BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
SERIE NOUĂ
Tomul XIV (XVIII), Fasc. 1—2. 1968

/ 106 /

C. D. 518 56

ESQUISSES ET TYPES DES STRUCTURES ALGÉBRIQUES

PAR

CHARLES EHRESMANN

1. Introduction

Une esquisse $\overline{\sigma}$ est la donnée d'un graphe multiplicatif U et de certaines transformations naturelles entre néofoncteurs à valeurs dans U, vérifiant quelques axiomes. Une structure algébrique d'espèce $\overline{\sigma}$ est une „réalisation" de U, c'est-à-dire un néofoncteur de U vers une catégorie d'applications qui applique les transformations naturelles données en des limites projectives ou inductives naturalisées. Il existe une „plus grande" esquisse $T(\overline{\sigma})$, appelée type de $\overline{\sigma}$, prolongeant $\overline{\sigma}$ et telle que les structures d'espèce $\overline{\sigma}$ s'identifient aux structures d'espèce $T(\overline{\sigma})$. 1+

Dans le § 2 sont définies les esquisses des graphes, des classes multiplicatives et des catégories; l'étude des catégories et des catégories structurées comme réalisations d'esquisses a fait l'objet du mémoire [3]. Le § 3 généralise aux graphes multiplicatifs les théorèmes de complétion des catégories de [2]. Les notions d'esquisse, de prototype et de type d'une esquisse sont introduites dans le § 4; les définitions adoptées ici sont un peu différentes de celles proposées dans [4], mais elles permettent d'obtenir des résultats analogues à ceux de [4] et aussi de résoudre les problèmes indiqués à la fin de cet article. 2+

La terminologie et les notations (en particulier relativement aux transformations naturelles) sont ceux du livre [1].

2. Exemples de définition d'une structure comme réalisation d'une esquisse

Rappelons qu'un graphe multiplicatif est un couple $(C, \varkappa)$ d'une classe C et d'une application $\varkappa$ d'une partie M de $C \times C$ dans C vérifiant les axiomes suivants, où l'on pose $\varkappa(g, f) = g.f$:

1. Pour tout $f \in C$, il existe une et une seule unité à droite, notée $\alpha(f)$, telle que $(f, \alpha(f)) \in M$ et une et une seule unité à gauche $\beta(f)$ telle que $(\beta(f), f) \in M$.

2. Si $(g, f) \in M$, on a

$$\alpha(g) = \beta(f), \quad \alpha(g.f) = \alpha(f) \text{ et } \beta(g.f) = \beta(g).$$

Les applications α, β et $\varkappa$ sont appelées source, but et loi de composition de $(C, \varkappa)$ et le couple $(C, \varkappa)$ est souvent noté $C^{\cdot}$; dans ce cas, on écrit $M = C^{\cdot} \ast C^{\cdot}$, et on désigne par $C_0^{\cdot}$ la classe $\alpha(C) = \beta(C)$ des unités de $C^{\cdot}$.

Remarquons que cette définition utilise seulement la composition des applications.

Si $C^{\cdot}$ et $\hat{C}^{\cdot}$ sont deux graphes multiplicatifs, on appelle *néofoncteur* de $C^{\cdot}$ vers $\hat{C}^{\cdot}$ un triplet $(\hat{C}^{\cdot}, \varphi, C^{\cdot})$, où φ est une surjection de C sur $\varphi(C) \subset \hat{C}$, tel que:

1. Si $(g, f) \in C^{\cdot} \ast C^{\cdot}$, on a $(\varphi(g), \varphi(f)) \in \hat{C}^{\cdot} \ast \hat{C}^{\cdot}$ et $\varphi(g).\varphi(f) = \varphi(g.f)$;
2. Si $e \in C_0^{\cdot}$, alors $\varphi(e) \in \hat{C}_0^{\cdot}$.

1 a) *Esquisses des graphes et des classes multiplicatives*

Un graphe est un triplet $(C, \beta, \alpha) = [C]$, où C est une classe, α et β deux rétractions de C sur une partie $[C]_0$ de C. Cette définition est équivalente à la suivante: Soit $U_{\mathcal{G}}^{\cdot}$ le graphe multiplicatif ayant deux unités u et u_0 et 3 autres morphismes a et b de u vers u_0 et i de u_0 vers u (fig. 1), les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droite et à gauche étant

$$a.i = u_0 \quad \text{et} \quad b.i = u_0.$$

Si $[C]$ est un graphe, la surjection

$$u \to C, \quad u_0 \to [C]_0, \quad a \to \alpha, \quad b \to \beta \quad \text{et} \quad i \to (C, \iota, [C]_0)$$

définit un néofoncteur F de $U_{\mathcal{G}}^{\cdot}$ vers la catégorie $\mathcal{M}$ des applications. On voit que l'application $(C, \beta, \alpha) \to F$ est une bijection de la classe $\mathcal{G}_0$

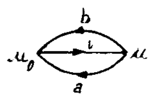

Fig. 1

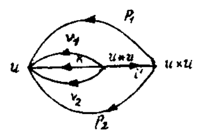

Fig. 2

des graphes (C, β, α) tels que $C \in \mathcal{M}_0$ sur la classe des néofoncteurs F de $U^{\cdot}$ vers $\mathcal{M}$ tels que $F(i) \in M^{\iota}$ = classe des injections canoniques. Cette bijection s'étend en un isomorphisme de la catégorie $\mathcal{G}$ des morphismes entre graphes sur la sous-catégorie pleine de la catégorie longitudinale $\mathfrak{N}(\mathcal{M}, U^{\cdot})^{\square}$ des transformations naturelles entre néofoncteurs F de $U^{\cdot}$ vers $\mathcal{M}$ tels que $F(i) \in \mathcal{M}^{\iota}$. Donc la „structure de graphe" est obtenue comme „réalisation" $U^{\cdot}_{\mathcal{G}}$. 1

De même, on peut définir une classe multiplicative comme une „réalisation" du graphe multiplicatif $U^{\cdot}_{\mathcal{M}}$ ayant 3 unités u, $u \divideontimes u$ et $u \times u$, les autres morphismes étant (fig. 2)

$$\left\{\begin{array}{l} v_1,\ v_2 \text{ et } k \text{ de } u \divideontimes u \text{ vers } u, \\ p_1,\ p_2 \text{ de } u \times u \text{ vers } u, \\ i' \text{ de } u \divideontimes u \text{ vers } u \times u, \end{array}\right.$$

les composés de deux éléments différents d'une unité étant

$$p_1 . i' = v_1 \quad \text{et} \quad p_2 . i' = v_2 .$$

Si $(C, \varkappa)$ est une classe multiplicative, soit F le néofoncteur de $U^{\cdot}_{\mathcal{M}}$ vers $\mathcal{M}$ tel que $F(p_i)$ soit la i-ème projection canonique de $C \times C$ sur C et que

$$F(k) = \varkappa \quad \text{et} \quad F(i') = (C \times C, \iota, C^{\cdot} \divideontimes C^{\cdot}).$$

