ii) $|{}^{op}\mathbb{A}|={}^{op}|\mathbb{A}|$, iii) $|{}^{op}\mathbb{A}^{op}|={}^{op}|\mathbb{A}|^{op}$,
où les membres droits des relations ci-dessus sont relatifs à l'opérateur "op" classique sur $\mathbb{C}\mathrm{at}$.

<u>Preuve</u> i) On a

$$\mathrm{Ob}|\mathbb{A}^{op}|=\mathrm{Ob}\,\mathbb{A}^{op}=\mathrm{Ob}\,\mathbb{A}=\mathrm{Ob}|\mathbb{A}|=\mathrm{Ob}|\mathbb{A}|^{op} \quad ,$$

$$\begin{aligned}|\mathbb{A}^{op}|(A,B)&=\mathbb{V}(I,\mathbb{A}^{op}(A,B)) &=\\ &=\mathbb{V}(I,\mathbb{A}(B,A)) &=\\ &=|\mathbb{A}|(B,A) &=\\ &=|\mathbb{A}|^{op}(A,B) \quad .\end{aligned}$$

ii) On a

$$\begin{aligned}|{}^{op}\mathbb{A}|(A,B)&=\mathbb{V}(I,{}^{op}\mathbb{A}(A,B)) &=\\ &=\mathbb{V}(I,\mathbb{A}(A,B)^{op}) &=\\ &=\mathbb{V}(I^{op},\mathbb{A}(A,B))^{op} &=\\ &=\mathbb{V}(I,\mathbb{A}(A,B))^{op} &=\\ &=|\mathbb{A}|(A,B)^{op} &=\\ &={}^{op}|\mathbb{A}|(A,B) \quad .\blacksquare\end{aligned}$$

<u>Remarque</u>. On a vu que, si la 2-catégorie de base $\mathbb{V}$ est bonne à tenseurs, la construction de la $\mathbb{V}$-bicatégorie polynomiale $\mathbb{A}[\mathbb{I}]$ est possible; si $\mathbb{V}$ est symétrique, on peut construire la $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathbb{A}\otimes\mathbb{B}$ et finalement si $\mathbb{V}$ est symétrique avec

"op", on peut faire la construction des $\mathbb{A}^{op}$, ${}^{op}\mathbb{A}$, ${}^{op}\mathbb{A}^{op}$.
Cela nous amène à la définition suivante:

<u>Définition</u> Une 2-catégorie multiplicative $\mathbb{V}$ est un <u>2-cosmos</u>
si C_1) elle est symétrique à tenseurs,
C_2) elle est bonne avec "op" .

Par exemple $\mathbb{C}$at, $\mathcal{U}$-$\mathbb{C}$at (où $\mathcal{U}$ est un cosmos), $\mathbb{C}$at($\underline{E}$) (où $\underline{E}$ est une catégorie à limites inductives universelles), $\mathbb{F}$ib($\underline{B}$), etc, sont des 2-cosmos.

Il est clair que pour $\mathbb{V}$ un 2-cosmos on peut faire toutes les constructions précédentes dans $\mathbb{V}$-Bicat[1].

C H A P I T R E IV

LES $\mathbb{V}$-2-CATEGORIES

Dans ce chapitre on étudie de plus près les $\mathbb{V}$-2-catégories. En utilisant les fins cartésiennes (ch.II,[8]) on transporte la plupart des résultats sur les 2-catégories (transformations quasi-naturelles, modifications, 2-catégories-commas, etc..) au $\mathbb{V}$-cadre.
Enfin au §3 on définit les $\mathbb{V}$-limites cartésiennes et on donne des conditions pour leur existence dans une $\mathbb{V}$-2-catégorie $\mathbb{A}$ (th.5.1.et 5.2).
Les quasi-extensions de Kan s'ensuivent.

Soit $\mathbb{V}$ une 2-catégorie multiplicative et notons $\mathbb{V}_o$ la catégorie des flèches de $\mathbb{V}$.
Une $\mathbb{V}$-2-catégorie est une catégorie enrichie à $\mathbb{V}_o$, ou une $\mathbb{V}_o$-catégorie.
Un $\mathbb{V}$-2-foncteur est un $\mathbb{V}_o$-foncteur.
On note $\mathbb{V}$-2-Cat la catégorie des $\mathbb{V}$-2-catégories et des $\mathbb{V}$-2-foncteurs.

§1. La $\mathbb{V}$-2-catégorie Fun($\mathbb{A}$).

Soient $\mathbb{V}$ une 2-catégorie multiplicative, représentable, à Cat-limites projectives finies, et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{V}$-2-catégorie; alors Fun($\mathbb{A}$) a comme objets les flèches de $|\mathbb{A}|$, tandis que pour $f,g \in \mathrm{ObFun}(\mathbb{A})$, l'objet $\mathrm{Fun}(\mathbb{A})(f,g)$ est défini par l'objet comma suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Fun}(\mathbb{A})(f,g) \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & \\
\mathbb{A}(\partial_0 f, \partial_0 g) \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,g)"'] & & \mathbb{A}(\partial_1 f, \partial_1 g) \arrow[ll, bend right, "m_{f,g}"'] \arrow[dl, "\mathbb{A}(f,1)"] \\
 & \mathbb{A}(\partial_0 f, \partial_1 g) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \\
\cdot \arrow[r] & \cdot
\end{tikzcd}
\qquad (I)$$

où $\partial_0 f$, $\partial_1 f$ désignent la source et le but de la flèche f respectivement. L'unité

$$(\eta_{Fun(\mathbb{A})})_f : I \longrightarrow Fun(\mathbb{A})(f,f)$$

est la seule flèche induite par

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "(\eta_{\mathbb{A}})_{\partial_0 f}"'] \arrow[dr, "(\eta_{\mathbb{A}})_{\partial_1 f}"] \arrow[dd, phantom, "="] & \\
\mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_0 f) \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,f)"'] & & \mathbb{A}(\partial_1 f,\partial_1 f) \arrow[dl, "\mathbb{A}(f,1)"] \\
 & \mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_1 f) &
\end{tikzcd},$$

tandis que la composition

$$(\circ_{Fun(\mathbb{A})})_{fgh} : Fun(\mathbb{A})(f,g) \otimes Fun(\mathbb{A})(g,h) \longrightarrow Fun(\mathbb{A})(f,h)$$

est la seule flèche induite par la 2-cellule

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & Fun(\mathbb{A})(f,g)\otimes Fun(\mathbb{A})(g,h) \arrow[dl, "\partial_0\otimes 1"'] \arrow[dr, "1\otimes\partial_1"] & & \\
 & \mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_0 g)\otimes Fun(\mathbb{A})(g,h) \arrow[dl, "1\otimes\partial_0"'] \arrow[dr, "1\otimes\partial_1"] \arrow[rr, phantom, "="] & & Fun(\mathbb{A})(f,g)\otimes\mathbb{A}(\partial_1 g,\partial_1 h) \arrow[dl, "\partial_0\otimes 1"'] \arrow[dr, "\partial_1\otimes 1"] & \\
\mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_0 g)\otimes\mathbb{A}(\partial_0 g,\partial_0 h) \arrow[dr, "1\otimes\mathbb{A}(1,h)"'] & & \mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_0 g)\otimes\mathbb{A}(\partial_1 g,\partial_1 h) \arrow[ll, bend left, "1\otimes m_{g,h}"] \arrow[dl, "1\otimes\mathbb{A}(g,1)"'] \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,g)\otimes 1"] & & \mathbb{A}(\partial_1 f,\partial_1 g)\otimes\mathbb{A}(\partial_1 g,\partial_1 h) \arrow[ll, bend right, "m_{f,g}\otimes 1"'] \arrow[dl, "\mathbb{A}(f,1)\otimes 1"] \\
 & \mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_0 g)\otimes\mathbb{A}(\partial_0 g,\partial_1 h) \arrow[dr, "\circ_{\mathbb{A}}"'] \arrow[rr, phantom, "="] & & \mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_1 g)\otimes\mathbb{A}(\partial_1 g,\partial_1 h) \arrow[dl, "\circ_{\mathbb{A}}"] & \\
 & & \mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_1 h) & &
\end{tikzcd}.$$

Lorsque $\mathbb{V}=\mathbb{C}at$ par exemple, la 2-catégorie Fun($\mathbb{A}$) a comme objets les flèches de $\mathbb{A}$; une flèche dans Fun($\mathbb{A}$) de $f:A\longrightarrow B$ vers $f':A'\longrightarrow B'$ est un triplet (a,b,m) ,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "m"] & A' \arrow[d, "f'"] \\ B \arrow[r, "b"'] & B' \end{tikzcd} ,$$

tandis qu' une 2-cellule de (a,b,m) vers (a',b',m') est un couple de 2-cellules de $\mathbb{A}$,$(\alpha:a\to a',\beta:b\longrightarrow b')$, tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=huge] A \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "a'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "m \;\; m'"] & A' \arrow[d] \\ B \arrow[r, bend left, "b"] \arrow[r, bend right, "b'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & B' \end{tikzcd}$$

i.e.

$$m'\circ\beta\cdot f=f'\cdot\alpha\circ m.$$

La composition verticale dans Fun($\mathbb{A}$) est définie point par point, i.e.

$$(\alpha:a\to a',\beta:b\longrightarrow b')\circ(\bar{\alpha}:a'\longrightarrow a'',\beta:b'\longrightarrow b'')=(\bar{\alpha}\circ\alpha:a\to a'',\bar{\beta}\circ\beta:b\longrightarrow b''),$$

et la composition horizontale est définie par

$$(\alpha:a\to a',\beta:b\longrightarrow b')\cdot(\bar{\alpha}:\bar{a}\to\bar{a}',\bar{\beta}:\bar{b}\longrightarrow\bar{b}')=(\bar{\alpha}\cdot\alpha:\bar{a}\cdot a\to\bar{a}'\cdot a',\bar{\beta}\cdot\beta:\bar{b}.b\to\bar{b}'.b').$$

Évidemment on a deux $\mathbb{V}$-2-foncteurs

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & \\ \mathbb{A} & & \mathbb{A} \end{tikzcd} \qquad (1)$$

<u>Proposition 1.1</u>. Le span (1) est une catégorie interne à $\mathbb{V}$-2-Cat.

<u>Preuve</u>. L'unité i

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{A} \arrow[dl, "1_{\mathbb{A}}"'] \arrow[dr, "1_{\mathbb{A}}"] \arrow[dd, "i"] & \\
\mathbb{A} & & \mathbb{A} \\
 & \mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \arrow[ul, "\partial_0"] \arrow[ur, "\partial_1"'] &
\end{tikzcd}$$

envoie l'objet A de $\mathbb{A}$ sur l'objet $1_A : A \longrightarrow A$ de $\mathrm{Fun}(\mathbb{A})$, tandis que la flèche i_{AB} est définie par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{A}(A,B) \arrow[d, "i_{AB}"] \arrow[ddl, bend right, "1"'] \arrow[ddr, bend left, "1"] & \\
 & \mathrm{Fun}(\mathbb{A})(1_A,1_B) \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & \\
\mathbb{A}(A,B) \arrow[dr, "1"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{m_{1_A,1_B}}{\Leftarrow}"] & & \mathbb{A}(A,B) \arrow[dl, "1"] \\
 & \mathbb{A}(A,B) &
\end{tikzcd}$$

Le $\mathbb{V}$-2-foncteur de composition

$$c : \mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \times_{\mathbb{A}} \mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbb{A})$$

envoie l'objet (f,g), où $\partial_1 f = \partial_0 g$, de $\mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \times_{\mathbb{A}} \mathrm{Fun}(\mathbb{A})$ sur l'objet gf de $\mathrm{Fun}(\mathbb{A})$, tandis que la flèche

$$c_{(f,g)(h,k)} : \mathrm{Fun}(\mathbb{A})(f,h) \times_{\mathbb{A}(\partial_1 f, \partial_1 h)} \mathrm{Fun}(\mathbb{A})(g,k) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbb{A})(gf,kh)$$

est la seule flèche induite par la 2-cellule suivante

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \{\mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \underset{\mathbb{A}}{\times} \mathrm{Fun}(\mathbb{A})\}((f,g),(h,k)) \arrow[dl, "P_0"'] \arrow[dr, "P_1"] & & \\
 & \mathrm{Fun}(\mathbb{A})(f,h) \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & \mathrm{Cat}\text{-p.f.} & \mathrm{Fun}(\mathbb{A})(g,k) \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & \\
\mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_0 h) \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "m_{f,h}"] & & \mathbb{A}(\partial_1 f,\partial_1 h)=\mathbb{A}(\partial_0 g,\partial_0 k) \arrow[dl, "\mathbb{A}(f,1)"'] \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,k)"] \arrow[rr, phantom, "m_{g,k}"] & & \mathbb{A}(\partial_1 g,\partial_1 k) \arrow[dl] \\
 & \mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_1 h) \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,k)"'] & & \mathbb{A}(\partial_0 g,\partial_1 k) \arrow[dl, "\mathbb{A}(f,1)"] & \\
 & & \mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_1 k) = \mathbb{A}(\partial_0(gf),\partial_1(kh)) & &
\end{tikzcd}$$

. ■

<u>Proposition 1.2</u>. i) $\mathrm{Fun}(\_)$ est un foncteur de $\mathbb{V}$-2-$\mathbb{C}$at vers $\mathbb{V}$-2-$\mathbb{C}$at.

ii) La correspondance

$$\mathbb{A} \rightsquigarrow \begin{tikzcd} & \mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & \\ \mathbb{A} & & \mathbb{A} \end{tikzcd}$$

est un foncteur de $\mathbb{V}$-2-$\mathbb{C}$at vers la catégorie $\mathbb{C}$at($\mathbb{V}$-2-$\mathbb{C}$at) des catégories et des foncteurs internes à $\mathbb{V}$-2-$\mathbb{C}$at.

<u>Preuve</u>. Soit $F:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ un $\mathbb{V}$-2-foncteur; alors le $\mathbb{V}$-2-foncteur

$$\mathrm{Fun}(F):\mathrm{Fun}(\mathbb{A})\longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbb{B})$$

est défini comme suit:

$$\mathrm{Fun}(F)(f)=Ff, \quad \forall f\in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Fun}(\mathbb{A}),$$

où Ff désigne l'image de f par le 2-foncteur sous-jacent à F. Enfin la flèche $\mathrm{Fun}(F)_{fg}$ est définie par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Fun}(\mathbb{A})(f,g) \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] \arrow[rrr, "\mathrm{Fun}(F)_{fg}"] & & & \mathrm{Fun}(\mathbb{B})(Ff,Fg) \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & \\
\mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_0 g) \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow m_{f,g}"] \arrow[dr] \arrow[rrr, "F"] & & \mathbb{A}(\partial_1 f,\partial_1 g) \arrow[dl] \arrow[rrr, "F"] & \mathbb{B}(\partial_0 Ff,\partial_0 Fg) \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow m_{Ff,Fg}"] \arrow[dr] & & \mathbb{B}(\partial_1 Ff,\partial_1 Fg) \arrow[dl] \\
 & \mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_1 g) \arrow[rrr, "F"] & & & \mathbb{B}(\partial_0 Ff,\partial_1 Fg) &
\end{tikzcd}$$ $\blacksquare$

Soient $F,G: \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ deux $\mathbb{V}$-2-foncteurs.
On appelle <u>transformation $\mathbb{V}$-quasi-naturelle</u> de F vers G un $\mathbb{V}$-2-foncteur $\sigma: \mathbb{B} \to \mathrm{Fun}(\mathbb{A})$ tel que $\partial_0 \cdot \sigma = F$ et $\partial_1 \cdot \sigma = G$; on la note $\sigma : F \Rightarrow G: \mathbb{B} \to \mathbb{A}$.

La proposition 1.1 nous permet de composer verticalement les transformations $\mathbb{V}$-quasi-naturelles; en effet si $\tau: \mathbb{B} \to \mathrm{Fun}(\mathbb{A})$ est une transformation $\mathbb{V}$-quasi-naturelle de G vers H, alors le composé $\tau \circ \sigma$ est le $\mathbb{V}$-2-foncteur

$$\mathbb{B} \xrightarrow{(\sigma,\tau)} \mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \underset{\mathbb{A}}{\times} \mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \xrightarrow{c} \mathrm{Fun}(\mathbb{A}).$$

<u>Proposition 1.3</u>. Les transformations $\mathbb{V}$-quasi-naturelles entre $\mathbb{V}$-2-foncteurs de $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{A}$ constituent une catégorie, notée $\mathrm{Fun}(\mathbb{B},\mathbb{A})_o$. $\blacksquare$

§2. <u>$\mathbb{V}$-2-catégories commas</u>.

Soient $\mathbb{V}$ une 2-catégorie multiplicative représentable à Cat-limites projectives finies et

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B} \arrow[dr, "F_1"'] & & \mathbb{C} \arrow[dl, "F_2"] \\ & \mathbb{A} & \end{tikzcd}$$

un diagramme dans $\mathbb{V}$-2-$\mathbb{C}$at.

<u>Définition</u>. La <u>$\mathbb{V}$-2-catégorie comma</u> de F_1 et F_2, notée $[F_1,F_2]$, est la limite projective dans $\mathbb{V}$-2-$\mathbb{C}$at du diagramme suivant

$$\mathbb{B} \xrightarrow[F_1]{} \mathbb{A} \xleftarrow[\partial_0]{} \mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \xrightarrow[\partial_1]{} \mathbb{A} \xleftarrow[F_2]{} \mathbb{C} \,. \qquad (2)$$

Tenant compte de la définition d'une transformation $\mathbb{V}$-quasi-naturelle on a un diagramme

$$\begin{tikzcd} & {[F_1,F_2]} \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & \\ \mathbb{B} \arrow[dr, "F_1"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\Longrightarrow}{\sigma_{F_1F_2}}"] & & \mathbb{C} \arrow[dl, "F_2"] \\ & \mathbb{A} & \end{tikzcd}$$

ayant la propriété universelle suivante: chaque transformation $\mathbb{V}$-quasi-naturelle

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{D} \arrow[dl, "P_0"'] \arrow[dr, "P_1"] & \\ \mathbb{B} \arrow[dr, "F_1"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\Longrightarrow}{\theta}"] & & \mathbb{C} \arrow[dl, "F_2"] \\ & \mathbb{A} & \end{tikzcd}$$

induit un seul $\mathbb{V}$-2-foncteur $p:\mathbb{D}\to[F_1,F_2]$ tel que

$$\begin{cases} \partial_i \cdot p = p_i \quad , \quad i=0,1 \\ \sigma_{F_1F_2} \cdot p = \theta \,. \end{cases} \qquad (3)$$

Ceci résulte des propriétés universelles de Fun($\mathbb{A}$) et de la limite (2).

<u>Remarque.</u> La deuxième équation de (3) exige la composition

d'une transformation $\mathbb{V}$-quasi-naturelle avec un $\mathbb{V}$-2-foncteur:

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Fun}(\mathbb{B}) \arrow[d, shift right, "\partial_0"'] \arrow[d, shift left, "\partial_1"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "H"] & \mathbb{A} \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, shift left, "G"] \arrow[r, shift right, "F"'] & \mathbb{B}
\end{tikzcd}
,\quad
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Fun}(\mathbb{B}) \arrow[r, "\mathrm{Fun}(H)"'] \arrow[d, shift right, "\partial_0"'] \arrow[d, shift left, "\partial_1"] & \mathrm{Fun}(\mathbb{C}) \arrow[d, shift right, "\partial_0"'] \arrow[d, shift left, "\partial_1"] \\
\mathbb{A} \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, shift left, "G"] \arrow[r, shift right, "F"'] & \mathbb{B} \arrow[r, "H"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

Le premier diagramme nous donne $\sigma H : FH \Rightarrow GH$ et le second

$H\sigma = \mathrm{Fun}(H)\sigma : HF \Rightarrow HG$.

