Algebraische Quantenfeldtheorie

Seifhennersdorf 2003

Klaus Fredenhagen[1]

II. Institut für Theoretische Physik
Universität Hamburg

[1]Manuskript erstellt unter Mitwirkung von Niels Mense

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Algebraische Formulierung der Quantentheorie

1. Algebra der Observablen

Ein physikalisches System lässt sich durch die Menge seiner Observablen charakterisieren. In der Quantentheorie besitzt diese Menge die Strukur einer assoziativen involutiven Algebra mit Eins über den komplexen Zahlen („q-Zahlen“).

(i) In der Born-Heisenberg-Jordan-Formulierung der Quantenmechanik ist die Algebra der Observablen die von Ort q und Impuls p mit der kanonischen Vertauschungsrelation

$$pq - qp = -i\hbar$$

erzeugte Algebra mit Eins und der Involution

$$p^* = p \ , \ q^* = q \ .$$

(ii) Quantensysteme mit endlichdimensionalem Zustandsraum, wie sie insbesondere in der Quanteninformationstheorie betrachtet werden, besitzen als Algebra der Observablen die Algebra der $n \times n$-Matrizen mit komplexen Einträgen und der Involution

$$A^*_{ik} = \overline{A_{ki}} \ .$$

(iii) In der Hilbertraum-Formulierung der Quantenmechanik ist die Algebra der Observablen die Menge der beschränkten linearen Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$. Hierbei heißt ein linearer Operator A beschränkt, wenn seine Norm

$$\|A\| = \sup_{\Phi \in \mathfrak{H}, \|\Phi\|=1} \|A\Phi\|$$

endlich ist. A^* ist der adjungierte Operator (oft auch mit $A^\dagger$ bezeichnet). Er wird mit Hilfe des Skalarprodukts des Hilbertraums als derjenige Operator bestimmt, für den gilt

$$(\Phi, A^*\Psi) = (A\Phi, \Psi) \ , \ \Phi, \Psi \in \mathfrak{H} \ .$$

(iv) In den Anwendungen treten allerdings oft auch Operatoren als Observable auf, die unbeschränkt sind. Diese lassen sich in der Regel nicht auf dem ganzen Hilbertraum definieren, sondern nur auf einem dichten Teilraum, ihrem Definitionsbereich. So kann man in der Schrödingerschen Version der

Quantenmechanik als Algebra der Observablen die Menge der Differentialoperatoren mit glatten Koeffizienten betrachten,

$$D = \sum a_\alpha \partial^\alpha$$

mit $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen a_α und Multiindizes α. Diese sind als Operatoren auf dem Raum $\mathcal{D}$ der $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen mit kompaktem Träger definiert. Meist ist man aber nicht so sehr an diesen Operatoren selbst interessiert, sondern an ihren selbstadjungierten Erweiterungen (sofern diese existieren). In diesem Fall bietet sich der Übergang zu beschränkten Operatoren wie Spektralprojektoren, oder, im Fall des Hamiltonoperators H, zu den unitären Zeitentwicklungsoperatoren $U(t) = e^{iHt}$ an.

Frage: Welche sind diejenigen Algebren, die als Observablenalgebren in Frage kommen?

Für abstrakte Überlegungen besonders gut geeignet sind C*-Algebren [**7**]. In diesen gibt es (wie bei den beschränkten Hilbertraum-Operatoren) eine Norm mit der Eigenschaft

$$\|A^*A\| = \|A\|^2$$

(eine sogenannte C*-Norm). Weiter sind sie (als normierte Räume) vollständig. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass jede C*-Algebra isomorph zu einer normabgeschlossenen Algebra beschränkter Hilbertraum-Operatoren ist. Dieselbe C*-Algebra kann allerdings sehr verschiedenartige Realisierungen als Algebra von Hilbertraum-Operatoren besitzen; diese Unterschiede spielen eine wesentliche Rolle in der Theorie der Superauswahl-Sektoren und in der Theorie der Phasenübergänge, sowie in der jüngsten Zeit bei der Untersuchung stationärer Nichtgleichgewichtszustände, sogenannte NESS („non-equilibrium stationary states“). Unabhängig von der Hilbertraum-Realisierung ist das Spektrum eines Elements A. Es besteht aus der Menge der komplexen Zahlen a, für die $A - a$ kein Inverses besitzt. Das Spektrum liegt innerhalb des Kreises mit Radius $\|A\|$ um den Nullpunkt. Für selbstadjungierte Elemente ($A = A^*$) ist das Spektrum reell und lässt sich physikalisch als die Menge der möglichen Messwerte der Observablen interpretieren

Spezielle C*-Algebren sind die von Neumann-Algebren. Diese sind abstrakt dadurch gekennzeichnet, dass jedes monoton wachsende beschränkte Netz von Elementen ein Supremum besitzt. Hierbei ist die Ordnungsrelation durch

$$A \geq B \iff \exists C \text{ so dass } A - B = C^*C$$

erklärt. Von Neumann-Algebren sind isomorph zu Algebren von Hilbertraum-Operatoren, die in der schwachen Operator-Topologie abgeschlossen sind.

2. Zustände als Erwartungswertfunktionale

Einen Zustand eines physikalischen Systems fassen wir als eine Vorschrift zur Präparation des Systems auf. Insbesondere garantiert diese Auffassung, dass Experimente reproduziert werden können. In der Quantentheorie liefert jeder Zustand zu jeder Observablen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Messwerte. Es ist bequem, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen durch ihre Momente zu beschreiben. Dazu reicht es aus, die Erwartungswerte aller Elemente zu kennen, da die höheren Momente Erwartungswerte von Potenzen der Observablen sind. In der algebraischen Quantentheorie ist es daher üblich, Zustände als Erwartungswertfunktionale zu definieren.

Definition. Die Zustände von $\mathfrak{A}$ sind diejenigen $\mathbb{C}$-linearen Funktionale $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$, die normiert und positiv sind, d.h. für die

(i) $\omega(1) = 1$ und
(ii) $A \geq 0 \Rightarrow \omega(A) \geq 0$

gilt.[1]

Jedes solche Funktional ω liefert zu jedem selbstadjungierten Element einer C*-Algebra A ein eindeutig gegebenes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu_{\omega,A}$ mit der Eigenschaft

$$\int a^n d\mu_{\omega,A}(a) = \omega(A^n) \ , \ n \in \mathbb{N}_0 \ .$$

Ist die C*-Algebra eine Algebra von Hilbertraum-Operatoren, so liefert jeder Vektor Φ des Hilbertraums mit $\|\Phi\| = 1$ einen Zustand (sog. Vektorzustand) durch

$$\omega_\Phi(A) = \big(\Phi, A\Phi\big) \ .$$

Man kann Zustände mischen, indem man die jeweiligen Präparationsvorschriften mit einem gewissen statistischen Gewicht mischt. Für die Zustände, die aus Hilbertraum-Vektoren gewonnen werden, ergibt sich

$$\omega(A) = \sum_i \lambda_i \big(\Phi_i, A\Phi_i\big)$$

mit $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_i \lambda_i = 1$. Zustände dieser Art können durch Dichtematrizen ρ beschrieben werden,

$$\rho = \sum_i \lambda_i |\Phi_i\rangle\langle\Phi_i| \ .$$

Allgemein sind Dichtematrizen positive Operatoren in einem Hilbertraum, deren Spur gleich 1 ist. Die Spur eines positiven Operators A

