Karoubi

FACULTE DES SCIENCES D'ALGER

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

SEMINAIRES 1965 - 66

Introduction au Langage Fonctoriel

A. GROTHENDIECK

FACULTE DES SCIENCES D'ALGER

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Séminaires 1965 - 1966

INTRODUCTION AU LANGAGE FONCTORIEL

Rédigé d'après un cours de Monsieur A.Grothendieck.

<u>Table des Matières</u>

Ce fascicule contient une rédaction succincte d'une série d'exposés que Monsieur A.Grothendieck a bien voulu venir faire à Alger au cours du mois de Novembre 1965. Il a pour but de familiariser un débutant avec les éléments du langage fonctoriel,langage qui sera utilisé par la suite dans les divers séminaires: Algèbre Homologique dans les catégories abéliennes,Fondement de la K-Théorie.....

Les propositions non démontrées sont de deux types : des sorites dont la démonstration tiendra lieu d'exercices,des propositions moins évidentes (signalées par une astérique) dont on trouvera les démonstrations dans les ouvrages de références.

Chapitre 0

Cadre logique

Lorsque l'on définit une catégorie, il y a des inconvénients à supposer que les objets forment une classe, au sens de la théorie des ensembles de Gödel-Bernays. En effet, si l'on sait définir les applications d'une classe dans une autre, ces applications ne forment cependant pas elles-mêmes une classe. En particulier on ne saurait parler de la catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre. Aussi se placera-t-on dans le cadre de la théorie des ensembles de Bourbaki pour définir les <u>univers</u>.

<u>Univers</u> :

On appelle <u>univers</u> un ensemble $\mathcal{U}$ vérifiant les axiomes suivants :

(U_1) Si Y appartient à X et si X appartient à $\mathcal{U}$, alors Y appartient à $\mathcal{U}$.

(U_2) Si X et Y sont des éléments de $\mathcal{U}$ alors $\{X,Y\}$ est un élément de $\mathcal{U}$.

(U_3) Si X est un ensemble appartenant à $\mathcal{U}$, l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X est un élément de $\mathcal{U}$.

(U_4) Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensemble appartenant à $\mathcal{U}$, et si I est un élément de $\mathcal{U}$, alors $\bigcup_{i\in I} X_i$ appartient à $\mathcal{U}$.

On déduit de ces axiomes les propositions suivantes :

(1) Si X est un élément de $\mathcal{U}$, $\{X\}$ est un élément de $\mathcal{U}$.

(2) X et Y sont des éléments de $\mathcal{U}$ si et seulement si le couple(*) (X,Y) est un élément

(*) On rappelle que le couple $(X.Y)$ est l'ensemble $\{X,\{X,Y\}\}$

de $\mathcal{U}$.

(3) L'ensemble vide est un élément de $\mathcal{U}$ (puisque c'est un élément de $\mathcal{P}(X)$ pour tout ensemble X de l'univers $\mathcal{U}$).

(4) Si Y est contenu dans X et si X appartient à $\mathcal{U}$ alors Y appartient à $\mathcal{U}$.

(5) Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles de $\mathcal{U}$ et si I appartient à $\mathcal{U}$, alors $\prod_{i \in I} X_i$ appartient à $\mathcal{U}$.

(6) Si X est un ensemble appartenant à $\mathcal{U}$, $\mathrm{Card}(X) < \mathrm{Card}(\mathcal{U})$.

(7) L'univers $\mathcal{U}$ n'est pas un élément de $\mathcal{U}$. En effet si $\mathcal{U}$ appartient à $\mathcal{U}$, alors $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ appartient à $\mathcal{U}$. Soit E appartenant à $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ (donc E appartient à $\mathcal{U}$) défini ainsi :

$E = \{X \in \mathcal{U}\} \mid X \notin X\}$

On aurait alors : E appartient à E si et seulement si E n'appartient pas à E !

(8) L'intersection d'une famille quelconque d'univers est un univers. En particulier si E est un ensemble et s'il existe un univers contenant E, alors il existe un plus petit univers contenant E qu'on appelle l'univers engendré par E.

Si E_o est un ensemble quelconque, on se propose de chercher s'il existe un plus petit univers $\mathcal{U}$ contenant E_o. Il apparait naturel de plonger E_o dans un ensemble E_1 par le procédé suivant :

Soit G_o l'ensemble ainsi défini : $X \in G_o \iff (\exists Y)(Y \in E_o$ et $X \in Y)$ et

$F_1 = E_o \cup G_o$

Soit G_1 : $X \in G_1 \iff (\exists Y)(\exists Z)\ (Y \in F_1, Z \in F_1$ et $X = \{Y,Z\})$ et

$F_2 = F_1 \cup G_1$

Soit G_2 : $X \in G_2 \Longleftrightarrow (\exists Y)(Y \in F_2 \text{ et } X = \mathcal{P}(Y))$

et $F_3 = F_2 \cup G_2$

Soit G_3 : $X \in G \Longleftrightarrow (\exists I)(\exists (X_i)_{i \in I})(I \in F_3, \forall\, i \in I, X_i \in F_3 \text{ et } X = \bigcup_{i \in I} X_i)$

et $F_4 = F_3 \cup G_3$.

On pose alors $E_1 = F_4 \cup \{E_0\}$

En itérant cette opération on forme une suite transfinie d'ensemble :

$$E_0 \subset E_1 \subset \ldots\ldots \subset E_\alpha \subset E_{\alpha+1} \subset \ldots\ldots$$

Pour qu'il existe un plus petit univers contenant E_0, il faut et il suffit que cette suite devienne stationnaire à partir d'un certain rang (c'est-à-dire qu'il existe α tel que $E_{\alpha+1} = E_\alpha$) E_α sera précisément l'univers $\mathcal{U}$ recherché.