La surjection $(C, \varkappa) \to F$ définit une bijection de la classe $\mathcal{M}_0$ des classes multiplicatives telles que $C \in \mathcal{M}_0$ sur la classe des néofoncteurs F de $U^{\cdot}_{\mathcal{M}}$ vers $\mathcal{M}$ tels que $F(i') \in \mathcal{M}^{\iota}$ et que $F(p_i)$ soit la projection canonique de $F(u) \times F(u)$.

b) *Esquisse d'une catégorie*

Soit $[U_1]$ le graphe ayant 4 sommets u, u_0, $u \divideontimes u$, $(u \divideontimes u) \divideontimes (u \divideontimes u)$ et dont les seules flèches sont

$$\left\{\begin{array}{l} a \text{ et } b \text{ de } u \text{ vers } u_0, \\ i \text{ de } u_0 \text{ vers } u, \\ v_1,\ v_2 \text{ et } k \text{ de } u \divideontimes u \text{ vers } u, \\ v(u,\ i.a) \text{ et } v(i.b,\ u) \text{ de } u \text{ vers } u \divideontimes u, \\ w_1,\ w_2,\ k_1 \text{ et } k_2 \text{ de } (u \divideontimes u) \divideontimes (u \divideontimes u) \text{ vers } u \divideontimes u. \end{array}\right.$$

Nous désignerons par $U^{\cdot}_{\mathcal{F}}$ le graphe multiplicatif défini comme suit: 2
$[U_1]$ est un sous-graphe du graphe $[U^{\cdot}_{\mathcal{F}}]$ sous-jacent à $U^{\cdot}_{\mathcal{F}}$, contenant toutes les unités de $U^{\cdot}_{\mathcal{F}}$ (fig. 3); les éléments de $U_{\mathcal{F}}$ sont ceux de U_1 et 11 autres morphismes g_i, où $1 \leqslant i \leqslant 11$; la loi de composition est telle que les seuls composés soient les composés d'un élément avec ses

unités à droite et à gauche, et les composés explicitement indiqués dans les formules ci-dessous; de plus deux composés sont égaux si, et seulement si, l'égalité figure parmi les relations suivantes:

(1) $$u_0 = a \cdot i = b \cdot i,$$

(2) $$g_1 = a \cdot v_1 = b \cdot v_2,\ g_2 = a \cdot v_2 = a \cdot k,\ g_3 = b \cdot v_1 = b \cdot k,$$

(3) $$u = v_1 \cdot v(u, i \cdot a) = v_2 \cdot v(i \cdot b,\ u), g_4 = i \cdot a = v_2 \cdot v(u,\ i \cdot a),\ g_5 = i \cdot b = v_1 \cdot v(i \cdot b, u),$$

(4) $$k \cdot v(u,\ i \cdot a) = u = k \cdot v(i \cdot b,\ u),$$

(5) $$g_6 = v_2 \cdot w_1 = v_1 \cdot w_2,\ g_7 = k \cdot w_1 = v_1 \cdot k_1,\ g_8 = v_2 \cdot w_2 = v_2 \cdot k_1,$$
$$g_9 = k \cdot w_2 = v_2 \cdot k_2,\ g_{10} = v_1 \cdot w_1 = v_1 \cdot k_2,$$

(6) $$g_{11} = k \cdot k_1 = k \cdot k_2 .$$

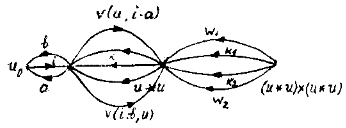

Fig. 3

Ainsi $U_{\mathcal{F}}$ est engendré par $[U_1]$ et une relation, i. e. c'est un quotient d'un sous-graphe multiplicatif de la catégorie libre des chemins associée à $[U_1]$.

Soit $\eta = (H^{\cdot}, \mu, H^{\iota})$ un triplet formé d'une catégorie $H^{\cdot}$, d'une classe H^{ι} de monomorphismes de $H^{\cdot}$ et d'une application produit fibré naturalisé fini μ sur $H^{\cdot}$ [1, déf. 10-IV]. Désignons par $\mathcal{F}(\eta)_0$ la classe des néofoncteurs F de $U_{\mathcal{F}}$ vers $H^{\cdot}$ vérifiant les conditions suivantes:

1° $F(i) \in H^{\iota}$,

2° $((F(a),\ F(v_1)),\ (F(b),\ F(v_2))) = \mu(\ F(a),\ F(b))$,

3° $((F(v_2),\ F(w_1)),\ (F(v_1),\ F(w_2))) = \mu(\ F(v_2),\ F(v_1))$.

On montre que deux éléments F et F' de $\mathcal{F}(\eta)_0$ ayant mêmes restrictions à l'ensemble $\{a, b, i, k\}$ sont égaux. Un élément de $\mathcal{F}(\eta)_0$ est appelé *catégorie η-structurée*. En particulier, supposons $\eta_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, \mu_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}^{\iota})$, où $\mu_{\mathfrak{M}}$ est l'application produit fibré naturalisé canonique sur $\mathfrak{M}$ (i. e. on a

$$\mu_{\mathfrak{M}}(f_1, f_2) = ((f_1, v_1), (f_2, v_2)),$$

si f_i sont deux applications de même but et si v_i est la restriction de la projection canonique du produit $\alpha(f_1) \times \alpha(f_2)$ vers $\alpha(f_i)$ à la classe des couples (x_1, x_2) tels que $f_1(x_1) = f_2(x_2))$. Soit $\mathcal{F}(\eta_{\mathcal{M}})$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathfrak{N}(\mathcal{M}, U^{\cdot}_{\mathcal{F}})^{\square}$ des transformations naturelles ayant $\mathcal{F}(\eta_{\mathcal{M}})_0$ pour classe de ses unités. On montre que $\mathcal{F}(\eta_{\mathcal{M}})$ *est isomorphe à la catégorie* $\mathcal{F}$ *des foncteurs,* l'isomorphisme associant à $F \in \mathcal{F}(\eta_{\mathcal{M}})_0$ la catégorie $C^{\cdot} = (F(u), F(k))$.

Si p est un foncteur d'homomorphismes saturé de $H^{\cdot}$ vers $\mathcal{M}$, résolvant à droite et à produits finis [1, déf. 19-II, 8-III, 6-IV] et si $\eta = (H^{\cdot}, \mu, \overset{-1}{p}(\mathcal{M}^{\cdot}))$ où μ est l'application produit fibré naturalisé sur $H^{\cdot}$ appliquée 1
par p sur $\mu_{\mathcal{M}}$ [1, déf. 3-IV], on prouve que la *catégorie* $\mathcal{F}(p)$ *des foncteurs* p*-structurés est isomorphe à* $\mathcal{F}(\eta)$ (voir [3]), ce qui justifie la terminologie.