<u>Proposition 2.1.</u> $\left|[F_1, F_2]\right| = \left[|F_1|, |F_2|\right]$. ■

<u>Proposition 2.2.</u> Si $\mathbb{V}$ est à Cat-limites projectives et si

$$\left\{\mathbb{A}_i \xrightarrow{F_i} \mathbb{B}_i \xleftarrow{G_i} \mathbb{C}_i\right\}$$

est un système inverse de diagrammes, alors

$$\left[\varprojlim F_i, \varprojlim G_i\right] = \varprojlim \left[F_i, G_i\right] \quad . ■$$

§3. <u>La $\mathbb{V}$-2-catégorie $\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I}, \mathbb{A})$.</u>

Soient $\mathbb{V}$ une 2-catégorie multiplicative à fins cartésiennes projectives, $\mathbb{I}$ une 2-catégorie et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{V}$-2-catégorie; alors $\mathrm{Fun}_u(\mathbb{I}, \mathbb{A})$ (resp. $\mathrm{Fun}_d(\mathbb{I}, \mathbb{A})$, $\mathbb{A}^{\mathbb{I}}$) a comme objets les 2-foncteurs de $\mathbb{I}$ vers la 2-catégorie sous-jacente $|\mathbb{A}|$.

Pour $F, G : \mathbb{I} \to |\mathbb{A}|$, l'objet $\mathrm{Fun}_u(\mathbb{I}, \mathbb{A})(F,G)$ (resp. $\mathrm{Fun}_d(\mathbb{I}, \mathbb{A})(F,G)$, $\mathbb{A}^{\mathbb{I}}(F,G)$) est la u-fin cartésienne (resp. d-fin cartésienne, Cat-fin) du 2-foncteur

$$\mathbb{A}(F(\_), G(\_)) : \mathbb{I}^{op} \times \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{V} ,$$

i.e.

$$\mathrm{Fun}_u(\mathbb{I}, \mathbb{A})(F,G) = \text{cart-}\int_i^u \mathbb{A}(Fi, Gi), \quad \mathrm{Fun}_d(\mathbb{I}, \mathbb{A})(F,G) = \text{cart-}\int_i^d \mathbb{A}(Fi, Gi),$$

$$\mathbb{A}^{\mathbb{I}}(F,G) = \text{Cat-}\int_i \mathbb{A}(Fi, Gi).$$

Notons

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G) \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\sigma_j"] & \\
\mathbb{A}(Fi,Gi) \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,Gf)"'] \arrow[rr, phantom, "\curvearrowright \sigma_f"] & & \mathbb{A}(Fj,Gj) \arrow[dl, "\mathbb{A}(Ff,1)"] \\
 & \mathbb{A}(Fi,Gj) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathrm{Fun}_d(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G) \arrow[dl, "\omega_i"'] \arrow[dr, "\omega_j"] & \\
\mathbb{A}(Fi,Gi) \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,Gf)"'] \arrow[rr, phantom, "\curvearrowleft \omega_f"] & & \mathbb{A}(Fj,Gj) \arrow[dl, "\mathbb{A}(Ff,1)"] \\
 & \mathbb{A}(Fi,Gj) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{A}^{\mathbb{I}}(F,G) \arrow[dl, "\tau_i"'] \arrow[dr, "\tau_j"] & \\
\mathbb{A}(Fi,Gi) \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,Gf)"'] \arrow[rr, phantom, "="] & & \mathbb{A}(Fj,Gj) \arrow[dl, "\mathbb{A}(Ff,1)"] \\
 & \mathbb{A}(Fi,Gj) &
\end{tikzcd}
$$

les quasi-wedges qui définissent les fins ci-dessus. On traîte seulement le u-cas, le d-cas s'en déduit par dualité.

L'unité $n_F : I \longrightarrow \mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,F)$ est la seule flèche induite par le quasi-wedge projectif

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & I \arrow[dl, "n_{Fi}"'] \arrow[dr, "n_{Fj}"] & \\
\mathbb{A}(Fi,Fi) \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,Ff)"'] \arrow[rr, phantom, "="] & & \mathbb{A}(Fj,Fj) \arrow[dl, "\mathbb{A}(Ff,1)"] \\
 & \mathbb{A}(Fi,Fj) &
\end{tikzcd}
.
$$

Enfin pour définir les flèches de composition

$$\circ_{FGH} : \mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G) \otimes \mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})(G,H) \longrightarrow \mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,H) \qquad (4)$$

on considère les 2-cellules

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & \mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G)\otimes\mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})(G,H) \arrow[dl, "\sigma_i\otimes 1"'] \arrow[dr, "1\otimes\sigma_j"] & & & \\
 & & \mathbb{A}(Fi,Gi)\otimes\mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})(G,H) \arrow[dl, "1\otimes\sigma_i"'] \arrow[dr, "1\otimes\sigma_j"] & & \mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G)\otimes\mathbb{A}(Gj,Hj) \arrow[dl, "\sigma_i\otimes 1"'] \arrow[dr, "\sigma_j\otimes 1"] & & \\
 & \mathbb{A}(Fi,Gi)\otimes\mathbb{A}(Gi,Hi) \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "1\otimes\sigma_f"] & & \mathbb{A}(Fi,Gi)\otimes\mathbb{A}(Gj,Hj) \arrow[dl, "1\otimes\mathbb{A}(Gf,1)"'] \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,Gf)\otimes 1"] \arrow[rr, phantom, "\sigma_f\otimes 1"] & & \mathbb{A}(Fj,Gj)\otimes\mathbb{A}(Gj,Hj) \arrow[dl] & \\
 & & \mathbb{A}(Fi,Gi)\otimes\mathbb{A}(Gi,Hj) \arrow[dr, "\circ_{\mathbb{A}}"'] & & \mathbb{A}(Fi,Gj)\otimes\mathbb{A}(Gj,Hj) \arrow[dl, "\circ_{\mathbb{A}}"] & & \\
 & & & \mathbb{A}(Fi,Hj) & & &
\end{tikzcd}$$

qui constituent un quasi-wedge projectif de base $\mathbb{A}(F(-),G(-))$, d'où la flèche (4).

On a un $\mathbb{V}$-2-foncteur canonique J de $\mathbb{A}^{\mathbb{I}}$ vers $\mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})$ qui est localement pleinement fidèle, c'est-à-dire pour tous $F,G:\mathbb{I}\to|\mathbb{A}|$, la flèche de $\mathbb{V}$

$$J_{FG}:\mathbb{A}^{\mathbb{I}}(F,G)\longrightarrow \mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G)$$

est pleinement fidèle. On peut voir ceci en prenant pour tout $V\in\mathrm{Ob}\mathbb{V}$ le foncteur

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{V}(V,J_{FG}):\mathbb{V}(V,\mathbb{A}^{\mathbb{I}}(F,G)) & \longrightarrow & \mathbb{V}(V,\mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G)) \\ \wr\| & & \wr\| \\ \mathrm{Cat}\text{-}\int_i \mathbb{V}(V,\mathbb{A}(Fi,Gi)) & & \mathrm{cart}\text{-}\int_i^u \mathbb{V}(V,\mathbb{A}(Fi,Gi))\end{array}$$

qui est pleinement fidèle.

<u>Proposition 3.1</u>. $\mathrm{Fun}_x(-,-)$ est un foncteur de la catégorie $(2\text{-}\mathrm{Cat})^{op}\times\mathbb{V}\text{-}2\text{-}\mathrm{Cat}$ vers $\mathbb{V}$-2-Cat.

<u>Preuve</u>. <u>x=u</u>. Soit $G:\mathbb{J}\to\mathbb{I}$ un 2-foncteur; alors le $\mathbb{V}$-2-foncteur

$$\mathrm{Fun}_u(G,\mathbb{A}):\mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A}) \longrightarrow \mathrm{Fun}_u(\mathbb{J},\mathbb{A})$$

est défini sur les objets par

$$\mathrm{Fun}_u(G,\mathbb{A})(M)=M\cdot G \;, \qquad M:\mathbb{I}\to|\mathbb{A}| \;,$$

tandis que $\mathrm{Fun}_u(G,\mathbb{A})_{MN}$ est donné par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})(M,N) \arrow[rr, "\mathrm{Fun}_u(G,\mathbb{A})_{MN}"] \arrow[dr, "\sigma_{Gj}"'] \arrow[drrr, "\sigma_{Gj'}"] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\sigma_{Gf}"] & & \mathrm{Fun}_u(\mathbb{J},\mathbb{A})(M\cdot G,N\cdot G) \arrow[dl, "\sigma_j"'] \arrow[dr, "\sigma_{j'}"] & \\
& \mathbb{A}(MGj,NGj) \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,NGf)"'] \arrow[rr, phantom, "\sigma_f"] & & \mathbb{A}(MGj',NGj') \arrow[dl, "\mathbb{A}(MGf,1)"] \\
& & \mathbb{A}(MGj,NGj') &
\end{tikzcd}$$

Pour un $\mathbb{V}$-2-foncteur $F:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$, $\mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},F)$ est défini comme dans le cas de prop. 1.2.■

<u>Proposition 3.2</u>. On a les isomorphismes naturels suivants:

1) $|\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})| \simeq \mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},|\mathbb{A}|)$.

2) $\mathrm{Fun}_d(2,\mathbb{A}) \simeq \mathrm{Fun}(\mathbb{A})$.

3) $\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\varprojlim \mathbb{A}_i) \simeq \varprojlim \mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A}i)$.

4) $\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},[F_1,F_2]) \simeq [\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},F_1),\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},F_2)]$.

<u>Preuve</u>. 1) D'abord $\mathrm{Ob}|\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})|=\mathrm{Ob}\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},|\mathbb{A}|)$. Ensuite se donner une flèche (resp. 2-cellule) de I vers $\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G)$ c'est se donner un quasi-wedge projectif (resp. une modification) de sommet I et de base $\mathbb{A}(F(\_),G(\_)):\mathbb{I}^{op}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathbb{V}$, d'où le résultat.

2) Évident.

3) On a $\mathrm{Ob}\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\varprojlim\mathbb{A}i)=\mathrm{Ob}\,\varprojlim\,\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A}i)$, car

$$\left|\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\varprojlim \mathbb{A}i)\right| = \mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},|\varprojlim \mathbb{A}i|) =$$

$$= \mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\varprojlim |\mathbb{A}i|) =$$

$$= \varprojlim \mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},|\mathbb{A}i|) \ .$$

D'autre part pour $F,G:\mathbb{I} \longrightarrow \varprojlim |\mathbb{A}i|$, on a

$$\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\varprojlim \mathbb{A})(F,G) = \text{cart-}\int_j (\varprojlim \mathbb{A}i)(Fj,Gj) =$$

$$= \text{cart-}\int_j \varprojlim \mathbb{A}i(Fj,Gj) =$$

$$= \varprojlim \text{cart-}\int_j \mathbb{A}i(Fj,Gj) =$$

$$= \varprojlim \mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A}i)(pr_i F, pr_i G) \ ,$$

où pr_i désigne la projection (dans $\mathbb{V}$-2-Cat) de $\varprojlim \mathbb{A}i$ vers $\mathbb{A}i$.

4) Les objets des deux membres de 4) sont égaux, car

$$\left|\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},[F_1,F_2])\right| = \mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},|[F_1,F_2]|) =$$

$$= \mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},[|F_1|,|F_2|]) =$$

$$= [\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},F_1),\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},F_2)] =$$

$$= [\,|\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},F_1)|,|\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},F_2)|\,] =$$

$$= \left|[\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},F_1),\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},F_2)]\right| .$$

Ce qui reste à montrer est une combinaison de 3) et du fait que les objets commas dans une 2-catégorie commutent avec les fins cartésiennes. ■

<u>Proposition 3.3</u>. Si la 2-catégorie de base $\mathbb{V}$ est avec "op", on a les isomorphismes suivants

1) $\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I}^{op},\mathbb{A}^{op})^{op} \simeq \mathrm{Fun}_{\bar{x}}(\mathbb{I},\mathbb{A})$,

2) ${}^{op}\mathrm{Fun}_x({}^{op}\mathbb{I},{}^{op}\mathbb{A}) \simeq \mathrm{Fun}_{\bar{x}}(\mathbb{I},\mathbb{A})$,

3) $\mathrm{Fun}_x({}^{op}\mathbb{I}^{op},{}^{op}\mathbb{A}^{op}) \simeq {}^{op}\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})^{op}$,

où $\bar{x}$ est défini par

$$\bar{x}=\begin{cases} d, & \text{quand } x=u \\ u, & \text{»} \quad x=d \ . \end{cases}$$

<u>Preuve</u>. 1) <u>x=u</u>. On a

$$\begin{aligned} |\mathrm{Fun}_u(\mathbb{I}^{op},\mathbb{A}^{op})^{op}| &= |\mathrm{Fun}_u(\mathbb{I}^{op},\mathbb{A}^{op})|^{op} = \\ &= \mathrm{Fun}_u(\mathbb{I}^{op},|\mathbb{A}^{op}|)^{op} = \\ &= \mathrm{Fun}_u(\mathbb{I}^{op},|\mathbb{A}|^{op})^{op} = \\ &= \mathrm{Fun}_d(\mathbb{I},|\mathbb{A}|) = \\ &= |\mathrm{Fun}_d(\mathbb{I},\mathbb{A})| \ . \end{aligned}$$

D'un autre côté si $F^{op},G^{op}:\mathbb{I}^{op}\to|\mathbb{A}|^{op}$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Fun}_u(\mathbb{I}^{op},\mathbb{A}^{op})^{op}(F^{op},G^{op}) &= \mathrm{Fun}_u(\mathbb{I}^{op},\mathbb{A}^{op})(G^{op},F^{op}) = \\ &= \mathrm{cart}\text{-}\int_i^u \mathbb{A}^{op}(G_i^{op},F_i^{op}) = \\ &= \mathrm{cart}\text{-}\int_i^u \mathbb{A}(F_i^{op},G_i^{op}) = \\ &= \mathrm{cart}\text{-}\int_i^d \mathbb{A}(F_i,G_i) = \\ &= \mathrm{Fun}_d(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G) \ . \end{aligned}$$

2) se prouve d'une manière analogue et 3) est une combinaison de 1) et 3).■

§4. <u>$\mathbb{V}$-modifications</u>

Soient $\mathbb{V}$ une 2-catégorie multiplicative à fins cartésiennes projectives finies et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{V}$-2-catégorie.
On définit la $\mathbb{V}$-2-catégorie $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A})$ par

$$\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A})=\mathrm{Fun}_d(2_2,\mathbb{A}) \ ,$$

où 2_2 est la 2-catégorie triviale

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\downarrow"] & \bullet \end{tikzcd} \ .$$

Autrement dit, les objets de $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A})$ sont les 2-cellules de $|\mathbb{A}|$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right, "g"'{name=D}] & B \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\mu"] \end{tikzcd}$$

tandis que, si

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, bend left, "f'"{name=U}] \arrow[r, bend right, "g'"'{name=D}] & B' \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\mu'"] \end{tikzcd}$$

est un objet de $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A})$, alors $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A})(\mu,\mu')$ est donné par le schéma universel suivant (qui existe vu les hypothèses sur $\mathbb{V}$)

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A})(\mu,\mu') \arrow[dl, "\omega_{AA'}"'] \arrow[dr, "\omega_{BB'}"] & \\ \mathbb{A}(A,A') \arrow[dr] \arrow[dr, bend right=50, ""] \arrow[rr, phantom, "\overset{\omega_{ff'}}{\longleftarrow}\ \underset{\omega_{gg'}}{\longleftarrow}"] & & \mathbb{A}(B,B') \arrow[dl] \arrow[dl, bend left=50] \\ & \mathbb{A}(A,B') & \end{tikzcd}$$

$$\mathbb{A}(1,\mu')\cdot\omega_{AA'}\circ\omega_{gg'} = \omega_{ff'}\circ\mathbb{A}(\mu,1)\cdot\omega_{BB'} .$$

Cela veut dire que tout diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\sigma_{AA'}"'] \arrow[dr, "\sigma_{BB'}"] & \\ \mathbb{A}(A,A') \arrow[dr] \arrow[dr, bend right=50] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sigma_{ff'}}{\longleftarrow}\ \underset{\sigma_{gg'}}{\longleftarrow}"] & & \mathbb{A}(B,B') \arrow[dl] \arrow[dl, bend left=50] \\ & \mathbb{A}(A,B') & \end{tikzcd} \qquad (5)$$

i.e. $\mathbb{A}(1,\mu')\cdot\sigma_{AA'}\circ\sigma_{gg'} = \sigma_{ff'}\circ\mathbb{A}(\mu,1)\cdot\sigma_{BB'}$,

induit une flèche unique $\sigma : X \to \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A})(\mu,\mu')$ telle que

$$\begin{cases} \omega_{BB'}\cdot\sigma=\sigma_{BB'} \;, & \omega_{ff'}\cdot\sigma=\sigma_{ff'} \;, \\ \omega_{AA'}\cdot\sigma=\sigma_{AA'} \;, & \omega_{gg'}\cdot\sigma=\sigma_{gg'} \;, \end{cases}$$

et tout couple de 2-cellules

$$(m_{AA'}:\sigma_{AA'}\longrightarrow\overline{\sigma}_{AA'} \;,\; m_{BB'}:\sigma_{BB'}\longrightarrow\overline{\sigma}_{BB'})$$

tel que

$$\begin{cases} \mathbb{A}(A,f')m_{AA'}\circ\sigma_{ff'}=\overline{\sigma}_{ff'}\circ\mathbb{A}(f,B')m_{BB'} \\ \mathbb{A}(A,g')m_{AA'}\circ\sigma_{gg'}=\overline{\sigma}_{gg'}\circ\mathbb{A}(g,B')m_{BB'} \end{cases}$$

(les $\overline{\sigma}_{AA'}$,$\overline{\sigma}_{BB'}$,$\overline{\sigma}_{ff'}$,$\overline{\sigma}_{gg'}$ sont tels que $\mathbb{A}(1,\mu')\overline{\sigma}_{AA'}\circ\overline{\sigma}_{gg'}=$ $=\overline{\sigma}_{ff'}\circ\mathbb{A}(\mu,1)\overline{\sigma}_{BB'}$) induit une seule 2-cellule

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "\sigma"] \arrow[r, bend right, "\overline{\sigma}"'] \arrow[r, phantom, "m\Downarrow"] & \mathbb{M}od(\mathbb{A})(\mu,\mu') \end{tikzcd}$$

avec

$$\begin{cases} \omega_{AA'}m=m_{AA'} , \\ \omega_{BB'}m=m_{BB'} . \end{cases}$$

Pour $\mathbb{V}=\mathbb{C}at$ par exemple, on peut décrire la 2-catégorie $\mathbb{M}od(\mathbb{A})$ comme suit:

Ses objets sont les 2-cellules de $\mathbb{A}$;

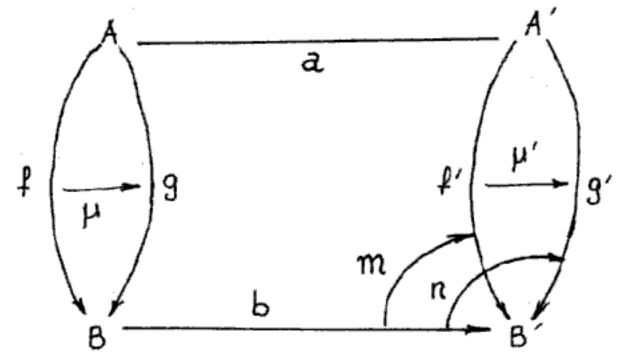
Une flèche de

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mu"] & B \end{tikzcd}$$

vers

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, bend left, "f'"] \arrow[r, bend right, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mu'"] & B' \end{tikzcd}$$

consiste à donner un couple ($a:A\longrightarrow A',b:B\longrightarrow B'$) de flèches de $\mathbb{A}$ et un couple ($m:b\cdot f\longrightarrow f'\cdot a$, $n:b\cdot g\longrightarrow g'\cdot a$) de 2-cellules de $\mathbb{A}$, tels que le diagramme suivant commute



i.e.

$$n\circ b\cdot\mu=\mu'\cdot a\circ m \quad .$$

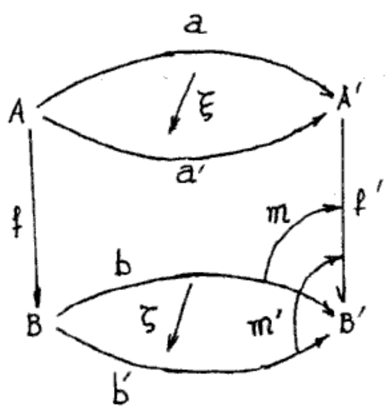
Enfin une 2-cellule dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{A})$ de

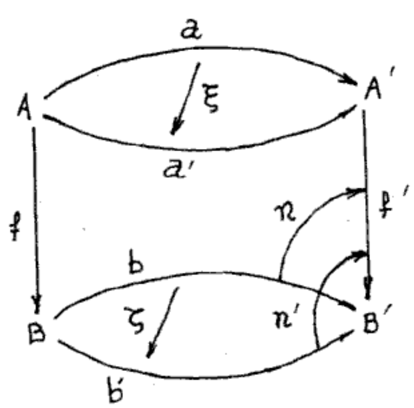
$$(a : A \longrightarrow A',\, b : B \longrightarrow B',\, m : b\cdot f \longrightarrow f'\cdot a \;,\, n : b\cdot g \longrightarrow g'\cdot a)$$

vers

$$(a' : A \longrightarrow A',\, b' : B \longrightarrow B',\, m' : b'\cdot f \longrightarrow f'\cdot a',\, n' : b'\cdot g \longrightarrow g'\cdot a \;)$$

est un couple $(\xi : a \to a',\ \zeta : b \longrightarrow b')$ de 2-cellules de $\mathbb{A}$ qui font commuter les diagrammes ci-après





i.e.

$$\begin{cases} m'\circ\zeta\cdot f=f'\cdot\xi\circ m \;, \\ n'\circ\zeta\cdot g=g'\cdot\xi\circ n \;. \end{cases}$$

Revenons au cas général.

