

vander
LOUVAIN

PROBLEMES DANS LES TOPOS
d'après le cours de "Questions spéciales de mathématique"

par
J. BENABOU

Rapport n° 34, mars 1973
Séminaires de Mathématique Pure



INSTITUT DE MATHÉMATIQUE PURE ET APPLIQUÉE
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

Bâtiment Sc. I, Chemin du Cyclotron 2, 1348 Louvain - La - Neuve

*Ce texte a été rédigé par J. R. ROISIN
d'après des notes prises au cours oral
du professeur BENABOU. Elles n'ont pas
été relues par celui-ci avant leur im-
pression.*

SOMMAIRE

++++++

1. Quelques rappels.
=====

Définition. Quelques propriétés de base.
Plongement dans les relations.

2. L'objet des monos.
=====

Définition. Propriété essentielle. Corollaires divers.
Autre construction.

3. L'objet des épis.
=====

Définition. Propriété essentielle. Corollaires.
Autre construction.

4. L'objet des isos.
=====

5. Les sup et les inf internes.
=====

Equivalence de deux définitions. Application.

6. Univers dans un topos.
=====

Classe universelle. Famille représentable. Exemples.

7. L'objet des entiers.

=====

Axiome de l'infini. Axiomes de Plano.

Propriété universelle généralisée.

Addition. Structure de monoïde abélien.

Ordre dans \mathbb{N} .

Problèmes.

Bibliographie.

=====

Problèmes dans les topos.

=====

1. Quelques rappels.

=====

1.1. Un *topos élémentaire* est une catégorie \mathcal{E} vérifiant les énoncés suivants :

(i) \mathcal{E} a des limites inductives et projectives finies ;

(ii) \mathcal{E} admet une exponentiation : pour tout $A \in |\mathcal{E}|$, le foncteur $(-) \times A : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ admet un adjoint à droite, noté $(-)^A$;

(iii) \mathcal{E} possède une flèche $v : 1 \longrightarrow \Omega$ telle que pour tout $X \in |\mathcal{E}|$ les flèches de X vers Ω donnent par produit fibré avec v exactement les sous-objets de X .

On peut réduire cette axiomatique, comme l'ont montré des travaux récents de A. Kock et Ch. Mikkelsen [5], et décrire par exemple avec F.W. Lawvere [7] un topos élémentaire comme une catégorie cartésienne fermée où la notion de sous-objet est représentable.

1.2. On sait que pour un topos \mathcal{E} le foncteur de plongement dans la catégorie \mathcal{E}_p des morphismes partiels admet un adjoint à droite. Cette propriété peut d'ailleurs être substituée à l'axiome (iii).

Nous allons indiquer un autre plongement intéressant ci-dessous.

1.3. On sait aussi que pour tout objet X d'un topos \mathcal{E} , la catégorie \mathcal{E}/X des objets au-dessus de X est encore un topos et que toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ détermine un foncteur $f^* : \mathcal{E}/Y \longrightarrow \mathcal{E}/X$ lequel admet à la fois un adjoint à gauche (noté Σ_f) et un adjoint à droite (noté Π_f).

Si on se limite aux sous-objets de X , on obtient une algèbre de Heyting $\mathcal{O}(X)$ et le foncteur f^* induit $f^{-1} : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$, lequel admet également un adjoint à droite ($\overline{\forall}f$, induit par Π_f) et à gauche (noté $\overline{\exists}f$, défini en prenant l'image). Par l'adjonction cartésienne les objets de $\mathcal{O}(X)$ reviennent aux points de Ω^X et l'action des trois derniers foncteurs peut se décrire par des flèches du topos. Ainsi prendre l'image par $A \times f$ d'un sous-objet de $A \times X$ revient à faire suivre l'adjointe cartésienne de sa fonction caractéristique par la flèche $\exists f : \Omega^X \longrightarrow \Omega^Y$, laquelle correspond précisément à l'image par $\Omega^X \times f$ de $\epsilon_X \longrightarrow \Omega^X \times X$ (le sous-objet caractérisé par l'évaluation).

1.4. On peut définir la catégorie des relations dans le topos \mathcal{E} (notée $\text{Rel}(\mathcal{E})$) de la façon suivante :

on pose $|\text{Rel}(\mathcal{E})| = |\mathcal{E}|$;

une flèche de X vers Y dans $\text{Rel}(\mathcal{E})$ est un sous-objet de $X \times Y$ dans \mathcal{E} - plus exactement une flèche de $X \times Y$ vers Ω ; la composition de $\phi : X \times Y \longrightarrow \Omega$ et $\psi : Y \times Z \longrightarrow \Omega$ se fait en prenant le produit fibré P au-dessus de Y des sous-objets correspondant à ϕ et ψ et en prenant la fonction caractéristique de l'image de P dans $X \times Z$.

La vérification du fait que $\text{Rel}(\mathcal{E})$ est une catégorie est laissée au lecteur.

On plonge \mathcal{E} dans $\text{Rel}(\mathcal{E})$ en associant à $f : X \rightarrow Y$ la flèche $(1_X, f) : X \rightarrow X \times Y$; ce plongement se factorise à travers celui - évident - de \mathcal{E}_p dans $\text{Rel}(\mathcal{E})$.

Proposition.

Le plongement I de \mathcal{E} dans $\text{Rel}(\mathcal{E})$ admet un adjoint à droite.

Puisque pour tous $X, Y \in |\mathcal{E}|$ on a

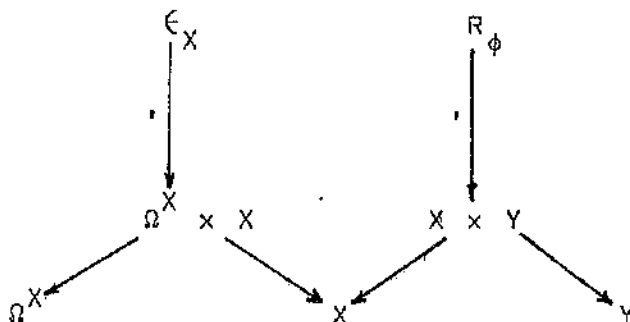
$$\begin{aligned} \text{Rel}(\mathcal{E}) [I(X), Y] &= \text{Hom}_{\mathcal{E}} [X \times Y, \Omega] \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{E}} [X, \Omega^Y] \end{aligned}$$

on voit que les foncteurs

$$\text{Rel}(\mathcal{E}) [I(\), Y]$$

sont représentables.

Il y a donc un adjoint, dont la valeur en Y est Ω^Y . Explicitons sa valeur sur les morphismes : à $\phi : X \rightarrow Y$ correspondra $\Omega^\phi : \Omega^X \rightarrow \Omega^Y$ définie comme l'adjointe cartésienne de la fonction caractéristique du sous-objet de $\Omega^X \times Y$ obtenu en prenant l'image du produit fibré de ϵ_X et de R_ϕ au-dessus de X .

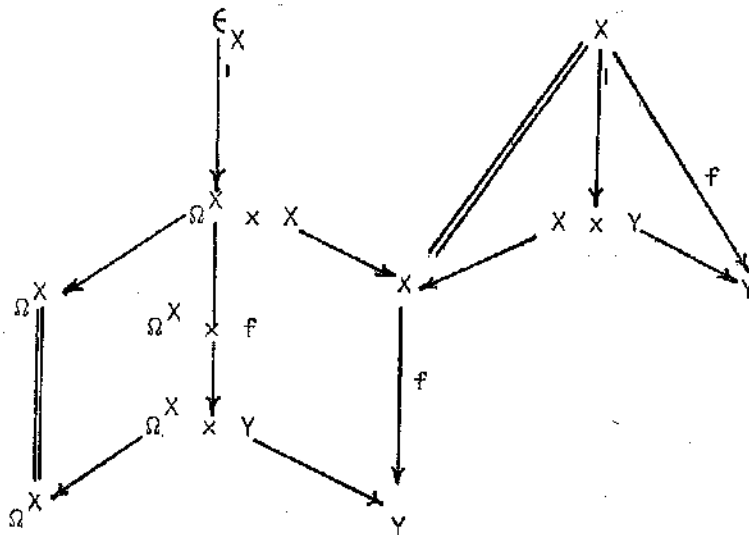


Dans \mathcal{E} , on trouve que Ω^ϕ envoie chaque $X' \subseteq X$ sur $\{y \mid (\exists x) (x \in X' \text{ et } \phi(x, y) \text{ est vrai})\}$.

Si ϕ correspond au graphe d'une application

$f : X \longrightarrow Y$, X' va sur $\{y \mid (\exists x)(x \in X' \text{ et } y = f(x))\}$.

Ceci suggère qu'en faisant précéder l'adjoint en question du plongement I on trouve le foncteur "quantification existentielle" (qui envoie X sur Ω^X et f sur $\exists f$) de \mathcal{E} dans \mathcal{E} . Effectivement, l'image du produit fibré de ϵ_X et de $(1_X, f)$ - donc de ϵ_X - dans $\Omega^X \times Y$ est bien celle du composé vertical ci-dessous.



2. L'objet des Monos.

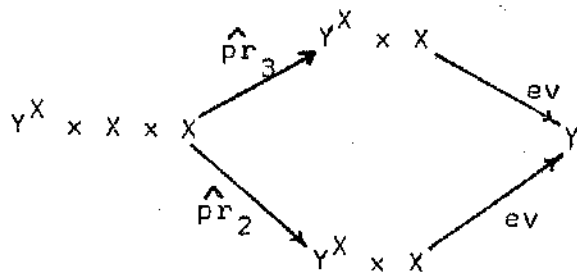
=====

Soient X et Y deux objets du topos \mathcal{E} . On se propose de définir un sous-objet de Y^X dont les points correspondent exactement aux monomorphismes de X vers Y .