Remarque. L'esquisse d'une catégorie définie dans [3] est légèrement différente de celle construite ici, l'axiome d'associativité n'étant pas „représenté" de la même façon. Les structures associées aux deux esquisses (i. e. les catégories) s'identifient, car les deux esquisses déterminent le même type (voir plus loin).

Pour définir d'une manière générale les notions d'esquisse et de structure associée, il nous faudra utiliser certains résultats sur la complétion des graphes multiplicatifs.

3. Complétion d'une base de catégorie

Dans la fin de cet article, nous désignons par $\mathcal{M}_0$ et par $\hat{\mathcal{M}}_0$ deux univers tels que $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$ et $\mathcal{M}_0 \subset \hat{\mathcal{M}}_0$, par $\mathcal{M}$ et $\hat{\mathcal{M}}$, par $\mathcal{N}'$ et $\hat{\mathcal{N}}'$, par $\mathcal{F}$ et $\hat{\mathcal{F}}$ respectivement les catégories pleines d'applications, les catégories des néofoncteurs et les catégories des foncteurs correspondant à $\mathcal{M}_0$ et à $\hat{\mathcal{M}}_0$.

Soit $U^{\cdot}$ un graphe multiplicatif. A $U^{\cdot}$ est associée „universellement" une catégorie $N(U^{\cdot})$ et un néofoncteur $\nu(U^{\cdot})$ de $U^{\cdot}$ vers $N(U^{\cdot})$ vérifiant la condition: Si F est un néofoncteur de $U^{\cdot}$ vers une catégorie $C^{\cdot}$, il existe un et un seul foncteur $\bar{F}$ de $N(U^{\cdot})$ vers $C^{\cdot}$ tel que $F = \bar{F}.\nu(U^{\cdot})$. Autrement dit: $\nu(U^{\cdot})$ est un $(\hat{\mathcal{F}}, \mathcal{N}')$-projecteur, si $U^{\cdot} \in \mathcal{N}'_0$ [1, théorème 10-III].

Définition. Si $\nu(U^{\cdot})$ est injectif, on dira que $U^{\cdot}$ est *une base de catégorie.*

Dans ce cas, on identifie $U^{\cdot}$ à un sous-graphe multiplicatif de $N(U^{\cdot})$. Les bases de catégories sont les sous-graphes multiplicatifs des catégories.

a) *Complétion $\mathcal{J}$-projective*

Nous partons d'une partie $\mathcal{J}$ de la classe $\mathcal{F}_0$ telle que $\mathcal{J}$ appartienne à la saturante $\tilde{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{M}}_{\gamma} . \mathcal{M} . \hat{\mathcal{M}}_{\gamma}$ [1, déf. 16-I] de $\mathcal{M}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$. Soit $\mathcal{S}'_0 = \mathcal{S}'_0(\mathcal{J})$ la classe des couples $(U^{\cdot}, \mu)$, où $U^{\cdot} \in \mathcal{N}'_0$ et où μ est une surjection associant à certains néofoncteurs Φ de $I^{\cdot} \in \mathcal{J}$ vers $U^{\cdot}$ une transformation naturelle $\mu(\Phi)$ définie par un triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$, où $\hat{e}$ note le néofoncteur „constant" sur $e \in U^{\cdot}_0$. Soit $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}'(\mathcal{J})$ la classe des triplets

$$\bar{F} = ((\bar{U}^{\cdot}, \bar{\mu}), f, (U^{\cdot}, \mu))$$

vérifiant les conditions:

1° On a $(U^{\cdot}, \mu) \in \mathfrak{S}'_0$ et $(\bar{U}^{\cdot}, \bar{\mu}) \in \mathfrak{S}'_0$;

2° $F = (\bar{U}^{\cdot}, f, U^{\cdot}) \in \mathcal{M}'$; si $\mu(\Phi)$ est défini, $\bar{\mu}(F.\Phi)$ est défini et [1, prop. 46-II]

$$\bar{\mu}(F.\Phi) = F\mu(\Phi) = \boxminus F.\mu(\Phi).$$

$\mathfrak{S}'$ est une catégorie pour la loi de composition

$$((\bar{\bar{U}}^{\cdot}, \bar{\bar{\mu}}), f', (\tilde{U}^{\cdot}, \tilde{\mu})).((\bar{U}^{\cdot}, \bar{\mu}), f, (U^{\cdot}, \mu)) = ((\bar{\bar{U}}^{\cdot}, \bar{\bar{\mu}}), f'f, (U^{\cdot}, \mu))$$

si, et seulement si, $\bar{U}^{\cdot} = \tilde{U}^{\cdot}$ et $\bar{\mu} = \tilde{\mu}$. Nous identifions $\mathfrak{S}'_0$ à la classe des unités de $\mathfrak{S}'$. Soit $p''^{\mathcal{J}}$ le foncteur de $\mathfrak{S}'$ vers $\mathcal{M}'$ associant F à $\bar{F}$.

$\mathfrak{S}'$ admet pour sous-catégorie pleine la catégorie $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}}$ dont les unités sont les couples $(U^{\cdot}, \mu) \in \mathfrak{S}'_0$ tels que $U^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$ et que μ soit une application $\mathcal{J}$-limite projective partielle sur $U^{\cdot}$. Ceci signifie que, si $\eta(\Phi)$ est défini par le triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$, alors e est une limite projective de Φ et la projection canonique de e vers $\Phi(i)$ est $\tau(i)$ pour tout $i \in \alpha(\Phi)_0$. Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}}$ ayant pour unités les couples $(U^{\cdot}, \mu) \in \mathcal{F}'^{\mathcal{J}}_0$ tels que μ soit une application $\mathcal{J}$-limite projective (totale) sur $U^{\cdot}$, c'est-à-dire tels que $\mu(\Phi)$ soit défini pour tout néofoncteur Φ de $I^{\cdot} \in \mathcal{J}$ vers $U^{\cdot}$. Soient $p'^{\mathcal{J}}$ et $p^{\mathcal{J}}$ les foncteurs de $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}}$ et de $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ respectivement vers $\mathcal{M}'$ restrictions de $p''^{\mathcal{J}}$.

Proposition 1. *$p''^{\mathcal{J}}$ est un foncteur fidèle à $\mathcal{F}_0$-limites projectives, $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}}$ et $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ sont des sous-catégories saturées de $\mathfrak{S}'$, et les foncteurs $(\mathfrak{S}', \iota, \mathcal{F}'^{\mathcal{J}})$ et $(\mathfrak{S}', \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{J}})$ sont à $\mathcal{F}_0$-limites projectives.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 20 [2].