Évidemment on a des $\mathbb{V}$-2-foncteurs

$$\overline{\partial}_0, \overline{\partial}_1 : \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbb{A})$$

définis sur les objets par

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right, "g"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\mu"] & B \end{tikzcd} \quad \overset{\overline{\partial}_0}{\rightsquigarrow} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] & B \end{tikzcd}, \qquad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, bend right, "g"'] & B \end{tikzcd} ,$$

tandis que les flèches $(\overline{\partial}_0)_{\mu\mu'}$ et $(\overline{\partial}_1)_{\mu\mu'}$ sont les flèches uniques qui rendent commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A})(\mu,\mu') \arrow[rr, "(\overline{\partial}_0)_{\mu\mu'}"] \arrow[dl, "\omega_{AA'}"'] \arrow[dr, "\omega_{BB'}"] & & \mathrm{Fun}(\mathbb{A})(f,f') \arrow[dlll] \arrow[dl] \\
\mathbb{A}(A,A') \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,f')"'] \arrow[rr, phantom, "\omega_{ff'}"] & & \mathbb{A}(B,B') \arrow[dl, "\mathbb{A}(f,1)"] \arrow[ur, phantom, "m_{f,f'}"] & \\
 & \mathbb{A}(A,B') & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A})(\mu,\mu') \arrow[rr, "(\overline{\partial}_1)_{\mu\mu'}"] \arrow[dl, "\omega_{AA'}"'] \arrow[dr, "\omega_{BB'}"] & & \mathrm{Fun}(\mathbb{A})(g,g') \arrow[dlll] \arrow[dl] \\
\mathbb{A}(A,A') \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,g')"'] \arrow[rr, phantom, "\omega_{gg'}"] & & \mathbb{A}(B,B') \arrow[dl, "\mathbb{A}(g,1)"] \arrow[ur, phantom, "m_{g,g'}"] & \\
 & \mathbb{A}(A,B') & &
\end{tikzcd}$$

respectivement.

Proposition 4.1. Le span

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{M}od(\mathbb{A}) \arrow[dl, "\bar{\partial}_0"'] \arrow[dr, "\bar{\partial}_1"] & \\ Fun(\mathbb{A}) & & Fun(\mathbb{A}) \end{tikzcd} \qquad (6)$$

est une catégorie interne à $\mathbb{V}$-2-Cat.

Preuve. Analogue à celle de la prop.1.1.■

Soient maintenant F,G deux $\mathbb{V}$-2-foncteurs de $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{A}$ et n,θ deux transformations $\mathbb{V}$-quasi-naturelles de F vers G.

Une $\mathbb{V}$-modification φ de n vers θ , notée $\varphi : n \Rrightarrow \theta : F \Rightarrow G : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$, est un $\mathbb{V}$-2-foncteur $\varphi : \mathbb{B} \to \mathbb{M}od(\mathbb{A})$ tel que $\bar{\partial}_0 \cdot \varphi = n$, $\bar{\partial}_1 \cdot \varphi = \theta$;

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{M}od(\mathbb{A}) \arrow[d, shift right, "\bar{\partial}_0"'] \arrow[d, shift left, "\bar{\partial}_1"] \\ \mathbb{B} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, shift left, "n"] \arrow[r, shift right, "\theta"'] & Fun(\mathbb{A}) \end{tikzcd} .$$

Pour $\mathbb{V}$=Cat par exemple, on retrouve la notion de modification entre transformations quasi-naturelles.

La proposition 4.1 nous donne un moyen de composition de $\mathbb{V}$-modifications. Plus précisement, si ψ est une $\mathbb{V}$-modification de θ vers $m : F \Rightarrow G : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$, alors le composé $\psi \cdot \varphi$ est le $\mathbb{V}$-2-foncteur

$$\mathbb{B} \xrightarrow{(\varphi,\psi)} \mathbb{M}od(\mathbb{A}) \underset{Fun(\mathbb{A})}{\times} \mathbb{M}od(\mathbb{A}) \xrightarrow{\bar{c}} \mathbb{M}od(\mathbb{A}) ,$$

où $\bar{c}$ désigne la multiplication de la catégorie interne (6).

Proposition 4.2. Étant donnés deux $\mathbb{V}$-2-foncteurs $F,G : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$, les $\mathbb{V}$-modifications entre transformations $\mathbb{V}$-quasi-naturelles de F vers G constituent une catégorie, notée $Fun(\mathbb{B},\mathbb{A})(F,G)$.■

Pour la définition de la composition horizontale des $\mathbb{V}$-modifications on a besoin de la proposition suivante:

<u>Proposition 4.3.</u> Le 2-graphe

$$\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A}) \underset{\bar{\partial}_1}{\overset{\bar{\partial}_0}{\rightrightarrows}} \mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} \mathbb{A} \qquad (8)$$

est une 2-catégorie interne à $\mathbb{V}$-2-Cat.

<u>Preuve</u>. Comme les spans $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A}) \underset{\bar{\partial}_1}{\overset{\bar{\partial}_0}{\rightrightarrows}} \mathrm{Fun}(\mathbb{A})$, $\mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} \mathbb{A}$, sont déjà des catégories internes à $\mathbb{V}$-2-Cat, on va déterminer la troisième loi de composition (composition horizontale), c'est-à-dire un $\mathbb{V}$-2-foncteur

$$\bar{\bar{c}} : \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A}) \underset{\mathbb{A}}{\times} \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A})$$

qui vérifie certaines conditions de compatibilité [4], où la source de $\bar{\bar{c}}$ est le produit fibré du cospan

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A}) \arrow[dr, "\bar{\partial}_1"'] & & & \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A}) \arrow[dl, "\bar{\partial}_0"] \\
& \mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \arrow[dr, "\partial_1"'] & \mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \arrow[d, phantom] \arrow[dl, "\partial_0"] & \\
& & \mathbb{A} &
\end{tikzcd}$$

$\bar{\bar{c}}$ envoie l'objet

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda"] & B \arrow[r, bend left, "f'"] \arrow[r, bend right, "g'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda'"] & C
\end{tikzcd}$$

de $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A}) \underset{\mathbb{A}}{\times} \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A})$, sur l'objet

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "f'f"] \arrow[r, bend right, "g'g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda'\lambda"] & C
\end{tikzcd}$$

de $\mathrm{Mod}(\mathbb{A})$.

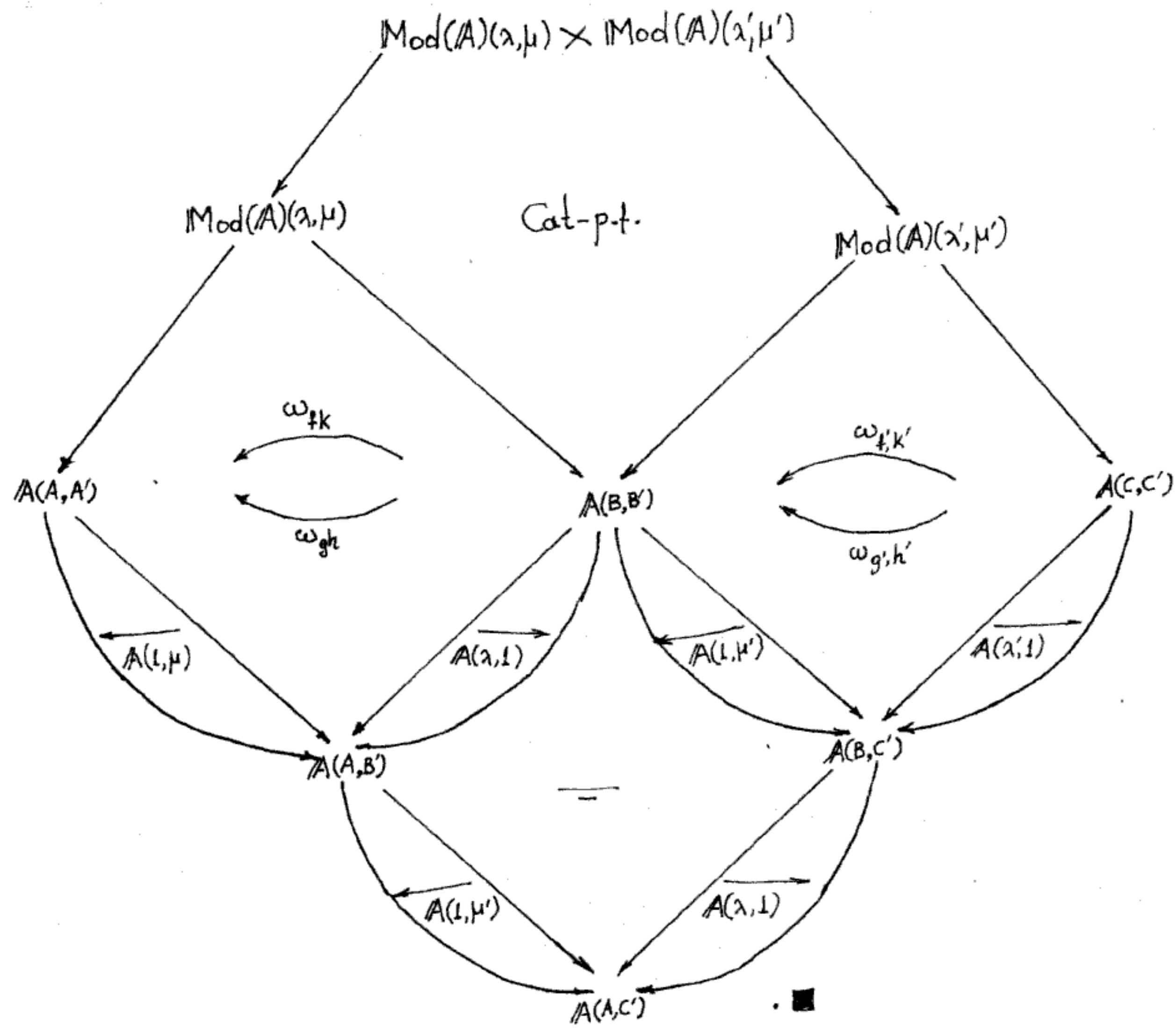
Soit la situation

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[d, bend left, "g"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{\lambda}"] \\
B \arrow[d, bend right, "f'"'] \arrow[d, bend left, "g'"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{\lambda'}"] \\
C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A' \arrow[d, bend right, "k"'] \arrow[d, bend left, "h"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{\mu}"] \\
B' \arrow[d, bend right, "k'"'] \arrow[d, bend left, "h'"] \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{\mu'}"] \\
C'
\end{tikzcd}
\quad ;
$$

alors la flèche

$$\bar{\bar{c}}_{\lambda\lambda'\mu\mu'} : \mathrm{Mod}(\mathbb{A})(\lambda,\mu) \underset{\mathbb{A}(B,B')}{\times} \mathrm{Mod}(\mathbb{A})(\lambda',\mu') \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{A})(\lambda'\lambda,\mu'\mu)$$

est la seule flèche induite par le schéma commutatif suivant



. ■

Si donc on se donne deux $\mathbb{V}$-modifications $\varphi : n \Rrightarrow \theta : F \Rightarrow G : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ et $\varphi' : n' \Rrightarrow \theta' : G \Rightarrow H : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$, alors on définit la composition horizontale $\varphi * \varphi'$ par

$$\mathbb{B} \xrightarrow{(\varphi,\varphi')} \mathbb{M}od(\mathbb{A}) \underset{\mathbb{A}}{\times} \mathbb{M}od(\mathbb{A}) \xrightarrow{\bar{\bar{c}}} \mathbb{M}od(\mathbb{A}) . \qquad (9)$$

<u>Théorème 4.4</u>. Les $\mathbb{V}$-modifications de transformations $\mathbb{V}$-quasi-naturelles entre $\mathbb{V}$-2-foncteurs de $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{A}$ constituent une 2-catégorie avec lois de composition données par (7) et (9); on la note $\mathrm{Fun}(\mathbb{B},\mathbb{A})$.■

<u>Remarque.</u> Il est clair que, si $\theta : \mathbb{B} \to \mathrm{Fun}(\mathbb{A})$ (resp. $\varphi : \mathbb{B} \to \mathbb{M}od(\mathbb{A})$) est une transformation $\mathbb{V}$-quasi-naturelle de F vers G (resp. $\mathbb{V}$-modification de n vers n'), alors le 2-foncteur sous-jacent $|\theta| : |\mathbb{B}| \to \mathrm{Fun}(|\mathbb{A}|)$ (resp. $|\varphi| : |\mathbb{B}| \to \mathbb{M}od(|\mathbb{A}|)$) est une transformation quasi-naturelle de $|F|$ vers $|G|$ (resp. une modification de $|n|$ vers $|n'|$).

<u>Proposition 4.5</u>. Pour tous $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{V}\text{-2-}\mathbf{Cat}$, on a un quasi-foncteur [14] de composition

$$\mathrm{Fun}(\mathbb{A},\mathbb{B}) \times \mathrm{Fun}(\mathbb{B},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathbb{A},\mathbb{C})$$

qui est associatif et unitaire.

<u>Preuve</u>. Soit la situation suivante

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow n"] & \mathbb{B} \arrow[r, bend left, "\bar{F}"] \arrow[r, bend right, "\bar{G}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta"] & \mathbb{C} \end{tikzcd} .$$

On va déterminer une $\mathbb{V}$-modification de $\bar{G}n.\theta F$ vers $\theta G \cdot \bar{F}n$, c'est-à-dire un $\mathbb{V}$-2-foncteur $(\theta n) : \mathbb{A} \to \mathbb{M}od(\mathbb{C})$ tel que $\bar{\partial}_1 \cdot (\theta n) = \theta G \cdot \bar{F}n$ et $\bar{\partial}_0 (\theta n) = \bar{G}n \cdot \theta F$.

(θn) envoie l'objet A de $\mathbb{A}$ sur la 2-cellule de $|\mathbb{C}|$

$$\begin{tikzcd}
\bar{F}FA \arrow[r, "\bar{F}n_A"] \arrow[d, "\theta_{FA}"'] \arrow[dr, phantom, "\curvearrowright\, |\theta|_{|n|_A}"] & \bar{F}GA \arrow[d, "\theta_{GA}"] \\
\bar{G}FA \arrow[r, "\bar{G}n_A"'] & \bar{G}GA
\end{tikzcd} \quad .$$

Pour tous $A,B\in \mathrm{Ob}\mathbb{A}$ la flèche

$$(\theta n)_{AB} : \mathbb{A}(A,B) \longrightarrow \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A})(|\theta|_{|n|_A}, |\theta|_{|n|_B}) \qquad (10)$$

est définie comme suit:

Les 2-cellules

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \mathbb{A}(A,B) \arrow[dlll, "(\bar{F}F)_{AB}"'] \arrow[ddl, "(\theta F)_{AB}"'] \arrow[ddr, "(\bar{G}n)_{AB}"] \arrow[drrr, "(\bar{G}G)_{AB}"] & & & \\
\mathbb{C}(\bar{F}FA,\bar{F}FB) \arrow[dd, "\mathbb{C}(1,\theta_{FB})"'] & & & & & & \mathbb{C}(\bar{G}GA,\bar{G}GB) \arrow[dd, "\mathbb{C}(\bar{G}n_A,1)"] \\
 & & \mathrm{Fun}(\mathbb{C})(\theta_{FA},\theta_{FB}) \arrow[ull] \arrow[dr] \arrow[dl, phantom, "\curvearrowleft\, \omega_{\theta_{FA},\theta_{FB}}"] & & \mathrm{Fun}(\mathbb{C})(\bar{G}n_A,\bar{G}n_B) \arrow[urr] \arrow[dl] \arrow[dr, phantom, "\curvearrowleft\, \omega_{\bar{G}n_A,\bar{G}n_B}"] & & \\
\mathbb{C}(\bar{F}FA,\bar{G}FB) \arrow[drrr, "\mathbb{C}(1,\bar{G}n_B)"'] & & & \mathbb{C}(\bar{G}FA,\bar{G}FB) \arrow[lll, "\mathbb{C}(\theta_{FA},1)"] \arrow[rrr, "\mathbb{C}(1,\bar{G}n_B)"'] & & & \mathbb{C}(\bar{G}FA,\bar{G}GB) \arrow[dlll, "\mathbb{C}(\theta_{FA},1)"] \\
 & & & \mathbb{C}(\bar{F}FA,\bar{G}GB) & & &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \mathbb{A}(A,B) \arrow[dlll, "(\bar F F)_{AB}"'] \arrow[ddl, "(\bar F n)_{AB}"'] \arrow[ddr, "(\theta G)_{AB}"] \arrow[drrr, "(\bar G G)_{AB}"] & & & \\
\mathbb{C}(\bar F F A, \bar F F B) \arrow[dd, "\mathbb{C}(1,\bar F n_B)"'] & & & & & & \mathbb{C}(\bar G G A, \bar G G B) \arrow[dd, "\mathbb{C}(\theta_{GA},1)"] \\
\arrow[r, phantom, "\omega_{\bar F n_A, \bar F n_B}"] & & \mathrm{Fun}(\mathbb{C})(\bar F n_A, \bar F n_B) \arrow[ull] \arrow[dr] & & \mathrm{Fun}(\mathbb{C})(\theta_{GA}, \theta_{GB}) \arrow[urr] \arrow[dl] & \arrow[r, phantom, "\omega_{\theta_{GA}, \theta_{GB}}"] & \\
\mathbb{C}(\bar F F A, \bar F G B) \arrow[drrr, "\mathbb{C}(1,\theta_{GB})"'] & & & \mathbb{C}(\bar F G A, \bar F G B) \arrow[lll, "\mathbb{C}(\bar F n_A,1)"] \arrow[rrr, "\mathbb{C}(1,\theta_{GB})"'] & & & \mathbb{C}(\bar F G A, \bar G G B) \arrow[dlll, "\mathbb{C}(\bar F n_A,1)"] \\
 & & & \mathbb{C}(\bar F F A, \bar G G B) & & &
\end{tikzcd}
$$

constituent un cône de base

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathbb{C}(\bar F F A, \bar G F B) \arrow[dr, "\mathbb{C}(1,\bar G n_B)"] \arrow[dd, phantom, "\downarrow \mathbb{C}(1,|\theta|_{|n|_B})"] & & \mathbb{C}(\bar G F A, \bar G G B) \arrow[dl, "\mathbb{C}(\theta_{FA},1)"'] \arrow[dd, phantom, "\downarrow \mathbb{C}(|\theta|_{|n|_A},1)"] & \\
\mathbb{C}(\bar F F A, \bar F F B) \arrow[ur, "\mathbb{C}(1,\theta_{FB})"] \arrow[dr, "\mathbb{C}(1,\bar F n_B)"'] & & \mathbb{C}(\bar F F A, \bar G G B) & & \mathbb{C}(\bar G G A, \bar G G B) \arrow[ul, "\mathbb{C}(\bar G n_A,1)"'] \arrow[dl, "\mathbb{C}(\theta_{GA},1)"] \\
 & \mathbb{C}(\bar F F A, \bar F G B) \arrow[ur, "\mathbb{C}(1,\theta_{GB})"'] & & \mathbb{C}(\bar F G A, \bar G G B) \arrow[ul, "\mathbb{C}(\bar F n_A,1)"] &
\end{tikzcd}
$$

et comme l'objet $\mathbb{M}od(\mathbb{A})(|\theta|_{|n|_A}, |\theta|_{|n|_B})$ est le sommet du cône universel de même base, on a la flèche demandée (10) .