[1] Ein $A \in \mathfrak{A}$ heißt positiv, $A \geq 0$, falls ein $B \in \mathfrak{A}$ existiert mit $A = B^*B$. Für alle positiven $\mathbb{C}$-linearen Funktionale ω gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\omega(A^*B)|^2 \leq \omega(A^*A)\omega(B^*B)$.

ist dabei durch die Formel

$$\operatorname{Tr} A = \sum_i \bigl(\Phi_i, A\Phi_i\bigr)$$

erklärt, wobei $\{\Phi_i\}$ eine Orthonormalbasis des Hilbertraums ist. Die Spur ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis, kann aber auch den Wert ∞ annehmen. Komplexe Linearkombinationen von positiven Operatorn mit endlicher Spur nennt man Spurklasse-Operatoren. Auf ihnen lässt sich die Spur als lineares Funktional eindeutig erklären. Die Spurklasse-Operatoren bilden ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{I}$ in der Algebra der beschränkten Operatoren eines Hilbertraums,

$$T \text{ Spurklasse }, \ A \text{ beschränkt } \implies AT \text{ und } TA \ \text{ Spurklasse}$$

Daher definiert jede Dichtematrix ρ über

$$\omega(A) = \operatorname{Tr} \rho A$$

einen Zustand über einer Algebra beschränkter Hilbertraum-Operatoren.

3. GNS-Konstruktion

Die algebraische Formulierung der Quantentheorie hängt eng mit der Hilbertraum-Formulierung zusammen. Zur Beschreibung dieses Zusammenhangs benötigen wir den Begriff einer Darstellung.

Definition. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei involutive Algebren mit Eins. Dann ist ein *-Homomorphismus eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ für die gilt

(i) $\pi(AB) = \pi(A)\pi(B)$ und
(ii) $\pi(A^*) = \pi(A)^*$.

Eine Darstellung einer involutiven Algebra $\mathfrak{A}$ mit Eins ist ein *-Homomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{L}(\mathfrak{D})$ der Algebra in die linearen Operatoren eines dichten Teilraums $\mathfrak{D}$ eines Hilbertraums $\mathfrak{H}$ mit $\pi(1) = 1$.

Wir haben bereits gesehen, dass jeder Einheitsvektor $\Phi \in \mathfrak{D}$ durch

$$\omega(A) = \bigl(\Phi, \pi(A)\Phi\bigr)$$

einen Zustand der Algebra darstellt. Überraschender Weise gilt aber auch die Umkehrung. Dies ist die berühmte GNS (Gelfand-Neumark-Segal)-Konstruktion:

Theorem 3.1. Sei ω ein Zustand auf der involutiven Algebra $\mathfrak{A}$ mit Eins. Dann gibt es eine Darstellung π der Algebra durch lineare Operatoren eines dichten Teilraums $\mathfrak{D}$ eines Hilbertraums $\mathfrak{H}$ und einen Einheitsvektor $\Omega \in \mathfrak{D}$, so dass gilt

$$\omega(A) = \bigl(\Omega, \pi(A)\Omega\bigr)$$

und $\mathfrak{D} = \{\pi(A)\Omega, A \in \mathfrak{A}\}$. Dabei sind $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, Ω und π bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Beweis. Der Beweis dieses wichtigen Theorems ist sehr einfach.

Existenz: Man benutzt zunächst den Zustand ω, um auf der Algebra durch

$$\big(A, B\big) := \omega(A^* B)$$

ein Skalarprodukt zu erklären. Die Linearität im rechten und die Antilinearität im linken Faktor sind offensichtlich, ebenso wie die positive Semidefinitheit

$$\big(A, A\big) = \omega(A^* A) \geq 0 \ .$$

Die Hermitizitätsbedingung

$$\big(A^*, B\big) = \overline{\big(B^*, A\big)}$$

folgt ebenfalls aus der Positivitätsbedingung an ω mit Hilfe der Darstellungen von A^*B und B^*A als Linearkombination positiver Elemente, die sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} 2(A^*B + B^*A) &= (A + B)^*(A + B) - (A - B)^*(A - B) \\ 2(A^*B - B^*A) &= -i(A + iB)^*(A + iB) + i(A - iB)^*(A - iB) \end{aligned}$$

ergeben. Man betrachtet jetzt die Teilmenge

$$\mathfrak{N} := \{A \in \mathfrak{A} \mid \omega(A^*A) = 0\} \ .$$

Wesentlich für die Konstruktion ist, dass $\mathfrak{N}$ ein Linksideal von $\mathfrak{A}$ ist. Dies sieht man folgendermaßen: $\mathfrak{N}$ ist ein linearer Unterraum von $\mathfrak{A}$, da aus $\omega(A^*A) = \omega(B^*B) = 0$ nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|\omega(A^*B)|^2 \leq \omega(A^*A)\omega(B^*B) = 0$$

und damit schließlich

$$\begin{aligned} \omega((\alpha A + \beta B)^*(\alpha A + \beta B)) &= |\alpha|^2\omega(A^*A) \\ &\quad + \overline{\alpha}\beta\omega(A^*B) + \alpha\overline{\beta}\omega(B^*A) + |\beta|^2\omega(B^*B) = 0 \end{aligned}$$

folgt. Darüberhinaus gilt für $A \in \mathfrak{N}$ und $B \in \mathfrak{A}$ wiederum wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |\omega((BA)^*BA)|^2 &= |\omega(A^*B^*BA)|^2 \\ &= |\omega((B^*BA)^*A)|^2 \leq \omega((B^*BA)^*B^*BA)\omega(A^*A) = 0 \ , \end{aligned}$$

also ist $BA \in \mathfrak{N}$, und damit ist $\mathfrak{N}$ ein Linksideal von $\mathfrak{A}$.

Wir definieren jetzt $\mathfrak{D}$ als den Quotientenraum

$$\mathfrak{D} := \mathfrak{A}/\mathfrak{N} = \{A + \mathfrak{N} \mid A \in \mathfrak{A}\} \ .$$

Auf $\mathfrak{D}$ wird durch

$$\big(A + \mathfrak{N}, B + \mathfrak{N}\big) := \big(A, B\big) \ .$$

ein Skalarprodukt definiert. Da per constructionem das Skalarprodukt auf $\mathfrak{D}$ positiv definit ist, können wir $\mathfrak{D}$ zu einem Hilbertraum $\mathfrak{H}$ vervollständigen. Die Darstellung π wird durch die Linksmultiplikation der Algebra induziert,

$$\pi(A)(B+\mathfrak{N}) := AB + \mathfrak{N} \ .$$

π ist wohldefiniert, da $\mathfrak{N}$ ein Linksideal von $\mathfrak{A}$ ist. Schließlich setzen wir

$$\Omega = 1 + \mathfrak{N} \ .$$

Man verifiziert leicht, dass die beiden Bedingungen des Theorems erfüllt sind.

Eindeutigkeit: Man kann ebenso leicht zeigen, dass die Konstruktion bis auf Äquivalenz eindeutig ist. Denn sei $(\pi', \mathfrak{D}', \mathfrak{H}', \Omega')$ eine andere Realisierung der GNS-Konstruktion. Dann definieren wir einen Operator $U : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}'$ durch

$$U\pi(A)\Omega = \pi'(A)\Omega' \ .$$

U ist wohldefiniert, da $\pi(A)\Omega = 0$ genau dann gilt, wenn $\omega(A^*A) = 0$ ist; dann ist aber auch $\pi'(A)\Omega' = 0$. Weiter erhält U das Skalarprodukt und ist invertierbar, lässt sich also eindeutig zu einem unitären Operator von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{H}'$ fortsetzen. Schließlich sind die Darstellungen π und π' unitär äquivalent,

$$\pi'(A) = U\pi(A)U^* \ , \ \ A \in \mathfrak{A} \ .$$

■

Bemerkung.