Soit $p_{\mathcal{M}'}$ le foncteur canonique de $\mathcal{M}'$ vers $\mathcal{M}$ et posons

$$q'^{\mathcal{J}} = p_{\mathcal{M}'}.p'^{\mathcal{J}} \text{ et } q^{\mathcal{J}} = p_{\mathcal{M}'}.p^{\mathcal{J}}.$$

Désignons par $\hat{\mathfrak{S}}'$, par $\hat{\mathcal{F}}'^{\mathcal{J}}$ et par $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}$ les catégories, par $Q^{\mathcal{J}}$ et par $Q'^{\mathcal{J}}$ les foncteurs, obtenus de même à partir de l'univers $\hat{\mathcal{M}}_0$. Soit $X^{\mathcal{J}}$ la classe des $Q'^{\mathcal{J}}$-monomorphismes [1, déf. 5-III] $((H^{\cdot}, \mu), f, (C^{\cdot}, \mu'))$ tels que $f(C)^{\cdot}$ soit une sous-catégorie de $H^{\cdot}$ stable pour μ, i. e. vérifiant la condition:

Si $\mu(\Phi)$ est défini par $(\Phi, \tau_\Phi, \hat{e})$ et si le néofoncteur Φ de $I^\cdot$ vers $H^\cdot$ applique I dans $f(C)$, on a $\tau_\Phi(i) \in C$ pour tout $i \in I_0^\cdot$; si de plus Ψ est une transformation naturelle définie par $(\Phi, \psi, \hat{e}')$ où $\Psi(I_0^\cdot) \subset f(C)$, on a $\lim^\mu \Psi \in f(C)$, en notant $\lim^\mu \Psi$ l'unique $h \in H$ tel que $\tau_\Phi(i) \cdot h = \psi(i)$ pour tout i.

Théorème 1. *Le foncteur* $Q'^{\mathcal{J}}$ est $(\hat{\mathfrak{M}} . \mathfrak{M}_0, X^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}'^{\mathcal{J}})$ *-engendrant et les foncteurs* $Q^{\mathcal{J}}$ et $Q'^{\mathcal{J}}$ *sont* $\nearrow$ *-engendrants pour* $\mathfrak{M}$ [2, déf. 2-I].

Preuve. Soient $(H^\cdot, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}_0'^{\mathcal{J}}$ et K une partie de H appartenant à $\hat{\mathfrak{M}}$. L'intersection de toutes les sous-catégories de $H^\cdot$ stables pour μ et contenant K est notée $\hat{K}^\cdot$; évidemment $\hat{K}^\cdot$ est stable pour μ, et la $(X^{\mathcal{J}}, \hat{\mathcal{F}}'^{\mathcal{J}})$-sous-structure de $(H^\cdot, \mu)$ engendrée [2, déf. 2-I] par K est $(\hat{K}^\cdot, \hat{\mu})$, où $\hat{\mu}$ est l'application „induite" par μ sur $\hat{K}^\cdot$. On montre que $\hat{K} \in \hat{\mathfrak{M}}$, en construisant $\hat{K}$ par récurrence transfinie. Cette construction est en tout point analogue à celle faite dans la démonstration du théorème 5 [2] (pour prouver que $Q^{\mathcal{J}}$ est $\nearrow$ - engendrant pour $\mathfrak{M}$). La première affirmation en résulte. Comme $(\hat{K}^\cdot, \hat{\mu})$ appartient à $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}$ si $(H^\cdot, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}$, et comme tout $Q^{\mathcal{J}}$-monomorphisme appartient à $X^{\mathcal{J}}$, il s'ensuit que $Q^{\mathcal{J}}$ est $\nearrow$ - engendrant pour $\mathfrak{M}$ (résultat démontré dans [2]). Enfin, $Q'^{\mathcal{J}}$ est $\nearrow$ - engendrant pour $\mathfrak{M}$ en vertu de la proposition 12 [2], puisque $Q'^{\mathcal{J}}$ est à $\mathfrak{M}_0$-produits fibrés et que $(\hat{K}^\cdot, \hat{\mu})$ est une $Q'^{\mathcal{J}}$-sous-structure de $(H^\cdot, \mu)$ vérifiant $\hat{K} \in \hat{\mathfrak{M}}$.

Théorème 2. $\mathcal{S}'$ *est une catégorie à* $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}}$*-projections et une catégorie à* $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$*-projections* [1, déf. 16-III].

Preuve. Soit $\sigma = (U^\cdot, \mu) \in \mathcal{S}_0'$. Posons $\mathcal{H} = \mathcal{F}'^{\mathcal{J}}$ (resp. $= \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$) et $Y = \mathcal{H}_0 . \mathcal{S}' . \sigma$. La surjection associant (μ, f) à $((H^\cdot, \mu), f, \sigma) \in Y$ définit une bijection de Y sur une partie de $\bigcup_{H^\cdot \in \mathcal{F}_0} Y_H \times Y_H'$, où

$$Y_H = \bigcup_{I^\cdot \in \mathcal{J}} (\boxminus H^\cdot . \mathcal{F} . I^\cdot) . \mathfrak{M} . (H^\cdot . \mathcal{F} . I^\cdot)) \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0 \text{ et } Y_H' = H . \mathfrak{M} . U \in \widetilde{\mathfrak{M}}_0 .$$

Comme $\mathcal{F} \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ et que $\hat{\mathfrak{M}}_0$ est un univers, on a $Y \in \hat{\mathfrak{M}}_0$. Le foncteur $P''^{\mathcal{J}}$ relatif à $\hat{\mathfrak{M}}_0$ étant à $\hat{\mathfrak{M}}_0$-produits (d'après la proposition 1), il existe un produit

$$S = (\hat{H}^\cdot, \hat{\mu}) = \prod_{F \in Y} \beta(F) \quad \text{et} \quad [F]_{F \in Y} = ((\hat{H}^\cdot, \hat{\mu}), \hat{f}, \sigma)$$

dans $\hat{\mathcal{S}}'$, et l'on a $S \in \hat{\mathcal{H}}$. D'après le théorème 1, $\hat{f}(U) \in \widetilde{\mathfrak{M}}$ engendre une

$(X^{\cdot\mathcal{J}}, \hat{\mathcal{H}})$-sous-structure $S' = (C^{\cdot}, \hat{\mu}')$ de $(H^{\cdot}, \mu)$ (à savoir $C^{\cdot}$ est la sous-catégorie stable pour $\hat{\mu}$ engendrée par $\bar{f}(U)$), et il existe un $\bar{G} = (s, g, S') \in \mathcal{H}_0 . \hat{\mathcal{H}}_Y$. Alors $\bar{j} = (S, \iota, S').\bar{G}^{-1}$ est $(Q'^{\cdot\mathcal{J}}, X^{\cdot\mathcal{J}}, \mathcal{H})$-engendré par $[F]_{F\in Y}$ et, *a fortiori*, $\bar{j}$ est $(P''^{\cdot\mathcal{J}}, X^{\cdot\mathcal{J}} . \mathcal{H}_0, \mathcal{H})$-engendré par $[F]_{F\in Y}$. Du théorème d'existence de structures libres [2, théorème 1] il résulte que s est une $(\mathcal{H}, \mathcal{S}')$-projection de σ, car tout noyau dans $\mathcal{F}'^{\cdot\mathcal{J}}$ appartient à $X^{\cdot\mathcal{J}}$.