La démonstration des autres assertions est laissée au lecteur.■

§5. $\mathbb{V}$-quasi-adjonctions et $\mathbb{V}$-limites.

Soient

$$\mathbb{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbb{B}$$

des $\mathbb{V}$-2-foncteurs et $\eta : Id_{\mathbb{A}} \Rightarrow GF$, $\varepsilon : FG \Rightarrow Id_{\mathbb{B}}$ deux transformations $\mathbb{V}$-quasi-naturelles (resp. $\mathbb{V}$-naturelles).

On dit que F est <u>$\mathbb{V}$-quasi-adjoint</u> (resp. <u>$\mathbb{V}$-adjoint</u>) <u>à gauche de G</u> si

$$F = \varepsilon F \cdot F\eta \quad , \quad G = G\varepsilon \cdot \eta G \ .$$

On dit que $\mathbb{A}$ est à <u>x-$\mathbb{V}$-limites cartésiennes projectives</u> (resp. <u>x-$\mathbb{V}$-quasi-limites projectives</u>) si pour chaque 2-catégorie $\mathbb{I}$ le $\mathbb{V}$-2-foncteur diagonal

$$\Delta_x^{(\mathbb{I})} : \mathbb{A} \longrightarrow Fun_x(\mathbb{I}, \mathbb{A})$$

admet un $\mathbb{V}$-adjoint (resp. $\mathbb{V}$-quasi-adjoint) à droite.

En dualisant on peut obtenir les x-$\mathbb{V}$-limites cartésiennes (resp. x-$\mathbb{V}$-quasi-limites) inductives.

<u>Théorème 5.1</u>. Si la $\mathbb{V}$-2-catégorie $\mathbb{A}$ vérifie les conditions:

i) $|\mathbb{A}|$ est à x-limites cartésiennes projectives,

ii) pour tout $V \in Ob\mathbb{V}$, pour tout $A \in Ob\mathbb{A}$, il existe $A^V \in Ob\mathbb{A}$ tel que

$$r_0 : \mathbb{V}(V, \mathbb{A}(X, A)) \simeq |\mathbb{A}|(X, A^V)$$

de façon naturelle en X, et

iii) le 2-foncteur

$$(\_)^V : |\mathbb{A}| \longrightarrow |\mathbb{A}|$$

commute avec les x-limites cartésiennes projectives,

alors $\mathbb{A}$ est à x-$\mathbb{V}$-limites cartésiennes projectives.

<u>Preuve</u>. On va définir un $\mathbb{V}$-2-foncteur

$$\underleftarrow{\mathcal{L}}_{\mathbb{I}}^{x} : Fun_x(\mathbb{I}, \mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{A}$$

de la façon suivante:

Pour le 2-foncteur $F : \mathbb{I} \longrightarrow |\mathbb{A}| \in Ob Fun_x(\mathbb{I}, \mathbb{A})$, on pose

$$\underset{\longleftarrow}{\mathcal{L}}{}^{\times}_{\mathbb{I}}(F)=\text{cart-x-}\underleftarrow{\lim}F \quad ,$$

où la cart-x-$\underleftarrow{\lim}$F est dans $|\mathbb{A}|$.

La flèche de $\mathbb{V}$

$$(\underset{\longleftarrow}{\mathcal{L}}{}^{\times}_{\mathbb{I}})_{FG}:\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G)\longrightarrow \mathbb{A}(\text{cart-x-}\underleftarrow{\lim}F,\text{cart-x-}\underleftarrow{\lim}G)$$

correspond par l'isomorphisme Γ_0 à la flèche

$$(\widehat{\underset{\longleftarrow}{\mathcal{L}}{}^{\times}_{\mathbb{I}}})_{FG}:\text{cart-x-}\underleftarrow{\lim}F\longrightarrow(\text{cart-x-}\underleftarrow{\lim}G)^{\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})} ,$$

ou bien-vu l'hypothèse iii)- à la flèche

$$(\widehat{\underset{\longleftarrow}{\mathcal{L}}{}^{\times}_{\mathbb{I}}})':\text{cart-x-}\underset{i}{\underleftarrow{\lim}}Fi\longrightarrow\text{cart-x-}\underset{i}{\underleftarrow{\lim}}(G_i{}^{\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})}) \qquad (11).$$

La flèche (10) compte tenu de la propriété universelle de cart-x-$\underleftarrow{\lim}$ est induite par le quasi-cône projectif

$$\begin{tikzcd}
 & \text{cart-}\underleftarrow{\lim}\,Fi \arrow[dl, "P_i"'] \arrow[dr, "P_j"] \arrow[d, phantom, "P_f"] & \\
Fi \arrow[rr, "Ff"'] \arrow[d, dash, "\hat{\sigma}_i"'] \arrow[drr, phantom, "(A)"] & & Fj \arrow[d, dash, "\hat{\sigma}_j"] \\
G_i{}^{\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})} \arrow[rr, dash, "(Gf)^{\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})}"'] \arrow[urr, phantom, "\hat{\sigma}_f"] & & G_j{}^{\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})}
\end{tikzcd} ,$$

où l'image de (A) par l'isomorphisme Γ_0 est

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G) \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\sigma_j"] & \\
\mathbb{A}(Fi,Gi) \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,Gf)"'] \arrow[rr, phantom, "\sigma_f"] & & \mathbb{A}(Fj,Gj) \arrow[dl, "\mathbb{A}(Ff,1)"] \\
 & \mathbb{A}(Fi,Gj) &
\end{tikzcd} ,$$

c'est-à-dire le quasi-wedge qui définit Fun($\mathbb{I}$,$\mathbb{A}$)(F,G) .

Pour établir la $\mathbb{V}$-adjonction

$$\varphi_{A,F}:\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})(\Delta_x^{(\mathbb{I})}(A),F)\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}(A,\underleftarrow{\mathscr{L}}_{\mathbb{I}}^{x}(F)),$$

ou bien

$$\varphi_{A,F}:\text{cart-x-}\varprojlim_{i}\mathbb{A}(A,Fi)\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}(A,\text{cart-x-}\varprojlim F)\quad ,$$

on définit $\varphi_{A,F}$ comme ci-dessus et $\varphi^{-1}_{A,F}$ par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(A,\text{cart-x-}\varprojlim F) \arrow[rr, "\varphi^{-1}_{A,F}"] \arrow[dd, "\mathbb{A}(A,\bar{p}_i)"'] \arrow[drr, "\mathbb{A}(A,\bar{p}_j)"] \arrow[ddr, phantom, "\mathbb{A}(A,\bar{p}_f)"] & & \text{cart-x-}\varprojlim\mathbb{A}(A,Fi) \arrow[ddll, "p_i"'] \arrow[d, "p_j"] \\
& & \mathbb{A}(A,Fj) \arrow[dl, phantom, "p_f"] \\
\mathbb{A}(A,Fi) \arrow[urr, "\mathbb{A}(A,Ff)"'] & &
\end{tikzcd}$$

où $\{p_i,p_f\}$ désigne le quasi-cône projectif définissant cart-$\varprojlim F$.■

<u>Remarques</u> 1°. Dans le cas où $\mathbb{V}=\mathbb{C}at$, les conditions i), ii) et iii) du théorème ci-dessus équivalent à la condition i).
En effet dans ce cadre-là, la condition ii) exprime le fait que la 2-catégorie $\mathbb{A}$ est à cotenseurs, donc i) $\Rightarrow$ ii) .
D'autre par l'isomorphisme

$$(\text{cart-}\varprojlim_{i}X_i)^{\mathbb{I}}\xrightarrow{\sim}\text{cart-}\varprojlim_{i}X_i^{\mathbb{I}}$$

est toujours vérifié, car

$$\begin{aligned}\mathbb{A}(A,(\text{cart-}\varprojlim X_i)^{\mathbb{I}}) &\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}(A,\text{cart-}\varprojlim X_i)^{\mathbb{I}}\xrightarrow{\sim}\\ &\xrightarrow{\sim}(\text{cart-}\varprojlim\mathbb{A}(A,X_i))^{\mathbb{I}}\xrightarrow{\sim}\\ &\xrightarrow{\sim}\text{cart-}\varprojlim\mathbb{A}(A,X_i)^{\mathbb{I}}\xrightarrow{\sim}\\ &\xrightarrow{\sim}\text{cart-}\varprojlim\mathbb{A}(A,X_i^{\mathbb{I}})\xrightarrow{\sim}\\ &\xrightarrow{\sim}\mathbb{A}(A,\text{cart-}\varprojlim X_i^{\mathbb{I}})\quad ,\end{aligned}$$

et par conséquent i) $\Rightarrow$ iii) .

2° Si la 2-catégorie de base $\mathbb{V}$ est fermée, à limites cartésiennes projectives, alors les hypothèses du th.5.1. sont aussi vérifiées pour $\mathbb{V}$, considérée comme $\mathbb{V}$-2-catégorie.

Théorème 5.2. Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{V}$-2-catégorie; alors les conditions suivantes sont équivalentes:

i) $\mathbb{A}$ est à x-$\mathbb{V}$-limites cartésiennes projectives ;

ii) a) $|\mathbb{A}|$ est à x-limites cartésiennes projectives et

b) les 2-foncteurs représentables $\mathbb{A}(A,\_):|\mathbb{A}|\to\mathbb{V}$ préservent ces limites.

Preuve. i) $\Rightarrow$ ii).

Supposons qu'on a la $\mathbb{V}$-adjonction

$$\Delta_x^{(\mathbb{I})} \dashv \underleftarrow{\mathcal{L}}_{\mathbb{I}}^{x} \quad ;$$

alors pour chaque 2-foncteur $F:\mathbb{I}\to|\mathbb{A}|$ et chaque objet A de $\mathbb{A}$, on a l'isomorphisme

$$\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})(\Delta_x^{(\mathbb{I})}(A),F) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{A}(A,\underleftarrow{\mathcal{L}}_{\mathbb{I}}^{x}(F))$$

naturel en F et A.

Tenant compte de

$$\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})(\Delta_x^{(\mathbb{I})}(A),F) = \text{cart-x-}\underleftarrow{\lim}_{i}\ \mathbb{A}(A,F_i) \quad ,$$

on obtient

$$\text{cart-x-}\underleftarrow{\lim}_{i}\ \mathbb{A}(A,F_i) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{A}(A,\underleftarrow{\mathcal{L}}_{\mathbb{I}}^{x}(F)) \qquad (12)$$

de façon naturelle en A, et par conséquent

$$\text{cart-x-}\underleftarrow{\lim}\ |\mathbb{A}|(A,F_i) \xrightarrow{\simeq} |\mathbb{A}|(A,\underleftarrow{\mathcal{L}}_{\mathbb{I}}^{x}(F))$$

de façon naturelle en A, donc $\underleftarrow{\mathcal{L}}_{\mathbb{I}}^{x}(F)$ est la x-limite cartésienne projective de F, d'où ii) a .

b) résulte immédiatement de (12), si on remplace $\underleftarrow{\mathcal{L}}_{\mathbb{I}}^{x}(F)$ par cart-x-$\underleftarrow{\lim}$F.

ii) $\Rightarrow$ i) <u>x=u</u>.

$\underleftarrow{\mathcal{L}}{}_{\mathbb{I}}^{u}$ est défini sur les objets de $\mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})$ (=2-foncteurs de $\mathbb{I}$ vers $|\mathbb{A}|$) par

$$\underleftarrow{\mathcal{L}}{}_{\mathbb{I}}^{u}(F)=\text{cart-u-}\varprojlim F\,,$$

tandis que la flèche

$$(\underleftarrow{\mathcal{L}}{}_{\mathbb{I}}^{u})_{FG}:\mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G)\longrightarrow \mathbb{A}(\text{cart-u-}\varprojlim F,\text{cart-u-}\varprojlim G)$$
$$\wr\!\!\wr$$
$$\text{cart-u-}\varprojlim_{i}\mathbb{A}(\text{cart-u-}\varprojlim F,G_i)$$

est induite par le quasi-cône projectif

$$\left\{\mathbb{A}(q_i,G_i)\cdot\sigma_i,\ \mathbb{A}(q_f,G_{\partial_1 f})\cdot\sigma_{\partial_1 f}\circ\mathbb{A}(q_{\partial_0 f},G_{\partial_1 f})\cdot\sigma_f\right\}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Fun}_u(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G) \arrow[dl, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\sigma_j"] & \\
\mathbb{A}(Fi,Gi) \arrow[rr, phantom, "\sigma_f"] \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,Gf)"] \arrow[dd, "\mathbb{A}(q_i,1)"'] & & \mathbb{A}(Fj,Gj) \arrow[dl, "\mathbb{A}(Ff,1)"'] \arrow[dd, "\mathbb{A}(q_j,1)"] \\
 & \mathbb{A}(Fi,Gj) \arrow[dr, "\mathbb{A}(q_i,1)"'] \arrow[r, phantom, "\mathbb{A}(q_f,1)"] & \\
\mathbb{A}(\text{cart-u-}\varprojlim\limits_{i} F,Gi) \arrow[rr, "\mathbb{A}(1,Gf)"'] & & \mathbb{A}(\text{cart-u-}\varprojlim F,Gj)
\end{tikzcd}\quad,$$

où $\{q_i,q_f\}$ est le quasi-cône projectif qui définit cart-u-$\varprojlim$F.

`A partir de là, on procède exactement comme dans la démonstration du théorème précédent.■

Soit $F:\mathbb{I}\to\mathbb{J}$ un 2-foncteur.

<u>Théorème 5.3</u>. Si la $\mathbb{V}$-2-catégorie $\mathbb{A}$ vérifie les conditions suivantes

i) $|\mathbb{A}|$ est représentable à Cat-limites projectives;

ii) les 2-foncteurs $\mathbb{A}(A,-):|\mathbb{A}|\to\mathbb{V}$ préservent la représentabilité et les Cat-limites projectives,

alors le $\mathbb{V}$-2-foncteur

$$\mathbb{A}^{\mathbb{J}} \xrightarrow{\ \mathfrak{J}\ } \mathrm{Fun}(\mathbb{J},\mathbb{A}) \xrightarrow{\mathrm{Fun}(F,\mathbb{A})} \mathrm{Fun}(\mathbb{I},\mathbb{A})$$

admet un $\mathbb{V}$-adjoint à droite $\mathrm{ext}_F(-)$.

<u>Preuve</u>. $\mathrm{ext}_F(-)$ est défini sur les objets de $\mathrm{Fun}(\mathbb{I},\mathbb{A})$, i.e. les 2-foncteurs $\Phi:\mathbb{I}\to|\mathbb{A}|$, par

$$\mathrm{ext}_F(\Phi)(j)=\mathrm{cart}\text{-}\int_i \Phi(i)^{\mathbb{J}(j,F(i))},$$

où $\Phi(i)^{\mathbb{J}(j,F(i))}$ désigne le tenseur de l'objet $\Phi(i)$ de $|\mathbb{A}|$ avec la catégorie $\mathbb{J}(j,F(i))$ et la fin cartésienne est dans $|\mathbb{A}|$.

L'isomorphisme

$$\mathbb{A}^{\mathbb{J}}(S,\mathrm{ext}_F(\Phi)) \simeq \mathrm{Fun}(\mathbb{I},\mathbb{A})(SF,\Phi),$$

$\mathbb{V}$-naturel en $S:\mathbb{I}\to|\mathbb{A}|$, s'obtient de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^{\mathbb{J}}(S,\mathrm{ext}_F(\Phi)) &= \mathrm{Cat}\text{-}\int_j \mathbb{A}(S(j),\mathrm{cart}\text{-}\int_i \Phi(i)^{\mathbb{J}(j,F(i))}) & \overset{(1)}{\simeq}\\
&\simeq \mathrm{Cat}\text{-}\int_j (\mathrm{cart}\text{-}\int_i \mathbb{A}(S(j),\Phi(i)^{\mathbb{J}(j,F(i))})) & \overset{(2)}{\simeq}\\
&\simeq \mathrm{cart}\text{-}\int_i (\mathrm{Cat}\text{-}\int_j \mathbb{A}(S(j),\Phi(i))^{\mathbb{J}(j,F(i))}) & \overset{(3)}{\simeq}\\
&\simeq \mathrm{cart}\text{-}\int_i \mathbb{A}(SF(i),\Phi(i)) = \mathrm{Fun}(\mathbb{I},\mathbb{A})(SF,\Phi),
\end{aligned}$$

où (1) exprime le fait que le représentable $\mathbb{A}(S(j),-)$ commute avec les fins cartésiennes (d'après les hypothèses i) et ii)), (2) exprime la commutation des Cat-$\int$ et cart-$\int$ ainsi que celle de $\mathbb{A}(S(j),-)$ avec les tenseurs, finalement (3) résulte du th. 3.1. de [7] appliqué au 2-foncteur (=Cat-foncteur)

$$\mathbb{A}(S(-),\Phi(i)):\mathbb{J}^{op}\to\mathbb{V}$$

et à l'objet $F(i)\in\mathrm{Ob}\mathbb{J}^{op}$. ∎

<u>Remarque</u>. Le théorème précédent est une relativisation de quasi-extension de Kan (v. [8]).

Soit $F:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ un $\mathbb{V}$-2-foncteur.

On dit que F <u>commute</u> avec les x-$\mathbb{V}$-limites cartésiennes projectives si, pour chaque 2-catégorie $\mathbb{I}$, le carré

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A}) \arrow[r, "\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},F)"] \arrow[d, "\underleftarrow{\mathcal{L}}{}^{x}_{\mathbb{I}}"'] & \mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{B}) \arrow[d, "\underleftarrow{\mathcal{L}}{}^{x}_{\mathbb{I}}"] \\
\mathbb{A} \arrow[r, "F"] & \mathbb{B}
\end{tikzcd}$$

est isocommutatif.

<u>Théorème 5.4</u>. Dans la situation de $\mathbb{V}$-adjonction

$$\mathbb{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathbb{B} \qquad (F \dashv G) \tag{13}$$

le $\mathbb{V}$-2-foncteur G commute avec les x-$\mathbb{V}$-limites cartésiennes projectives.