(i) Ist $\mathfrak{A}$ bereits eine C*-Algebra, so ist $\|\pi(A)\| \leq \|A\|$, $\pi(A)$ besitzt daher eine eindeutige Fortsetzung zu einem Operator auf $\mathfrak{H}$.

(ii) Sei $\mathfrak{A}$ bereits Operatoralgebra, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ und sei $\omega(A) := (\varphi, A\varphi)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$, $\varphi \in \mathfrak{H}$ normiert und zyklisch, d.h. $\overline{\mathfrak{A}\varphi} = \mathfrak{H}$. Für welche $\psi \in \mathfrak{H}$ gilt dann

$$\omega(A) = (\psi, A\psi)$$

für alle $A \in \mathfrak{A}$? Für ein solches ψ existiert ein isometrischer Operator U auf $\mathfrak{H}$ mit

(a) $U\varphi = \psi$

(b) $UA = AU$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.

Die Menge der Vektoren, die den Zustand ω induzieren, ist also

$$\{U\varphi, U^*U = 1, [U, A] = 0 \forall A \in \mathfrak{A}\} \ .$$

Satz 1.1. Jede C*-Algebra ist zu einer normabgeschlossenen Algebra von Hilbertraum-Operatoren isomorph.

4. Teilsysteme

Ein Teilsystem eines physikalischen Systems kann als Unteralgebra der Algebra der Observablen des vollen Systems angesehen werden. Zwei Teilsysteme $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ eines Systems $\mathfrak{A}$ heißen unabhängig, wenn die von ihnen erzeugte Unteralgebra $\mathfrak{A}_{12} := \langle \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \rangle$ des großen Systems isomorph zum Tensorprodukt

$$\mathfrak{A}_{12} := \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$$

ist. [2] In der Feldtheorie sind geeignete Teilsysteme die Algebren $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ der Observablen, die in einem Raumzeitgebiet $\mathcal{O}$ gemessen werden können. Diese Zuordnung von Gebieten zu Algebren erfüllt die sogenannten Haag-Kastler-Axiome:

(i) Isotonie:
$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$.
$\mathfrak{A} := \bigcup_{\mathcal{O}} \mathfrak{A}(\mathcal{O})$ ist die Algebra aller lokalen Observablen.

(ii) Lokalität:
Sei $\mathcal{O}_1$ raumartig zu $\mathcal{O}_2$. Dann ist $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$ unabhängig von $\mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$. Insbesondere ist dann der Kommutator $[A_1, A_2] = 0$ für alle $A_1 \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_1)$, $A_2 \in \mathfrak{A}(\mathcal{O}_2)$.

(iii) Kovarianz:
Es gibt eine Darstellung $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$, $\mathbf{g} \mapsto \alpha_g$ der Isometriegruppe G der Raumzeit durch Automorphismen von $\mathfrak{A}$, $\alpha_{g_1 g_2} = \alpha_{g_1}\alpha_{g_2}$ für alle $g_1, g_2 \in G$, sodass gilt $\alpha_g(\mathfrak{A}(\mathcal{O})) = \mathfrak{A}(g\mathcal{O})$ für alle $g \in G$.

(iv) Zeitschichtaxiom:
Falls $\mathcal{O}$ eine Umgebung einer Cauchyfläche[3] der Raumzeit ist, dann ist $\mathfrak{A}(\mathcal{O}) = \mathfrak{A}$.

Während es auf der Ebene der Observablenalgebren mit dem Tensorprodukt eine wohldefinierte Zerlegung eines Systems in Teilsysteme gibt, ist die Situation bei den Zuständen komplizierter. Zunächst kann jeder Zustand des großen Systems auf ein Teilsystem eingeschränkt werden, einfach indem man nur die Erwartungswerte der Observablen des Teilsystems betrachtet. Umgekehrt lassen sich Zustände auf abgeschlossenen Unteralgebren einer C*-Algebra immer auf die ganze Algebra fortsetzen. Dies ist eine Konsequenz des Hahn-Banach-Theorems[4]; die Fortsetzung ist aber in der Regel nicht eindeutig. Sind zwei Teilsysteme unabhängig und sind ω_1 und ω_2 Zustände auf den jeweiligen Teilsystemen, dann gibt es einen Zustand $\omega_1 \otimes \omega_2$ auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Dieser

[2] $(A_1 \otimes A_2)(B_1 \otimes B_2) = A_1 B_1 \otimes A_2 B_2$ und $(A_1 \otimes A_2)^* = A_1^* \otimes A_2^*$

[3] Eine Cauchyfläche ist eine raumartige Hyperfläche der Raumzeit, die von jeder nichtverlängerbaren kausalen Kurve genau einmal geschnitten wird.

[4] Satz von Hahn-Banach: Sei X ein normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum, L ein linearer Unterraum und $f : L \to \mathbb{C}$ linear und stetig. Dann gibt es eine stetige lineare Abbildung $F : X \to \mathbb{C}$ mit $F|_L = f$ und $\|F\| = \|f\|$.

ist festgelegt durch

$$\omega_1 \otimes \omega_2(A_1 \otimes A_2) = \omega_1(A_1)\omega_2(A_2) \ .$$

Konvexe Kombinationen

$$\omega = \sum \lambda_i \omega_1^i \otimes \omega_2^i, \quad \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1$$

derartiger Produktzustände nennt man separable Zustände. Es ist eine wesentliche Eigenschaft nichtkommutativer Algebren, dass es auch nichtseparable Zustände gibt. Diese sogenannten verschränkten Zustände (Entanglement) geben Anlass zur Verletzung der Bellschen Ungleichungen und sind wichtig für die Quanteninformationstheorie.

Aufgaben

(i) Zeige, dass das Spektrum eines Elementes A einer C*-Algebra mit 1 innerhalb eines Kreises mit Radius $\|A\|$ um 0 liegt.

(ii) Zeige, dass sich das Spektrum von A nicht ändert, wenn die Algebra vergrößert wird.

(iii) Das Spektrum von A sei endlich und bestehe aus den reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$. Zeige, dass dann die Wahrscheinlichkeit w_k für das Auftreten des Messwerts a_k gegeben ist durch

$$w_k = \frac{\omega(\prod_{i \neq k}(A - a_i))}{\prod_{i \neq k}(a_k - a_i)} \ .$$

(iv) Die z-Komponente eines Spin 1-Systems habe den Erwartungswert α und die quadratische Unschärfe β. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die z-Komponente positiv ist?

(v) Zeige, dass die Menge der Elemente einer involutiven Algebra mit 1, die in jedem Zustand verschwinden, ein beidseitiges Ideal bilden.

(vi) Konstruiere die GNS-Darstellung der Matrixalgebra $M_n(\mathbb{C})$ zum Zustand

$$\omega(A) = \mathrm{Tr}\, \rho A,$$

mit Dichtematrix ρ (nichtnegativ und $\mathrm{Tr}\, \rho = 1$) mit $\det \rho \neq 0$.

(vii) Zeige, dass der einzige mögliche Häufungspunkt im Spektrum eines selbstadjungierten Spurklasse-Operators der Nullpunkt ist.