Corollaire. *$p^{\cdot\mathcal{J}}$ admet un adjoint.*

En effet, pour que $(H^{\cdot}, \mu)$ soit une $p^{\cdot\mathcal{J}}$-structure libre engendrée par $U^{\cdot} \in \mathcal{M}_0$, il faut et il suffit que $(H^{\cdot}, \mu)$ soit une $(\mathcal{F}^{\cdot\mathcal{J}}, \mathcal{S}')$-projection de $(U^{\cdot}, \emptyset)$, où $\emptyset$ est la surjection vide. Donc le corollaire résulte du théorème précédent.

Définition. Si $U^{\cdot} \in \mathcal{M}'_0$, une $p^{\cdot\mathcal{J}}$-structure libre engendrée par $U^{\cdot}$ est appelée une *complétion $\mathcal{J}$-projective libre de $U^{\cdot}$.*

Théorème 3. *Soit $U^{\cdot}$ une base de catégorie. Alors $U^{\cdot}$ admet une complétion $\mathcal{J}$-projective libre $(H^{\cdot}, \mu)$ telle que $H^{\cdot}$ admette $N(U^{\cdot})$ pour sous-catégorie pleine et que le foncteur limite projective associé à μ soit injectif. $H^{\cdot}$ est solution du problème universel du plongement, à une équivalence près, de $U^{\cdot}$ dans une catégorie à $\mathcal{J}$-limites projectives.*

Preuve. $N(U^{\cdot})$ étant le plongement universel de $U^{\cdot}$ dans une catégorie, la complétion $\mathcal{J}$-projective de $U^{\cdot}$ est identique à celle de $N(U^{\cdot})$, d'après le théorème 7-III [1] de transitivité des projections. Par suite la première affirmation se déduit du théorème 6 [2]. Soit $\mathcal{M}'_{\sim}$ la catégorie quotient de $\mathcal{M}'$ par la relation d'équivalence r: $F \sim F'$ s'il existe une équivalence naturelle de F sur F'. Notons $\mathcal{F}_{\sim}$ et $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_{\sim}$ les sous-catégories de $\mathcal{M}'_{\sim}$ dont les éléments sont les classes $F \bmod r$, où F est un foncteur et un foncteur à $\mathcal{J}$-limites projectives respectivement. En vertu du théorème 8 [2], $H^{\cdot}$ est une $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_{\sim}, \mathcal{F}_{\sim})$-projection de $N(U^{\cdot})$; comme $N(U^{\cdot})$ est aussi une $(\mathcal{F}_{\sim}, \mathcal{M}'_{\sim})$-projection de $U^{\cdot}$, il s'ensuit que $H^{\cdot}$ est une $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_{\sim}, \mathcal{M}'_{\sim})$-projection de $U^{\cdot}$, ce qui précise la dernière affirmation.

b) *Complétion $\mathcal{J}$-projective et $\mathcal{J}'$-inductive*

Nous supposons que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ sont deux parties de $\mathcal{F}_0$ appartenant à la saturante $\widetilde{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$.

Notons $\mathcal{S}_0'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ la classe des triplets $(U^{\cdot}, \mu, \mu')$ tels que :

1° $(U^{\cdot}, \mu) \in \mathcal{S}'_0 = \mathcal{S}'_0(\mathcal{J})$;

2° μ' est une surjection associant à certains néofoncteurs Φ de $I^{\cdot} \in \mathcal{J}'$ vers

$U^{\cdot}$ une transformation naturelle $\mu'(\Phi)$ définie par un triplet $(\hat{e}, \tau, \Phi)$, où $\hat{e} \in U_0^{\cdot}$.

Si $(U^{\cdot}, \mu, \mu')$ vérifie ces conditions, soit $\mu'^{\star}$ l'application associant au néofoncteur $\Phi^{\star}$ dual de Φ la transformation naturelle $\mu'^{\star}(\Phi^{\star})$ définie par $(\Phi^{\star}, \tau, \hat{e})$, lorsque $\mu'(\Phi)$ est défini par $(\hat{e}, \tau, \Phi)$. Alors $(U^{\star}, \mu'^{\star})$ appartient à la catégorie $\mathfrak{S}'(\mathcal{J}'^{\star})$ construite à partir de la classe $\mathcal{J}'^{\star}$ des catégories duales des éléments de $\mathcal{J}$. Soit $\mathfrak{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ la catégorie dont les éléments sont les triplets $\overline{F} = ((\overline{U}^{\cdot}, \overline{\mu}, \overline{\mu}'), f, (U^{\cdot}, \mu, \mu'))$ tels que

1° $(U^{\cdot}, \mu, \mu')$ et $(\overline{U}^{\cdot}, \overline{\mu}, \overline{\mu}')$ appartiennent à $\mathfrak{S}_0'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$;

2° $((\overline{U}^{\cdot}, \overline{\mu}), f, (U^{\cdot}, \mu)) \in \mathfrak{S}'(\mathcal{J})$ et $((\overline{U}^{\star}, \overline{\mu}'^{\star}), f, (U^{\star}, \mu'^{\star})) \in \mathfrak{S}'(\mathcal{J}'^{\star})$.

Soit $p''^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ son foncteur projection canonique vers $\mathfrak{N}'$.

$\mathfrak{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ admet pour sous-catégorie pleine la catégorie $\mathfrak{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ (resp. $\mathfrak{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$) ayant pour unités les $(U^{\cdot}, \mu, \mu') \in \mathfrak{S}_0'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ tels que

$$(U^{\cdot}, \mu) \in \mathfrak{F}'^{\mathcal{J}} \text{ (resp. } \in \mathfrak{F}^{\mathcal{J}}) \text{ et } (U^{\star}, \mu'^{\star}) \in \mathfrak{F}'^{\mathcal{J}'^{\star}} \text{ (resp. } \in \mathfrak{F}^{\mathcal{J}'^{\star}});$$

pour un tel élément, on appelle μ' une application $\mathcal{J}'$-limite inductive partielle (resp. inductive) sur $U^{\cdot}$. Soit $q'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ le foncteur de $\mathfrak{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ vers $\mathfrak{M}$ associant $(\overline{U}, f, U)$ à $\overline{F}$ et soit $q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ sa restriction à $\mathfrak{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$. Soient $Q'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ les foncteurs associés de même à l'univers $\hat{\mathfrak{M}}_0$. Nous désignons par $X^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ la classe des $Q'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-monomorphismes de la forme $((H^{\cdot}, \mu, \mu'), f, (C^{\cdot}, \nu, \nu'))$, où $f(C)^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $H^{\cdot}$ stable pour μ et pour μ'. La classe $X^{\mathcal{J}\mathcal{J}'} \cap \hat{\mathfrak{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ est formée de tout les $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-monomorphismes. Soit $p^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ le foncteur de $\mathfrak{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ vers $\mathfrak{N}'$ restriction de $p''^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$.