La démonstration se repose sur le lemme suivant:

<u>Lemme 5.5</u>. La $\mathbb{V}$-adjonction (13) induit une $\mathbb{V}$-adjonction

$$\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A}) \underset{\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},G)}{\overset{\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},F)}{\rightleftarrows}} \mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{B}) \quad (\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},F) \dashv \mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},G))$$

pour chaque 2-catégorie $\mathbb{I}$.

<u>Preuve</u>. Soient $M:\mathbb{I}\to|\mathbb{A}|$, $N:\mathbb{I}\to|\mathbb{A}|$, deux 2-foncteurs; alors on a

$$\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{B})(\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},F)(M),N)=\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{B})(FM,N) =$$

$$t-\int_i^x \mathbb{B}(FM_i,N_i)$$

$$\mathrm{cart}-\int_i^x \mathbb{A}(M_i,GN_i)$$

$$=\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})(M,GN) =$$

$$=\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})(M,\mathrm{Fun}_x(\mathbb{I},\text{[illegible]})).$$

Demonstration du th.5.4. On a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathrm{Fun}_{\times}(\mathbb{I},\mathbb{B}) \arrow[r, shift left, "\mathrm{Fun}_{\times}(\mathbb{I},G)"] \arrow[d, shift left, "\underleftarrow{\mathcal{L}}^{\times}_{\mathbb{I}}"] & \mathrm{Fun}_{\times}(\mathbb{I},\mathbb{A}) \arrow[l, shift left, "\mathrm{Fun}_{\times}(\mathbb{I},F)"] \arrow[d, shift left, "\underleftarrow{\mathcal{L}}^{\times}_{\mathbb{I}}"] \\
\mathbb{B} \arrow[u, shift left, "\Delta_{\times}^{(\mathbb{I})}"] \arrow[r, shift left, "G"] & \mathbb{A} \arrow[u, shift left, "\Delta_{\times}^{(\mathbb{I})}"] \arrow[l, shift left, "F"]
\end{tikzcd} .$$

Mais

$$\Delta_{\mathbf{x}}^{(\mathbb{I})}\cdot F \simeq \mathrm{Fun}_{\mathbf{x}}(\mathbb{I},F)\cdot\Delta_{\mathbf{x}}^{(\mathbb{I})}$$

donc, étant donné que les $\mathbb{V}$-adjoints à droite sont uniques à isomorphismes près, on obtient finalement

$$G\cdot\underleftarrow{\mathcal{L}}^{\times}_{\mathbb{I}} \simeq \underleftarrow{\mathcal{L}}^{\times}_{\mathbb{I}}\cdot\mathrm{Fun}_{\mathbf{x}}(\mathbb{I},G)\ .\blacksquare$$

§6. Transformations $\mathbb{V}$-naturelles

Soient $\mathbb{V}$ une 2-catégorie multiplicative, représentable, à Cat-limites projectives finies et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{V}$-2-catégorie; alors la $\mathbb{V}$-2-catégorie $\mathbb{A}^2$ est définie de la façon suivante:
Ses objets sont les flèches de $|\mathbb{A}|$; pour $f,g\in \mathrm{Ob}\mathbb{A}^2$ l'objet $\mathbb{A}^2(f,g)$ est le Cat-produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbb{A}^2(f,g) \arrow[r, "\partial_1"'] \arrow[d, "\partial_0"'] & \mathbb{A}(\partial_1 f,\partial_1 g) \arrow[d, "\mathbb{A}(f,1)"] \\
\mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_0 g) \arrow[r, "\mathbb{A}(1,g)"'] & \mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_1 g)
\end{tikzcd}$$

Évidemment on a un $\mathbb{V}$-2-foncteur $J:\mathbb{A}^2\to \mathrm{Fun}(\mathbb{A})$ qui est localement pleinement fidèle, car pour chaque $V\in\mathrm{Ob}\mathbb{V}$ le foncteur

$$\mathbb{V}(V,J):\mathbb{V}(V,\mathbb{A}^2(f,g))\longrightarrow\mathbb{V}(V,\mathrm{Fun}(\mathbb{A})(f,g))$$

est pleinement fidèle.

La $\mathbb{V}$-2-catégorie $\mathbb{A}^{\mathbf{2}_2}$ a comme objets les 2-cellules de $|\mathbb{A}|$, tandis que pour $\lambda : f \to g : A \to B$, $\lambda' : f' \to g' : A' \to B' \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{A}^{\mathbf{2}_2}$ l'objet $\mathbb{A}^{\mathbf{2}_2}(\lambda,\lambda')$ est donné par le diagramme commutatif universel suivant (qui existe puisque $\mathbb{V}$ est à fins cartésiennes projectives finies).

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{A}^{\mathbf{2}_2}(\lambda,\lambda') \arrow[dl, "P_0"'] \arrow[dr, "P_1"] & \\
\mathbb{A}(A,A') \arrow[dr] \arrow[dr, bend right=40] \arrow[dr, phantom, "\mathbb{A}(1,\lambda')"', near start] & & \mathbb{A}(B,B') \arrow[dl] \arrow[dl, bend left=40] \arrow[dl, phantom, "\mathbb{A}(\lambda,1)", near start] \\
 & \mathbb{A}(A,B') &
\end{tikzcd}$$

On a aussi un $\mathbb{V}$-2-foncteur $\overline{J} : \mathbb{A}^{\mathbf{2}_2} \to \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A})$ localement pleinement fidèle et des $\mathbb{V}$-2-foncteurs $\overline{\partial}_0, \overline{\partial}_1 : \mathbb{A}^{\mathbf{2}_2} \to \mathbb{A}^{\mathbf{2}}$ tels que $\partial_j \cdot \overline{\partial}_i = P_j$, $i,j=0,1$.

Le 2-graphe

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{\mathbf{2}_2} \arrow[r, shift left, "\overline{\partial}_0"] \arrow[r, shift right, "\overline{\partial}_1"'] & \mathbb{A}^{\mathbf{2}} \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] & \mathbb{A}
\end{tikzcd}$$

est une 2-catégorie interne à $\mathbb{V}$-2-Cat, "sous-2-catégorie" de

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A}) \arrow[r, shift left, "\overline{\partial}_0"] \arrow[r, shift right, "\overline{\partial}_1"'] & \mathrm{Fun}(\mathbb{A}) \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] & \mathbb{A}
\end{tikzcd} .$$

Soient maintenant $F, G : \mathbb{B} \to \mathbb{A}$ deux $\mathbb{V}$-2-foncteurs.

Une transformation <u>$\mathbb{V}$-naturelle</u> de F vers G est un $\mathbb{V}$-2-foncteur $n : \mathbb{B} \to \mathbb{A}^{\mathbf{2}}$ tel que $\partial_0 \cdot n = F$, $\partial_1 \cdot n = G$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B} \arrow[r, "n"] \arrow[dr, shift left, "G"] \arrow[dr, shift right, "F"'] & \mathbb{A}^{\mathbf{2}} \arrow[d, shift right, "\partial_0"'] \arrow[d, shift left, "\partial_1"] \\
 & \mathbb{A}
\end{tikzcd} .$$

<u>Proposition 6.1</u>. Les transformations $\mathbb{V}$-naturelles de F vers

G sont exactement les transformations $\mathbb{V}_0$-naturelles de F vers G, considérés comme $\mathbb{V}_0$-foncteurs.

<u>Preuve</u>. n associe à chaque objet B de $\mathbb{B}$ une flèche $n_B : FB \to GB$ de $|\mathbb{A}|$ et pour tous $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{B}$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{A}^2(n_A,n_B) \arrow[dl, "n_{AB}"'] \arrow[dr, "\partial_1"] \arrow[ddl, "\partial_0"] & \\
\mathbb{B}(A,B) \arrow[rr, "G_{AB}"'] \arrow[d, "F_{AB}"'] & & \mathbb{A}(GA,GB) \arrow[d, "\mathbb{A}(n_A,1)"] \\
\mathbb{A}(FA,FB) \arrow[rr, "\mathbb{A}(1,n_B)"] & & \mathbb{A}(FA,GB) .
\end{tikzcd} \blacksquare$$

Étant donné deux transformations $\mathbb{V}$-naturelles n et θ de F vers G, une <u>$\mathbb{V}$-modification</u> de n vers θ est un $\mathbb{V}$-2-foncteur $\varphi : \mathbb{B} \to \mathbb{A}^{2_2}$ tel que $\overline{\partial}_0 \cdot \varphi = n$ et $\overline{\partial}_1 \cdot \varphi = \theta$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, shift left, "\theta"] \arrow[dr, shift right, "n"'] & \mathbb{A}^{2_2} \arrow[d, shift right, "\overline{\partial}_0"'] \arrow[d, shift left, "\overline{\partial}_1"] \\
 & \mathbb{A}^2 .
\end{tikzcd}$$

<u>Proposition 6.2</u>. Une $\mathbb{V}$-modification de n vers θ est une collection de 2-cellules de $|\mathbb{A}|$

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, bend left, "n_A"] \arrow[r, bend right, "\theta_A"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \varphi_A"] & GA ,
\end{tikzcd}$$

telle que pour tous $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{B}$ le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}(B,A) \arrow[r, "G_{AB}"'] \arrow[d, "F_{AB}"'] & \mathbb{A}(GA,GB) \arrow[d, "\mathbb{A}(n_A,1)"'] \arrow[d, bend left=60, "\mathbb{A}(\theta_A,1)"] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\overrightarrow{\mathbb{A}(\varphi_A,1)}"] \\
\mathbb{A}(FA,FB) \arrow[r, "\mathbb{A}(1,n_B)"] \arrow[r, bend right=50, "\mathbb{A}(1,\theta_B)"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \mathbb{A}(1,\varphi_B)"] & \mathbb{A}(FA,GB)
\end{tikzcd}$$

Preuve. Analogue à celle de la prop.5.1.■

Proposition 6.3. Les $\mathbb{V}$-modifications entre transformations $\mathbb{V}$-naturelles entre $\mathbb{V}$-2-foncteurs de $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{A}$ constituent une 2-catégorie, notée $\mathbb{A}^{\mathbb{B}}$, qui est une sous-2-catégorie de $\mathrm{Fun}(\mathbb{B},\mathbb{A})$ (prop.4.4).

On a de plus des 2-foncteurs de composition

$$\mathbb{B}^{\mathbb{A}} \times \mathbb{C}^{\mathbb{B}} \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{A}}$$

associatifs et unitaires à droite et à gauche qui finalement munissent $\mathbb{V}$-2-$\mathbb{C}$at d'une structure de 3-catégorie.■

§7. Le cas des $\mathbb{V}$-bicatégories

Supposons maintenant que $\mathbb{V}$ est à fins cartésiennes projectives généralisées (v. ch.II) et soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{V}$-bicatégorie.

La $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathbb{C}\mathrm{yl}(\mathbb{A})$ des cylindres de $\mathbb{A}$ [4] a comme objets les flèches de la bicatégorie $|\mathbb{A}|$, tandis que pour $f,g \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{C}\mathrm{yl}(\mathbb{A})$ l'objet $\mathbb{C}\mathrm{yl}(\mathbb{A})(f,g)$ est l'objet comma suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C}\mathrm{yl}(\mathbb{A})(f,g) \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & \\
\mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_0 g) \arrow[dr, "\mathbb{A}(1,g)"'] \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow"] & & \mathbb{A}(\partial_1 f,\partial_1 g) \arrow[dl, "\mathbb{A}(f,1)"] \\
 & \mathbb{A}(\partial_0 f,\partial_1 g) &
\end{tikzcd}$$

De même on peut définir la $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A})$ (v.§4).

On a dans ce cas un 2-graphe

$$\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{A}) \underset{\overline{\partial}_1}{\overset{\overline{\partial}_0}{\rightrightarrows}} \mathbb{C}\mathrm{yl}(\mathbb{A}) \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} \mathbb{A}$$

qui est une bicatégorie interne à $\mathbb{V}$-Bicat[1].

Une transformation $\mathbb{V}$-quasi-naturelle, d'un $\mathbb{V}$-morphisme $F:\mathbb{B}\to\mathbb{A}$ vers un $\mathbb{V}$-morphisme $G:\mathbb{B}\to\mathbb{A}$, est un $\mathbb{V}$-morphisme $n:\mathbb{B}\to\mathbb{C}\mathrm{yl}(\mathbb{A})$

tel que $\partial_0 \cdot n=F$, $\partial_1 \cdot n=G$.

Soient n,θ des transformations $\mathbb{V}$-quasi-naturelles de F vers G. Une <u>$\mathbb{V}$-modification</u> de n vers θ est un $\mathbb{V}$-morphisme $\varphi:\mathbb{B}\to\mathbb{M}od(\mathbb{A})$ tel que $\overline{\partial}_0\cdot\varphi=n$, $\overline{\partial}_1\cdot\varphi=\theta$.

<u>Proposition 7.1</u>. Les $\mathbb{V}$-modifications entre transformations $\mathbb{V}$-quasi-naturelles entre $\mathbb{V}$-morphismes de $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{A}$ constituent une bicatégorie, notée Pseud$(\mathbb{B},\mathbb{A})$. ■

Étant donné une $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathbb{A}$ et une bicatégorie $\mathbb{I}$, on peut construire à l'aide de fins cartésiennes généralisées la $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathrm{Pseud}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})$: Elle a comme objets les morphismes de $\mathbb{I}$ vers $|\mathbb{A}|$; pour $F,G\in\mathrm{ObPseud}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})$, l'objet $\mathrm{Pseud}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G)$ est la x-fin cartésienne généralisée du bimorphisme

$$\mathbb{A}(F(-),G(-)):\mathbb{I}^{op}\times\mathbb{I}\longrightarrow\mathbb{V} \quad ,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{Pseud}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})(F,G)=\mathrm{Cart}\text{-}\int_i^x\mathbb{A}(F_i,G_i) \quad .$$

On laisse au lecteur le soin de prouver en détail le fait que $\mathrm{Pseud}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})$ est une $\mathbb{V}$-bicatégorie.

<u>Proposition 7.2</u>.

$$\mathrm{Pseud}_x(-,-):(\mathrm{Bicat}^{[1]})^{op}\times\mathbb{V}\text{-}\mathrm{Bicat}^{[1]}\to\mathbb{V}\text{-}\mathrm{Bicat}^{[1]}$$

est un bifoncteur tel que

$$|\mathrm{Pseud}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})|=\mathrm{Pseud}_x(\mathbb{I},|\mathbb{A}|) \ . ■$$

On dit que la $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathbb{A}$ est à <u>x-$\mathbb{V}$-quasi-limites projectives</u> si, pour toute bicatégorie $\mathbb{I}$, l'homomorphisme (strict) diagonal

$$\Delta_x^{(\mathbb{I})}:\mathbb{A}\to\mathrm{Pseud}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})$$

admet un $\mathbb{V}$-quasi-adjoint à droite, i.e. s'il existe un morphisme

$\underleftarrow{Q\mathcal{L}}$ de $\mathrm{Pseud}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})$ vers $\mathbb{A}$ et des transformations $\mathbb{V}$-quasi-naturelles $n:\mathrm{Id}_{\mathbb{A}} \Rightarrow \underleftarrow{Q\cdot\mathcal{L}}\cdot\Delta_x^{(\mathbb{I})}$ et $\varepsilon:\Delta_x^{(\mathbb{I})}\cdot\underleftarrow{Q\cdot\mathcal{L}} \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{Pseud}_x(\mathbb{I},\mathbb{A})}$ telles que

$$\Delta_x^{(\mathbb{I})} = \varepsilon\,\Delta_x^{(\mathbb{I})}\cdot\Delta_x^{(\mathbb{I})}n \quad , \quad \underleftarrow{Q\cdot\mathcal{L}} = \underleftarrow{Q\mathcal{L}}\,\varepsilon\cdot n\,\underleftarrow{Q\cdot\mathcal{L}} \ .$$

Par exemple dans le cas des $\mathbb{C}$at-bicatégories (=bicatégories), on retrouve les quasi-limites projectives [9].

C H A P I T R E   V

LES $\mathbb{V}$-BICATÉGORIES PSEUD($\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$) ET Bim($\mathbb{A}$)

Dans ce chapitre d'une part on "relativise" la bicatégorie Pseud($\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$) (ch.IV,§9), et d'autre part on construit la $\mathbb{V}$-bicatégorie Bim($\mathbb{A}$) des bimodules d'une $\mathbb{V}$-bicatégorie exacte $\mathbb{A}$.

A) LA $\mathbb{V}$-BICATÉGORIE PSEUD($\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$).

§1. Fins cartésiennes de bimorphismes relatifs.

Soient $\mathbb{V}$ une 2-catégorie multiplicative, symétrique, et $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ deux $\mathbb{V}$-bicatégories.

Définition. Un $\mathbb{V}$-bimorphisme de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$ consiste à se donner:

1) une fonction $T : \mathrm{Ob}\,\mathbb{B} \times \mathrm{Ob}\,\mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbb{V}$,

2) deux familles de flèches de $\mathbb{V}$

$$\left\{ t^{B}_{AA'} : T(B,A) \otimes \mathbb{A}(A,A') \longrightarrow T(B,A') \right\}_{A,A' \in \mathrm{Ob}\mathbb{A},\, B \in \mathrm{Ob}\mathbb{B}},$$

$$\left\{ t^{B'B}_{A} : \mathbb{B}(B',B) \otimes T(B,A) \longrightarrow T(B',A) \right\}_{B',B \in \mathrm{Ob}\mathbb{B},\, A \in \mathrm{Ob}\mathbb{A}}$$

appelées actions à droite et à gauche respectivement,

3) pour tous $A, A', A'' \in \mathrm{Ob}\mathbb{A}$, $B'', B', B \in \mathrm{Ob}\mathbb{B}$, des 2-cellules de $\mathbb{V}$

$$\begin{tikzcd}
T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{A}(A',A'') \arrow[r, "1\otimes\circ_{\mathbb{A}}"'] \arrow[d, "t^{B}_{AA'}\otimes 1"'] & T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A'') \arrow[d, "t^{B}_{AA''}"] \\
T(B,A')\otimes\mathbb{A}(A',A'') \arrow[r, "t^{B}_{A'A''}"'] \arrow[ur, phantom, "\tau^{B}_{AA'A''}"] & T(B,A'')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}(B'',B')\otimes\mathbb{B}(B',B)\otimes T(B,A) \arrow[r, "\circ_{\mathbb{B}}\otimes 1"'] \arrow[d, "1\otimes t_A^{B'B}"'] & \mathbb{B}(B'',B)\otimes T(B,A) \arrow[d, "t_A^{B''B}"] \arrow[dl, phantom, "\tau_A^{B''B'B}"] \\
\mathbb{B}(B'',B')\otimes T(B',A) \arrow[r, "t_A^{B''B'}"'] & T(B'',A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T(B,A)\otimes I \arrow[r, "1\otimes(\eta_{\mathbb{A}})_A"'] \arrow[dr, "\tilde{\rho}"'] & T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A) \arrow[d, "t_{AA}^{B}"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "j_{AB}"'] \\
 & T(B,A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I\otimes T(B,A) \arrow[r, "(\eta_{\mathbb{B}})_B\otimes 1"'] \arrow[dr, "\tilde{\lambda}"'] & \mathbb{B}(B,B)\otimes T(B,A) \arrow[d, "t_A^{BB}"] \arrow[d, phantom, shift right=4ex, "i_{AB}"'] \\
 & T(B,A)
\end{tikzcd}$$

4) pour tous $A, A', A'', A''' \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{A}$, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{B}$, les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
 & & T(B,A)\otimes I\otimes\mathbb{A}(A,A') \arrow[dll, "\rho\otimes 1"'] \arrow[d, "1\otimes\eta_{\mathbb{A}}\otimes 1"] \arrow[drr, "1\otimes\lambda"] & & \\
T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A') \arrow[drr, "t_{AA'}^{B}"'] & & T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A)\otimes\mathbb{A}(A,A') \arrow[ll, "t_{AA}^{B}\otimes 1"] \arrow[rr, "1\otimes\circ_{\mathbb{A}}"'] \arrow[ul, phantom, "j_{AB}\otimes 1"] \arrow[ur, phantom, "1\otimes r_{\mathbb{A}}"] \arrow[d, phantom, "\tau_{AAA'}^{B}"] & & T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A') \arrow[dll, "t_{AA'}^{B}"] \\
 & & T(B,A') & &
\end{tikzcd}$$

C H A P I T R E   V

LES $\mathbb{V}$-BICATÉGORIES PSEUD($\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$) ET Bim($\mathbb{A}$)

Dans ce chapitre d'une part on "relativise" la bicatégorie Pseud($\mathbb{A}$,$\mathbb{B}$) (ch.IV,§9), et d'autre part on construit la $\mathbb{V}$-bicatégorie Bim($\mathbb{A}$) des bimodules d'une $\mathbb{V}$-bicatégorie exacte $\mathbb{A}$.