KAPITEL 2

Quantenfeldtheorie auf dem Minkowskiraum

1. Algebra der freien Felder

Wir gehen aus von der klassischen Theorie eines skalaren reellen Feldes φ auf dem Minkowskiraum. Sei $\mathcal{C} := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ die Menge der möglichen glatten Feldkonfigurationen. Das klassische Feld wird aufgefasst als Funktional auf dem klassischen Konfigurationsraum,

$$\varphi(x)(f) = f(x) \ .$$

Sei $S_0 = \int d^4x \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi) - \frac{m^2}{2}\varphi^2$ das klassische freie Wirkungsfunktional und $\mathcal{C}_{S_0} \subset \mathcal{C}$ die Menge der Lösungen der freien Feldgleichung $(\Box + m^2)\varphi = 0$. Sei

$$\Delta_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} e^{i(\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}x^0 - \mathbf{p}\mathbf{x})}$$

mit den Anfangswerten $\Delta_+(0,\mathbf{x}) = 0$ und $\partial_t \Delta_+(0,\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x})$ die Fundamentallösung positiver Energie der Klein-Gordon Gleichung.

Die Observablen $\mathfrak{A}$ der klassischen Theorie sind Funktionale $F : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$F = \sum_n \int dx_1 \cdots dx_n F_n(x_1, \ldots, x_n)\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)$$

wobei die Verschmierungsfunktionen F_n Distributionen mit kompaktem Träger sind, deren Wellenfrontmengen geeignet eingeschränkt werden (Dies soll später diskutiert werden.).

Das Produkt (Wickprodukt, Normalprodukt) zweier solcher Funktionale wird im Falle des freien Feldes durch

$$F * G := \sum_n \frac{\hbar^n}{n!} \int dxdy \frac{\delta^n F}{\delta \varphi^n}(x) \frac{\delta^n G}{\delta \varphi^n}(y) \prod_{i=1}^n \Delta_+(x_i - y_i).$$

erklärt, mit der n-ten Funktionalableitung von F

$$\frac{\delta^n F}{\delta \varphi^n}(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{k \geq n} \frac{k!}{(k-n)!} \sum_n \int dx_{n+1} \cdots dx_k F_k(x_1, \ldots, x_k)\varphi(x_{n+1}) \cdots \varphi(x_k) \ .$$

erklärt ist. Oft schreiben wir hierfür FG.

Lemma 1.1. Das so definierte Produkt $F * G$ ist assoziativ.

Beweis. Seien $f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$, $F := e^{\varphi(f)}$, $G := e^{\varphi(G)}$, $H := e^{\varphi(h)}$ mit $\varphi(f) := \int dx \varphi(x) f(x)$. Dann ist $\frac{\delta^n F}{\delta \varphi^n}(x) = f(x_1) \cdots f(x_n) F$ und analog für G, H und es gilt

$$e^{\varphi(f)} * e^{\varphi(g)} = e^{\varphi(f+g)} e^{\hbar(f, \Delta_+ g)}$$

und

$$\begin{aligned}\left(e^{\varphi(f)} * e^{\varphi(g)}\right) * e^{\varphi(h)} &= e^{\varphi(f+g+h)} e^{\hbar[(f,\Delta_+ g)+(f,\Delta_+ h)+(g,\Delta_+ h)]} \\ &= e^{\varphi(f)} * \left(e^{\varphi(g)} * e^{\varphi(h)}\right).\end{aligned}$$

Beliebige Funktionale lassen sich durch Linearkombinationen der obigen Funktionale approximieren, daher gilt die Assoziativität allgemein. ■

Weiterhin gilt das Folgende.

Bemerkung. (i) Für $\hbar = 0$ ist $FG(\varphi) = F(\varphi)G(\varphi)$, das punktweise Produkt der Funktionale (klassische Theorie). In erster Ordnung in $\hbar$ ist der Kommutator $[F, G]$ proportional zur Poisson-Klammer der klassischen Feldtheorie

$$\lim_{\hbar \to 0} \frac{1}{i\hbar}[F, G] = \int dx dy \frac{\delta F}{\delta \varphi}(x) \frac{\delta G}{\delta \varphi}(y) \Delta(x - y),$$

wobei[1]

$$i\Delta(x - y) := \Delta_+(x - y) - \Delta_+(y - x).$$

(ii) Gibt es noch andere Produkte auf Funktionalen als das Wickprodukt mit denselben charakteristischen Eigenschaften? Beispielsweise bleibt durch den Übergang

$$\Delta_+(x - y) \to \Delta_+(x - y) + f(x, y)$$

mit f glatt und symmetrisch der Propagator $i\Delta(x - y)$ erhalten. Dieser Übergang führt zu einer endlichen Renormierung.

(iii) In der Moyal-Quantisierung

$$\Delta_+(x - y) \to \tfrac{i}{2}\Delta(x - y)$$

lassen sich Wickprodukte nicht definieren.

(iv) In der Quantenmechanik sind Weyl-Ordnung (Symmetrisierung) und Wick-Ordnung (Normalordnung der Erzeuger und Vernichter) äquivalent, nicht allerdings in der Quantenfeldtheorie.

---

[1]Mit den Anfangswerten $\Delta(0, \mathbf{x}) = 0$ und $\partial_t \Delta(0, \mathbf{x}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x})$ ist

$$\begin{aligned}\Delta(x) &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \theta(p_0)(e^{ipx} - e^{-ipx}) \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) \varepsilon(p_0) e^{ipx}.\end{aligned}$$

Für alle $\mathcal{O} \subset \mathbb{M}$ lässt sich mit obigem Produkt die Algebra

$$\mathfrak{A}_0(\mathcal{O}) := \{F \in \mathfrak{A} | \operatorname{supp} F_n \subset \mathcal{O}^n\}.$$

definieren. $\mathfrak{A}_0$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

(i) Isotonie.

(ii) Falls $\mathcal{O}_1$ raumartig zu $\mathcal{O}_2$ liegt, dann ist

$$\begin{aligned} e^{\varphi(f)} * e^{\varphi(g)} &= e^{\varphi(f+g)} e^{\hbar(f,\Delta_+ g)} \\ &= e^{\varphi(g)} * e^{\varphi(f)} e^{\hbar[(f,\Delta_+ g)-(g,\Delta_+ f)]} \\ &= e^{\varphi(g)} * e^{\varphi(f)}, \end{aligned}$$

da $(f,\Delta_+ g)-(g,\Delta_+ f) = i(f,\Delta g) = i\int dxdy f(x)g(y)\Delta(x-y)$ und $\Delta(x-y) = 0$ für raumartig getrennte x, y. Also vertauschen $\mathfrak{A}_0(\mathcal{O}_1)$ und $\mathfrak{A}_0(\mathcal{O}_2)$ und das Netz $\mathfrak{A}_0$ besitzt die Lokalitätseigenschaft.

(iii) Translationsinvarianz, wegen der Translationsinvarianz von Δ_+.

(iv) Lorentzinvarianz, wegen der Lorentzinvarianz von Δ_+.

Ein Problem stellt allein das Zeitschichtaxiom dar.

$$\mathcal{O} \supset \{x \in \mathbb{M}, x_0 = 0\} \Rightarrow \mathfrak{A}_0(\mathcal{O}) = \mathfrak{A}_0(\mathbb{M})?$$

Folgendermaßen wird durch Implementierung der Feldgleichung dieses Problem behoben.[2] Die angegebene Algebra besitzt ein zweiseitiges Ideal $\mathcal{I} \subset \mathfrak{A}_0$ das durch alle Ausdrücke der Form $\varphi((\Box + m^2)f)$ (die klassische Feldgleichung), erzeugt wird. Die Quotientenalgebra

$$\mathfrak{A}(\mathbb{M}) := \mathfrak{A}_0(\mathbb{M})/\mathcal{I}$$

ist die Observablenalgebra des freien Feldes und $\mathfrak{A}(\mathcal{O}) := \mathfrak{A}_0(\mathcal{O})/\mathcal{I}$. $\mathfrak{A}(\mathbb{M})$ und $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ erfüllen das Zeitschichtaxiom.