Théorème 4. *$\mathfrak{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ est une catégorie à $\mathfrak{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-projections et à $\mathfrak{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ projections. Le foncteur $p^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ admet un adjoint. Si $U^{\cdot}$ est une base de catégorie, la $p^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-structure libre $(\hat{H}^{\cdot}, \hat{\mu}, \hat{\mu}')$ engendrée par $U^{\cdot}$ est telle que $U^{\cdot}$ soit isomorphe à un sous-graphe multiplicatif de $\hat{H}^{\cdot}$ et que $\hat{H}^{\cdot}$ soit solution du problème universel du plongement de $U^{\cdot}$, à une équivalence près, dans une catégorie à $\mathcal{J}$-limites projectives et à $\mathcal{J}'$-limites inductives.* 1

Preuve. Si $\sigma = (H^{\cdot}, \mu, \mu') \in \hat{\mathfrak{F}}_0'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et si $K \subset H$ appartient à $\hat{\mathfrak{M}}$, on voit qu'il existe une $(X^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}, \hat{\mathfrak{F}}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$-sous-structure $(\hat{K}^{\cdot}, \hat{\mu}, \hat{\mu}')$ de σ engendrée par K, où $\hat{K}^{\cdot}$ est l'intersection de toutes les sous-catégories de $H^{\cdot}$ contenant K et stables pour μ et pour μ'. En construisant $\hat{K}$ par récurrence transfinie comme dans la démonstration du théorème 12 [2], on obtient

$\hat{K} \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Il s'ensuit que $Q'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ est un foncteur $(\widetilde{\mathcal{M}} . \mathcal{M}_0, X^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}, \mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$-engendrant et que $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ est $\nearrow$- engendrant pour $\mathcal{M}$. La première affirmation se prouve d'un façon analogue au théorème 2, à l'aide du théorème d'existence de structures libres et en utilisant le fait que $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et $Q'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ sont des foncteurs à $\hat{\mathcal{F}}_0$-limites projectives. Les autres affirmations se déduisent des théorèmes 13 et 14 [2], appliquées à $N(U^{\cdot})$.
1

Remarque. Les résultats du § 3a) peuvent être déduits du § 3b), en identifiant $(U^{\cdot}, \mu) \in \mathcal{S}_0'(\mathcal{J})$ à $(U^{\cdot}, \mu, \emptyset) \in \mathcal{S}_0'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$, où $\emptyset$ désigne la surjection vide.

4. Type et prototype d'une esquisse

Les notations sont celles du § 3. On suppose encore que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ sont des parties de $\mathcal{F}_0$ appartenant à la saturante $\widetilde{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$ dans $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Définition. Si $\sigma = (U^{\cdot}, \mu, \mu') \in \mathcal{S}_0'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et si $U^{\cdot}$ est une base de catégorie, on appelle σ *une préesquisse $\mathcal{J}$-projective et $\mathcal{J}'$-inductive,* ou une *$(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-préesquisse.* Une $(\mathcal{K}, \mathcal{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$-projection de σ est appelée *$(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototype de* σ si $\mathcal{K} = \mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ (resp. *$(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-type de* σ, si $\mathcal{K} = \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$).

Le prototype et le type de σ sont définis à un isomorphisme près. Si $\sigma \in \mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ son $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototype est identique à σ; par suite les éléments de $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$, seront appelés des $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototypes et ceux de $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ des $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-types.

Soit $\sigma = (U^{\cdot}, \mu, \mu')$ une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-préesquisse et $\nu(U^{\cdot})$ le néofoncteur injectif de $U^{\cdot}$ vers $N(U^{\cdot})$. Soit $\lambda = \mu$ (resp. $= \mu'$) ; désignons par $\bar{\lambda}$ la surjection obtenue en associant $\boxminus \nu(U^{\cdot}).\lambda(\Phi)$ à tout Φ tel que $\lambda(\Phi)$ soit défini. On voit que $N(\sigma) = (N(U^{\cdot}), \bar{\mu}, \bar{\mu}')$ est une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-préesquisse, qui admet même $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototype et même $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-type que σ.

Théorème 5. *Soit $\sigma = (U^{\cdot}, \mu, \mu')$ une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-préesquisse et $\widetilde{\sigma} = (\widetilde{H}^{\cdot}, \widetilde{\mu}, \widetilde{\mu}')$ un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-type de σ. Alors $\widetilde{\sigma}$ est une $q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-structure quasi-quotient d'une $p^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-structure libre $\hat{\sigma} = (\hat{H}^{\cdot}, \hat{\mu}, \hat{\mu}')$ engendrée par $U^{\cdot}$. Si σ est un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototype, $U^{\cdot}$ s'identifie à une sous-catégorie de $\widetilde{H}^{\cdot}$.*

Preuve. La première affirmation se démontre par un raisonnement analogue à celui utilisé pour prouver le théorème 15 [2]. D'après le théorème 4, $U^{\cdot}$ peut être identifié à un sous-graphe multiplicatif de $\hat{H}^{\cdot}$. Dans ce cas, $\widetilde{\sigma}$ est la $q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-structure quasi-quotient de $\hat{\sigma}$ par la relation d'équivalence engendrée par la classe des couples $(\tau_\Phi(i), \hat{\tau}_\Phi(i))$, où $\mu(\Phi)$ (resp. $\mu'(\Phi)$) est défini par le triplet $(\Phi, \tau_\Phi, \hat{e})$ (resp. $(\hat{e}, \tau_\Phi, \Phi)$) où $i \in \alpha(\Phi)_0$

et $\hat{\mu}(\Phi)$ (resp. $\hat{\mu}'(\Phi)$) est défini par le triplet $(\hat{\Phi}, \hat{\tau}_\Phi, \hat{e})$ (resp. $(\hat{e}, \hat{\tau}_\Phi, \hat{\Phi})$). La deuxième affirmation est une conséquence du théorème 15 [2].