2.1. Un mono de X vers Y est caractérisé par le fait que son équivalence nucléaire est la diagonale de X .

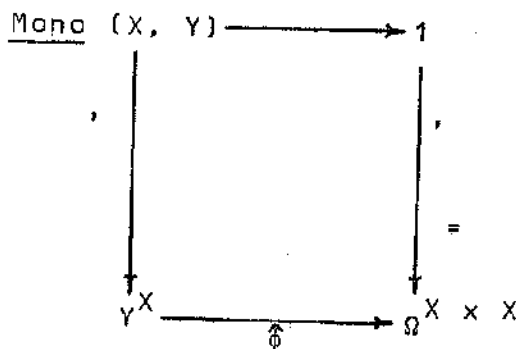
La fonction caractéristique de la diagonale Δ_X , fonction notée $\langle =_X \rangle$, a pour adjointe cartésienne la flèche $=_X : 1 \longrightarrow \Omega^X \times X$.

L'application "équivalence nucléaire" de Y^X vers $\Omega^X \times X$ (notée $\hat{\phi}$) peut s'obtenir comme adjointe de la flèche de $Y^X \times X \times X$ vers Ω caractérisant le sous-objet $K \xrightarrow{k} Y^X \times X \times X$, noyau du couple



(c'est-à-dire, dans \mathcal{E} , l'ensemble des triples (f, x_1, x_2) tels que $f(x_1) = f(x_2)$).

L'objet Mono (X, Y) est alors défini par le produit fibré suivant :



2.2. Proposition.

Pour tout objet T du topos \mathcal{E} , on a une bijection naturelle

$$\text{Hom}_{\mathcal{G}} [T, \text{Mono}(X, Y)] \cong \text{Mono}_{\mathcal{G}/T} [X \times T, Y \times T]$$

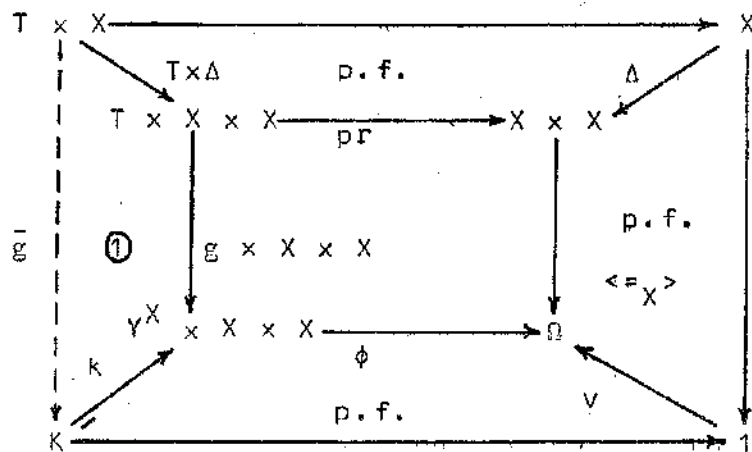
(le second membre représentant l'ensemble des monomorphismes de $X \times T$ vers $Y \times T$ dans \mathcal{G}/T).

Par adjonction cartésienne, les flèches $g : T \longrightarrow Y^X$ correspondent bijectivement aux flèches $\hat{g} : T \times X \longrightarrow Y$; ces dernières sont en bijection avec les $g' = (\hat{g}, p) :$

$$T \times X \longrightarrow T \times Y,$$

p désignant la projection $T \times X \longrightarrow T$.

Nous allons montrer que la condition " \hat{g} se factorise à travers $=_X$ " équivaut à " g' est un mono". Or la première revient à la commutativité du rectangle central ci-dessous.



Si ce rectangle commute, le composé $(g \times X \times X)(T \times \Delta)$ se factorise à travers K en $k\bar{g}$ et le carré ① est un produit fibré (tenant compte du fait que $T \times \Delta$ est un mono) ; réciproquement, si le produit fibré de k et $g \times X \times X$ est

un carré du type ①, alors le rectangle central est commutatif (par l'associativité des produits fibrés).

La condition sur ① se trouvera remplie si et seulement si $T \times \Delta$ est le noyau des composés

$ev \hat{pr}_3 (g \times X \times X)$ et $ev \hat{pr}_2 (g \times X \times X)$

(d'après un lemme classique)

$$\begin{array}{ccccc}
 T \times X & \xrightarrow{T \times \Delta} & T \times X \times X & \xrightarrow{g \times X \times X} & Y^X \times X \times X \\
 & & \downarrow \hat{p}_3 & & \downarrow \hat{p}_3 \\
 & & T \times X & \xrightarrow{g \times X} & Y^X \times X \\
 & & & & \downarrow \hat{p}_2 \\
 & & & & Y
 \end{array}$$

ev

ou encore des composés

$$\hat{g} \circ \hat{pr}_3 \text{ et } \hat{g} \circ \hat{pr}_2.$$

Il reste à montrer que cette propriété équivaut au fait que (\hat{g}, p) soit un mono, ce qui peut se vérifier dans les ensembles : si nous désignons par (t, x_1, x_2) un élément quelconque de $T \times X \times X$, les deux propriétés se traduisent par la condition

$$"\hat{g}(t, x_1) = \hat{g}(t, x_2) \text{ entraîne } x_1 = x_2".$$

Corollaire.

Pour $T = 1$, on obtient la bijection naturelle

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}} [1, \text{Mono}(X, Y)] \cong \text{Mono}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Les points de Mono (X, Y) correspondent donc exactement aux monos de X vers Y dans \mathcal{E} . Mais ceux-ci ne déterminent pas entièrement l'objet Mono (X, Y).

2.3.1. Proposition.

Si X, Y, Z sont des objets du topos \mathcal{E} , il existe une flèche unique de Mono (X, Y) x Mono (Y, Z) vers Mono (X, Z) factorisant la composition C de $Z^Y \times Y^X$ vers Z^X .

Pour montrer cela, il suffit - compte tenu du lemme de Yoneda - de décrire une application satisfaisante de

$$\text{Hom}_{\mathcal{E}}(T, \text{Mono}(Y, Z) \times \text{Mono}(X, Y)) \text{ vers}$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{E}}(T, \text{Mono}(X, Z)) \text{ pour tout objet } T \text{ du topos.}$$

Soit donc (g, f) un élément du premier ensemble, ou plus exactement, l'élément de $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(T, Z^Y \times Y^X)$ qui lui correspond canoniquement. A ces deux flèches sont associés deux monos $f' : T \times X \rightarrow T \times Y$ et $g' : T \times Y \rightarrow T \times Z$ (en utilisant les notations de la proposition précédente) dont le composé est l'associé de C(g, f), comme il résulte de la comparaison des diagrammes suivants, où les

$$\begin{array}{ccccc} T \times X & \xrightarrow{(g, f) \times X} & Z^Y \times Y^X \times X & \xrightarrow{Z^Y \times \text{ev}} & Z^Y \times Y & \xrightarrow{\text{ev}} & Z \\ & & & \searrow C \times X & & \nearrow \text{ev} & \\ & & & & Z^X \times X & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 T \times X & \xrightarrow{f' = (\hat{f}, p)} & T \times Y & \xrightarrow{g \times Y} & Z^Y \times Y & \xrightarrow{ev} & Z \\
 & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & T \times Z & \xrightarrow{p} & Z
 \end{array}$$

$g' = (\hat{g}, p)$

composés horizontaux sont égaux.

Mais comme $g'f'$ est un mono, $C(g, f)$ se factorise à travers Mono (X, Z) , ce qui fournit l'image cherchée du couple (g, f) . En remarquant que l'application ainsi définie est bien naturelle, on achève la démonstration.

2.3.2. En utilisant une technique semblable on peut montrer par exemple que dans le produit fibré suivant

$$\begin{array}{ccc}
 P & \longrightarrow & \underline{\text{Mono}}(X, Z) \\
 \parallel & & \parallel \\
 \downarrow i & & \downarrow \\
 Z^Y \times Y^X & \xrightarrow{C} & Z^X
 \end{array}$$

i est un sous-objet de $Z^Y \times \underline{\text{Mono}}(X, Y)$, ou encore que si $f : X \longrightarrow Y$ est un mono, alors pour tout Z le composé

$$\underline{\text{Mono}}(Z, X) \longrightarrow X^Z \xrightarrow{f^Z} Y^Z \quad \text{se factorise à travers}$$

$$\underline{\text{Mono}}(Z, Y) \longrightarrow Y^Z, \quad \text{de même que}$$

$$\underline{\text{Mono}}(Y, Z) \longrightarrow Z^Y \xrightarrow{Z^f} Z^X \quad \text{se factorise à travers}$$

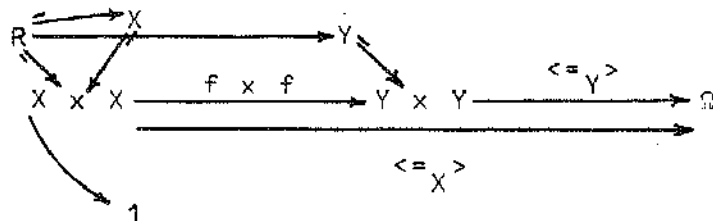
$$\underline{\text{Mono}}(X, Z) \longrightarrow Z^X.$$

2.4. Autre construction de l'objet des Monos.

2.4.1. Si \mathcal{E} est le topos des ensembles, une flèche $f : X \longrightarrow Y$ est un mono si et seulement si la formule suivante est vraie :

$$(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)[(f(x_1) = f(x_2)) \implies (x_1 = x_2)].$$

En fait, cette propriété vaut pour un topos quelconque. Dire que f est un mono, c'est dire que son équivalence nucléaire (notée R , avec les projections) est contenue dans la diagonale de X , ou encore que le sous-objet de $X \times X$ caractérisé par $\langle =_Y \rangle (f \times f)$ est contenu dans le sous-objet caractérisé par $\langle =_X \rangle$.



Mais ceci revient à l'égalité de $\Rightarrow [\langle =_Y \rangle (f \times f), \langle =_X \rangle]$ et $\forall_{X \times X}$ ou au fait que l'on obtienne le vrai en quantifiant universellement la première flèche le long de $X \times X \longrightarrow 1$, c'est-à-dire en formant la formule indiquée dans l'énoncé.