En particulier si l'on prend $E_0 = \emptyset$, on montre que $\mathcal{U} = E_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Lorsqu'on part d'un ensemble E_0 infini, on ne peut prouver l'existence d'un univers $\mathcal{U}$ contenant E_0.

Il convient donc d'ajouter aux axiomes de la théorie des ensembles l'axiome suivant :

(a_1) Axiome des univers :

Pour tout ensemble X, il existe un univers $\mathcal{U}$, tel que X soit élément de $\mathcal{U}$.

De plus comme on ne souhaite pas sortir d'un univers $\mathcal{U}$ par l'usage du symbole τ de Hilbert on introduit l'axiome supplémentaire :

(a_2) Si R est une relation, x une lettre figurant dans R, et s'il existe un élément X d'un univers $\mathcal{U}$ tel que $(X|x)$ R soit vrai alors l'objet $\tau_x R(x)$ est un élément de $\mathcal{U}$.

Chapitre 1

Généralités sur les catégories

1 - Type de diagrammes :

(1-1) Définition :

Un type de diagrammes D est la donnée d'un quadruplo $D = (Fl, Ob, s, b)$ où :

Fl et Ob sont des ensembles respectivement appelés ensemble des flèches (ou des morphismes..), ensemble des objets (ou des sommets)

s et b sont des applications de Fl dans Ob respectivement appelées source, but

. Un type de diagrammes sera souvent noté : $\begin{tikzcd} Fl \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "b"] \\ Ob \end{tikzcd}$

. Exemples : On peut représenter certains types de diagramme :

. (1 seul objet) ; . . . (pas de flèches)

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] \arrow[d] & \circ \arrow[d] \\ \circ \arrow[r] & \circ \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

(1-2) Morphisme d'un type de diagramees dans un autre :

Si $D = (Fl_D, Ob_D, s_D, b_D)$ et $D' = (Fl_{D'}, Ob_{D'}, s_{D'}, b_{D'})$ sont deux types de diagramme, un morphisme F de D dans D' est un couple d'applications $F = (F_o, F_1)$:

$F_o : Ob_D \to Ob_{D'}$, $F_1 : Fl_D \to Fl_{D'}$ tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} Fl_D \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "s_D"'] & Fl_{D'} \arrow[d, "s_{D'}"] \\ Ob_D \arrow[r, "F_o"] & Ob_{D'} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fl_D \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "b_D"'] & Fl_{D'} \arrow[d, "b_{D'}"] \\ Ob_D \arrow[r, "F_o"] & Ob_{D'} \end{tikzcd}$$

Si D" est un troisième type de diagrammes et $F' = (F'_o, F'_1)$ un morphisme de D' dans D", on définit le <u>composé</u> des morphismes F et F', c'est le morphisme $F" = (F"_o, F"_1)$ de D dans D" ou $F"_o = F'_o \circ F_o$, $F"_1 = F'_1 \circ F_1$. Le morphisme noté $1_D = (1_{Fl_D}, 1_{Ob_D})$ de D sur D est le <u>morphisme identique de D</u> .

(1-3) <u>Sous-type de diagramme d'un type de diagrammes</u>

Soit $D = (Ob_D, Fl_D, s_D, b_D)$ un type de diagrammes. On dit que $D' = (Ob_{D'}, Fl_{D'}, s_{D'}, b_{D'})$ est un <u>sous-type de diagrammes</u> de D si $Ob_{D'}$ est inclus dans Ob_D, $Fl_{D'}$ est inclus dans Fl_D et si $s_{D'}$ (respectivement $b_{D'}$) est la restriction à $Fl_{D'}$ de s_D (respectivement b_D)

(1-4) Si $D = (Ob_D, Fl_D, s_D, b_D)$ est un type de diagrammes le type de diagramme noté $D^o = (Ob_D, Fl_D, b_D, s_D)$ est appelé type de <u>diagrammes opposé de D</u>.

Un <u>morphisme contravariant de types de diagrammes</u> de D dans D' est un morphisme de type de diagramme de D^o dans D'

2 - <u>Catégorie</u> :

(2-1) <u>Définition</u> : Une catégorie C est la donnée :

(i) d'un <u>type de diagramme</u> (Fl, Ob, s, b) appelé type de diagramme sous-jacent à C, noté (Fl_C, Ob_C, s_C, b_C)

(ii) d'une <u>application</u> du produit fibré $(Fl_C, b_C) \underset{Ob_C}{\times} (Fl_C, s_C)$ dans Fl_C, appelée loi de composition des flèches, notée $\mu_C : (f,g) \to g \circ f = g\, f$ et <u>vérifiant les propriétés</u> :

(a) $(g\,f)h = g(f\,h)$ pour tous les éléments f,g,h de Fl_C tels que cette écriture ait un sens.

(aa) pour tout objet X il existe une flèche 1_X telle que $s_C(1_X) = b_C(1_X) = X$, appelée <u>flèche identique</u> de X vérifiant $1_X f = f$, $f\,1_X = f$ pour toute flèche f telle que cette écriture ait un sens.

On remarque que pour tout objet X, la flèche 1_X est unique.

<u>Notations</u> . Chaque fois que l'on écrit $g\,f$, il est entendu que la composition a un sens, c'est-à-dire que $b(f) = s(g)$.

. Si X et Y sont deux objets d'un type de diagramme D (resp. d'une catégorie C), l'ensemble des flèches de source X, de but Y est noté $Hom_D(X,Y)$ ou $Fl_D(X,Y)$ (resp. $Hom_C(X,Y)$...)

Une flèche de source X et de but Y est aussi notée $f : X \to Y$

(2-2) <u>Foncteur</u>

Soient C et C' deux catégories dont D et D' sont respectivement les types de diagrammes sous-jacents. Un <u>foncteur</u> de C dans C' est un <u>morphisme</u> $F = (F_o, F_1)$ du type de diagramme D dans le type de diagramme D', <u>compatible</u> avec la composition des flèches, c'est-à-dire tel que $F_1(f\,g) = F_1(f).F_1(g)$.