A) LA $\mathbb{V}$-BICATÉGORIE PSEUD($\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$).

§i. <u>Fins cartésiennes de bimorphismes relatifs</u>.

Soient $\mathbb{V}$ une 2-catégorie multiplicative, symétrique, et $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ deux $\mathbb{V}$-bicatégories.

<u>Définition</u>. Un <u>$\mathbb{V}$-bimorphisme</u> de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$ consiste à se donner:

1) une fonction $T: \mathrm{Ob}\,\mathbb{B} \times \mathrm{Ob}\,\mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{Ob}\,\mathbb{V}$,

2) deux familles de flèches de $\mathbb{V}$

$$\left\{ t^{B}_{AA'} : T(B,A) \otimes \mathbb{A}(A,A') \longrightarrow T(B,A') \right\}_{A,A' \in \mathrm{Ob}\mathbb{A}, B \in \mathrm{Ob}\mathbb{B}},$$

$$\left\{ t^{B'B}_{A} : \mathbb{B}(B',B) \otimes T(B,A) \longrightarrow T(B',A) \right\}_{B',B \in \mathrm{Ob}\mathbb{B}, A \in \mathrm{Ob}\mathbb{A}}$$

appelées <u>actions à droite et à gauche</u> respectivement,

3) pour tous $A,A',A'' \in \mathrm{Ob}\mathbb{A}$, $B'',B',B \in \mathrm{Ob}\mathbb{B}$, des 2-cellules de $\mathbb{V}$

$$\begin{tikzcd}
T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{A}(A',A'') \arrow[r, "1\otimes\circ_{\mathbb{A}}"'] \arrow[d, "t^{B}_{AA'}\otimes 1"'] & T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A'') \arrow[d, "t^{B}_{AA''}"] \arrow[dl, phantom, "\tau^{B}_{AA'A''}"] \\
T(B,A')\otimes\mathbb{A}(A',A'') \arrow[r, "t^{B}_{A'A''}"'] & T(B,A'')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathbb{B}(B'',B')\otimes\mathbb{B}(B',B)\otimes T(B,A) \arrow[r, "\circ_{\mathbb{B}}\otimes 1"'] \arrow[d, "1\otimes t_A^{B'B}"'] & \mathbb{B}(B'',B)\otimes T(B,A) \arrow[d, "t_A^{B''B}"] \arrow[dl, phantom, "\tau_A^{B''B'B}"] \\
\mathbb{B}(B'',B')\otimes T(B',A) \arrow[r, "t_A^{B''B'}"'] & T(B'',A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
T(B,A)\otimes I \arrow[r, "1\otimes(\eta_{\mathbb{A}})_A"'] \arrow[dr, "\tilde{\rho}"'] & T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A) \arrow[d, "t_{AA}^B"] \arrow[d, phantom, "j_{AB}"', shift right=4ex] \\
& T(B,A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
I\otimes T(B,A) \arrow[r, "(\eta_{\mathbb{B}})_B\otimes 1"'] \arrow[dr, "\tilde{\lambda}"'] & \mathbb{B}(B,B)\otimes T(B,A) \arrow[d, "t_A^{BB}"] \arrow[d, phantom, "i_{AB}"', shift right=4ex] \\
& T(B,A)
\end{tikzcd}$$

4) pour tous $A, A', A'', A''' \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{A}$, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{B}$, les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& T(B,A)\otimes I\otimes\mathbb{A}(A,A') \arrow[dl, "\rho\otimes 1"'] \arrow[d, "1\otimes\eta_{\mathbb{A}}\otimes 1"] \arrow[dr, "1\otimes\lambda"] & \\
T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A') \arrow[dr, "t_{AA'}^B"'] \arrow[r, phantom, "j_{AB}\otimes 1", shift left=5ex] & T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A)\otimes\mathbb{A}(A,A') \arrow[l, "t_{AA}^B\otimes 1"] \arrow[r, "1\otimes\circ_{\mathbb{A}}"'] \arrow[d, phantom, "\tau_{AAA'}^B"] \arrow[r, phantom, "1\otimes c_{\mathbb{A}}", shift left=5ex] & T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A') \arrow[dl, "t_{AA'}^B"] \\
& T(B,A') &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{A}(A',A'')\otimes\mathbb{A}(A'',A''') \arrow[rr, "t^B_{AA'}\otimes 1\otimes 1"] \arrow[dr, "1\otimes\circ_{\mathbb{A}}\otimes 1"] \arrow[dd, "1\otimes 1\otimes\circ_{\mathbb{A}}"'] & & T(B,A')\otimes\mathbb{A}(A',A'')\otimes\mathbb{A}(A'',A''') \arrow[dr, "t^B_{A'A''}\otimes 1"] \arrow[dd, "1\otimes\circ_{\mathbb{A}}" near end] \arrow[d, phantom, "\tau^B_{AA'A''}\otimes 1"] & \\
& T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A'')\otimes\mathbb{A}(A'',A''') \arrow[rr, "t^B_{AA''}\otimes 1"' near start] \arrow[dd, "1\otimes\circ_{\mathbb{A}}" near start] \arrow[r, phantom, "=" near end] & & T(B,A'')\otimes\mathbb{A}(A'',A''') \arrow[dd, "t^B_{A''A'''}"] \arrow[ddl, phantom, "\tau^B_{A'A''A'''}"] \\
T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A')\otimes\mathbb{A}(A',A''') \arrow[rr, "t^B_{AA'}\otimes 1"' near start] \arrow[dr, "1\otimes\circ_{\mathbb{A}}"'] \arrow[dr, phantom, bend left, "1\otimes a_{\mathbb{A}}"] & & T(B,A')\otimes\mathbb{A}(A',A''') \arrow[dr, "t^B_{A'A'''}" near start] \arrow[d, phantom, "\tau^B_{AA'A'''}\quad\tau^B_{AA''A'''}"] & \\
& T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A''') \arrow[rr, "t^B_{AA'''}"'] & & T(B,A''')
\end{tikzcd}$$

et deux diagrammes analogues pour les $\tau_A^{B''B'B}$, i_{AB}, et

5) pour tous $A,A'\in\mathrm{Ob}\,\mathbb{A}$ et $B',B\in\mathrm{Ob}\,\mathbb{B}$, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}(B',B)\otimes T(B,A)\otimes\mathbb{A}(A,A') \arrow[r, "1\otimes t^B_{AA'}"'] \arrow[d, "t^{B'B}_A\otimes 1"'] & \mathbb{B}(B',B)\otimes T(B,A) \arrow[d, "t^{B'B}_A"] \\
T(B',A)\otimes\mathbb{A}(A,A') \arrow[r, "t^{B'}_{AA'}"] & T(B',A')\,.
\end{tikzcd}$$

<u>Exemples</u>. 1°. À chaque couple de $\mathbb{V}$-morphismes

$$F,G:\mathbb{A}\longrightarrow\mathbb{B}$$

on peut canoniquement associer un $\mathbb{V}$-bimorphisme $\mathbb{B}(F(\_),G(\_))$ de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{A}$, de la façon suivante:

au couple d'objets (B,A) de $\mathbb{A}$, on fait correspondre l'objet $\mathbb{B}(FB,GA)$ de $\mathbb{V}$, tandis que les actions à droite et à gauche sont données par les composés

$$\mathbb{B}(FB,GA)\otimes\mathbb{A}(A,A') \xrightarrow[1\otimes G_{AA'}]{} \mathbb{B}(FB,GA)\otimes\mathbb{B}(GA,GA') \xrightarrow[\circ_{\mathbb{B}}]{} \mathbb{B}(FB,GA')$$

$$\mathbb{A}(B',B)\otimes\mathbb{B}(FB,GA) \xrightarrow[F_{B'B}\otimes 1]{} \mathbb{B}(FB',FB)\otimes\mathbb{B}(FB,GA) \xrightarrow[\circ_{\mathbb{B}}]{} \mathbb{B}(FB',GA)$$

respectivement.

2° Lorsque $\mathbb{V}=\mathbb{C}at$, on retrouve les bimorphismes ordinaires (ch.II).

Considérons maintenant un $\mathbb{V}$-bimorphisme T de la $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathbb{A}$ vers elle-même.

<u>Définitions</u>. a) Un <u>quasi-wedge projectif</u> de base T et de sommet $X\in \mathrm{Ob}\mathbb{V}$, est une famille de flèches de $\mathbb{V}$

$$\{\omega_A : X \longrightarrow T(A,A)\}_{A\in \mathrm{Ob}\mathbb{A}},$$

et de 2-cellules de $\mathbb{V}$

$$\begin{tikzcd}
 & X\otimes\mathbb{A}(A,B)\simeq\mathbb{A}(A,B)\otimes X \arrow[dl, "\omega_A\otimes 1"'] \arrow[dr, "1\otimes\omega_B"] & \\
T(A,A)\otimes\mathbb{A}(A,B) \arrow[dr, "t^{A}_{AB}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\omega_{AB}}{\Rightarrow}"] & & \mathbb{A}(A,B)\otimes T(B,B) \arrow[dl, "t^{AB}_{B}"] \\
 & T(A,B) &
\end{tikzcd}$$

qui vérifient les axiomes suivants:

qw_1) pour tous $A,B,C\in \mathrm{Ob}\mathbb{A}$, on a

$$\tau^{ABC}_{C}\cdot\{\mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,C)\otimes\omega_C\}*\omega_{AC}\cdot\{X\otimes(\circ_{\mathbb{A}})_{ABC}\} =$$

$$= t^{AB}_{C}\cdot\{\mathbb{A}(A,B)\otimes\omega_{BC}\}*t^{A}_{BC}\cdot\{\omega_{AB}\otimes\mathbb{A}(B,C)\}*\tau^{A}_{ABC}\cdot\{\omega_A\otimes\mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{A}(B,C)\},$$

qw_2) pour tout $A\in \mathrm{Ob}\mathbb{A}$, on a

$$i_{AA}\cdot\{I\otimes\omega_A\}\cdot s_{X,I} = \omega_{AA}\cdot\{X\otimes(\eta_{\mathbb{A}})_A\}*j_{AA}\cdot\{\omega_A\otimes I\},$$

où $s_{X,I}:X\otimes I\overset{\sim}{\to} I\otimes X$, et "$\cdot$","$*$" désignent les compositions horizontale et verticale de $\mathbb{V}$ respectivement.

On le note $\{\omega_A, \omega_{AB}\}$, avec un abus de notations évident.

Soient $\{\omega_A, \omega_{AB}\}$ et $\{\sigma_A, \sigma_{AB}\}$ deux quasi-wedges projectifs de base T et de sommet X.

b) Une <u>modification</u> de $\{\omega_A, \omega_{AB}\}$ vers $\{\sigma_A, \sigma_{AB}\}$ est une famille de 2-cellules de $\mathbb{V}$

$$\{m_A : \omega_A \longrightarrow \sigma_A\}_{A \in Ob\mathbb{A}}$$

telle que pour tous $A, B \in Ob\mathbb{A}$, on ait

$$\sigma_{AB} * t^A_{AB} \cdot \{m_A \otimes \mathbb{A}(A,B)\} = t^{AB}_B \cdot \{\mathbb{A}(A,B) \otimes m_B\} * \omega_{AB} \,.$$

c) Une <u>fin cartésienne projective</u> de base le $\mathbb{V}$-bimorphisme T est un quasi-wedge projectif $\{\omega_A, \omega_{AB}\}$ de base T (et de sommet X) avec la propriété universelle suivante:

tout quasi-wedge projectif $\{\overline{\omega}_A, \overline{\omega}_{AB}\}$ de base T et de sommet $\overline{X}$ induit une flèche unique $\overline{\omega} : \overline{X} \longrightarrow X$ telle que

$$\omega_A \cdot \overline{\omega} = \overline{\omega}_A \;, \forall A \in Ob\mathbb{A},$$

$$\omega_{AB} \cdot \{\overline{\omega} \otimes \mathbb{A}(A,B)\} = \overline{\omega}_{AB} \;, \forall A, B \in Ob\mathbb{A},$$

et toute modification $\{m_A\} : \{\overline{\omega}_A, \overline{\omega}_{AB}\} \to \{\overline{\overline{\omega}}_A, \overline{\overline{\omega}}_{AB}\}$ induit une 2-cellule unique $m : \overline{\omega} \longrightarrow \overline{\overline{\omega}}$ (où $\overline{\overline{\omega}}$ est induite par $\{\overline{\overline{\omega}}_A, \overline{\overline{\omega}}_{AB}\}$) telle que

$$\omega_A \cdot m = m_A \;, \forall A \in Ob\mathbb{A} \,.$$

Dans ce cas on écrit-avec un abus de notations-que

$$X = \mathbb{V}\text{-cart-}\int_A T(A,A).$$

<u>Remarques-Exemples</u>. 1°. On peut aussi définir les <u>fins cartésiennes inductives</u> du $\mathbb{V}$-bimorphisme T, en renversant les flèches qui interviennent dans les définitions ci-dessus; on les

note par le symbole $\mathbb{V}\text{-cart-}\int^{A} T(A,A)$.

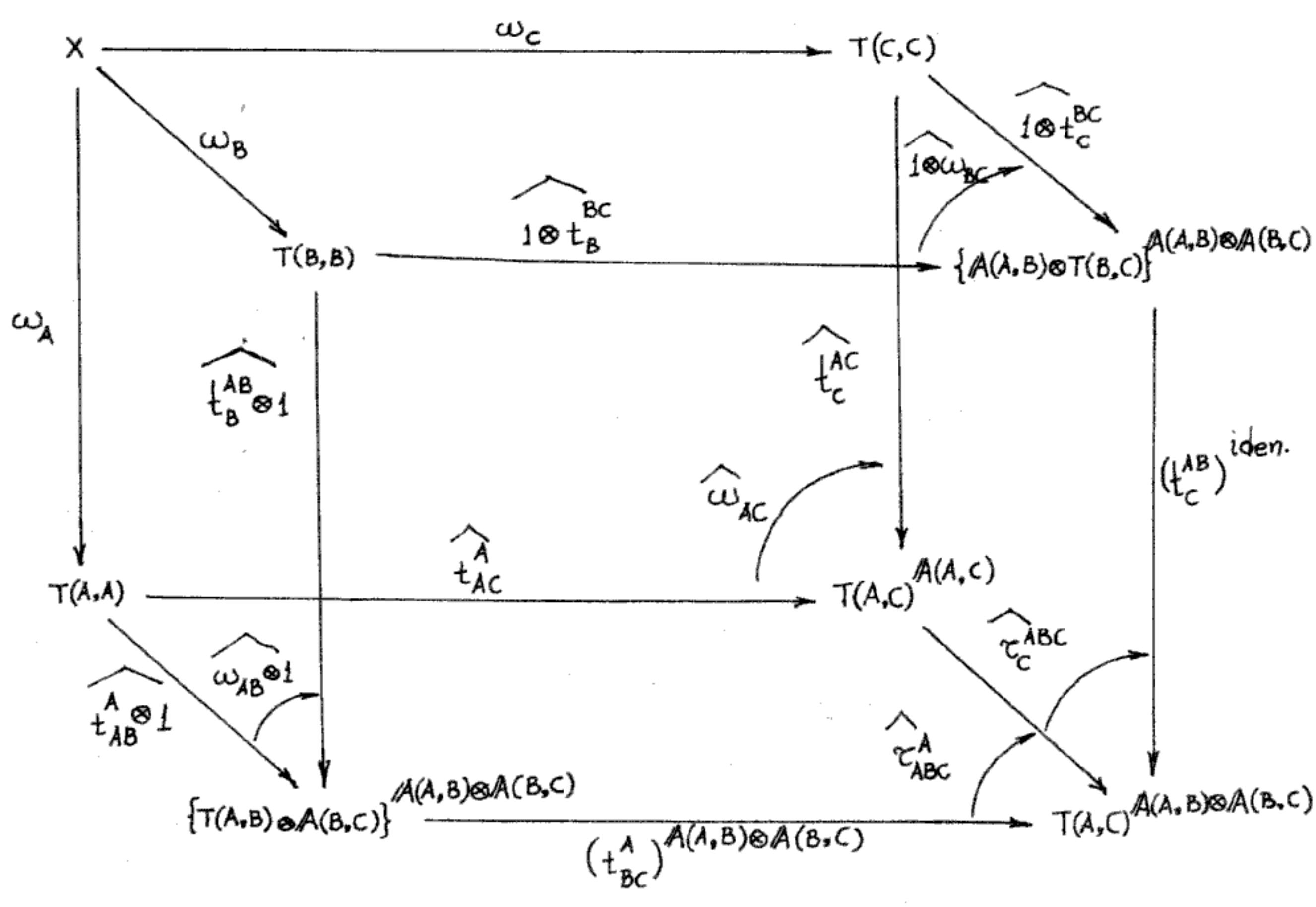
Enfin on obtient les <u>$\mathbb{V}$-fins</u> si on exige dans les définitions ci-dessus que les 2-cellules $\omega_{AB}, \sigma_{AB}, \bar{\omega}_{AB}$ etc., soient des identités; on les note $\mathbb{V}\text{-}\int T(A,A)$.

2° Lorsque $\mathbb{V} = \mathbb{C}\mathrm{at}$, on retrouve la notion de fin cartésienne généralisée (ch.II).

<u>Théorème 1.1</u> (Existence).

Si la 2-catégorie multiplicative $\mathbb{V}$ est fermée (c'est-à-dire les 2-foncteurs $V\otimes\_ : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ admettent des Cat-adjoints à droite), alors les fins cartésiennes projectives sont des fins cartésiennes projectives généralisées.

<u>Preuve</u>. Soient T un $\mathbb{V}$-bimorphisme de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{A}$ et $\{\omega_A, \omega_{AB}\}$ un quasi-wedge projectif de base T et de sommet X; alors l'axiome qw_1) équivaut à la commutativité du diagramme



tandis que l'axiome qw_2) équivaut à la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\omega_A"'] \arrow[dr, "\omega_A"] & \\
T(A,A) \arrow[dr, "\hat{t}^{A}_{AA}"] \arrow[ddr, bend right, "\hat{\rho}"'] \arrow[rr, phantom, "\overrightarrow{\hat{\omega}_{AA}}"] \arrow[ddr, phantom, "\nearrow \hat{j}_{AA}"] & & T(A,A) \arrow[dl, "\hat{t}^{AA}_{A}"'] \arrow[ddl, bend left, "\hat{\lambda}"] \arrow[ddl, phantom, "\nwarrow \hat{i}_{AA}"'] \\
& T(A,A)^{\mathbb{A}(A,A)} \arrow[d, "T(A,A)^{\eta_{\mathbb{A}}}"'] & \\
& T(A,A) &
\end{tikzcd}$$

où en général $\hat{g}$ désigne l'image de g via l'isomorphisme

$$\mathbb{V}(V \otimes U, W) \simeq \mathbb{V}(U, W^V) \ ,$$

et le théorème est démontré.■

On remarque que la plupart des 2-catégories multiplicatives sont fermées à fins cartésiennes généralisées: $\mathbb{C}\mathrm{at}$, $\mathcal{U}$-$\mathbb{C}\mathrm{at}$ ($\mathcal{U}$ complète), $\mathbb{F}\mathrm{ib}(\underline{B})$, etc.