2.4.2. La remarque précédente suggère la construction suivante pour Mono (X, Y) .

Désignons par ϕ_1 et ϕ_2 les composés $ev.\hat{pr}_3$ et $ev.\hat{pr}_2$

$$Y^X \times X \times X \xrightarrow[\hat{\text{pr}}_2]{\hat{\text{pr}}_3} Y^X \times X \xrightarrow{\text{ev}} Y$$

et par α et β respectivement les composés supérieurs et inférieurs ci-dessous

$$Y^X \times X \times X \xrightarrow{\{\phi_1, \phi_2\}} Y \times Y \xrightarrow{\langle =_Y \rangle} \Omega$$

$$\xrightarrow{\text{pr}} X \times X \xrightarrow{\langle =_X \rangle} \Omega$$

En quantifiant la flèche $\alpha \implies \beta$ universellement le long de la projection $Y^X \times X \times X \longrightarrow Y^X$, on détermine un sous-objet $m : M \longrightarrow Y^X$ - défini par la formule

$$(\forall x_1 \in X)(\forall x_2 \in X)[(f(x_1) = f(x_2)) \implies (x_1 = x_2)].$$

C'est bien l'objet Mono (X, Y) défini plus haut, car pour tout $T \in |\mathcal{E}|$, une flèche $g : T \longrightarrow Y^X$ se factorise à travers m si et seulement si $g \times X \times X$ suivie de $\alpha \implies \beta$ donne le vrai, donc ssi $\alpha(g \times X \times X) \leq \beta(g \times X \times X)$.

Mais comme l'on a toujours $\alpha \geq \beta$ (d'après la définition de ces flèches) et comme α n'est rien d'autre que la fonction caractéristique de $\text{Ker}(\phi_1, \phi_2)$, c'est-à-dire la flèche ϕ définie en 2.2., on s'aperçoit facilement que cette condition équivaut à l'égalité de

$$\phi(g \times X \times X) \text{ et } \langle =_X \rangle \text{ pr}$$

exigée là-bas.

3. L'objet des épis.

=====

3.1. Une flèche de X vers Y est un épi si et seulement si son image est isomorphe à son but.

L'application "image" de Y^X vers Ω^Y peut s'obtenir comme adjointe de la flèche de $Y^X \times Y$ vers Ω caractérisant le sous-objet image du couple

$$(\Pi_1, \text{ev}) : Y^X \times X \longrightarrow Y^X \times Y.$$

L'objet épi est alors défini par le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \text{Epi}(X, Y) & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow \text{pr} & & \downarrow \text{pr} \\ Y^X & \xrightarrow{\text{im}} & \Omega^Y \end{array}$$

3.2. Proposition.

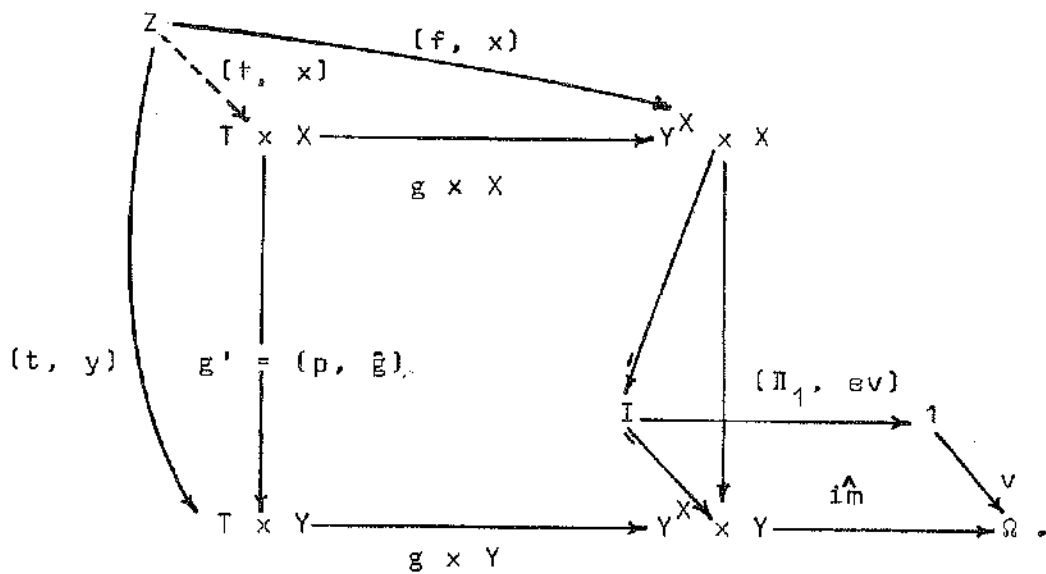
Pour tout objet T du topos \mathcal{E} , on a une bijection naturelle

$$\text{Hom}_{\mathcal{E}} [T, \text{Epi}(X, Y)] \cong \text{Epi}_{\mathcal{E}/T} [T \times X, T \times Y].$$

Nous allons voir que $g : T \longrightarrow Y^X$ vérifie la condition $\text{im } g = \hat{v}_Y \text{ cte}$ ou $\hat{\text{im}}(g \times Y) = \hat{v}_{T \times Y}$ si et seulement si

$$g' = (\hat{g}, p) : T \times X \longrightarrow T \times Y \text{ est un épi.}$$

Or ceci résulte du fait que les images sont universelles et que le carré suivant est un produit fibré :



En effet, si $(g \times Y)(t, y) = (\Pi_1, \text{ev})(f, x)$

donc si $(gt, y) = (f, \text{ev}(f, x))$

alors $\hat{g}(t, x) = \text{ev}(g \times X)(t, x) = \text{ev}(gt, x)$

$$= \text{ev}(f, x) = y$$

et le couple (t, x) est bien une factorisation - nécessairement unique.

Corollaire.

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}[1, \text{Epi}(X, Y)] \cong \text{Epi}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

3.3. Utilisant le résultat précédent, on peut démontrer des propositions analogues à celles énoncées en 2.3. Ainsi la

composition induit une flèche

$$\underline{\text{Epi}}(X, Y) \times \underline{\text{Epi}}(Y, Z) \longrightarrow \underline{\text{Epi}}(X, Z), \text{ etc.}$$

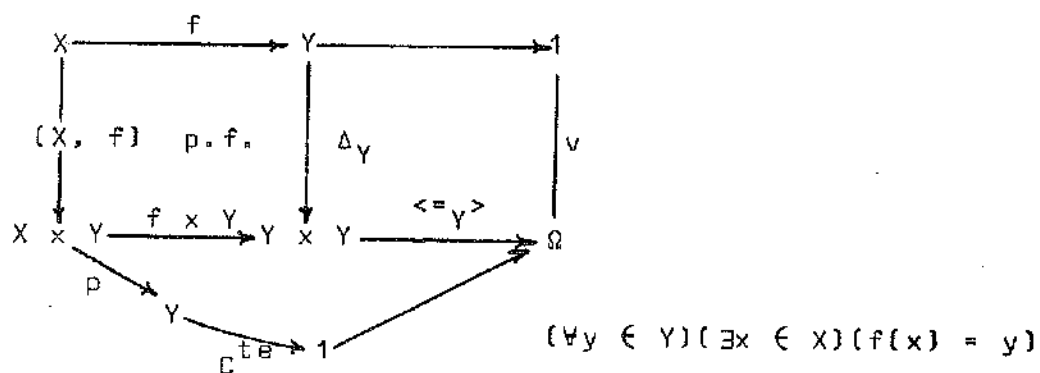
3.4. Autre construction.

3.4.1. Dans les ensembles, $f : X \longrightarrow Y$ est un épi si et seulement si la formule

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(f(x) = y)$$

est vraie :

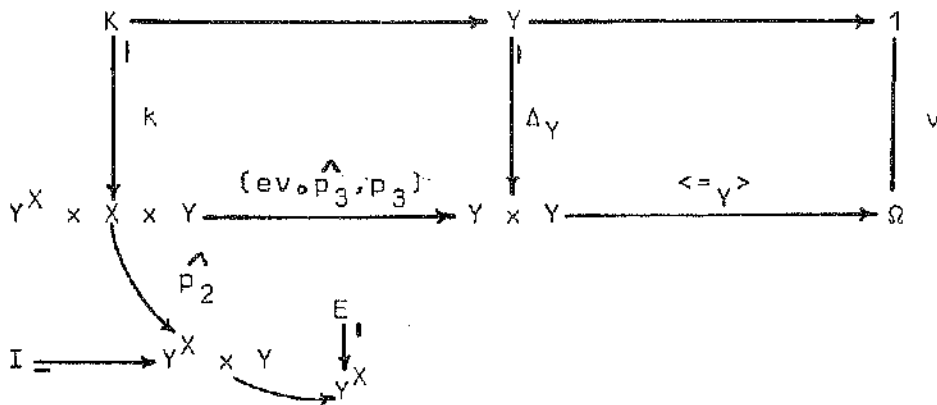
C'est encore vrai pour un topos quelconque, comme le montre le diagramme ci-dessous : f est un épi



ssi l'image de $p(X, f) = f$ n'est autre que 1_Y .

3.4.2. Pour construire $\underline{\text{Epi}}(X, Y)$, on peut former

$\langle =_Y \rangle$ (ev $\circ \hat{p}_3, p_3$), que l'on quantifie existentiellement le long de \hat{p}_2 , puis universellement le long de p_1 . La première quantification donne le sous-objet



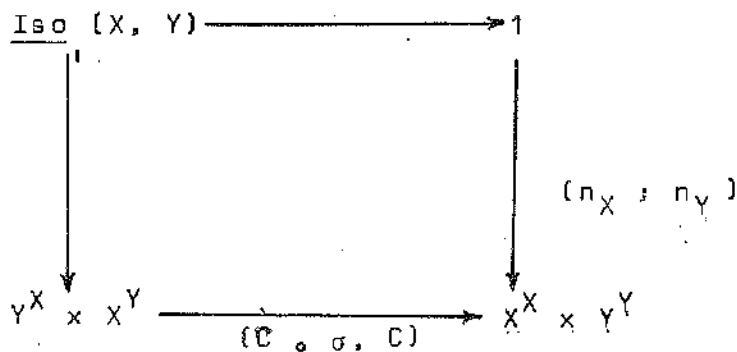
noté I en 3.2. En effet, k étant l'égalisateur de $\text{ev} \circ \hat{p}_3$ et p_3 , le composé $\hat{p}_2 k = (p_1, p_3)k$ peut encore s'écrire $(p_1, \text{ev} \circ \hat{p}_3)k$ ou $(\Pi_1, \text{ev})\hat{p}_3 k$ et la thèse résulte du fait que $\hat{p}_3 k$ est un épi (par exemple, parce que le couple $(1_{Y^X \times X \times Y}, \text{ev})$ se factorise à travers k).