Pour tout X, $F_1(1_X)$ est alors la flèche identique de $F_o(X)$. Si C'' est une troisième

catégorie de type de diagramme D",F' un foncteur de C' dans C",le *foncteur composé* des foncteurs F et F',$F'' = F'.F$ est le composé des morphismes de type de diagramme sous-jacent (1-2).On vérifie que F" est compatible avec la composition des flèches.
Pour toute catégorie C,de type de diagramme D,on définit un *foncteur identique* $1_C = 1_D$.

(2-3) Soit C une catégorie de type de diagramme sous-jacent D.La *catégorie opposée* de C,notée C^o,est la catégorie de type de diagramme D^o,et dont la loi de composition des flèches μ_{C^o} est définie par $\mu_{C^o}(f,g) = \mu_C(g,f)$.
On remarque que $C^{oo} = C$.

Un *foncteur contravariant* de C dans C' est un foncteur de C^o dans C'.Pour un foncteur contravariant F la compatibilité avec la composition des flèches s'écrit
$F_1(f\ g) = F_1(g).F_1(f)$.

Si F est un foncteur de C dans C' on lui associe canoniquement un foncteur F^o de C^o dans C'^o :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & C^o \arrow[d, "F^o"] \\ C' \arrow[r] & C'^o \end{tikzcd}$$

On remarque que $(F\ G)^o = F^o.G^o$, $1_C^o = 1_{C^o}$, $F^{oo} = F$.

(2-4) *Monomorphisme - Epimorphisme* :

(2-4-1) On dit qu'une flèche $f : X \to Y$ d'une catégorie C est un *monomorphisme* si pour tout objet T de C l'application naturelle qui à $u : T \to X$,fait correspondre $f.u$ de Hom(T,X) dans Hom(T,Y) est *injective*. Une flèche $f : X \to Y$ d'une catégorie C est un <u>épimorphisme</u> si f est un monomorphisme en tant que flèche de C^o ou, ce qui est équivalent, si pour tout objet T de C l'application naturelle de Hom(Y,T) dans Hom(X,T) est <u>injective</u>.

Une flèche est un <u>bimorphisme</u> si c'est un monomorphisme et un épimorphisme.

(2-4-2) Une flèche f de C est inversible à gauche(ou <u>rétractable</u>) s'il existe une flèche $g : b(f) \to s(f)$ telle que $g\,f = 1_{s(f)}$; g est une <u>rétraction</u> de f.

Une flèche f de C est <u>inversible à droite</u> (ou <u>sectionnable</u>) s'il existe une flèche $g : b(f) \to s(f)$ telle que $f\,g = 1_{b(f)}$; g est une <u>section</u> de f.

Une flèche rétractable et sectionnable est appelée un <u>isomorphisme</u>, il existe alors un $g : b(f) \to s(f)$ unique tel que $f\,g = 1_{b(f)}$ et $g\,f = 1_{s(f)}$, g est <u>l'inverse</u> de f

(2-4-3) Une flèche rétractable est un monomorphisme.

Une flèche sectionnable est un épimorphisme.

Donc un isomorphisme est un bimorphisme.

Les réciproques sont <u>fausses</u>.

(2-5) <u>Sous-objet ,objet quotient</u>

Soit X un objet quelconque d'une catégorie C, on définit sur l'ensemble des monomorphismes de but X une <u>relation</u> de <u>préordre</u> : $i \leq i'$ si et seulement si i' se factorise par i c'est-à-dire si et seulement si il existe un morphisme u tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "i"] & & X \\ & B' \arrow[ul, dotted, "u"] \arrow[ur, "i'"'] & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire tel que $i' = i\,u$.

On remarque que u est un monomorphisme,et est déterminé de façon unique.On considère la relation d'équivalence associée à cette relation de préordre.Dans chaque classe d'équivalence on choisit(par exemple grace au symbole τ) un monomorphisme que l'on appelle <u>sous objet de X</u>. Par abus de langage on appellera aussi sous-objet de X la source d'un tel monomorphisme.On notera (B,i) un sous objet de X, ou simplement B. La relation de préordre ci-dessus induit donc une relation d'ordre sur l'ensemble des sous objets de X. Si B,B' sont deux sous objets de X, la borne inférieure (resp.la borne supérieure) lorsqu'elle existe,est notée $B \wedge B'$ (resp. $B \vee B'$).Par exemple,dans la catégorie des ensembles,notée Ens , $B \wedge B' = B \cap B'$, $B \vee B' = B \cup B'$.

Dualement on définit les <u>objets quotients</u> d'un objet X,et une relation d'ordre sur leur ensemble.

(2-6) <u>Sous catégorie d'une catégorie</u>.

Soit C une catégorie de type de diagramme sous-jacent D,on dit que C',de type de diagramme D' est une <u>sous catégorie</u> si D' est un sous-type de diagramme de D et si de plus $\mu_{C'}$ (loi de composition des flèches dans C')est la restriction de μ_C au produit fibré $(Fl_{C'}, b_{C'}) \times_{Ob_{C'}} (Fl_{C'}, s_{C'})$.

On remarque que pour tout couple X,Y d'objets de C' on a : $Fl_{C'}(X,Y) \subset Fl_C(X,Y)$.Si de plus on a l'égalité on dit que C' est une <u>sous-catégorie pleine</u> de C.