Die Involution wird durch den Übergang zu den komplex konjugierten Funktionalen definiert.[3]

2. Vakuum, Teilchen und Fock-Raum

Die Algebra des freien Feldes auf dem Minkowski-Raum besitzt einen ausgezeichneten Zustand, den sogenannten Vakuumzustand. Er ist gegeben durch

$$\omega_0(F) := F_0 \ .$$

F_0 ist die feldunabhängige Komponente von F, $F_0 = F(\varphi \equiv 0)$.

Lemma 2.1. ω_0 ist ein Zustand.

---

[2] Eine äquivalente Möglichkeit zur Implementierung der Feldgleichung besteht in der Einschränkung $F \to F|_{\mathcal{C}_{S_0}}$.

[3] $F^* := \sum_n \int dx_1 \cdots dx_n \overline{F_n}(x_1, \ldots, x_n)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)$. Prüfe, dass $(F * G)^* = G^* * F^*$.

Beweis. ω_0 ist linear und normiert. Z.z. ist die Positivität:

$$\begin{aligned}\omega_0(F^*F) &= (F^*F)_0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n!\hbar^n \int dxdy\overline{F_n}(x)F_n(y)\prod_{i=1}^{n}\Delta_+(x_i-y_i) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n!\hbar^n \int dxdy\overline{F_n}(x)F_n(y)\prod_{i=1}^{n}\int\frac{d^3\mathbf{p}_i}{2\omega_i}e^{ip_i(x_i-y_i)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n!\hbar^n \prod_{i=1}^{n}\int\frac{d^3\mathbf{p}_i}{2\omega_i}|\hat{F}_n(p_1,\ldots,p_n)|^2 \geq 0,\end{aligned}$$

wobei $\hat{F}$ die Fouriertransformierte von F ist. ■

Die zugehörige GNS-Konstruktion liefert einen Hilbertraum $\mathfrak{H}_0$, einen dichten Teilraum $\mathfrak{D}$, einen Einheitsvektor Ω und eine Darstellung π. Zunächst überzeugt man sich davon, dass das Feld φ in dieser Darstellung die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt. Weiter ist der Raum $\varphi(f)\Omega$ (wir lassen das Darstellungssymbol π im folgenden weg) gerade der Raum der positiven Frequenzlösungen der Klein-Gordon-Gleichung und kann daher mit dem Einteilchenraum identifiziert werden. Entsprechend kann $\mathfrak{H}$ als der Fockraum über dem Einteilchenraum aufgefasst werden.

Der Nullraum sei

$$\begin{aligned}\mathcal{N} :=&\{F \in \mathfrak{A}_0(\mathbb{M})|\omega_0(F^*F) = 0\} \\ =&\{F \in \mathfrak{A}_0(\mathbb{M})|\hat{F}_n = 0, \text{ falls ein Argument auf der Massenschale liegt}\}\end{aligned}$$

Dann ist

$$\mathfrak{A}(\mathbb{M})/\mathcal{N} \subset \underbrace{\bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_{symm}(\mathbb{R}^{3n}, \underbrace{\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3\mathbf{p}_i}{2\omega_i}}_{Maß})}_{üblicher Fockraum}$$

Die kanonische Abbildung $\pi : \mathfrak{A}(\mathbb{M}) \to \mathrm{End}(\mathfrak{A}(\mathbb{M})/\mathcal{N})$ erfüllt $\pi(F * G) = \pi(F)\pi(G)$.

3. Lokale Wechselwirkungen

Lokale Wechselwirkungen sind Zusatzterme in der Wirkung, deren zweite Funktionalableitung nach den Feldern für verschiedene Argumente verschwindet. In der klassischen Feldtheorie findet man die wechselwirkenden Felder in der Algebra der freien Felder mit Hilfe der retardierten Produkte

$$F_{S_1} = R_{S_0}(e_{\otimes}^{S_1}, F).$$

Eine geschlossene Formel für die klassischen retardierten Produkte ist

$$R_{S_0}(S_1^{\otimes n}, F) = n! \int_{x_1^0 \leq \ldots \leq x_n^0} dx_1 \cdots dx_n (\mathcal{R}(x_1) \cdots \mathcal{R}(x_n) F)_{S_0}$$

mit dem Funktional-Differential-Operator

$$\mathcal{R}(x) = -\int dy \left(\frac{\delta S_1}{\delta \varphi(x)} \Delta_{S_0}^{\mathrm{ret}}(y,x) \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} \right) \ .$$

Hierbei ist $\Delta_{S_0}^{\mathrm{ret}}$ das retardierte Inverse der 2. Funktionalableitung von S_0, aufgefasst als Integraloperator.

Bei der Quantisierung sucht man entsprechend die retardierten Produkte als Potenzreihen in $\hbar$ mit Koeffizienten in der Observablenalgebra des freien Feldes. Neben der Retardierungsbedingung ist die wesentliche Eigenschaft der retardierten Produkte die sogenannte GLZ (Glaser-Lehmann-Zimmermann)-Relation. Nach dieser Relation gilt der folgende Zusammenhang zwischen den retardierten Produkten und der Poissonklammer,

$$\{F_S, G_S\} := R_S(F,G) - R_S(G,F) \ .$$

Dies ist Peierls Definition der Poisson-Klammer in der klassischen Theorie. In der Quantentheorie definiert man die Poissonklammer unter Verwendung des Kommutators. Aufgrund der Trägereigenschaften der retardierten Produkte sind sie (für lokale Funktionale) durch diese Relation für nicht zusammenfallende Punkte festgelegt.

Setzt man jetzt $S = S_0 + \lambda S_1$ und entwickelt nach λ, so findet man die Formel

$$\begin{aligned} \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \{R_{S_0}(\bigotimes_{i \in I} F_i, G), R_{S_0}(\bigotimes_{j \in I^c} F_j, H) =& R_{S_0}(\bigotimes_{i=1}^{n} F_i \otimes G, H) \\ &- R_{S_0}(\bigotimes_{i=1}^{n} F_i \otimes H, G) \end{aligned}$$

Diese Relation kann ähnlich wie in der Epstein-Glaser-Renormierung zur iterativen Bestimmung der retardierten Produkte genutzt werden (Steinmann). Die Unbestimmtheiten sind in jeder Ordnung lokale Zusatzterme zur Wirkung, die der üblichen Renormierungsfreiheit entsprechen.