La seconde quantification fournit alors le sous-objet $E \rightarrow Y^X$, lequel coïncide bien avec l'objet des épis défini plus haut car une flèche g de T vers Y^X se factorise à travers E si et seulement si $g \times Y$ se factorise à travers I , ce qui rejoint la condition "g' est un épi" du 3.2.

4. L'objet des isos.

=====

4.1. Dans toute catégorie cartésienne fermée à limites finies on peut définir l'objet Iso (X, Y) par le produit fibré



où σ est la symétrie sur $Y^X \times X^Y$, C la composition, n_X et n_Y les flèches neutres.

4.2. Une technique voisine de celle utilisée pour la proposition 2.3.1. permet de montrer que l'on a une bijection naturelle pour tout $T \in |\mathcal{C}|$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(T, \underline{\text{Iso}}(X, Y)) \cong \text{Iso}_{\mathcal{C}/T}(T \times X, T \times Y).$$

4.3. La propriété précédente, jointe au fait que tout topos est balancé (toute flèche qui est à la fois épi et mono est iso) donne immédiatement l'égalité

$$\underline{\text{Iso}}(X, Y) = \underline{\text{Mono}}(X, Y) \cap \underline{\text{Epi}}(X, Y).$$

5. Les sup et les inf internes.

=====

Si l'on se donne dans \mathcal{C} une famille indexée par T de parties de X , on peut former la réunion et l'intersection de la famille en suivant deux idées différentes : on peut dire que

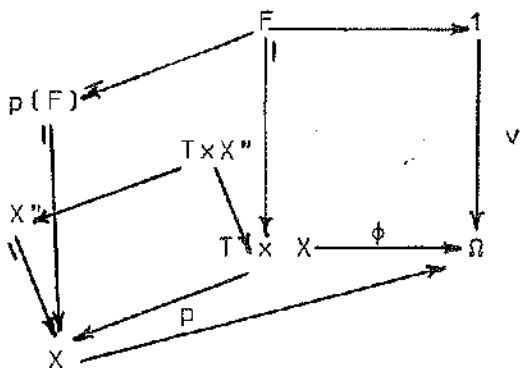
$$\bigcup_{t \in T} X_t = \{x \mid (\exists t)(x \in X_t)\} \text{ et}$$

$$\bigcap_{t \in T} X_t = \{x \mid (\forall t)(x \in X_t)\}$$

ou bien décrire une opération "réunion" ou "intersection" de $\mathcal{S}(\mathcal{S}(X))$ vers $\mathcal{S}(X)$ et l'appliquer à l'objet image de la famille donnée. Nous suivrons ces deux pistes pour un topos quelconque et montrerons qu'elles donnent des définitions équivalentes.

5.1. Une famille de sous-objets de X indexée par T , c'est une flèche de T vers Ω^X ou un sous-objet F de $T \times X$ caractérisé par $\phi : T \times X \longrightarrow \Omega$.

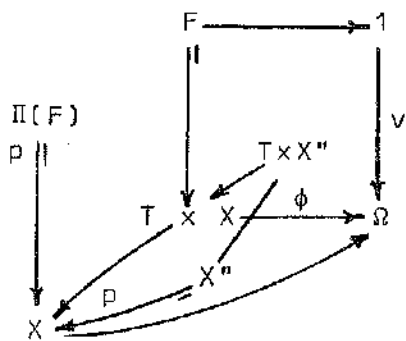
Pour obtenir la réunion de la famille, on quantifie ϕ existentiellement le long de la projection $p : T \times X \longrightarrow X$, autrement dit, on prend l'image $p(F)$.



Cette définition, suggérée par la formule rappelée ci-dessus pour \mathcal{E}_{ns} , s'explique par la bijection naturelle

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{E}/T \times X} [F, p^*(X'')] \\ \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}/X} [p(F), X'']. \end{aligned}$$

Pour obtenir l'intersection, on quantifie ϕ universellement le long de p , donc on prend $\Pi(F)$.



Cette définition se justifie par la bijection naturelle

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{E}/T \times X} [p^*(X''), F] \\ \cong \text{Hom}_{\mathcal{E}/T} [X'', \Pi(F)]. \end{aligned}$$

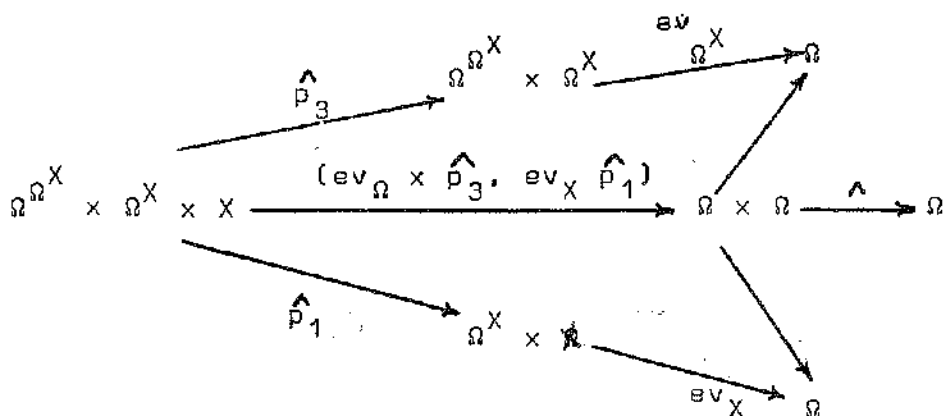
5.2. Dans \mathcal{E}_{ns} , si l'on se donne une partie ϕ de $\mathcal{P}(X)$, on peut définir $\cup \phi$ par la relation

$$x \in \cup \phi \quad \text{ssi} \quad (\exists A)(x \in A \text{ et } A \in \phi)$$

et de même $\cap \phi$ par

$$x \in \cap \phi \quad \text{ssi} \quad (\forall A)(A \in \phi \implies x \in A).$$

Dans un topos quelconque, on considère les sous-objets de $\Omega^{\Omega^X} \times \Omega^X \times X$ caractérisés d'une part par



et d'autre part par

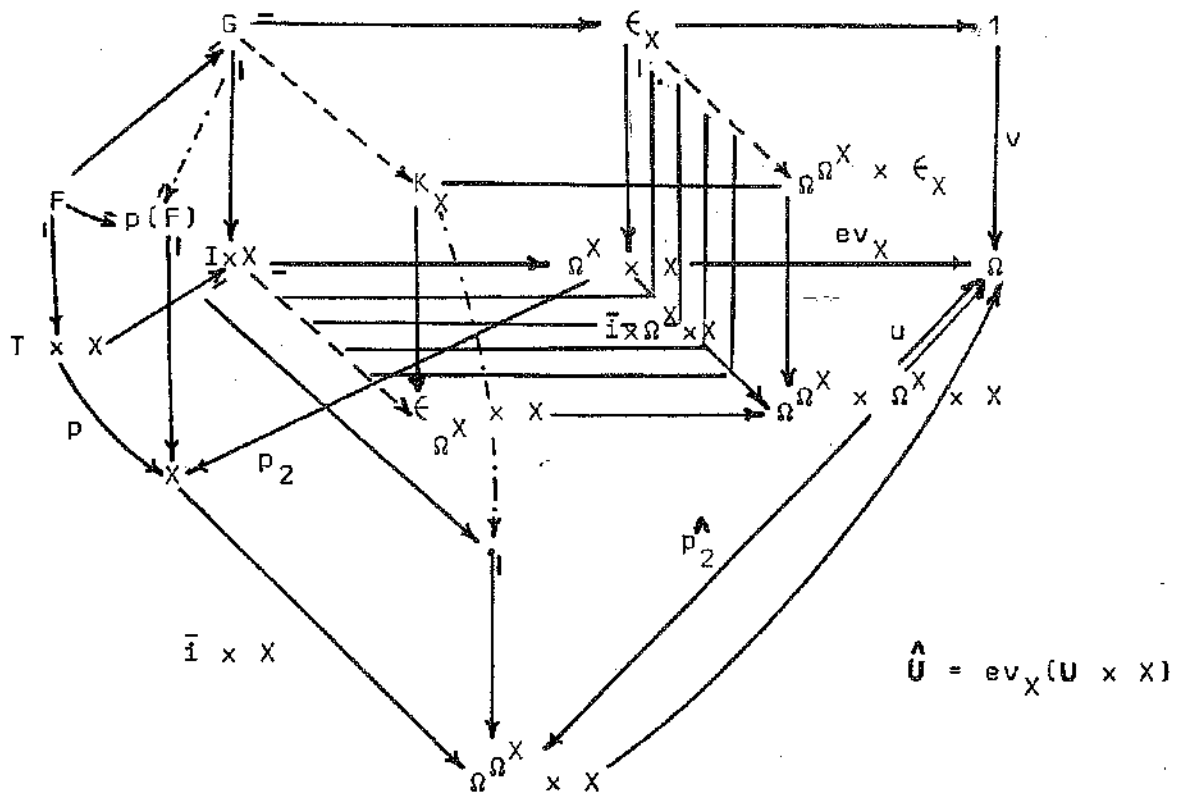
$$\Omega^{\Omega^X} \times \Omega^X \times X \xrightarrow{(ev_{\Omega} \times \hat{p}_3, ev_X \hat{p}_1)} \Omega \times \Omega \xrightarrow{=} \Omega.$$

Quantifiant la première fonction caractéristique existentielle le long de \hat{p}_2 (vers $\Omega^{\Omega^X} \times X$), on obtient l'adjointe cartésienne d'une flèche appelée "réunion de Ω^{Ω^X} vers Ω^X "; par quantification universelle le long de \hat{p}_2 de la seconde, on obtient l'adjointe de la flèche "intersection" de Ω^{Ω^X} vers Ω^X .