3.<u>Exemples de catégories</u>

(3-1) Soit une catégorie dont l'ensemble des objets se réduit à un seul élément, alors l'ensemble des flèches se trouve naturellement muni d'une structure de monoide unitaire.Soit M une telle catégorie ,C une catégorie quelconque,un foncteur $F = (F_o,F_1)$ de M dans C est essentiellement un homomorphisme de monoïde de Fl_M dans Hom(X,X),où X est l'image par F_o de l'unique objet de M.On appelle <u>groupoïde</u> une catégorie dans laquelle toute flèche est inversible ; si de plus l'ensemble des objets se réduit à un seul élément ,l'ensemble des flèches est muni alors d'une structure de groupe.

(3-2) Soit I un ensemble préordonné,on appelle <u>catégorie associée</u> à I,la catégorie notée Cat(I),dont l'ensemble des objets est I,et dont l'ensemble des flèches est le graphe de la relation de préordre ; si (i,j) est une flèche s(i,j) = j , b(i,j) = i , la composition des flèches se définit évidemment par (i,j)(j,k) = (i,k),(i,i) est la flèche identité de i.Les propriétés (a) et (a a) se vérifient immédiatement. Inversement,pour toute catégorie C on peut définir sur Ob C une relation de préordre, à savoir : $X \leq Y \Longleftrightarrow Hom_C(X,Y) \neq \emptyset$.Une catégorie C est isomorphe à une catégorie Cat(I) si et seulement si toute flèche de Fl C est un monomorphisme.Il suffit de prendre I = Ob C muni de la relation de préordre précédente .

(3-3) <u>Catégories de types de diagramme, catégories de catégories</u>.

Dans cette section, on choisit une fois pour toute un univers $\mathcal{U}$, et tous les ensembles utilisés sont des éléments de $\mathcal{U}$.

Soit l'ensemble des "types de diagramme dans $\mathcal{U}$", noté $\mathrm{Diag}_{\mathcal{U}}$, (resp. l'ensemble des "catégories dans $\mathcal{U}$", noté $\mathrm{Cat}_{\mathcal{U}}$) c'est-à-dire des types de diagramme D resp. des catégories C) tels que les ensembles $\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Fl}_D$ (resp. $\mathrm{Ob}_C, \mathrm{Fl}_C$) soient les <u>éléments de $\mathcal{U}$</u>. En considérant (1-2) (resp. 2-2)) on définit la <u>catégorie des types de diagramme dans $\mathcal{U}$</u> notée <u>$\mathrm{Diag}_{\mathcal{U}}$</u> (resp. <u>la catégorie des catégories dans $\mathcal{U}$</u> notée <u>$\mathrm{Cat}_{\mathcal{U}}$</u>).

Explicitons par exemple <u>$\mathrm{Cat}_{\mathcal{U}}$</u>, le type de diagramme est le suivant : l'ensemble des objets est $\mathrm{Cat}_{\mathcal{U}}$, l'ensemble des flèches est l'ensemble des triplets (F,C,C') où F est un foncteur de la catégorie C dans la catégorie C', $s(F,C,C') = C$, $b(F,C,C') = C'$. La loi de composition des flèches est la composition des foncteurs définie en (2-2). On vérifie les propriétés (a) et (aa).

(3-4) <u>Catégorie des morphismes de type de diagramme d'un type de diagramme dans une catégorie, catégorie des foncteurs d'une catégorie dans une autre</u>.

Soient $D = (\mathrm{Ob}_D, \mathrm{Fl}_D, s_D, b_D)$ un type de diagramme et C' une catégorie de type de diagramme sous-jacent $(\mathrm{Ob}_{C'}, \mathrm{Fl}_{C'}, s_{C'}, b_{C'})$. Un morphisme de type de diagramme de D dans C' est aussi appelé <u>diagramme de type D dans C'</u>.

On considère l'ensemble des morphismes de type de diagramme de D dans C' noté $\mathrm{Diag}(D,C')$. Soient $F = (F_0, F_1)$, $G = (G_0, G_1)$ deux morphismes de type de diagramme de

D dans C'.Une flèche de source F de but G est une application u de Ob_D dans $Fl_{C'}$ ($u(x)$ sera souvent noté u_x) telle que pour toute flèche $f : X \to Y$ de D, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} F_o(X) \arrow[r, "F_1(f)"] \arrow[d, "u(X)"'] & F_o(Y) \arrow[d, "u(Y)"] \\ G_o(X) \arrow[r, "G_1(f)"'] & G_o(Y) \end{tikzcd}$$

Si u et v sont deux flèches, $u : F \to G$, $v : G \to H$, la flèche composée $v\,u : F \to H$ est définie $v\,u(X) = v(X) \circ u(X)$ pour tout X de Ob_D.

La flèche identique de F notée 1_F est définie par $1_F(X) = 1_{F_o(X)}$ pour tout X de Ob_D. On vérifie les propriétés (a) et (a a). On a alors défini la catégorie des morphismes de type de diagramme de D dans C', encore appelée catégorie des diagrammes de type D dans C' et notée Diag (D, C').

Si C et C' sont deux catégories de types de diagrammes sous jacents D et D', on définit également la catégorie des foncteurs de C dans C' notée Hom (C,C').

C'est par définition une sous catégorie pleine de Diag (D,C')

(3-5) Exemples de catégories de diagramme de type donné dans une catégorie

(3-5-1) Si D est tel que Ob_D se réduit à un seul élément et si l'ensemble des flèches est vide, alors Diag(D,C') est canoniquement isomorphe à la catégorie C'.