§2. <u>La $\mathbb{V}$-bicatégorie PSEUD($\mathbb{A}$.$\mathbb{B}$)</u>.

Supposons que $\mathbb{V}$ est une 2-catégorie multiplicative à fins cartésiennes projectives et $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ deux $\mathbb{V}$-bicatégories; alors $\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ a comme objets les $\mathbb{V}$-morphismes de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$, tandis que pour $S,T:\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B} \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})$, l'objet $\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})(S,T)$ est la fin cartésienne projective du $\mathbb{V}$-bimorphisme $\mathbb{B}(S(\_),T(\_))$, i.e.

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})(S,T) = \mathbb{V}\text{-cart-}\int_A \mathbb{B}(SA,TA).$$

La flèche $\eta_F: I \longrightarrow \mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})(S,S)$ est induite de la famille de flèches $(\eta_{\mathbb{B}})_{SA}: I \longrightarrow \mathbb{B}(SA,SA)$ et de 2-cellules

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & I\otimes\mathbb{A}(A,B) \simeq \mathbb{A}(A,B)\otimes I \arrow[dl, "\eta_{SA}\otimes 1"'] \arrow[dr, "1\otimes\eta_{SB}"] & \\
\mathbb{B}(SA,SA)\otimes\mathbb{A}(A,B) \arrow[dr, "\circ_{\mathbb{B}}\cdot(1\otimes S_{AB})"'] & = & \mathbb{A}(A,B)\otimes\mathbb{B}(SB,SB) \arrow[dl, "\circ_{\mathbb{B}}\cdot(S_{AB}\otimes 1)"] \\
 & \mathbb{B}(SA,SB) &
\end{tikzcd}$$

Pour tous $S,T,H\in \mathrm{Ob}\,\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})$**, la flèche de composition**

$$\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})(S,T)\otimes \mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})(T,H) \longrightarrow \mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})(S,H)$$

est induite par les flèches

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})(S,T)\otimes\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})(T,H) \arrow[r, "\omega_A\otimes\sigma_A"] & \mathbb{B}(SA,TA)\otimes\mathbb{B}(TA,HA) \arrow[d, "\circ_{\mathbb{B}}"] \\
 & \mathbb{B}(SA,HA)
\end{tikzcd}$$

et les 2-cellules

$$(\circ_{\mathbb{B}})_{SA,TB,HB}\cdot\{\omega_{AB}\otimes\mathbb{B}(TB,HB)\}\cdot\{\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})(S,T)\otimes\mathbb{A}(A,B)\otimes\sigma_B\} *$$

$$* (\circ_{\mathbb{B}})_{SA,TA,HB}\cdot\{\mathbb{B}(SA,TA)\otimes\sigma_{AB}\}\cdot\{\omega_A\otimes\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})(T,H)\otimes\mathbb{A}(A,B)\},$$

où $\{\omega_A,\omega_{AB}\}$ **et** $\{\sigma_A,\sigma_{AB}\}$ **sont les quasi-wedges projectifs qui définissent les objets** $\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})(S,T)$ **et** $\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})(T,H)$ **respectivement.**

Lorsque $\mathbb{V} = \mathrm{Cat}$**, il est clair que** $\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ **est la bicatégorie dont les objets sont les morphismes de** $\mathbb{A}$ **vers** $\mathbb{B}$**, les flèches les transformations quasi-naturelles entre morphismes et les 2-cellules les modifications entre ces transformations.**

<u>Théorème 2.1</u>. Si la 2-catégorie $\mathbb{V}$ **admet des limites cartésiennes inductives préservées par les 2-foncteurs** $V\otimes\_ : \mathbb{V}\to\mathbb{V}$**,** $\forall\, V\in\mathrm{Ob}\,\mathbb{V}$**, alors pour chaque bicatégorie** $\mathbb{I}$**, on a l'isomorphisme naturel**

$$\mathrm{PSEUD}(I[\mathbb{I}],\mathbb{A}) \simeq \mathrm{Pseud}(\mathbb{I},\mathbb{A}) \ , \qquad (2)$$

où I est l'objet "neutre" de $\mathbb{V}$, où $I[\mathbb{I}]$ est la $\mathbb{V}$-bicatégorie polynomiale correspondant à $\mathbb{I}$ et à la $\mathbb{V}$-bicatégorie triviale I, et où $\mathrm{Pseud}(\mathbb{I},\mathbb{A})$ désigne la $\mathbb{V}$-bicatégorie définie dans le ch.IV, §7.

<u>Preuve</u>. On rappelle que les objets de $I[\mathbb{I}]$ sont ceux de $\mathbb{I}$, tandis que pour $i,j\in \mathrm{Ob}\mathbb{I}$, l'objet $I[\mathbb{I}](i,j)$ est donné par le tenseur $\mathbb{I}(i,j)\boxtimes I$ (ch.I,§1). L'isomorphisme (2) sur les objets exprime le fait que le foncteur "bicatégorie sous-jacente" $|-| : \mathbb{V}\text{-}\mathrm{Bicat}^{[1]} \longrightarrow \mathrm{Bicat}^{[1]}$ admet le foncteur $I[-] : \mathrm{Bicat}^{[1]} \longrightarrow \mathbb{V}\text{-}\mathrm{Bicat}^{[1]}$ comme adjoint à gauche.
D'autre part en utilisant l'isomorphisme

$$X\otimes\left\{\mathbb{I}(i,j)\boxtimes I\right\} \simeq \mathbb{I}(i,j)\boxtimes X \ ,$$

on voit que les quasi-wedges projectifs

$$\omega_i : X \longrightarrow \mathbb{A}(Fi,Gi),\ i\in \mathrm{Ob}\mathbb{I},$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{I}(i,j)\boxtimes X \arrow[dl, "1\boxtimes\omega_i"'] \arrow[dr, "1\boxtimes\omega_j"] & \\
\mathbb{I}(i,j)\boxtimes \mathbb{A}(Fi,Gi) \arrow[rr, "\omega_{ij}"'] \arrow[dr, "t_F"'] & & \mathbb{I}(i,j)\boxtimes \mathbb{A}(Fj,Gj) \arrow[dl, "t_G"] \\
& \mathbb{A}(Fi,Gj) &
\end{tikzcd}$$

où les actions t_F, t_G sont définies par les formules

$$\begin{cases} t_G\cdot\partial_f = \mathbb{A}(Ff,Gj), \ \forall f\in\mathbb{I}(i,j) \ , \\ t_G\cdot\partial_\lambda = \mathbb{A}(F\lambda,Gj), \ \forall\lambda\in\mathbb{I}(i,j)^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_F\cdot\partial_f = \mathbb{A}(Fi,Gf), \ \forall f\in\mathbb{I}(i,j) \ , \\ t_F\cdot\partial_\lambda = \mathbb{A}(Fi,G\lambda), \ \forall\lambda\in\mathbb{I}(i,j)^2, \end{cases}$$

correspondent biunivoquement aux quasi-wedges projectifs

$$\omega_i : X \longrightarrow \mathbb{A}(Fi,Gi) \ ,$$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\omega_i"'] \arrow[dr, "\omega_j"] & \\
\mathbb{A}(Fi,Gi) \arrow[rr, "\omega_f"'] \arrow[dr, "\mathbb{A}(1{,}Gf)"'] & & \mathbb{A}(Fj,Gj) \arrow[dl, "\mathbb{A}(Ff{,}1)"] \\
 & \mathbb{A}(Fi,Gj) &
\end{tikzcd}$$

d'où l'isomorphisme proposé (2).■

<u>Thérème 2.2.</u> Soient $\mathbb{A},\mathbb{B}$ deux $\mathbb{V}$-bicatégories; alors on a l'isomorphisme naturel suivant

$$|\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})| \simeq \mathrm{Pseud}(\mathbb{A},\mathbb{B}), \qquad (3)$$

c'est-à-dire la bicatégorie sous-jacente à PSEUD($\mathbb{A},\mathbb{B}$) est isomorphe à la bicatégorie dont les objets sont les $\mathbb{V}$-morphismes de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{B}$, les flèches les transformations $\mathbb{V}$-quasi-naturelles entre $\mathbb{V}$-morphismes, et les 2-cellules les $\mathbb{V}$-modifications entre ces transformations (ch. IV, §7).

<u>Preuve</u>. Par construction on a

$$\mathrm{Ob}\,|\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})| = \mathrm{Ob}\mathrm{Pseud}(\mathbb{A},\mathbb{B}).$$

D'autre part les flèches dans $|\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$, de $F:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$ vers $G:\mathbb{A}\to\mathbb{B}$, sont par définition les flèches dans $\mathbb{V}$ de l'objet I vers l'objet PSEUD($\mathbb{A},\mathbb{B}$)(F,G), c'est-à-dire, vu la définition de PSEUD($\mathbb{A},\mathbb{B}$)(F,G), les quasi-wedges projectifs

$$\sigma_A : I \longrightarrow \mathbb{B}(FA,GA), \quad A \in \mathrm{Ob}\mathbb{A} \ ,$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{A}(A,B) \arrow[dl, "F_{AB}"'] \arrow[dr, "G_{AB}"] & \\
\mathbb{B}(FA,FB) \arrow[dr, "\mathbb{B}(1{,}\sigma_B)"'] & & \mathbb{B}(GA,GB) \arrow[ll, "\sigma_{AB}"] \arrow[dl, "\mathbb{B}(\sigma_A{,}1)"] \\
 & \mathbb{B}(FA,GB) &
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire les $\mathbb{V}$-morphismes

$$\sigma : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{C}yl(\mathbb{B})$$

qui vérifient les relations

$$\begin{cases} \partial_0 \cdot \sigma = F , \\ \partial_1 \cdot \sigma = G , \end{cases}$$

où pour

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C}yl(\mathbb{B}) \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & \\
\mathbb{B} & & \mathbb{B}
\end{tikzcd}$$

le lecteur consultera le chapitre IV, §7.

Enfin une 2-cellule dans $|\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$ est une 2-cellule dans $\mathbb{V}$ de la forme

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, bend left, "\sigma"] \arrow[r, bend right, "\bar{\sigma}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda"] & \mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})(F,G)
\end{tikzcd} ,$$

c'est-à-dire, en vertu de la propriété universelle de $\mathrm{PSEUD}(\mathbb{A},\mathbb{B})(F,G)$, une famille de 2-cellules de $\mathbb{V}$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, bend left, "\sigma_A"] \arrow[r, bend right, "\bar{\sigma}_A"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\lambda_A"] & \mathbb{A}(FA,GA)
\end{tikzcd} \quad , A \in \mathrm{Ob}\,\mathbb{A} ,$$

telle que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{A}(A,B) \arrow[dl, "F_{AB}"'] \arrow[dr, "G_{AB}"] & \\
\mathbb{B}(FA,FB) \arrow[dr] \arrow[dr, bend right] \arrow[dr, phantom, "\mathbb{B}(1,\lambda_B)"'] & \overset{\sigma_{AB}}{\longleftarrow} \ \ \underset{\bar{\sigma}_{AB}}{\smile} & \mathbb{B}(GA,GB) \arrow[dl] \arrow[dl, bend left] \arrow[dl, phantom, "\mathbb{B}(\lambda_A,1)"] \\
& \mathbb{B}(FA,GB) &
\end{tikzcd}$$

commutent, c'est-à-dire un $\mathbb{V}$-morphisme

$$\lambda : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{B})$$

tel que

$$\begin{cases} \overline{\partial}_0 \cdot \lambda = \sigma, \\ \overline{\partial}_1 \cdot \lambda = \overline{\sigma}, \end{cases}$$

où pour

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{B}) \arrow[dl, "\overline{\partial}_0"'] \arrow[dr, "\overline{\partial}_1"] & \\ \mathbb{B} & & \mathbb{B} \end{tikzcd}$$

le lecteur consultera le ch.IV, §7.

L'isomorphisme (3) est une conséquence des processus ci-dessus.∎

B) LA $\mathbb{V}$-BICATÉGORIE Bim($\mathbb{A}$).

§1. Monades isocommutatives.

Soient $\underline{A}$ une catégorie et $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$, $\mathbb{T}'=(T',\eta',\mu')$ deux monades isocommutatives sur $\underline{A}$, c'est-à-dire telles qu'il existe un isomorphisme

$$r : T\cdot T' \xrightarrow{\sim} T'\cdot T$$

vérifiant les relations

$$r \circ \eta T' = T'\eta \ , \quad r \circ T\eta' = \eta' T,$$

$$r \circ T\mu' = \mu' T \circ T' r \circ r T' \ , \quad r \circ \mu T' = T'\mu \circ r T \circ T r.$$

Une $(\mathbb{T},\mathbb{T}')$-bigèbre est un triplet (ξ, a, ξ'), où a est un objet de $\underline{A}$, (ξ,a) une $\mathbb{T}$-algèbre et (ξ',a) une $\mathbb{T}'$-algèbre, de façon que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & T\cdot T'a \arrow[r, "\sim", "r_a"'] \arrow[dl, "T\xi'"'] & T'\cdot Ta \arrow[dr, "T'\xi"] & \\ Ta \arrow[drr, "\xi"'] & & & T'a \arrow[dl, "\xi'"] \\ & & a & \end{tikzcd}$$

Un homomorphisme de (ξ,a,ξ') vers (ζ,b,ζ'), est un morphisme $f:a\to b$ de $\underline{A}$ qui commute avec les $\mathbb{T}$-et $\mathbb{T}'$-structures, i.e. tel que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} Ta \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "Tf"'] & a \arrow[d, "f"] \\ Tb \arrow[r, "\zeta"'] & b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T'a \arrow[r, "\xi'"] \arrow[d, "T'f"'] & a \arrow[d, "f"] \\ T'b \arrow[r, "\zeta'"'] & b \end{tikzcd} .$$

On note $\mathbb{T}$-$\mathbb{T}'$-Big la catégorie ainsi définie.

On a un foncteur d'oubli

$$U: \mathbb{T}\text{-}\mathbb{T}'\text{-Big} \to \underline{A}$$

défini par

$$U(\xi,a,\xi')=a \ ,$$

et deux transformations naturelles

$$\varphi : T.U \Rightarrow U \ ,$$

$$\varphi' : T'.U \Rightarrow U \ ,$$

dont les composantes sont données par

$$\varphi_{(\xi,a,\xi')}=\xi \qquad \text{et}$$
$$\varphi'_{(\xi,a,\xi')}=\xi'$$

respectivement.

Théorème 1.1. Le triplet (U,φ,φ') défini plus haut vérifie les équations

$$\left.\begin{array}{c} \varphi\circ\eta U=U \quad , \quad \varphi'\circ\eta' U=U \\ \varphi\circ T\varphi=\varphi\circ\mu U \quad , \quad \varphi'\circ T'\varphi'=\varphi'\circ\mu' U \\ \varphi\circ\varphi' T=\varphi'\circ\varphi T' \end{array}\right\} \qquad (i)$$

de manière que, si $F:\underline{X}\to\underline{A}$ est un foncteur et

$$y : T\cdot F \Rightarrow F \ ,$$

$$y' : T'\cdot F \Rightarrow F \ ,$$

deux transformations naturelles telles que

$$\left.\begin{array}{c} y\circ nF = F \quad , \quad y'\circ n'F = F \\ y\circ Ty = y\circ \mu F \quad , \quad y'\circ T'y' = y'\circ \mu' F \\ y\circ y'T = y'\circ yT' \end{array}\right\} \qquad (ii),$$

alors il existe un seul foncteur

$$\overline{F}:\underline{X} \longrightarrow \mathbb{T}\text{-}\mathbb{T}'\text{-Big}$$

qui remplit les relations

$$\left.\begin{array}{l} U\cdot\overline{F}=F \\ \varphi\cdot\overline{F}=y \\ \varphi'\cdot F=y' \end{array}\right\} \quad (iii) \; .$$

Si, de plus,

$$(G:\underline{X}\longrightarrow\underline{A},\ \omega:T\cdot G\Rightarrow G,\ \omega':T'\cdot G\Rightarrow G) \qquad (iv)$$

est un autre système vérifiant des conditions analogues à (ii), alors chaque transformation naturelle $m:F\Rightarrow G$ telle que

$$\left.\begin{array}{l} \omega\circ Tm=m\circ\varphi \\ \omega'\circ T'm=m\circ\varphi' \end{array}\right\} \quad (v)$$

induit une transformation naturelle unique

$$\overline{m}:\overline{F}\Rightarrow\overline{G}$$

(où $\overline{G}$ est induit par le système (iv)), de façon que

$$U\cdot\overline{m}=m \; .$$

<u>Preuve</u>. En évaluant les équations (ii) au point $x\in \mathrm{Ob}\underline{X}$, on obtient

$$y_x\cdot n_{Fx} = 1_{Fx} \quad , \quad y'_x\cdot n'_{Fx} = 1_{Fx} \; ,$$

$$y_x\cdot T(y_x) = y_x\cdot \mu_{Fx} \quad , \quad y'_x\cdot T'(y'_x) = y'_x\cdot \mu'_{Fx} \; ,$$

$$y_x\cdot y'_{Tx} = y'_x\cdot y_{Tx} \; ,$$

et par conséquent le triplet (y_x, Fx, y'_x) est une $\mathbb{T}$-$\mathbb{T}'$-bigèbre.

On pose

$$\overline{F}x=(y_x,Fx,y'_x).$$

De même pour $f:x\longrightarrow x'$ dans $\underline{X}$, on a

$$y_{x'}\cdot TFf=Ff\cdot y_x\ ,$$

$$y'_{x'}\cdot T'Ff=Ff\cdot y'_x\ ,$$

car y et y' sont des transformations naturelles; par conséquent Ff est un homomorphisme de $\mathbb{T}$-$\mathbb{T}'$-bigèbres.

Il est donc légitime de poser

$$\overline{F}f=Ff.$$

Le foncteur $\overline{F}:\underline{X}\longrightarrow\mathbb{T}$-$\mathbb{T}'$-Big que nous venons de définir vérifie les relations (iii) et il est le seul ayant cette propriété: en effet soit $R:\underline{X}\longrightarrow\mathbb{T}$-$\mathbb{T}'$-Big un autre foncteur tel que

$$\left.\begin{array}{l} U\cdot R=F\\ \varphi\cdot R=y\\ \varphi'\cdot R=y'\end{array}\right\}\ \text{(vi)}$$

et soit

$$Rx=(\xi_x,a_x,\xi'_x).$$

Alors les équations (vi), évaluées au point $x\in \mathrm{Ob}\underline{X}$, donnent

$$\left.\begin{array}{l} Fx=URx=a_x\\ y_x=\varphi_{Rx}=\xi_x\\ y'_x=\varphi'_{Rx}=\xi'_x\end{array}\right\}$$

et par conséquent $Rx=\overline{F}x,\ \forall x\in \mathrm{Ob}\underline{X}$.

D'autre part pour tout morphisme $f:x\longrightarrow x'$ de $\underline{X}$, on tire de la première équation de (vi) que

$$URf=Ff=\overline{F}f\ ,$$

d'où finalement $R=\overline{F}$.