Partant alors d'une flèche $\hat{\phi} : T \rightarrow \Omega^X$, on prend son image, caractérisée par $i : \Omega^X \rightarrow \Omega$ et donc déterminée par $\bar{i} : 1 \rightarrow \Omega^{\Omega^X}$ (adjointe cartésienne de i). En faisant suivre \bar{i} de la flèche U (réunion), ou de la flèche \cap (intersection), on détermine respectivement des sous-objets de X isomorphes aux $p(F)$ et $\pi(F)$ indiqués précédemment.

Vérifions ceci pour la réunion, par exemple. Il s'agit de voir que $p(F)$ est caractérisé par $ev_X [(U \bar{i}) \times X]$.

Considérons à cet effet le diagramme ci-dessous.



Si I est l'image de $\hat{\phi} : T \rightarrow \Omega^X$, alors $I \times X$ est l'image de $\hat{\phi} \times X$. Soit G l'intersection de cette image avec ϵ_X . La projection p se factorise à travers $p_2 : \Omega^X \times X \rightarrow X$ et l'image de F par p coïncide avec celle de G (image de F par $\hat{\phi} \times X$) par p_2 .

D'autre part, le sous-objet K_X caractérisé par

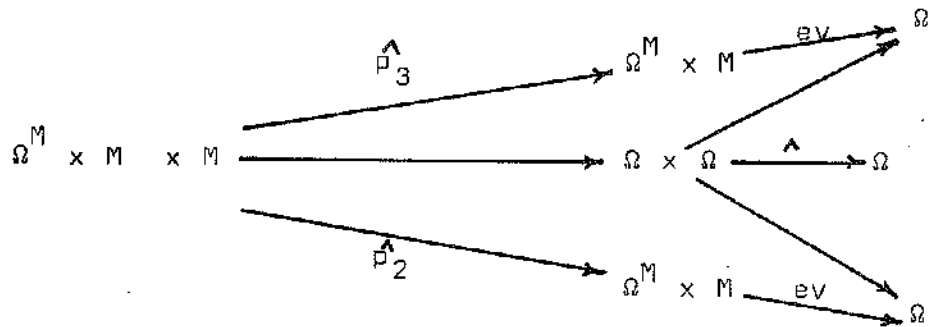
$$u = \wedge (ev_X \hat{p}_3, ev_X \hat{p}_1)$$

est l'intersection de $\epsilon_X \times X$ et de $\Omega^{\Omega^X} \times \epsilon_X$. L'image de K_X par \hat{p}_2 aura image réciproque par $\bar{i} \times X$ le sous-objet $p(F)$ si l'on peut montrer que l'image réciproque de K_X par $\bar{i} \times \Omega^X \times X$

est exactement G ; ceci à cause de l'universalité des images et du fait que $\hat{p}_2(\bar{i} \times \Omega^X \times X) = (\bar{i} \times X)p_2$ est le contour d'un produit fibré. Or le hachuré vertical est clairement un produit fibré et pour le hachuré horizontal, il est également clair que I est l'image réciproque de ϵ_{Ω^X} le long de $\bar{i} \times \Omega^X$.

Application.

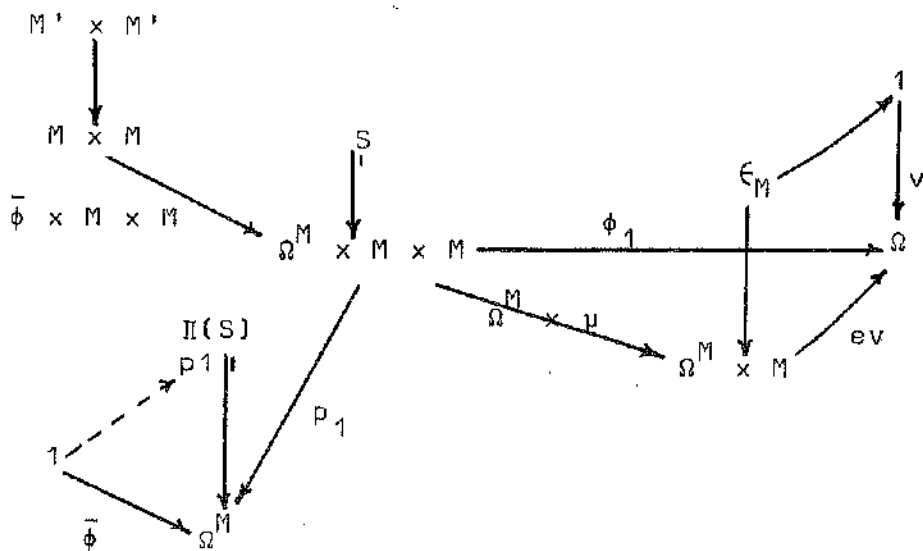
Soit M un objet du topos \mathcal{E} avec une multiplication μ et une unité η qui en fassent un monoïde. On peut définir à l'intérieur du topos "le sous-monoïde de M engendré par une partie X de M " en prenant l'intersection de la famille $S(X, M)$ des sous-monoïdes de M contenant X . Celle-ci est formée des sous-objets $M' \hookrightarrow M$ contenant X et $\{\eta\}$ et dans lesquels μ induit une multiplication μ' . Si on prend pour ϕ_1 le composé horizontal



et pour ϕ_2 le composé

$$\Omega^M \times M \times M \xrightarrow{\text{id} \times \mu} \Omega^M \times M \xrightarrow{\text{ev}} \Omega,$$

et si l'on quantifie $\phi_1 \rightrightarrows \phi_2$ universellement le long de la projection sur Ω^M , on détermine un sous-objet $\Pi(S) \xrightarrow{p_1} \Omega^M$ dont les points correspondent exactement aux $M' \hookrightarrow M$ vérifiant la dernière condition indiquée



En effet, l'adjointe $\bar{\phi}$ de $\phi : M \rightarrow \Omega$ (caractérisant $M \leftarrow M$) se factorise par $\Pi_{p_1}(S)$ si et seulement si

$$\phi_1(\bar{\phi} \times M \times M) \subseteq \text{ev}(\Omega^M \times \mu)(\bar{\phi} \times M \times M)$$

ce qui équivaut au fait que l'image par $\bar{\phi} \times \mu$ de $M' \times M'$ est contenue dans ϵ_M ou encore - puisque

$$(\Omega^M \times \mu)(\bar{\phi} \times M \times M) = (\bar{\phi} \times M)\mu - \text{au fait que } \mu$$

induit $\mu' : M' \times M' \rightarrow M'$.

D'autre part, si \mathcal{X} est la fonction caractéristique d'une partie $X \leftarrow M$ donnée, on obtiendra l'objet des parties de M contenant \mathcal{X} en formant le composé

$$\Omega^M \times M \xrightarrow{p_2} M \xrightarrow{\mathcal{X}} \Omega$$

et en quantifiant $\mathcal{X} \circ p_2 \Rightarrow \text{ev}$ universellement le long de $p_1 : \Omega^M \times M \rightarrow M$.

Opérant de même pour $\{\eta\}$ - caractérisé par l'adjointe de $\{.\}_M \eta : 1 \rightarrow \Omega^M$ - et imposant les 3 conditions à la fois, on obtient facilement le sous-objet correspondant à $S(X, M)$.

6. Univers dans un topos.

=====

6.1. On dit qu'une classe \mathcal{U} de flèches d'un topos \mathcal{E} est universelle si elle vérifie les propriétés suivantes :

- a. \mathcal{U} est stable pour la composition et pour le passage aux images réciproques ;
- b. Pour tout objet A du topos, la famille \mathcal{U}_A des flèches de but A contenues dans \mathcal{U} contient les flèches $0 \longrightarrow A$ et $A \xrightarrow{1_A} A$;
- c. La somme et le produit dans \mathcal{E}/A de deux flèches de \mathcal{U}_A sont dans \mathcal{U}_A ;
- d. \mathcal{U}_A est stable pour l'exponentiation dans \mathcal{E}/A : donc si $p : X \longrightarrow A$ et $q : Y \longrightarrow A$ en font partie, alors $\prod_p^*(q)$ également ;
- e. \mathcal{U}_A contient le classifiant $\Omega \times A \xrightarrow{p_2} A$ du topos \mathcal{E}/A .
- f. Si $m : X' \xrightarrow{\bar{}} X$ et $q : X'' \xrightarrow{\bar{}} X$ sont donnés, on aura pour $e : X \longrightarrow A$ les relations

$$e \in \mathcal{U}_A \implies em \in \mathcal{U}_A \text{ et}$$

$$eq \in \mathcal{U}_A \implies e \in \mathcal{U}_A.$$

(C'est la stabilité par "sous-trucs" et par "trucs quotients").

Pour tout $A \in |\mathcal{E}|$, désignons par \mathcal{E}'_A la sous-catégorie pleine de \mathcal{E}/A engendrée par la classe \mathcal{U}_A .

Proposition.

Pour tout $A \in |\mathcal{E}|$, \mathcal{E}'_A est un sous-topos de \mathcal{E}/A .

C'est immédiat à partir de la définition donnée. L'inclusion canonique préserve toute la structure de topos - c'est un morphisme logique.

Un objet du topos \mathcal{E} est dit \mathcal{U} -petit si l'unique flèche vers l'objet final 1 est dans \mathcal{U} . Les objets \mathcal{U} -petits déterminent un sous-topos \mathcal{E}'_1 du topos donné ($\mathcal{E} \cong \mathcal{E}'_1/1$).

Proposition.

Si $f : X \longrightarrow Y$ est une flèche du topos \mathcal{E} , le foncteur $f^* : \mathcal{E}/Y \longrightarrow \mathcal{E}/X$ induit un foncteur de \mathcal{E}'_Y vers \mathcal{E}'_X . Si f est dans \mathcal{U} , alors les foncteurs Σ_f et Π_f en induisent également de \mathcal{E}'_X vers \mathcal{E}'_Y .

Ceci est une conséquence aisée de la propriété a., du lien entre Π_f et l'exponentiation dans \mathcal{E}/Y et de la proposition précédente.