(3-5-2) Si D est du type suivant : $\cdot \rightarrow \cdot$, alors la catégorie <u>Diag</u>(D,C') est appelée catégorie des flèches de C' , notée <u>Fl</u>(C') . Les objets s'identifient aux éléments de Fl C' et un morphisme de la flèche f : X → Y , dans la flèche f' : X' → Y' est défini par un couple de flèche (u , v) tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ X' \arrow[r] & Y' \end{tikzcd}$$

(3-5-3) Si D est du type suivant : $\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$

les objets de <u>Diag</u>(D,C') sont essentiellement les "carrés" (non nécessairement commutatifs) de C' : $\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & T \end{tikzcd}$, et un morphisme d'un tel carré dans un autre est défini par un quadruple de flèches (u, v, r, s) tel que tous les côtés latéraux du "cube" suivant, où interviennent ces flèches, soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[rr] \arrow[dl, "u"'] \arrow[dd] & & Y \arrow[dl, "v"'] \arrow[dd] \\ X' \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y' \arrow[dd] & \\ & Z \arrow[rr] \arrow[dl, "s"'] & & T \arrow[dl, "r"] \\ Z' \arrow[rr] & & T' & \end{tikzcd}$$

(3-6) <u>Diagramme avec relations de commutation</u>

(3-6-1) Soit D un type de diagramme, on appelle chemin une suite finie $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de flèches de D formellement composable, c'est-à-dire telle que $s(f_{i+1}) = b(f_i)$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. On considère le type de diagramme dont les objets sont ceux de D, dont les flèches sont les chemins $c = (f_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $s(c) = s(f_1)$ et $b(c) = b(f_n)$. Sur ce type de diagramme on définit la composition des chemins, elle consiste à mettre "bout à bout" deux chemins s'ils sont formellement composables. On obtient ainsi une catégorie notée $\hat{D}$, appelée catégorie libre engendrée par le type de diagramme D.

Soit C une catégorie, pour tout morphisme de type de diagramme $\varphi : D \to C$, il existe un foncteur et un seul $\hat{\varphi} : \hat{D} \to C$ tel que pour tout chemin $c = (f_i)_{1 \leq i < n}$, $\hat{\varphi}_1(c) = \varphi_1(f_1) \ldots \varphi_1(f_{n-1})$

(3-6-2) On appelle donnée de commutation sur D, la donnée d'un ensemble R de couples de flèches de $\hat{D}$, (c,c') tels que $s(c) = s(c')$ et $b(c) = b(c')$.

Soit C une catégorie, on dit qu'un diagramme φ de type D dans C vérifie les relations de commutation R si pour tout couple (c,c') de R, $\hat{\varphi}_1(c) = \hat{\varphi}_1(c')$. On note $\underline{\mathrm{Diag}}_R(D,C)$ la sous catégorie pleine de $\underline{\mathrm{Diag}}(D,C)$ formée par les diagrammes de type D vérifiant R.

(3-6-3) Dans Fl $\hat{D}$ on définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ suivante :

$\mathcal{R}(c,c')$ si et seulement si $s(c) = s(c')$ et $b(c) = b(c')$, la classe de c sera notée $\bar{c}$.

Soit $\tilde{D}$ la catégorie telle que $Ob(\tilde{D}) = Ob(\hat{D}) = Ob(D)$ et $Fl(\tilde{D}) = Fl(\hat{D})/\mathcal{R}$ avec $s(\bar{c}) = s(c)$ et $b(\bar{c}) = b(c)$, La catégorie <u>Hom</u> $(\tilde{D}, C)$ est appelée catégorie des diagrammes de <u>type D commutatifs</u> dans C et notée <u>Diag com</u> (D,C).

<u>Exemple</u>

Soit D le type de diagramme représenté par

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_4"'] & \bullet \arrow[d, "f_2"] \\ \bullet \arrow[r, "f_3"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

Alors Ob $\hat{D}$ = Ob D , Fl $\hat{D} = \{f_1 , f_2 , f_3 , f_4 ,(f_2 , f_1), (f_3 , f_4) \text{ . chemin vide}\}$,

dans $\tilde{D}$ on identifie (f_2 , f_1) et (f_3 , f_4) on peut donc représenter $\tilde{D}$ par

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[loop right] \arrow[d] \\ \bullet \arrow[loop left] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

4 - <u>Produit de catégories somme de catégories</u>

(4-1) <u>Produit de catégories</u> :

Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de catégories ,I un ensemble.

(4-1-1) <u>La catégorie produit</u> des catégories C_i ,notée $C = \prod_{i\in I} C_i$ est ainsi définie :

. $Ob\ C = \prod_{i\in I} ObC_i$, $Fl\ C = \prod_{i\in I} Fl\ C_i$ $s = \prod_{i\in I} s_i$, $b = \prod_{i\in I} b_i$

. Si $f = (f_i)_{i\in I}$ et $g = (g_i)_{i\in I}$ sont deux flèches, la flèche composée $g\ f$ est la flèche $(g_i f_i)_{i\in I}$; la flèche identique sur $\prod_{i\in I} X_i$ est la flèche $\prod_{i\in I} 1\ X_i$

On définit une famille de foncteurs notée $(p\ r_i)_{i\in I}$, $p\ r_i : \prod_{i\in I} C_i \to C_i$ est tel que $pr_{i_o}((X_i)_{i\in I}) = X_i$, $pr_{i_1}((f_i)_{i\in I}) = f_i$

(4-1-2) <u>Proposition</u> : Pour toute catégorie T, l'application de $Hom(T,\prod_{i\in I} C\,i)$ dans $\prod_{i\in I} Hom(T,C_i)$ qui à u fait correspondre $(pr_i o\ u)_{i\in I}$ est bijective.

(4-2) <u>Multifoncteurs</u>

(4-2-1) On considère une famille $(C_i)_{i\in I}$ de catégories, deux sous-ensembles J et K de I tels que $I = J \cup K$, $J \cap K = \emptyset$ .Soit C la catégorie produit de $\prod_{i\in J} C_i$ et de $\prod_{i\in K} C_i^o$ .Un <u>multifoncteur</u> de $\prod_{i\in I} C_i$ dans une catégorie C', <u>covariant</u> par rapport aux indices i de J et <u>contravariant</u> par rapport aux indices i de K est un foncteur de C dans C'.