Das System der lokalen Observablenalgebren der wechselwirkenden Theorie ist eindeutig bestimmt, sobald die retardierten Produkte bekannt sind. Denn sei $\mathcal{O}$ ein kausal abgeschlossenes Gebiet des Minkowski-Raums. Wenn wir die Wechselwirkung S_1 durch einen Zusatzterm abändern, der nicht von den Feldern in $\mathcal{O}$ abhängt, so ändert sich die Struktur der Algebra $\mathfrak{A}(\mathcal{O})$ nicht. Um dies einzusehen, zerlegen wir den Zusatzterm S_2 in zwei Teile S_+ und S_-, die nur von den Feldern in der Zukunft, bzw. der Vergangenheit von $\mathcal{O}$ abhängen. Genauer ist S_+ im Komplement der Vergangenheit von $\mathcal{O}$ und S_- im Komplement der Zukunft von $\mathcal{O}$ lokalisiert. Per definitionem sind die retardierten Produkte unabhängig von S_+. Die Abhängigkeit von S_- ist durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\varepsilon} F_{S+\varepsilon S_-} = R_{S+\varepsilon S_-}(S_-, F)$$

bestimmt. Aber für ein Funktional F, das nur von den Feldern in $\mathcal{O}$ abhängt, ist nach der GLZ-Relation das retardierte Produkt gleich der Poissonklammer. Die Differentialgleichung bestimmt daher eine kanonische Transformation, also einen Isomorphismus der Observablenalgebren. Folgerung: Die Algebra $\mathfrak{A}_{S_1}(\mathcal{O})$ ist unitär äquivalent zu $\mathfrak{A}_{S_1+S_2}(\mathcal{O})$.[4]

Die zeitgeordneten Produkte (und damit die S-Matrix) können aus den retardierten Produkten berechnet werden. Eine geschlossene Formel ergibt sich aus der Bogoliubovschen Definition der wechselwirkenden Felder

$$\frac{d}{d\varepsilon} T_{S_0}(e_\otimes^{\frac{i}{\hbar}S_1+\varepsilon F})_{\varepsilon=0} = T_{S_0}(e_\otimes^{\frac{i}{\hbar}S_1}) \; F_{S_0+S_1} \; .$$

Mit den retardierten Produkten sind auch die wechselwirkenden Felder bekannt, und wir erhalten die zeitgeordneten Produkte mit Hilfe der Dyson-Formel,

$$T_{S_0}(e_\otimes^{\frac{i}{\hbar}F}) = \Lambda e^{\int_0^1 d\lambda \frac{i}{\hbar} F_{S_0+\lambda F}}$$

wobei Λ das bezüglich λ antigeordnete Exponential bezeichnet.

Aufgaben

(i) Seien $F := \int dx \frac{1}{k!}\varphi(x)^k f(x)$ und $G := \int dx \frac{1}{l!}\varphi(x)^l g(x)$. Zeige, dass

$$\begin{aligned}\pi(F)\pi(G) &= \int dx \frac{1}{k!} :\varphi(x)^k: f(x) \int dy \frac{1}{l!} :\varphi(y)^l: g(y) \\ &= \sum_n \frac{\hbar^n}{n!} \int dx dy : \frac{1}{(k-n)!(l-n)!} \varphi(x)^{k-n}\varphi(y)^{l-n} : \Delta_+(x-y)^n f(x) g(y)\end{aligned}$$

(Wicksches Theorem).

[4] Die Herleitung bezieht sich auf lokale Wechselwirkungen.

(ii) Sei π die GNS-Darstellung zum Vakuumzustand $\omega_0(F) = F_0$. Zeige, dass gilt

$$\pi(\int dx_1 \cdots dx_n F(x_1, \dots, x_n)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n))$$
$$= \int dx_1 \cdots dx_n F(x_1, \dots, x_n) : \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n) :$$

Tip: Wicktheorem für Wickprodukte unter der Voraussetzung, dass GNS-Darstellung eindeutig

(iii) Zeige, dass das Feld φ in der GNS-Darstellung zum Vakuum die Klein-Gordon-Gleichung im Sinne von Distributionen erfüllt.

(iv) Sei $\varphi = \varphi_0 + \lambda\varphi_1$ eine Lösung bis zu 1. Ordnung in λ der Gleichung

$$(\Box + m^2)\varphi + \lambda\frac{\delta F}{\delta\varphi} = 0.$$

Berechne φ_1 in Abhängigkeit von φ_0 und bestimme daraus das klassische retardierte Produkt $R_0(F, G)$.

(v) Sei $i\Delta_F = \theta\Delta_+ + (1-\theta)\Delta_-$ der Feynman-Propagator[5]. Gegeben $(i\Delta_F)^2_{ren}$, benutze $(i\Delta_F)^2_{ren}$ zur Lösung der GLZ-Gleichung für $R_0(\varphi(x)^2, \varphi(y)^2)$.

(vi) Es gilt (Bogoliubov)

$$F_{S_1} = T(e_{\otimes}^{\frac{i}{\hbar}S_1})^{-1}\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} T(e_{\otimes}^{\frac{i}{\hbar}S_1+\lambda F}).$$

Zeige, dass bzw. wie sich das zeitgeordnete Produkt aus den retardierten Produkten berechnen lässt.

(vii) Zeige mit Hilfe der kanonischen Antivertauschungsrelationen,

$$\{\psi_\alpha(x), \overline{\psi}_\beta(y)\} = (\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial_\mu + im)\Delta_+(x-y) \ ,$$

dass das Diracfeld, verschmiert mit einer Testfunktion

$$\psi(f) = \int dx\, \psi_\alpha(x) f^\alpha(x) \ ,$$

ein beschränkter Operator ist.

[5] $\Delta_- = \overline{\Delta_+}$

KAPITEL 3

Quantenfeldtheorie auf gekrümmter Raumzeit

1. Algebra der freien Felder

Die Algebra der freien Felder auf einer global hyperbolischen Lorentzmannigfaltigkeit [1] kann ganz ähnlich wie im Fall des Minkowskiraums konstruiert werden. Man muss dazu lediglich die Kommutatorfunktion als den antisymmetrischen Anteil einer Bilösung der Klein-Gordon-Gleichung schreiben, die positiv ist und die mikrolokale Spektrumsbedingung erfüllt. Solche Lösungen sind als Hadamard-Lösungen schon lange bekannt. Das Problem ist nur, dass diese Lösungen nicht eindeutig sind.

Das erste Problem besteht daher darin, zu zeigen, dass die Algebra der Felder von der Wahl dieser Lösung unabhängig ist. Hierzu beschränken wir uns zunächst auf Funktionale der Form $\varphi(f) = \int dx\varphi(x)f(x)$ mit Testfunktionen f. Diese Funktionale erzeugen eine Algebra mit den Relationen, dass $\varphi(f)$ linear von f abhängt, dass die *-Operation durch $\varphi(f)^* = \varphi(\overline{f})$ gegeben ist, dass die Feldgleichungen im schwachen Sinn gelten,

$$\varphi(Kf) = 0$$

mit dem Klein-Gordon-Operator $K = \Box + m^2$, und dass die Vertauschungsrelationen

$$[\varphi(f), \varphi(g)] = i\langle f, Eg\rangle$$

gelten. Hierbei ist $E = E_{ret} - E_{avc}$ die Fundamentallösung der Klein--Gordon-Gleichung.

[1]Eine Lorentzmannigfaltigkeit heißt global hyperbolisch, wenn sie eine Cauchyfläche besitzt. In diesem Fall lässt sich die Raumzeit durch paarweise disjunkte Cauchyflächen überdecken. In global hyperbolischen Lorentzmannigfaltigkeiten ist das Cauchyproblem für die Klein-Gordon-Gleichung eindeutig lösbar; es existieren Operatoren $E_{ret}, E_{avc} : \mathcal{D}(\mathbb{M}) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ mit den Eigenschaften

$$(\Box + m^2)E_{ret} = 1,\ (\Box + m^2)E_{avc} = 1$$
$$E_{ret}(\Box + m^2) = 1,\ E_{avc}(\Box + m^2) = 1$$

einer Greensfunktion. E_{ret} und E_{avc} werden durch ihre Trägereigenschaften unterschieden: $\mathrm{supp}(E_{ret}f)$ ist eine Teilmenge der Zukunft von $\mathrm{supp}\, f$ und entsprechend ist $\mathrm{supp}(E_{avc}f)$ eine Teilmenge der Vergangenheit von $\mathrm{supp}\, f$. Durch diese Bedingungen sind E_{ret} und E_{avc} eindeutig bestimmt.