Soit $\sigma = (U^\cdot, \mu, \mu')$ une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-préesquisse, $\check{\sigma} = (\check{U}^\cdot, \check{\mu}, \check{\mu}')$ son $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototype et $\tilde{\sigma} = (\widetilde{H}^\cdot, \tilde{\mu}, \tilde{\mu}')$ son $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-type. Le type de $\check{\sigma}$ est isomorphe à $\tilde{\sigma}$ et $\check{U}^\cdot$ peut être identifié à une sous-catégorie de $\widetilde{H}^\cdot$ d'après le théorème 5. Mais si $G = (\check{\sigma}, g, \sigma)$ est un $(\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}, \mathcal{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$-projecteur, en général g n'est pas injective. On est conduit à considérer les préesquisses particulières telles que g soit une injection, c'est-à-dire telles que $U^\cdot$ s'identifie à un sous-graphe multiplicatif de $\check{U}^\cdot$ (et par suite de $\widetilde{H}^\cdot$); dans ce cas, nous dirons que $U^\cdot$ s'identifie à un sous-graphe multiplicatif de $\check{\sigma}$.

Définition. On appelle *$(\mathcal{J}\mathcal{J}')$-esquisse* un couple (σ, M) vérifiant les conditions:

1° $\sigma = (U^\cdot, \mu, \mu')$ est une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-préesquisse et $M \subset U$;

2. $U^\cdot$ s'identifie à un sous-graphe multiplicatif de son $(\mathcal{J}\mathcal{J}')$-prototype.

Soit $\mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ la catégorie des morphismes entre $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-esquisses, dont les éléments sont les triplets $F = ((\sigma', M'), f, (\sigma, M))$ tels que

$$i(F) = (\sigma', f, \sigma) \in \mathcal{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'} \text{ et } f(M) \subset M'.$$

Soient $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ les sous-catégories pleines de $\mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ ayant pour unités les $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-types et les $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototypes pointés respectivement, i. e. les $(\sigma, M) \in \mathcal{S}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ tels que $\sigma \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et $\sigma \in \mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$. Des théorèmes précédents, on déduit:

Théorème 6. *$(\mathcal{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}, i, \mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$ est un foncteur à $\mathcal{F}_0$-limites projectives et à $\mathcal{F}_0$-limites inductives. $\mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ est une catégorie à $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-projections et à* 1¶
$\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$-projections.

On peut choisir deux foncteurs $(\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}, \mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$-projection T' et $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}, \mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'})$-projection T de sorte que, si $(\sigma, M) \in \mathcal{S}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et $\sigma = (U^\cdot, \mu, \mu')$, on ait:

1° $T'(\sigma, M) = ((\check{U}^\cdot, \hat{\mu}, \hat{\mu}'), M)$ et $T(\sigma, M) = ((\widetilde{H}^\cdot, \tilde{\mu}, \tilde{\mu}'), M)$;

2° $U^\cdot$ est un sous-graphe multiplicatif de $\check{U}^\cdot$ et $\check{U}^\cdot$ une sous-catégorie de $\widetilde{H}^\cdot$;

3° $T(T'(\sigma, M)) = T(\sigma, M)$.

Définition. $T'(\sigma, M)$ et $T(\sigma, M)$ sont respectivement appellés *$(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-protype et $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-type pointés de (σ, M).* 2

Remarque. Une esquisse (σ, M) telle que $\sigma = (U^\cdot, \mu, \emptyset)$, où $\emptyset$ est la surjection vide, peut être appelée esquisse $\mathcal{J}$-projective et représentée par le couple $((U^\cdot, \mu), M)$. Les esquisses algébriques projectives auxquelles un type a été associé dans [4] correspondent aux esquisses $\mathcal{J}$-projectives (en ce sens) $\bar{\sigma} = (\sigma, M)$ telles que $N(\sigma)$ soit un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototype et que M soit formée de monomorphismes.

Supposons donné un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-type pointé $\bar{\sigma}(H^\cdot) = ((H^\cdot, \mu_H, \mu'_H), M_H)$ et une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-esquisse $\bar{\sigma} = (\sigma, M)$, où $\sigma = (U^\cdot, \mu, \mu')$.

Définition. On appelle *$\bar{\sigma}(H^\cdot)$-structure d'espèce $\bar{\sigma}$* un néofoncteur F de $U^\cdot$ vers $H^\cdot$ tel que $(\bar{\sigma}(H^\cdot), \underline{F}, \bar{\sigma}) \in \mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$. Si $\bar{\sigma}(\mathcal{M}) = ((\mathcal{M}, \mu_{\mathcal{M}}, \mu'_{\mathcal{M}}), \mathcal{M}^\cdot)$, où $\mu_{\mathcal{M}}$ et $\mu'_{\mathcal{M}}$ sont les applications $\mathcal{J}$-limite projective et $\mathcal{J}'$-limite inductive usuelles sur la catégorie $\mathcal{M}$ des applications, une $\bar{\sigma}(\mathcal{M})$-structure d'espèce $\bar{\sigma}$ sera appellée *structure algébrique d'espèce $\bar{\sigma}$*.

Soit $\mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^\cdot), \bar{\sigma})$ la catégorie des morphismes entre $\bar{\sigma}(H^\cdot)$-structures d'espèce $\bar{\sigma}$, c'est-à-dire la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathfrak{N}(H^\cdot, U^\cdot)^{\boxplus}$ des transformations naturelles ayant pour objets les $\bar{\sigma}(H^\cdot)$-structures d'espèce $\bar{\sigma}$. On définit un foncteur fidèle Σ de $\mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^\cdot), \bar{\sigma})$, vers la catégorie produit $(H^\cdot)^{U_0}$ en associant à la transformation naturelle $\Gamma \in \mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^\cdot), \bar{\sigma})$ définie par le triplet (F', γ, F) la famille $(\gamma(u))_{u \in U_0^\cdot}$.

Théorème 7. *Si l'application somme de $\alpha^{\boxplus}\mu$ et de $\beta^{\boxplus}\mu'$ est injective et si M_H est saturée dans $H^\cdot$ (i. e. si $H^\cdot_\gamma . M_H . H^\cdot_\gamma \subset M_H$), les catégories* 1¶ *$\mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^\cdot), \bar{\sigma})$ et $\mathcal{S}(\bar{\sigma}_1(H^\cdot), \bar{\sigma})$ sont isomorphes pour tout $\bar{\sigma}_1(H^\cdot)$ de la forme $((H^\cdot, \mu_1, \mu'_1), M_H) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$. Les catégories $\mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^\cdot), \bar{\sigma})$, $\mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^\cdot), T'(\bar{\sigma}))$ et $\mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^\cdot), T(\sigma))$ sont toujours isomorphes.*

La dernière affirmation résulte du théorème 6. Nous ne démontrerons pas la première affirmation.