(4-2-2) <u>Exemples</u> : Si C,C',C" sont trois catégories on considère le <u>produit</u> de catégories <u>Hom</u>(C,C') Π <u>Hom</u>(C',C") l'application de Hom(C,C') Π Hom(C',C") dans Hom(C,C") qui à (F,G) fait correspondre G.F permet de définir un <u>bifoncteur</u>, deux fois covariant de <u>Hom</u>(C,C') Π <u>Hom</u>(C',C") dans <u>Hom</u>(C,C").Soient F et F' deux foncteurs de C dans C',G et G' deux foncteurs de C' dans C", $u : F \to F'$ et $v : G \to G'$,au couple (u,v) de flèche on fait correspondre la flèche notée $v * u : G F \to G'F'$ définie pour tout objet X de C par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
G_oF_o(X) \arrow[r, "G_1(u(X))"] \arrow[d, "v(F_o(X))"'] \arrow[dr, "v^*u(x)"] & G_oF'_o(X) \arrow[d, "v(F'_o(X))"] \\
G'_oF_o(X) \arrow[r, "G'_1(u(X))"] & G'_oF'_o(X)
\end{tikzcd}$$

On vérifiera que v*u est bien un morphisme fonctoriel,c'est-à-dire que pour toute flèche $f : X \to Y$ de C le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
G_oF_o(X) \arrow[r, "v*u(X)"] \arrow[d, "G_1F_1(f)"'] & G'_oF'_o(X) \arrow[d, "G'_1F'_1(f)"] \\
G_oF_o(Y) \arrow[r, "v*u(Y)"] & G'_oF'_o(Y)
\end{tikzcd}$$

et que l'application qui à (u,v) fait correspondre v*u respecte la composition des flèches.

Si l'on fixe F appartenant à Hom(C,C') (resp Hom(C',C")) on obtient un foncteur de Hom(C',C") dans Hom(C,C") (resp.Hom(C,C') dans Hom(C,C")) noté F_* (resp.F^*)

(4-2-3) Si C' et C" sont deux catégories,définissons un bifoncteur [illegible] de C'Π Hom(C',C") dans C".

A l'objet (X,G) on fait correspondre $\varphi_o(X,G) = G_o(X)$

A la flèche (f,v) ,où $f : X \to Y$, $v : G \to G'$ on fait correspondre $\varphi_1(f,v)$ définie par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} G_o(X) \arrow[r, "G_1(f)"] \arrow[d, "v(X)"'] \arrow[dr, dashed, "\varphi_1(f,v)"] & G_o(Y) \arrow[d, "v(Y)"] \\ G'_o(X) \arrow[r, "G'_1(f)"'] & G'_o(Y) \end{tikzcd}$$

Si A est une catégorie ponctuelle (Ob A = $\{\emptyset\}$, $Fl_A = 1_{\{\emptyset\}}$),pour toute catégorie C, Hom(A,C) est canoniquement isomorphe à C, et le bifoncteur ci-dessus peut s'interpréter comme un foncteur de Hom(A,C') Π Hom(C',C") dans Hom(A,C") ; ce n'est autre que celui défini en (4-2-2).

(4-3) Somme de catégories

Rappel : Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles, $S = \coprod_{i\in I} X_i$ sa somme.Pour tout x élément de S on sait qu'il existe un unique indice noté i(x) et un élément $x_{i(x)}$ dans $X_{i(x)}$ tels que $x = (x_{i(x)}, i(x))$.

(4-3-1) Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de catégories,I un ensemble .La catégorie somme de la famille $(C_i)_{i\in I}$ notée $S = \coprod C_i$ est définie par le type de diagramme suivant :

Ob $S = \coprod_{i\in I}$ Ob C_i $Fl_S = \coprod_{i\in I} Fl\ C_i$, $s = \coprod_{i\in I} s_i$, $b = \coprod_{i\in I} b_i$,et la composition des flèches suivante :

deux flèches $f = (f_{i(f)}, i(f))$ et $g = (g_{i(g)}, i(g))$ sont composables si et seulement si $b(f) = s(g)$ si et seulement si $i(f) = i(g) = i$ et $b_i(f_i) = s_i(g_i)$, on a alors $g\,f = (g_i f_i, i)$, l'identité pour un objet X est la flèche $1_X = (1_{X_{i(x)}}, i(X))$

On définit une <u>famille de foncteurs</u> notée $(inj_i)_{i\in I}$, $inj_i : C_i \to S$, tel que $inj_i(X_i) = (X_i, i)$, $inj_i(f_i) = (f_i, i)$

(4-3-2) <u>Proposition</u> : Pour toute catégorie T, l'application de $Hom(\coprod_{i\in I} C_i, T)$ dans $\prod_{i\in I} Hom(C_i, T)$, qui à u fait correspondre $(u \circ inj_i)_{i\in I}$, est <u>bijective</u>.

(4-3-3) Soit $\prod_{i\in I} C_i$ (resp. $\coprod_{i\in I} C_i$) la catégorie produit (resp. somme) d'une famille $(C_i)_{i\in I}$ de catégories, alors pour toute catégorie T, la <u>bijection</u> naturelle de $Hom(T, \prod_{i\in I} C_i)$ dans $\prod_{i\in I} Hom(T, C_i)$ (res. de $Hom(\coprod_{i\in I} C_i, T)$ dans $\prod_{i\in I} Hom(C_i, T)$) est un <u>isomorphisme</u> de $\underline{Hom}(T, \prod_{i\in I} C_i)$ dans $\prod_{i\in I} \underline{Hom}(T, C_i)$ (resp. de $\underline{Hom}(\coprod_{i\in I} C_i, T)$ dans $\prod_{i\in I} \underline{Hom}(C_i, T)$).

5 . <u>Equivalence de catégories</u> :

(5-1) <u>Définitions</u> :

Soit $F = (F_0, F_1)$ un foncteur d'une catégorie C dans une catégorie C'.