6.2. Une famille \mathfrak{F} de flèches d'un topos, stable par passage aux images réciproques, est dite représentable s'il existe une flèche $f : G \longrightarrow F$ de la famille telle que pour tout $x : B \longrightarrow A$ dans \mathfrak{F} , il existe une unique flèche $\phi_x : A \longrightarrow F$ donnant $\phi_x^*(f) = x$.

○

Exemples.

La famille des monos dans un topos est représentée par la flèche $v : 1 \longrightarrow \Omega$ (vrai).

Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ns}$, la famille des flèches $x : B \longrightarrow A$ telles que pour tout $a \in A$ l'image réciproque $x^{-1}(\{a\})$ ait un cardinal fini est représentée par la flèche K de $N \times N$ vers N qui au couple (p, q) associe $(p + q) + 1$; la fibre de cette flèche au-dessus de l'entier n est en bijection avec l'ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

On dit qu'une flèche $V \longrightarrow U$ d'un topos est un univers si elle représente une classe universelle \mathcal{U} .

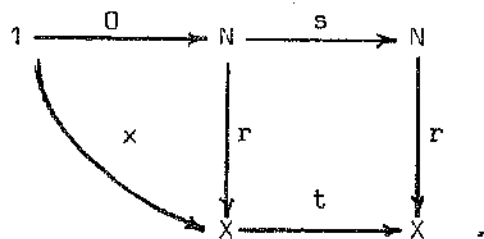
Exemple.

La flèche $0 \longrightarrow 1$ est un univers dans tout topos. Si $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ns}$, la flèche K indiquée ci-dessus est un univers. L'axiome des univers peut s'énoncer dans le cadre des topos : "pour tout objet X du topos \mathcal{E} , il existe un univers contenant la flèche $X \longrightarrow 1$ ".

7. L'objet des entiers.

=====

7.1.a. On dit qu'un topos \mathcal{E} vérifie l'axiome de l'infini s'il existe un objet N dans \mathcal{E} , muni de flèches $0 : 1 \longrightarrow N$ et $s : N \longrightarrow N$ telles que pour tout objet X de \mathcal{E} muni de flèches $x : 1 \longrightarrow X$ et $t : X \longrightarrow X$, il existe une flèche unique $r : N \longrightarrow X$ rendant commutatif le diagramme



b. Si l'on désigne par \mathcal{E}_e la catégorie dont les objets sont les couples formés d'un objet de \mathcal{E} et d'un endomorphisme de cet objet, et dont les flèches sont celles de \mathcal{E} qui commutent avec ces endomorphismes, l'axiome précédent revient à dire que le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{E}} [1, U(-)]$ est représentable par $\text{Hom}_{\mathcal{E}_e} [N, -]$ l'élément universel correspondant étant $1 \xrightarrow{0} N$ (U désigne le foncteur d'oubli des endomorphismes). En fait, le foncteur U a un adjoint à gauche F donné par

$$F(A) = N \times A \xrightarrow{s \times 1_A} N \times A \text{ pour } A \in |\mathcal{E}|.$$

En effet, si $(X, t) \in |\mathcal{E}_e|$, on a les bijections naturelles

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{E}} (A, X) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{E}} (1, x^A) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{E}_e} [(N, 1), (X^A, t^A)] \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{E}_e} [(N \times A, s \times 1_A), (X, t)]. \end{aligned}$$

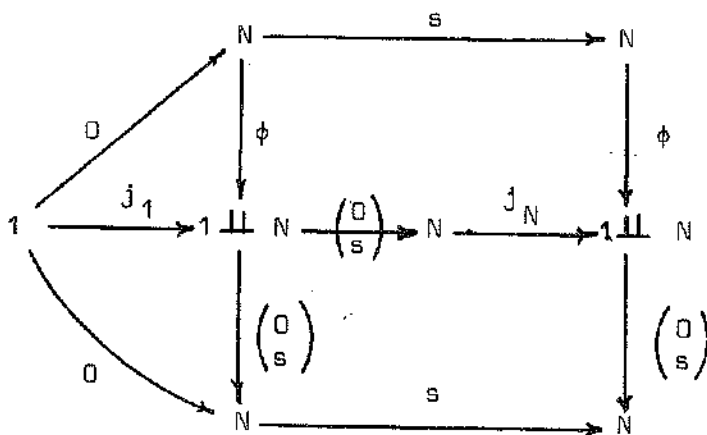
L'objet N est appelé l'objet des entiers, les flèches s et 0 sont les flèches successeur et zéro.

7.2. Axiomes de Plano.

a. Proposition.

$$N \cong 1 \amalg N.$$

Désignons par j_N et j_1 les injections canoniques de N et 1 dans leur somme. Par la propriété universelle de N , il existe une flèche unique ϕ rendant commutative la partie supérieure du diagramme ci-dessous :



la partie inférieure commute trivialement de sorte que l'on a $\begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \phi = 1_N$. Pour voir que $\phi \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} = 1_1 \amalg N$, il suffit d'observer que

$$\phi \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} j_1 = \phi_0 = j_1 \text{ et que } \phi \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} j_N = \phi_s = j_N \begin{pmatrix} 0 \\ s \end{pmatrix} \phi = j_N.$$

Corollaire.

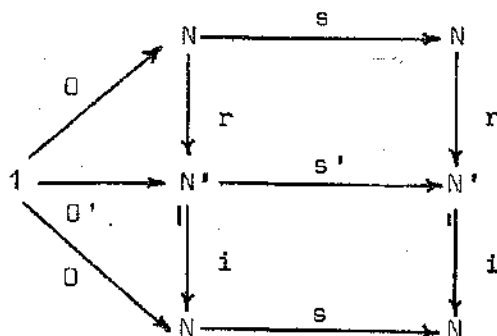
La flèche successeur est un monomorphisme.

En effet, le composé $\phi s = j_N$ en est un.

b. Proposition.

Si un sous-objet N' de N'' contient $0''$ et est "stable pour s ", alors $N' \cong N$.

En effet, si $0'$ désigne la factorisation de 0 à travers l'inclusion $i : N' \rightarrow N$ et s' la factorisation de s , il leur correspond par la propriété universelle de N une flèche unique $r : N \rightarrow N'$ telle que la partie supérieure du diagramme suivant commute. En composant avec i , on trouve $ir = 1_N$; d'où $N' \cong N$.



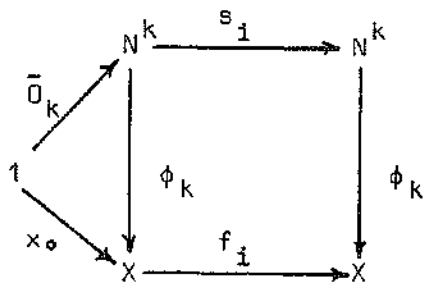
7.3. Soit k un entier naturel. On définit un système de k flèches $s_i^k : N^k \rightarrow N^k$, notées aussi s_i (pour k fixé), par les conditions $pr_j s_i = 1_N$ si $i \neq j$ et $pr_i s_i = s$; ces flèches vérifient la propriété $s_i s_j = s_j s_i$ ($1 \leq i, j \leq k$). On considère aussi la flèche $\bar{0}_k = (0, 0, \dots, 0) : 1 \rightarrow N^k$.

Théorème.

Pour tout objet X , muni d'une flèche $x_0 : 1 \rightarrow X$ et d'un système de k flèches $\delta_i : X \rightarrow X$ telles que

$$\delta_i \delta_j = \delta_j \delta_i \quad (1 \leq i, j \leq k),$$

il existe une flèche unique $\phi_k : N^k \rightarrow X$ (notée aussi $\phi_k(x_0 ; \delta_1, \dots, \delta_k)$) rendant commutatif le diagramme

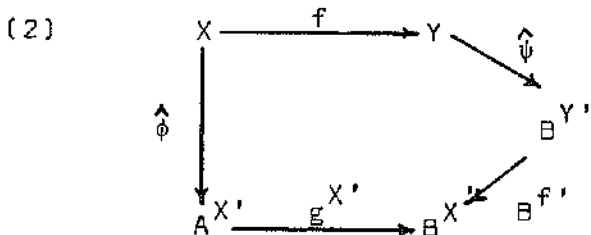
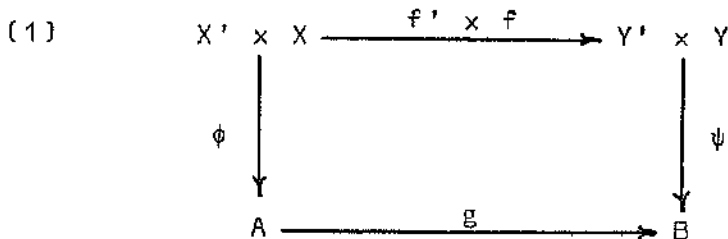


pour tout $1 \leq i \leq k$.

La proposition étant vérifiée trivialement pour $k = 0$ et $k = 1$ (c'est l'axiome de l'infini), on va montrer par récurrence qu'elle s'étend à toute valeur entière de k , en faisant usage du lemme suivant.

Lemme.

Dans toute catégorie cartésienne fermée, la commutativité du diagramme (1) équivaut à celle du diagramme (2).

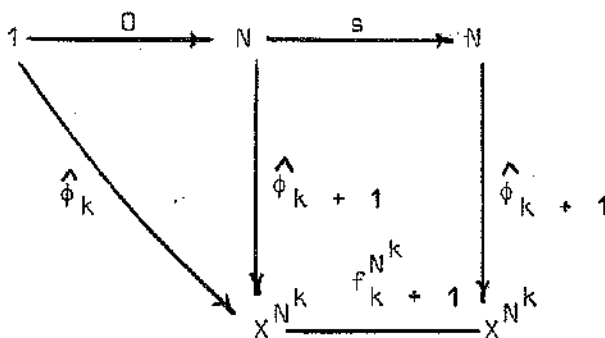


Il est clair que $g^{X'} \hat{\phi}$ est l'adjointe cartésienne de g^ϕ . D'autre part, $\psi(Y' \times f)$ a pour adjointe $\hat{\psi}f$, et faire précéder la première de $f' \times X$ revient à faire suivre la seconde de $B^{f'}$.