5. Cas particuliers. Problèmes

1° Supposons $\mathcal{J} = \mathcal{J}' = \emptyset$. Comme $\mathcal{S}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ s'identifie à $\mathcal{N}'$ et que $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ s'identifient alors à $\mathcal{F}$, une $(\emptyset, \emptyset)$-esquisse s'identifie à un couple $\bar{\sigma} = (U^\cdot, M)$ d'une base de catégorie $U^\cdot$ et d'une partie M de U. Ainsi, avec les notations du § 1, le couple $\bar{\sigma}_{\mathcal{G}} = (U_{\mathcal{G}}^\cdot, \{i\})$ est une telle esquisse. Les structures algébriques d'espèce $\bar{\sigma}_{\mathcal{G}}$ s'identifient aux graphes.

2° Supposons que $\mathcal{J}'$ soit la classe vide et que $\mathcal{J}$ soit la classe formée de la catégorie discrète I^0 ayant deux unités 1 et 2. Soit $U^\cdot_m$ la catégorie ayant deux unités u et $u \times u$ et trois morphismes k, p_1 et p_2 de source $u \times u$ et de but u. Soit $\sigma_m = (U^\cdot_m, \mu)$, où $\mu(\Phi)$ existe pour le seul foncteur Φ de $I^\cdot$ vers $U^\cdot_m$ constant sur u, le triplet définissant $\mu(\Phi)$ étant

$(\Phi, \tau, \widehat{u \times u})$, avec $\tau(i) = p_i$ pour $i = 1$ et 2. On voit que σ_m est un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-prototype (mais non un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-type). Une structure algébrique d'espèce $(\sigma_m, \emptyset)$ s'identifie à un magma (= classe munie d'une loi de composition partout définie). Plus généralement tout type au sens de [7] est un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-type.

3° Supposons encore $\mathcal{J}' = \emptyset$ et $\mathcal{J} = \{I^0\}$, où $I = \{1, 2\}$. À partir de la catégorie $U^{\cdot}_{\mathfrak{M}}$ du § **1**, on définit comme dans l'exemple précédent l'application μ et l'on obtient une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-esquisse $\bar{\sigma}_{\mathfrak{M}} = ((U^{\cdot}_{\mathfrak{M}}, \mu), \{i'\})$. Une structure algébrique d'espèce $\bar{\sigma}_{\mathfrak{M}}$ s'identifie à une classe multiplicative.

4° Soit $I^{\cdot}$ la catégorie ayant trois unités 0, 1 et 2 et deux morphismes d_1 et d_2 de source 0, de but 1 et 2 respectivement. Supposons $\mathcal{J} = \{I^{\cdot}\}$ et 1
$\mathcal{J}' = \emptyset$. On définit une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$-esquisse $\bar{\sigma}_{\mathfrak{F}} = ((U^{\cdot}_{\mathfrak{F}}, \mu_{\mathfrak{F}}), \{i\})$ comme suit: soient Φ_1 et Φ_2 les néofoncteurs de $I^{\cdot}$ vers $U^{\cdot}_{\mathfrak{F}}$ tels que $\Phi_1(d_1) = a$, $\Phi_1(d_2) = b$, $\Phi_2(d_1) = v_2$, $\Phi_2(d_2) = v_1$; soit $\mu(\Phi_i)$ la transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi_i, \tau_i, \hat{e}_i)$, où $\tau_1(j) = v_j$ et $\tau_2(j) = w_j$ pour $j = 1$ et 2. Une structure algébrique d'espèce $\bar{\sigma}_{\mathfrak{F}}$ s'identifie à une catégorie (voir § 1).

5° Les quasi-catégories (resp. les catégories non associatives) [3] sont les structures algébriques d'espèce $\bar{\sigma}$, l'esquisse $\bar{\sigma}$ étant la sous-esquisse de $\bar{\sigma}_{\mathfrak{F}}$ obtenue en supprimant de $U^{\cdot}_{\mathfrak{F}}$ les éléments $v(i.b, u)$ et $v(u, i.a)$ (resp. tous les morphismes de source $(u \times u) \times (u \times u)$). D'une façon analogue, on peut construire des esquisses dont les structures n-aires (définies dans [6]) sont des réalisations.

Ces exemples montrent que les structures algébriques usuelles peuvent être définies comme des structures algébriques au sens précis indiqué plus haut. Par suite, on obtient une méthode de construction des structures de même espèce „relatives à une catégorie $H^{\cdot}$" (exemple: les catégories η-structurées du § 1). 2+

Nous n'avons pas la place d'étudier ici les propriétés catégoriques des structures d'espèce $\bar{\sigma}$. Dans un prochain article nous considérerons les problèmes suivants:

1° Construction et étude d'un foncteur „d'oubli" de $\mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^{\cdot}), \bar{\sigma})$ vers $\mathfrak{M}$, qui est $\nearrow$-engendrant pour $\mathfrak{M}$ et à limites projectives (généralisant les résultats de [4]). Autres foncteurs d'oubli obtenus en „isolant" certaines unités de $U^{\cdot}$. Application à l'existence de structures quasi-quotient et de problèmes universels. 3+

2° Définition d'esquisses „minimales" ayant même type qu'une esquisse donnée; ceci conduit à la notion d'idée d'une structure, qui précise les idées définies dans [3]: l'idée d'une catégorie est formée des éléments a, b, k, i. 4+

3° Comparaison des structures d'espèce $\vec{\sigma}$ et d'espèce $\vec{\sigma}'$, où $\vec{\sigma}'$ est une sous-esquisse de $\vec{\sigma}$: ceci mène à des théorèmes de projections entre structures de diverses espèces, analogues aux théorèmes de projections
1+ entre structures n-aires considérés dans [5].

Reçu le 26 X 1967

Faculté de Sciences, Paris, France

BIBLIOGRAPHIE

1. Ehresmann C., *Catégories et Structures.* Dunod, Paris, 1965.
2. — *Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints.* Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle, **IX**, Paris, Dunod, 1967, pp. 33—181.
3. — *Introduction to the Theory of structured Categories.* University of Kansas, Technical Report *10,* 1966, 95 pp.
4. — *Sur les structures algébriques.* C. R. Ac. Sci., Paris, **264**, série A, 1967 (sous presse).
2 5. — *Problèmes universels relatifs aux catégories n-aires.* C. r. Aci., Paris, 1967, **264**, série A, p. 273.
3 6. Topentcharov V., *Éléments d'une théorie de catégories.* C. r. Ac. Sci., Paris, 1967, **264**, p. 269.
7. Bénabou J., *Structures algébriques dans les catégories.* Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle, **IX**, Paris, Dunod, 1967.

SCHIŢĂRI ŞI TIPURI DE STRUCTURI ALGEBRICE

(Rezumat)

Se arată modul în care teoremele de completare [2] ale unei categorii prin adjuncţia unor limite proiective şi inductive pot fi utilizate pentru construirea anumitor structuri, numite „algebrice", care cuprind de exemplu structurile algebrice uzuale (definite de legile de compoziţie peste tot definite) precum şi cele definite de legi de compoziţie parţiale (clase multiplicative, cvasi-categorii, categorii etc.).