(5-1-1) Le foncteur F est dit <u>fidèle</u> (resp .<u>pleinement fidèle</u>) si pour tout couple d'objets (X, Y), $F_1|_{Hom(X,Y)}$, restriction de F_1 à $Hom(X, Y)$, est <u>injectif</u> (resp.<u>bijectif</u>)

Si F_1 est injectif (resp.bijectif) alors F est fidèle (resp.pleinement fidèle).Les réciproques sont fausses.

(5-1-2) Le foncteur F est dit essentiellement surjectif si pour tout objet X' de C',il existe un objet X de C tel que $F_o(X)$ soit isomorphe à X'.

(5-1-3) Un foncteur F est appelé une équivalence de catégories s'il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif.

(5-1-4) Ces propriétés se conservent par la composition des foncteurs

(5-1-5) On dit que la catégorie C est équivalente à la catégorie C',s'il existe un foncteur $F : C \rightarrow C'$ qui soit une équivalence de catégorie ; on définit ainsi une relation d'équivalence sur $\underline{Cat}_{\mathcal{U}}$.En effet la relation est évidemment réflexive,elle est transitive(5-1-4),elle est symétrique du fait de la proposition suivante :

(5-1-6) Proposition :

Le foncteur F de C dans C' est une équivalence de catégories si et seulement si il existe un foncteur G de C' dans C,tel que $G.F$ soit isomorphe à 1_C et $F\,G$ soit isomorphe à $1_{C'}$.

Un tel foncteur G est appelé un quasi inverse de F.

Alors que l'inverse d'un morphisme lorsqu'il existe est unique, un foncteur peut avoir plusieurs quasi-inverses qui sont isomorphes entre eux.

Démonstration : Supposons que F soit une équivalence de catégories. Puisque F est essentiellement surjectif, pour tout objet X' de C', l'ensemble des objets de C tels que l'image par F_o soit isomorphe à X' est non vide, On en choisit un (grace au symbole τ!) : X et l'on note u_x, un isomorphisme de $F_o(X)$ sur X'.

On pose alors $G_o(X') = X$.

Pour toute flèche $f' : X' \to Y'$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} F_o(X) \arrow[r, "u_x"] & X' \arrow[d, "f'"] \\ F_o(Y) \arrow[r, "u_y"] & Y' \end{tikzcd}$$

Il existe une unique flèche de $F_o(X)$ dans $F_o(Y)$ rendant le diagramme commutatif ($u_y^{-1}\ f'\ u_x$). Puisque F est pleinement fidèle, cette flèche est l'image par F_1 d'une unique flèche $f : X \to Y$.

On pose $G_1(f') = f$.

Par construction de $G = (G_o, G_1)$ on a les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "f"'] & G_oF_o(X) \arrow[d, "G_1F_1(f)"] \\ Y \arrow[r, "\approx"] & G_oF_o(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "f'"'] & F_oG_o(X') \arrow[d, "F.G.(f')"] \\ Y' \arrow[r, "\approx"] & F_oG_o(Y') \end{tikzcd}$$

ce qui montre que $G\,F$ est isomorphe à 1_C ,et $F\,G$ isomorphe à $1_{C'}$.

Réciproquement supposons que F possède un quasi inverse G ; alors F est évidemment <u>essentiellement surjectif</u> ,d'autre part $F_1|_{Hom(X,Y)}$ est une <u>bijection</u> de Hom(X,Y) sur $Hom(F_o(X),F_o(Y))$ pour tout couple d'objets (X,Y).En effet $F_1|_{Hom(X,Y)}$ est une <u>surjection</u> sur $Hom(F_o(X),F_o(Y))$.C'est aussi une <u>injection</u> ,soient deux flèches ,f et g de X dans Y telles que $F_1(f) = F_1(g)$,alors $G_1F_1(f) = G_1F_1(g)$,comme il y a une seule flèche de X dans Y rendant le diagramme ci-dessous commutatif,on a f = g.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & G_oF_o(X) \arrow[d, "G_oF_o(f) = G_oF_o(g)"] \\ Y \arrow[r, "\approx"] & G_oF_o(Y) \end{tikzcd}$$

(5-2)

(5-2-1) <u>Proposition</u> :

Si F est un foncteur d'une catégorie C dans une catégorie C',les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) F est pleinement fidèle

(b) Il existe une sous-catégorie pleine C'_1 de C' telle que F se factorise par C'_1 au moyen d'un foncteur qui est une équivalence de catégories.

Si F est pleinement fidèle,il suffit de prendre pour C'_1 l'image par F de C,ou l'image essentielle de F par C (c'est-à-dire l'ensemble des objets de C' isomorphes à F(X) X variant dans Ob_C).

Réciproquement si F se factorise par C'_1 sous catégorie pleine de C', le foncteur Inj : $C'_1 \to C$ est pleinement fidèle, et la composition avec une équivalence de catégorie donne un foncteur pleinement fidèle.

(5-2-2) Proposition :

Soit F un foncteur de C dans C', T une catégorie, F_* le foncteur de Hom(C',T) dans Hom(C,T) (4-2-1) on a les propriétés suivantes :

(i) Si F est fidèle alors F_* est fidèle

(ii) Si F est pleinement fidèle alors F_* est pleinement fidèle.

(iii) Si F est une équivalence de catégories alors F_* est une équivalence de catégories.

Si l'on considère F* le foncteur de Hom(T,C) dans Hom(T,C'), seule la propriété (iii) est vraie.

(5-2-3) Proposition :

Soit F un foncteur de C dans C' pleinement fidèle ; alors une flèche f de C est inversible si et seulement si $F_1(f)$ est inversible.