Maintenant en vertu de relations

$$\omega_x \cdot T(m_x) = m_x \cdot \varphi_x \quad ,$$

$$\omega'_x \cdot T'(m_x) = m_x \cdot \varphi'_x \quad ,$$

qui résultent de (v) en évaluant en $x \in \mathrm{Ob}\underline{X}$, la x-composante

$$m_x : Fx \longrightarrow Gx$$

de la transformation naturelle $m : F \Rightarrow G$ est un homomorphisme de $\mathbb{T}$-$\mathbb{T}'$- bigèbres; on peut donc la prolonger d'une seule manière en une transformation naturelle $\overline{m} : \overline{F} \Rightarrow \overline{G}$ avec $U \cdot \overline{m} = m$, et le théorème est établi. ■

<u>Exemple</u>. Soient $\mathbb{A}$ une bicatégorie et $\mathbb{T} = (T, n, \mu)$, $\mathbb{T}' = (T', n', \mu')$ deux monades sur les objets A et A' respectivement; alors les

$$\mathbb{A}(\mathbb{T}, A') = (\mathbb{A}(T, A'), \mathbb{A}(n, A'), \mathbb{A}(\mu, A')) \quad ,$$

$$\mathbb{A}(A, \mathbb{T}') = (\mathbb{A}(A, T'), \mathbb{A}(A, n'), \mathbb{A}(A, \mu'))$$

sont des monades isocommutatives sur la catégorie $\mathbb{A}(A, A')$.
On peut voir immédiatement que

$$\mathbb{A}(\mathbb{T}, A') - \mathbb{A}(A, \mathbb{T}')\text{-Big} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bim}(\mathbb{A})((A', \mathbb{T}'), (A, \mathbb{T})) \quad ,$$

où $\mathrm{Bim}(\mathbb{A})$ désigne la bicatégorie des bimodules de $\mathbb{A}$ (ch.I).

<u>Remarque</u>. Le théorème précédent nous montre que le triplet (U, φ, φ') est la solution d'un problème universel dans la 2-catégorie $\mathbb{C}\mathrm{at}$ des catégories légitimes.

Plus généralement, soient $\mathbb{V}$ une 2-catégorie représentable, à Cat-limites projectives finies, et $\mathbb{T}, \mathbb{T}'$ deux monades isocommutatives sur un objet V de $\mathbb{V}$:

$$r : T \cdot T' \xrightarrow{\sim} T' \cdot T \ ;$$

considérons de plus les objets d'Eilenberg-Moore de $\mathbb{T}$ et $\mathbb{T}'$ respectivement

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{T}\text{-}\mathcal{A}lg \arrow[dl, "U^T"'] \arrow[dr, "U^T"] & \\ V \arrow[rr, "T"'] \arrow[urr, phantom, "\varphi^T" near end] & & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbb{T}'\text{-}\mathcal{A}lg \arrow[dl, "U^{T'}"'] \arrow[dr, "U^{T'}"] & \\ V \arrow[rr, "T'"'] \arrow[urr, phantom, "\varphi^{T'}" near end] & & V \end{tikzcd}$$

le Cat-produit fibré suivant

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "p_T"'] \arrow[dr, "p_{T'}"] & \\ \mathbb{T}\text{-}\mathcal{A}lg \arrow[dr, "U^T"'] & & \mathbb{T}'\text{-}\mathcal{A}lg \arrow[dl, "U^{T'}"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

et finalement l'objet comma

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (T'\cdot T, V) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ V \arrow[rr, "T'\cdot T"'] \arrow[urr, phantom, "m" near end] & & V \end{tikzcd}$$

Alors il en résulte des flèches uniques

$$f : X \longrightarrow (T'\cdot T, V)$$

$$g : X \longrightarrow (T\cdot T', V)$$

telles que

$$\begin{cases} p\cdot f = U^T\cdot p_T \\ q\cdot f = U^{T'}\cdot p_{T'} \\ m\cdot f = \varphi^{T'}\cdot p_{T'} \circ \varphi^T\cdot p_T \end{cases} \qquad \begin{cases} p\cdot g = U^{T'}\cdot p_{T'} \\ q\cdot g = U^T\cdot p_T \\ m\cdot g = \varphi^T\cdot p_T \circ \varphi^{T'}\cdot p_{T'} \end{cases}$$

(on note que $(T'\cdot T, V) \xrightarrow{\sim} (T\cdot T', V)$) ,

et le Cat-produit fibré de f et g est l'objet $\mathbb{T}\text{-}\mathbb{T}'\text{-}\mathrm{Big}$ dans la 2-catégorie $\mathbb{V}$.

§2. La $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathrm{Bim}(\mathbb{A})$.

Soient $\mathbb{V}$ une 2-catégorie multiplicative, symétrique, à Cat-limites projectives finies et $\mathbb{A}$ une $\mathbb{V}$-bicatégorie exacte; alors la $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathrm{Bim}(\mathbb{A})$ est définie comme suit:

Ses objets sont les couples $(A,\mathbb{T})$ constitués d'un objet A de $\mathbb{A}$ et d'une monade $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$ sur A dans la bicatégorie sous-jacente $|\mathbb{A}|$.

Pour $(A,\mathbb{T})$, $(A',\mathbb{T}')\in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Bim}(\mathbb{A})$, on pose

$$\mathrm{Bim}(\mathbb{A})((A',\mathbb{T}'),(A,\mathbb{T}))=\mathbb{A}(\mathbb{T},A')-\mathbb{A}(A,\mathbb{T}')\text{-Big}. \qquad \text{(i)}$$

Pour simplifier les notations on écrit $\mathrm{Bim}(\mathbb{T}',\mathbb{T})$ au lieu de $\mathrm{Bim}(\mathbb{A})((A',\mathbb{T}'),(A,\mathbb{T}))$ et on désigne par $(U_T^{T'},\varphi^{T'},\varphi_T)$ le triplet universel qui définit $\mathrm{Bim}(\mathbb{T}',\mathbb{T})$ comme l'objet des $(\mathbb{A}(A,\mathbb{T}'),\mathbb{A}(\mathbb{T},A'))$-bigèbres des monades isocommutatives $\mathbb{A}(A,\mathbb{T}')$ et $\mathbb{A}(\mathbb{T},A')$ respectivement.

Pour tous $(A,\mathbb{T}),(A',\mathbb{T}'),(A'',\mathbb{T}'')\in\mathrm{Ob}\,\mathrm{Bim}(\mathbb{A})$, la flèche de composition

$$\circ_{\mathrm{Bim}(\mathbb{A})}:\mathrm{Bim}(\mathbb{T}'',\mathbb{T}')\otimes\mathrm{Bim}(\mathbb{T}',\mathbb{T})\longrightarrow\mathrm{Bim}(\mathbb{T}'',\mathbb{T}) \qquad \text{(ii)}$$

est définie de la manière suivante:

On considère le conoyau $\varphi(T')$ des 2-cellules

$$(\circ_{\mathbb{A}})_{AA'A''}.(1\otimes U_{T'}^{T''}).(\varphi^{T'}\otimes 1)$$

$$(\circ_{\mathbb{A}})_{AA'A''}.(U_T^{T'}\otimes 1).(1\otimes\varphi_{T'})$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathrm{Bim}(\mathbb{T}'',\mathbb{T}')\otimes \mathrm{Bim}(\mathbb{T}',\mathbb{T}) \arrow[d, "\wr"] & & \\
 & & \mathrm{Bim}(\mathbb{T}',\mathbb{T})\otimes \mathrm{Bim}(\mathbb{T}'',\mathbb{T}') \arrow[dll, "U_T^{T'}\otimes 1"'] \arrow[ddll, "U_T^{T'}\otimes 1"] \arrow[dddd, "F(T')"] \arrow[ddrr, "1\otimes U_T^{T'}"'] \arrow[drr, "1\otimes U_{T'}^{T''}"] & & \\
\mathbb{A}(A,A')\otimes \mathrm{Bim}(\mathbb{T}'',\mathbb{T}') \arrow[d, "\mathbb{A}(A,T')\otimes 1"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi^{T'}\otimes 1}{\Rightarrow}"] & {} & & {} & \mathrm{Bim}(\mathbb{T}',\mathbb{T})\otimes \mathbb{A}(A',A'') \arrow[d, "1\otimes \mathbb{A}(T',A'')"] \arrow[l, phantom, "\overset{1\otimes\varphi_{T'}}{\Leftarrow}"] \\
\mathbb{A}(A,A')\otimes \mathrm{Bim}(\mathbb{T}',\mathbb{T}') \arrow[d, "1\otimes U_{T'}^{T''}"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi(T')}{\searrow}"] & {} & & {} & \mathrm{Bim}(\mathbb{T}',\mathbb{T})\otimes \mathbb{A}(A',A'') \arrow[d, "U_T^{T'}\otimes 1"] \arrow[l, phantom, "\overset{\varphi(T')}{\swarrow}"] \\
\mathbb{A}(A,A')\otimes \mathbb{A}(A',A'') \arrow[rr, "(\circ_{\mathbb{A}})_{AA'A''}"'] & & \mathbb{A}(A,A'') & & \mathbb{A}(A,A')\otimes \mathbb{A}(A',A'') \arrow[ll, "(\circ_{\mathbb{A}})_{AA'A''}"]
\end{tikzcd}$$

qui existe parce que l'objet $\mathbb{A}(A,A'')$ est à limites inductives finies à cause de l'exactitude de $\mathbb{A}$.

D'autre part la 2-cellule $\mathbb{A}(A,T'').\varphi(T')$ est le conoyau des 2-cellules

$$\mathbb{A}(A,T'').(\circ_{\mathbb{A}})_{AA'A''}.\{\varphi^{T'}\otimes \mathrm{Bim}(\mathbb{T}'',\mathbb{T}')\}\ ,$$

$$\mathbb{A}(A,T'').(\circ_{\mathbb{A}})_{AA'A''}.\{\mathrm{Bim}(\mathbb{T},\mathbb{T}')\otimes \varphi_{T'}\}\ ,$$

car la flèche $\mathbb{A}(A,T''')$ (qui, à cause de l'exactitude de $\mathbb{A}$, admet un adjoint à droite) commute avec les limites inductives (ch.I), d'où une 2-cellule unique

$$f^{T''}: \mathbb{A}(A,T'').F(T') \longrightarrow F(T')$$

telle que

$$f^{T''}\circ \mathbb{A}(A,T'').\varphi(T') = (\circ_{\mathbb{A}})_{AA'A''}.\{\mathbb{A}(A,A')\otimes \varphi^{T''}\}.\{U_T^{T'}\otimes \mathrm{Bim}(\mathbb{T}'',\mathbb{T}')\}.$$

Par une méthode analogue on trouve une 2-cellule unique

$$f_T : \mathbb{A}(T,A'').F(T') \longrightarrow F(T')$$

telle que

$$f_T \circ \mathbb{A}(T,A'')\cdot \varphi(T') = (\circ_{\mathbb{A}})_{AA'A''}\cdot\{\varphi_T \otimes \mathbb{A}(A',A'')\}\cdot\{\mathrm{Bim}(\mathbb{T}',\mathbb{T})\otimes U_T^{T'}\}.$$

Le triplet ainsi défini $(F(T'), f_T, f^{T''})$ vérifie les relations suivantes

$$\left.\begin{aligned}
f_T \circ \mathbb{A}(\mu,A'')\cdot F(T') &= f_T \circ \mathbb{A}(T,A'')\cdot f_T \\
F(T') &= f_T \circ \mathbb{A}(\eta,A'')\cdot F(T') \\
f^{T''} \circ \mathbb{A}(A,\mu'')\cdot F(T') &= f^{T'} \circ \mathbb{A}(A,T'')\cdot f^{T''} \\
F(T') &= f^{T''} \circ \mathbb{A}(A,\eta'')\cdot F(T') \\
f^{T'} \circ \mathbb{A}(A,T'')\cdot f_T &= f_T \circ \mathbb{A}(T,A'')\cdot f^{T''}
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(iii)}$$

d'où la flèche de composition (ii).

Pour tout $(A,\mathbb{T}) \in \mathrm{ObBim}(\mathbb{A})$, la flèche unitaire

$$(\eta_{\mathrm{Bim}(\mathbb{A})})_{(A,\mathbb{T})} : I \longrightarrow \mathrm{Bim}(\mathbb{T},\mathbb{T})$$

est induite par le triplet (T,μ,μ), où

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "T"'] \arrow[dr, "T"] & & I \arrow[dl, "T"'] \arrow[dr, "T"] & \\
\mathbb{A}(A,A) \arrow[rr, "\mathbb{A}(T,A)"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\mu"] & & \mathbb{A}(A,A) \arrow[rr, "\mathbb{A}(A,T)"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\mu"] & & \mathbb{A}(A,A)
\end{tikzcd}.$$

<u>Théorème 2.1.</u> La $\mathbb{V}$-bicatégorie $\mathrm{Bim}(\mathbb{A})$ a la propriété suivante

$$|\mathrm{Bim}(\mathbb{A})| \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bim}(|\mathbb{A}|)\ , \qquad \text{(iv)}$$

c'est-à-dire la bicatégorie sous-jacente à $\mathrm{Bim}(\mathbb{A})$ est isomorphe à la bicatégorie des bimodules de la bicatégorie $|\mathbb{A}|$, sous-jacente à $\mathbb{A}$.

<u>Preuve</u>. Par définition on a

$$\mathrm{Ob}\,|\mathrm{Bim}(\mathbb{A})| = \mathrm{Ob}\,\mathrm{Bim}(|\mathbb{A}|) \quad ,$$

et

$$|\mathrm{Bim}(\mathbb{A})|((A',\mathbb{T}'),(A,\mathbb{T})) = \mathbb{V}(I,\mathrm{Bim}(\mathbb{A})((A',\mathbb{T}'),(A,\mathbb{T}))).$$

Mais une flèche

$$f : I \longrightarrow \mathrm{Bim}(\mathbb{A})((A',\mathbb{T}'),(A,\mathbb{T}))$$

équivaut d'après le th.1.1 à un triplet $(F, f_T, f^{T'})$

$$F : I \longrightarrow \mathbb{A}(A,A')$$

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "F"] & & I \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "F"] & \\
\mathbb{A}(A,A') \arrow[rr, "\mathbb{A}(T,A')"'] & \arrow[u, phantom, "f_T"] & \mathbb{A}(A,A') \arrow[rr, "\mathbb{A}(A,T')"'] & \arrow[u, phantom, "f^{T'}"] & \mathbb{A}(A,A')
\end{tikzcd}$$

qui vérifie les conditions (iii) avec $F(T')=F$, c'est-à-dire à un $\mathbb{T}$-$\mathbb{T}'$-bimodule de $|\mathbb{A}|$.

Une 2-cellule

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, bend left=40, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "f'"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\lambda"] & \mathrm{Bim}(\mathbb{A})((A',\mathbb{T}'),(A,\mathbb{T}))
\end{tikzcd}$$

équivaut à une 2-cellule

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, bend left=40, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "F'"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\bar{\lambda}"] & \mathbb{A}(A,A')
\end{tikzcd}$$

telle que

$$\begin{cases} f'_T \circ \overline{\lambda} \cdot \mathbb{A}(T,A') = \overline{\lambda} \circ f_T \ , \\ f'^{T'} \circ \overline{\lambda} \cdot \mathbb{A}(A,T') = \overline{\lambda} \circ f^{T'} \ , \end{cases}$$

c'est-à-dire à un morphisme de $\mathbb{T}$-$\mathbb{T}'$-bimodules, et l'isomorphisme (iv) est établi. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] BASTIANI-EHRESMANN , Sketched structures , Cah. Top. Géom. Diff. XIII-2 (1972).

[2] BASTIANI-EHRESMANN , Multiple functors I:limits relative to double categories , Cah. Top. Géom. Diff. XV-3 (1974).

[3] E.BURRONI , Algèbres non deterministiques et D-catégories , Cah. Top. Géom. Diff. XIV-4 (1973).

[4] J.BENABOU , Introduction to bicategories , Springer Lecture Notes v.47 (1967).

[5] J.BENABOU , Catégories multiplicatives , rapport n° 27, Louvain (1972).

[6] J.BENABOU , Les distributeurs , rapport n° 33, Louvain (1973).

[7] BORCEUX-KELLY, A notion of limit for enriched categories , Bull. Austr. Math. Soc. (1975).

[8] S.BOZAPALIDES , Les fins cartésiennes , à paraître aux Cah. Top. Géom. Diff.

[9] S.BOZAPALIDES , Sur les quasi-limites , à paraître aux Cah. Top. Géom. Diff.

[10] E.DUBUC , Kan extensions in enriched categories , Springer Lecture Notes v.145 (1970).

[11] M.ECHIVARD , Thèse 3^{me} cycle , DIJON (1974).

[12] C.EHRESMANN , Catégories et structures , Dunod (1965).

[13] C.EHRESMANN , Catégories structurées généralisées , Cah. Top. Géom. Diff. X-1 (1968).

[14] J.W.GRAY , Adjointness for 2-categories , Springer Lecture Notes v.391 (1974).

[15] J.W.GRAY , Categorical comprehension scheme , Springer Lecture Notes , v.99 (1969).

[16] J.W.GRAY , 2-algebraic theories and triples , Colloque sur l'Algèbre catégorique , AMIENS 1973.

[17] J.W.GRAY , Séminaire Ehresmann 1971.

[18] J.LAMBEK , Completions of categories , Springer Lecture Notes v.24 (1966).

[19] S.MAC LANE , Categories , Springer (1971).

[20] R.STREET , Abstracts of the Sydney category Seminar 1972-73.

[21] R.STREET , Elementary cosmoi , Springer Lecture Notes v.420 (1974).

[22] A.BOIDIN , Une notion de limite dans les 2-catégories , C.R.A.S. de PARIS, t.278 (1974).

10. A. MACHADO, *Quasi-topologie algébrique.* 175 pages.

11. S. HARARI, *Pureté et platitude dans les catégories de foncteurs.* 41 p.

F. CONDUCHE, *Sur les structures définies par limites projectives.* 67 pages.

12. J.-P. BARTHELEMY, *Esquisses pointées.* 79 pages.

D. PROCHASSON, *Catégories complètes à gauche et triples.* 59 pages.

13. G. DARTOIS, *Catégories préadditives et modules.* 107 pages.

14. G. BLANC, *Foncteurs types et structures.* 82 pages.

L. COPPEY, *Décompositions de structures en produits.* 40 pages.

15. J.-M. CORDIER, *Catégories auto-dominées.* 25 pages.

J.-J. HORRENT, *Sur la catégorie des applications covariantes.* 12 p.

M.-C. LEBLOND, *Complétion de foncteurs ordonnés et de foncteurs doubles.* 105 pages.

16. G. DETOURBET, *Espaces à fermetures.* 89 pages.

D. TANRE, *Compactification de Stone-Cech et triple associé.* 30 pages.

17. J. PENON, *Sur les objets séparés et les objets compacts.* 118 pages.

18. N. BEDNARZ, *Quasi-noyaux d'espèces de structures.* 23 pages.

D. TANRE, *Sur les T-espaces simples.* 33 pages.

J.-J. HORRENT, *Sur les espèces de morphismes.* 84 pages.

19. D. BOURN, *Objets de Kleisli et d'Eilenberg-Moore dans une 2-catégorie.* 67 pages.

J.-P. BARTHELEMY, *Relations sur un objet d'une catégorie.* 25 pages.

P. VARIOT, *2-catégories représentables et catégories fermées.* 35 p.

20. F. BERQUIER, *Calcul différentiel dans les espaces quasi-bornologiques.* 84 pages.

M. SIMONNET, *Applications analytiques entre espaces localement convexes complexes.* 23 pages.

D. TANRE, *Groupes feuilletés.* 36 pages.

21. E. VAUGELADE, *Application des bicatégories à l'étude des catégories internes.* 84 pages.

R. MIJOULE, *Catégories hilbertiennes.* 49 pages.

22. J.-B. LANGBAUM, *Quasi-quotients et applications aux catégories structurées.* 86 pages.

D. CLAUDE, *Sur les catégories étagées.* 12 pages.

B. FERRIF, *Introduction à l'étude des catégories différentiables et de leurs prolongements.* 54 pages.

23. C. LAIR, *Etude générale de la catégorie des esquisses.* 62 pages.

G. HOFF, *L'homotopie des catégories.* 33 pages.

M. SIMONNET, *Une formule de calcul différentiel.* 5 pages.

24. S. BOZAPALIDES, *Théorie formelle des bicatégories.* 150 pages.