Supposons donc le théorème vrai pour k et montrons comment l'étendre à $k + 1$ en construisant la flèche

$$\phi_{k+1} = \phi_{k+1}(x_0; f_1 \dots f_k f_{k+1}).$$

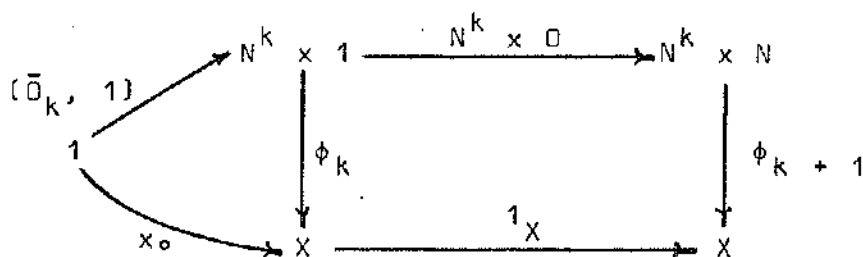
Ce sera l'adjointe de l'unique flèche rendant commutatif le diagramme



Le lemme appliqué au carré de droite donne de suite

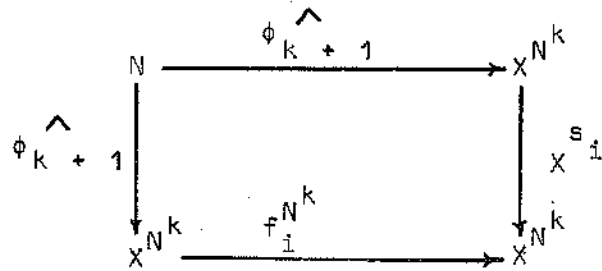
$$\phi_{k+1} s_{k+1} = f_{k+1} \phi_{k+1}.$$

La commutativité du triangle de gauche entraîne celle du carré de droite ci-dessous, ce qui joint à

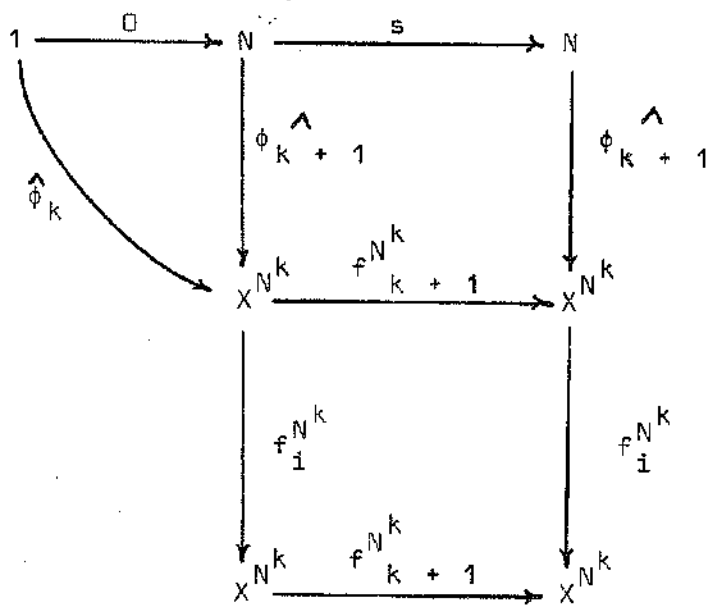


l'hypothèse de récurrence donne $\phi_{k+1} \bar{O}_{k+1} = x_0$.

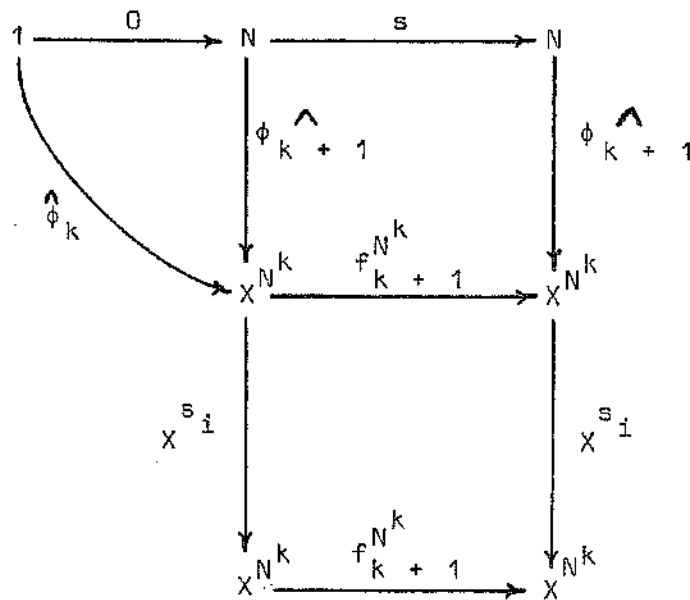
Reste à vérifier que $\phi_{k+1} s_i = f_i \phi_{k+1}$ pour $1 \leq i \leq k$, ou, d'après le lemme, que le diagramme



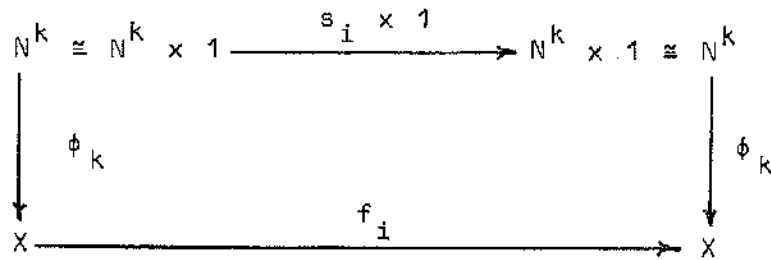
commute pour $1 \leq i \leq k$. Compte tenu du caractère (bi)fonctoriel de l'exponentiation, qui assure la commutativité des rectangles inférieurs ci-dessous, et de l'universalité de N , on aura fini si $X^{s_i} \hat{\phi}_k = f_i^{N^k} \hat{\phi}_k$ pour $1 \leq i \leq k$.



2



Mais - par le lemme - cette condition équivaut à la commutativité pour $1 \leq i \leq k$ des diagrammes



ce qui est vrai par l'hypothèse de récurrence.

Corollaires.

1. Si un sous-objet M de N^k est stable pour les s_i^k et tel que $\bar{0}^k$ se factorise à travers M , alors $M \cong N^k$.

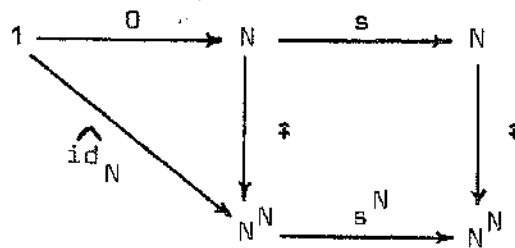
La démonstration est la même que pour $k = 1$.

2. Si un objet X' est muni de flèches $f'_i : X' \rightarrow X'$ ($1 \leq i \leq k$) et $x'_0 : 1 \rightarrow X'$ et si $g : X \rightarrow X'$

est telle que $gf_i = f'_i g$ pour chaque i et $gx_0 = x'_0$,
 alors $g \circ \phi_k(x_0 ; f_1 \dots f_k) = \phi_k(x'_0 ; f'_1 \dots f'_k)$.

7.4. Addition dans N .

- a. Appliquant le théorème précédent au cas où $k = 2$,
 $X = N$, $x_0 = 0$ et $f_1 = f_2 = s$, on obtient une flèche
 notée $+$ de N^2 dans N . L'adjointe \ddagger de cette flèche
 est l'unique flèche de N dans N^N rendant commutatif
 le diagramme



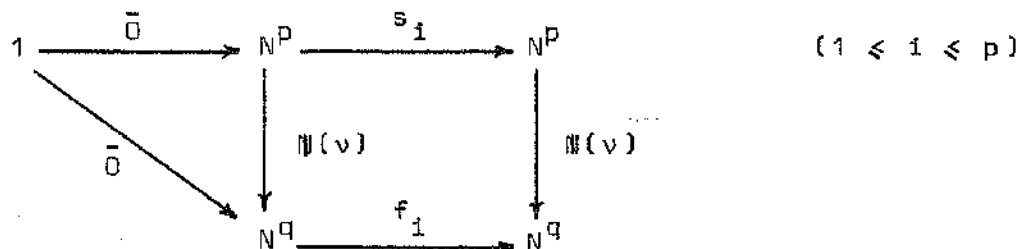
Nous allons montrer que N , muni de l'opération d'addition
 $+$, a une structure de monoïde abélien.

- b. La théorie des monoïdes abéliens (au sens des théories
 algébriques de Lawvere) a pour objets les entiers natu-
 rels et pour flèches les matrices à coefficients entiers.
 Plus précisément, une flèche de p vers q est une matrice n -
 de genre (q, p) , décrivant un homomorphisme du monoïde
 abélien libre à q générateurs vers celui à p générateurs
 la composition des flèches est donnée par la multiplica-
 tion matricielle.

Considérons alors le foncteur \mathbb{N} , défini sur cette théorie,
 à valeurs dans le topos donné, spécifié par les clauses
 suivantes :

$\mathbb{N}(p) = N^p$ pour tout entier p ;

si v est une flèche de p vers q , on prend $\mathbb{N}(v)$ égal à l'unique flèche de N^p vers N^q rendant commutatif le diagramme suivant



où $f_i = (f_i^1, \dots, f_i^q)$ avec $f_i^j = \underbrace{(s \circ s \circ \dots \circ s)}_{v_j^i \text{ fois}} \circ \text{pr}_j$

(en convenant que 0 fois s vaut 1_N).

Soit alors μ une flèche de q vers r , $\mathbb{N}(\mu)$ la flèche de N^q vers N^r correspondante et

$g_j = (g_j^1, \dots, g_j^r)$ avec $g_j^k = \underbrace{(s \circ s \circ \dots \circ s)}_{\mu_k^j \text{ fois}} \circ \text{pr}_k$.

La flèche $\mathbb{N}(\mu)$, précédée de f_i - c'est-à-dire du composé.