Auf nicht global hyperbolischen Lorentzmannigfaltigkeiten wie z.B. dem Anti-de Sitter Raum müssen zur Festlegung der Lösungen neben den Cauchy-Daten zusätzlich Randbedingungen festgelegt werden

Bevor wir andere Felder (Wick-Produkte des freien Feldes) einführen können, müssen wir uns den Zuständen des freien Bosefeldes zuwenden.

Eine wichtige Klasse von Zuständen bilden die sogenannten quasifreien Zustände. Diese sind von der Form

$$\omega(e^{\varphi(f)}) = e^{\frac{1}{2}\omega_2(f\otimes f)} \ .$$

Hierbei ist ω_2 die 2-Punktfunktion des Zustandes ω. ω ist wohldefiniert, wenn gilt

$$\omega_2(f\otimes g) - \omega_2(g\otimes f) = i\langle f, Eg\rangle \ .$$

Die Positivität von ω ist äquivalent zu der Forderung, dass

$$(f,g) := \omega_2(\overline{f}\otimes g)$$

ein positiv semidefinites Skalarprodukt auf dem Testfunktionenraum ist. Für reelle Funktionen f und g muss gelten

$$|\langle f, Eg\rangle|^2 \leq \omega_2(f\otimes f)\omega_2(g\otimes g) \ .$$

2. Mikrolokale Spektrumsbedingung

Auf einer generischen Raumzeit gibt es zwar viele quasifreie Zustände, aber keiner von ihnen spielt eine ausgezeichnete Rolle, sodass das Konzept eines Vakuums keinen Sinn macht.[2] Viele Methoden der Quantenfeldtheorie beruhen auf der Auszeichnung des Vakuumzustands und lassen sich daher nicht auf gekrümmte Hintergründe übertragen. Es gibt aber eine Klasse quasifreier Zustände, die bei kurzen Abständen ähnliche Eigenschaften wie das Vakuum im Minkowski-Raum haben. Dies sind die sogenannten Hadamard-Zustände. Bei ihnen ist die 2-Punktfunktion bei kleinen Abständen von der Form

$$\omega_2(x,y) = \frac{u}{\sigma} + v\ln\sigma + w \ .$$

Hierbei sind u, v und w glatte Funktionen. σ ist das Quadrat des geodätischen Abstands. Während u und v geometrisch bestimmt sind, hängt w von der Wahl des Zustands ab.

Das Verständnis der Hadamard-Zustände wurde durch eine wegweisende Beobachtung von Radzikowski ermöglicht. Hierzu benötigt man den Begriff der Wellenfrontmenge einer Distribution.

Definition. Sei $t \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution. Die Wellenfrontmenge $\mathrm{WF}(t)$ von t ist die Menge der Paare $(x;k) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ mit der Eigenschaft, dass für jede konische Umgebung C von k und und jede Testfunktion φ mit $\varphi(x) \neq 0$ die Funktion $k' \mapsto \langle t, \varphi e^{ik'\cdot}\rangle$ innerhalb von C nicht schneller als jede Potenz abfällt.

[2] Der Grund hierfür ist, dass es auf einer generischen Raumzeit nicht notwendig eine einparametrige Gruppe von Automorphismen, keine ausgezeichnete Zeitrichtung, damit keinen Begriff positiver Energie gibt. Fouriertransformationen sind kartenabhängig. Stattdessen gibt es eine ausgezeichnente Klasse von Zuständen: Hadamard-Zustände.

Als Beispiel betrachten wir die δ-Funktion. Für $x \neq 0$ können wir die Testfunktion so wählen, dass sie bei Null verschwindet. Daraus folgt, dass (x, k) für kein k in der Wellenfrontmenge liegt. Für $x = 0$ ergibt sich

$$\langle \delta, \varphi e^{ik' \cdot} \rangle = \varphi(0)$$

also gilt $\mathrm{WF}(\delta) = \{(0, k), k \neq 0\}$

Grundlegend für die Bedeutung der Wellenfrontmenge ist Hörmanders Theorem über die Ausbreitung von Singularitäten von Lösungen partieller Differentialgleichungen. Angewandt auf die Klein-Gordon-Gleichung besagt das Theorem, dass die Wellenfrontmenge einer distributionellen Lösung in der Menge $\{(x, k), k^2 = 0\}$ enthalten sein muss, und dass die Wellenfrontmenge invariant unter der Bewegung auf lichtartigen Geodäten ist. D.h., wenn (x, k) in der Wellenfrontmenge liegt, dann liegen auch all diejenigen Punkte (y, k') in der Wellenfrontenmenge, für die eine Nullgeodäte γ zwischen x und y existiert, so dass k koparallel zu γ ist und k' der Paralleltransport von k entlang γ ist.

Für die Fundamentallösung E besteht die Wellenfrontmenge aus den Punkten (x, k, x', k'), für die es eine Nullgeodäte von x nach x' gibt, sodass k und k' koparallel sind und sodass der Paralleltransport von k nach x' gerade $-k'$ ist.

Nach Radzikowski erhält man die Wellenfrontmenge der 2-Punktfunktion eines Hadamard-Zustands durch die zusätzliche Forderung, dass k im Abschluss des Vorwärtslichtkegels V_+ liegt. Dies ist eine lokale Version der aus dem Minkowskiraum bekannten Spektrumsbedingung und wurde daher mikrolokale Spektrumsbedingung genannt. Sei $WF(E)$ die Menge aller $(x, y; k_x, k_y) \in (\mathbb{R}^4)^2 \times (\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})^2$ für die eine lichtartige Geodäte γ von x nach y existiert mit $k_x, k_y \| \dot{\gamma}$ und $\mathrm{parallel}_\gamma(k_x) + k_y = 0$. Dann gilt das

Theorem 2.1 (Radzikowski, Mikrolokale Spektrumsbedingung). *Die Zweipunktfunktion ω_2 eines Zustands ω erfüllt die Hadamard-Bedingung genau dann, wenn ihre Wellenfrontmenge durch*

$$WF(\omega_2) = \{(x, y; k_x, k_y) \in WF(E) | k_x \in \overline{V_+}\}$$

gegeben ist.

Radzikowskis Beobachtung ermöglicht es, Techniken aus der mikrolokalen Analysis in der Quantenfeldtheorie anzuwenden. Insbesondere kann die Algebra der freien Felder in derselben Weise wie in der Minkowskiraumtheorie so erweitert werden, dass sie auch die Wickprodukte enthält. Hierzu müssen wir lediglich in der Definition des Produkts zweier Funktionale die Minkowskiraum-2-Punktfunktion Δ_+ durch die 2-Punktfunktion eines Hadamard-Zustands ersetzen. Die Koeffizientenfunktionen F_n müssen eine Bedingung an ihre Wellenfrontmengen erfüllen, sodass die auftretenden Produkte wohldefiniert sind.

Allgemein gilt, dass Distributionen punktweise multipliziert werden können, wenn die konvexe Kombination ihrer Wellenfrontmengen den Nullpunkt nicht enthält. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Koeffizienten die Bedingung $\mathrm{WF}(F_n) \cap (V_-^n \cup V_+^n) = \emptyset$ erfüllen.

Insbesondere ist die Bedingung erfüllt für

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \prod_{i=2}^{n} \delta(x_i - x_1)$$

mit einer Testfunktion f. Dies entspricht dem punktweisen Produkt der Felder.