$\underbrace{(s_q \circ \dots \circ s_q)}_{v_q^i \text{ fois}} \circ \dots \circ \underbrace{(s_1 \circ \dots \circ s_1)}_{v_1^i \text{ fois}}$ - est égale au

composé

$\underbrace{(g_q \circ \dots \circ g_q)}_{v_q^i \text{ fois}} \circ \dots \circ \underbrace{(g_1 \circ \dots \circ g_1)}_{v_1^i \text{ fois}}$ précédé de $\mathbb{N}(\mu)$.

Or ce dernier composé, vu comme

$$h_1 = (h_1^1, \dots, h_1^r)$$

a pour k-ième composante la flèche

$$\underbrace{(s \circ s \circ \dots \circ s)} \circ \text{pr}_k$$

$$(v_1^1 \cdot \mu_k^q + \dots + v_1^1 \cdot \mu_k^1) \text{ fois ;}$$

c'est donc la flèche correspondant à s_1 dans la définition de $\mathbb{N}(\mu, v)$. Le corollaire 7.3, 2 donne alors l'égalité

$$\mathbb{N}(\mu) \circ \mathbb{N}(v) = \mathbb{N}(\mu, v).$$

On achève facilement de prouver le caractère fonctoriel de \mathbb{N} et le fait que ce foncteur commute aux produits finis.

La flèche \sharp n'est rien d'autre que $\mathbb{N}((1, 1))$. Et $(1, 1)$ est l'opération à 2 arguments de la théorie des monoïdes abéliens correspondant à l'homomorphisme du monoïde libre à 1 générateur vers celui à 2 générateurs qui factorise le couple (id, id) (où id désigne l'identité sur ce dernier monoïde).

7.5. Relation d'ordre dans N .

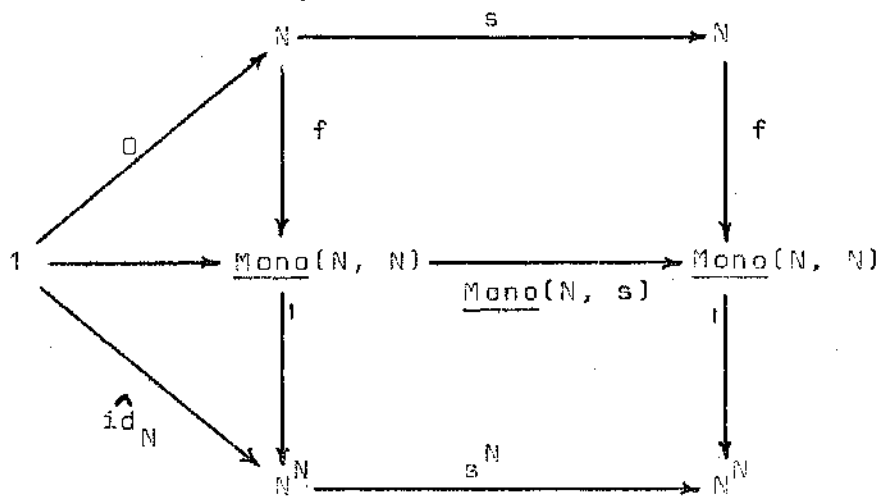
a. Lemme.

La flèche $(\text{pr}_1, +) : N \times N \longrightarrow N \times N$ est un monomorphisme.

D'après la proposition 2.2., il suffit, pour le voir, de montrer que $\ddagger : N \longrightarrow N^N$ se factorise à travers l'objet Mono(N, N).

Comme s est un mono, la flèche s^N induit un monomorphisme de Mono(N, N) vers Mono(N, N), soit Mono(N, s) (cf. 2.3.2.) ; d'autre part \hat{id}_N se factorise également à travers Mono(N, N).

Il existe une flèche unique $f : N \longrightarrow \text{Mono}(N, N)$ telle que le rectangle supérieur ci-dessous commute.



Les composés verticaux sont égaux à \ddagger .

Remarque. Si N est l'ensemble des entiers habituels, le lemme revient à dire que

$$[(a, a + x) = (b, b + y)] \implies [a = b \text{ et } x = y].$$

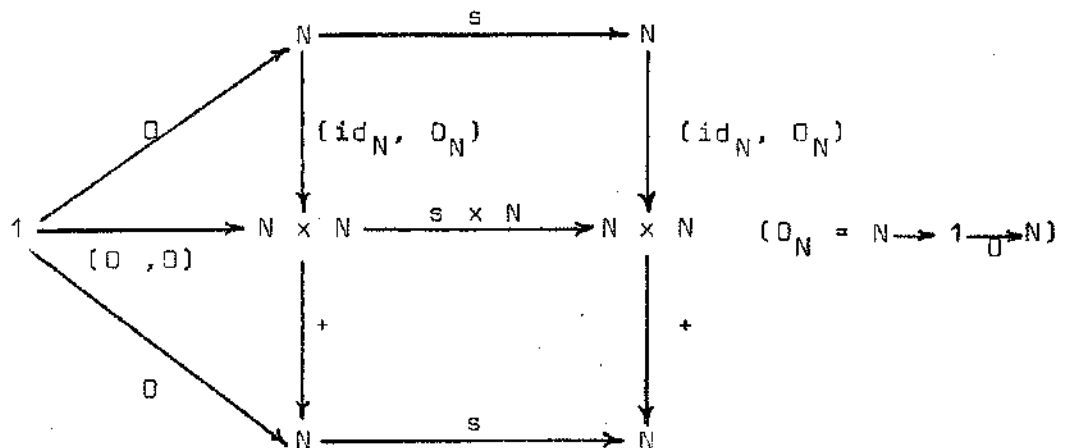
Il implique en particulier que $(a + x = a + y) \implies (x = y)$

b. Proposition.

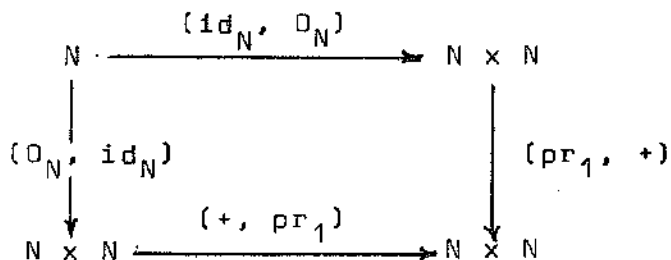
Le sous-objet $(pr_1, +)$ représente une relation d'ordre sur N .

Ceci résulte essentiellement du fait que N , muni de l'addition $+$ est un monoïde abélien - la flèche neutre étant 0 . De façon détaillée :

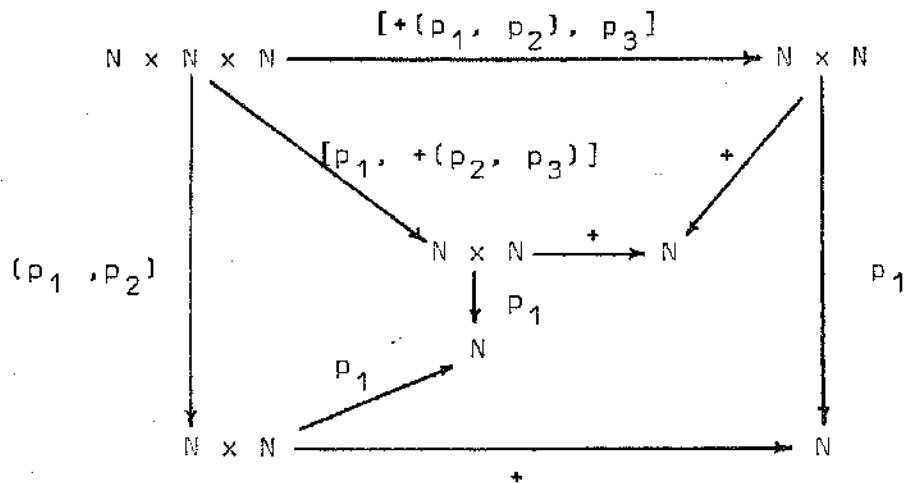
la réflexivité - c'est-à-dire le fait que la diagonale de Δ se factorise à travers $(pr_1, +)$ - résulte de l'égalité $id_N = + (id_N, 0_N)$, mise en évidence par le diagramme suivant



l'antisymétrie - c'est-à-dire le fait que le diagramme ci-dessous soit un produit fibré - résulte du caractère neutre de 0 et du lemme précédent ;



la transitivité résulte essentiellement de l'associativité de l'addition, laquelle assure la commutativité du diagramme suivant - où le carré extérieur est un produit fibré :



7.6. Problèmes dans des topos vérifiant l'axiome de l'infini.

- a. Etudier la catégorie des monoïdes abéliens internes à un tel topos. Construire explicitement le monoïde abélien libre sur un objet donné.
- b. Etudier la flèche $K = s \circ + : N \times N \longrightarrow N$ dans un tel topos. Représente-t-elle un univers, comme c'est le cas pour le topos des ensembles ?

BIBLIOGRAPHIE.

=====

- [1] BENABOU J. et J. CELEYRETTE - "Généralités sur les topos de Lawvere et Tierney" - notes poly-copiées du séminaire Benabou, Paris, 1970.
- [2] COLE J.C. - "Categories of sets and models of set theory" - Aarhus Universitet Preprint Series n° 52, 1970/71.
- [3] FREYD P. - "Aspects of Topoi" - Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 7 (1972), pp. 1-76 + 15 p. de compléments.
- [4] KOCK A. et WRAITH G.C. - "Elementary toposes" - Aarhus Universitet Lecture Notes Series n° 30, 1971.
- [5] KOCK A. et MIKKELSEN Chr. J. - "Topos-theoretic factorization of non-standard extensions" - Matematisk Institut, Aarhus, 1972.
- [6] LAWVERE F.W. - "Quantifiers and Sheaves" - Actes du congrès intern. de math. de Nice, 1970, tome 1, pp. 329 à 334.
- [7] LAWVERE F.W. - "Introduction in Toposes, Algebraic Geometry and Logic" - L.N. 274, Springer, 1972, pp. 1 à 12.
- [8] MIKKELSEN C.J. - "Colimites in toposes" - en préparation.
- [9] TIERNEY M. - "Sheaf theory and the continuum hypothesis" - L.N. 274, Springer, 1972, pp. 13 à 42.