Allerdings ist sowohl die Definition der Algebra als auch der punktförmigen Potenzen der Felder von der Wahl des Hadamard-Zustands ω abhängig. Für die Algebra kann man leicht einsehen, dass sie tatsächlich unabhängig von ω ist. Bei den Feldern aber muss man eine zusätzliche Bedingung finden, durch die die Willkür bei ihrer Definition eingeschränkt wird.

3. Lokale Kovarianz

Die Grundidee ist, dass bei der Definition nur lokale Objekte verwendet werden sollten. Die Wahl eines Hadamard-Zustands aber ist eine nichtlokale Information, während offenbar der singuläre Anteil eines Hadamard-Zustands durch die lokale Geometrie bestimmt ist.

Wir formalisieren diese Idee in der folgenden Weise: Wir betrachten die Klasse aller zulässigen Lorentzmannigfaltigkeiten und betrachten diese als die Objekte einer Kategorie. Die Pfeile der Kategorie sind Einbettungen $\psi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, die die Metrik und die kausale Struktur respektieren. Zu jeder Lorentzmannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ konstruieren wir eine Observablenalgebra $\mathfrak{A}(\mathcal{M})$, sodass $\mathfrak{A}(\mathcal{M})$ in $\mathfrak{A}(\mathcal{N})$ vermittels des Homomorphismus α_ψ abgebildet wird. Die Abbildung $\mathcal{M} \mapsto \mathfrak{A}(\mathcal{M})$, $\psi \mapsto \alpha_\psi$ ist ein Funktor zwischen der Kategorie der Lorentzmannigfaltigkeiten (mit isometrischen und kausalen Einbettungen als Pfeilen) und der Kategorie der Observablenalgebren (mit injektiven Homomorphismen als Pfeilen). Wir fordern, dass dieser Funktor kovariant ist, d.h. es soll gelten

$$\alpha_{\psi \circ \chi} = \alpha_\psi \circ \alpha_\chi \ .$$

Zusätzlich fordern wir, dass Algebren raumartig getrennter Gebiete kommutieren und dass das Zeitschichtaxiom gilt: falls $\psi(\mathcal{M})$ eine Cauchyfläche von $\mathcal{N}$ enthält, dann soll α_ψ ein Isomorphismus sein.

Wir können jetzt an die Felder die Bedingung der lokalen Kovarianz stellen: Ein lokal kovariantes skalares Feld ist eine Familie von $\mathfrak{A}(\mathcal{M})$-wertigen Distributionen $\varphi_{\mathcal{M}}$ auf $\mathcal{M}$, so dass gilt

$$\alpha_\psi(\varphi_{\mathcal{M}}(x)) = \varphi_{\mathcal{N}}(\psi(x)).$$

Als ein Beispiel betrachten wir das Wickquadrat. Im ersten Schritt wählen wir einen quasifreien Hadamardzustand ω und setzen

$$\varphi^2_\omega(x) = \lim_{y\to x} \varphi(x)\varphi(y) - \omega_2(x,y) \ .$$

Zwei solche Felder für Hadamardzustände ω und ω' unterscheiden sich um eine glatte Funktion $H_{\omega,\omega'}$, die die Kovarianzbedingung

$$H_{\omega\alpha_\psi,\omega'\alpha_\psi}(x) = H_{\omega,\omega'}(\psi(x))$$

sowie die Kozykelbedingung

$$H_{\omega.\omega'} + H_{\omega',\omega''} + H_{\omega'',\omega} = 0$$

erfüllt. Das Problem besteht jetzt darin, Funktionen h_ω zu finden, die sich kovariant transformieren,

$$h_{\omega\alpha_\psi} = h_\omega(\psi(x))$$

und den Kozykel trivialisieren,

$$H_{\omega,\omega'} = h_\omega - h_{\omega'} \ .$$

Dann liefert die Definition

$$\varphi^2 = \varphi^2_\omega - h_\omega$$

ein lokal kovariantes Feld.

Eine Lösung kann mit Hilfe der Hadamard-Bedingung gefunden werden. Ist

$$\omega_2 = \frac{u}{\sigma} + v \ln\sigma + w \ ,$$

so kann man wählen

$$h_\omega(x) = w(x,x) \ .$$

In ähnlicher Weise konnte auch das Renormierungsproblem auf generischen Lorentzmannigfaltigkeiten gelöst werden.

Aufgaben

(i) Berechne die Wellenfrontmenge der Distribution $\frac{1}{x+i\varepsilon}\Big|_{\varepsilon\to 0}$.

(ii) Konstruiere lokal kovariante Potenzen φ^n des skalaren Feldes für $n > 2$.

Literaturverzeichnis

[1] Bogoliubov, N.N., and Shirkov, D.V., *"Introduction to the Theory of Quantized Fields"*, New York (1959)

[2] Brunetti, R., and Fredenhagen, K., "Microlocal analysis and interacting quantum field theories: Renormalization on physical backgrounds", *Commun. Math. Phys.* **208** (2000) 623

[3] Brunetti, R., Fredenhagen, K., and Verch, R.,"The generally covariant locality principle – A new paradigm for local quantum physics", *Commun. Math. Phys.* **237** 31-68

[4] Dütsch, M., and Fredenhagen, K., "Perturbative Algebraic Field Theory, and Deformation Quantization", proceedings of the Conference on Mathematical Physics in Mathematics and Physics, Siena June 20-25 2000

[5] Epstein, H., and Glaser, V., "The role of locality in perturbation theory", *Ann. Inst. H. Poincaré A* **19** (1973) 211

[6] Glaser, V., Lehmann, H. and Zimmermann, W., "Field Operators and Retarded Functions" *Nuovo Cimen.* **6** (1957) 1122.

[7] Haag, R., "Local Quantum Physics: Fields, particles and algebras", Springer-Verlag, Berlin, 2nd ed. (1996)

[8] Haag, R., and Kastler, D., "An algebraic approach to field theory", Journ. Math. Phys. **5** (1964) 848

[9] Hollands, S., Wald, R. M., "Local Wick Polynomials and Time-Ordered-Products of Quantum Fields in Curved Spacetime", *Commun. Math. Phys.* **223** (2001) 289, "Existence of Local Covariant Time-Ordered-Products of Quantum Fields in Curved Spacetime", *Commun. Math. Phys.* **231** (2002) 309-345

[10] Hollands, S., Wald, R. M., "On the Renormalization Group in Curved Spacetime", *Commun. Math. Phys.* **237** (2003) 123-160

[11] Marolf, D. M.,"The Generalized Peierls Bracket", *Ann. Phys. (N.Y.)* **236** (1994) 392

[12] Peierls, R., "The commutation laws of relativistic field theory", *Proc. Roy. Soc. (London)* **A 214** (1952) 143

[13] Scharf, G., *"Finite Quantum Electrodynamics. The causal approach"*, 2nd. ed., Springer-Verlag (1995)

[14] Scharf, G., *"Quantum Gauge Theories - A True Ghost Story"*, John Wiley and Sons (2001)

[15] Steinmann, O., "Perturbation expansions in axiomatic field theory", Lecture Notes in Physics **11**, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag (1971)

[16] Steinmann, O., "Perturbative QED and Axiomatic Field Theory", Springer-Verlag (2000)

[17] Stora, R., "Pedagogical Experiments in Renormalized Perturbation Theory", contribution to the conference 'Theory of Renormalization and Regularization', Hesselberg, Germany (2002), http://wwwthep.physik.uni-mainz.de/ scheck/Hessbg02.html; and private communication