(5-2-4) Proposition :

Soit dans $\underline{Cat}_{\mathcal{U}}$ une famille de foncteurs $(F_i)_{i\in I}$, I élément de $\mathcal{U}$, $F_i : C_i \to C'_i$, et soit $\prod_{i\in I} F_i : \prod_{i\in I} C_i \to \prod C'_i$, on a les propriétés suivantes :

(i) Si pour tout i élément de I, F_i est fidèle alors $\prod_{i\in I} F_i$ est fidèle.

(ii) Si pour tout i élément de I, F_i est pleinement fidèle alors $\prod_{i\in I} F_i$ est pleinement fidèle.

(iii) Si pour tout i élément de I, F_i est une équivalence de catégorie alors $\prod_{i\in I} F_i$ est une équivalence de catégorie.

On énoncera la proposition duale

(5-3) Exemple :

Soient X un espace topologique, connexe par arc, localement simplement connexe par arc, x un élément de X. On note Rev(X), la catégorie des revêtements de X éléments d'un univers $\mathcal{U}$ donné, $\Pi = \Pi_1(X,x)$, $Ens(\Pi)$ la catégorie des ensembles de $\mathcal{U}$ sur lesquels Π opère.

Proposition : Les catégories Rev(X) et $Ens(\Pi)$ sont équivalentes.

Au revêtement E,X,p on fait correspondre la fibre $F = p^{-1}(x)$, Π opère sur F ; si E',X, p' est un revêtement et $f : E \to E'$ un morphisme de revêtement, à f on fait correspondre $f_{|p^{-1}(x)} : F \to F'$ qui est compatible avec Π. On a ainsi défini un foncteur $\alpha : Rev(X) \to Ens(\Pi)$.

Construisons un foncteur quasi inverse. Soit F un ensemble sur lequel Π opère. Le revêtement universel $\tilde{X}$ de X est un fibré principal de groupe Π, on considère le fibré associé $\tilde{X} *_{\Pi} F$ de fibre F, c'est un revêtement de X, on définit ainsi un foncteur $\beta : Ens(\Pi) \to Rev(X)$

On vérifiera que $\beta\,\alpha \simeq 1_{Rev(X)}$ et $\alpha\,\beta \simeq 1_{Ens(\Pi)}$

6 - Limite projective, limite inductive.

(6-1) Soit I un type de diagramme, C une catégorie et φ un morphisme de type de diagramme de I dans C (c'est-à-dire un diagramme de type I dans C)

(6-1-1) Une famille $(u_i)_{i \in \mathrm{ObI}}$ de morphismes de C, de source X, $u_i : X \to \varphi_o(i)$ est dite admissible pour φ, si pour toute flèche $f : i \to j$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \varphi_o(i) \arrow[dd, "\varphi_1(f)"] \\ X \arrow[ur, "u_i"] \arrow[dr, "u_j"'] & \\ & \varphi_o(j) \end{tikzcd}$$

Une telle famille est notée $(X, (u_i)_{i \in \mathrm{ObI}})$

(6-1-2) On appelle limite projective du diagramme φ, une famille admissible pour φ : $(X, (u_i)_{i \in \mathrm{ObI}})$, qui est "universelle" dans le sens suivant : pour toute famille admissible pour φ : $(Y, (v_i)_{i \in \mathrm{ObI}})$, il existe un unique morphisme $u : Y \to X$ tel que pour tout élément i de ObI, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \varphi_o(i) & \\ Y \arrow[ur, "v_i"] \arrow[rr, "u"] & & X \arrow[ul, "u_i"'] \end{tikzcd}$$

Deux limites projectives du diagramme φ sont canoniquement isomorphes. Si l'ensemble des limites projectives d'un diagramme φ n'est pas vide, on en choisit une que l'on note $\varprojlim\limits_{I} \varphi$ (ou si aucune confusion n'est possible $\varprojlim \varphi$)

Si $\varprojlim\limits_{I} \varphi = (X, (u_i)_{i \in \mathrm{ObI}})$, par abus de langage on dira que X est la limite projective de φ ,il est alors sous entendu qu'on s'est donné avec X la famille $(u_i)_{i \in \mathrm{Ob} I}$ qu'on n'explicite pas sans doute parce qu'elle est évidente.

(6-1-3) Si F est un foncteur de la catégorie C de type de diagramme sous jacent D, dans la catégorie C',la limite projective du foncteur F est la limite projective du morphisme de type de diagrammes sous jacent à F (c'est-à-dire du morphisme $F : D \to C'$)

(6-1-4) <u>Exemples</u>

Si C est la catégorie Ens $\mathcal{U}$ des ensembles d'un univers $\mathcal{U}$,I un type de diagramme, $\varphi : I \to \underline{\underline{\mathrm{Ens}}}_{\mathcal{U}}$, $\varprojlim\limits_{I} \varphi$ est un <u>sous ensemble</u> du <u>produit</u> $\prod\limits_{i \in \mathrm{Ob} I} \varphi_0(i)$ défini ainsi :

$(X_i)_{i \in \mathrm{Ob} I} \in \varprojlim \varphi \iff (\forall f)(f \in \mathrm{Fl} I, f : i \to j,\ X_j = \varphi_1(f) X_i)$

<u>En particulier</u> :

a) Si I est un type de diagramme discret (c'est-à-dire tel que $\mathrm{Fl}_I = \emptyset$)on récupère pour $\varprojlim \varphi$ le produit $\prod\limits_{i \in \mathrm{Ob} I} \varphi_0(i)$

b) Si I est la catégorie associée à un ensemble préordonné,un diagramme φ est essentiellement un "système projectif d'ensembles" (Bourbaki,Théorie des Ensembles) et l'on retrouve la notion classique de limite projective.

(6-2) Soit C une catégorie ,I un type de diagramme et φ un morphisme de I dans C. A tout objet Y de C on associe le morphisme φ^Y de I dans $\underline{\underline{\mathrm{Ens}}}_{\mathcal{U}}$ ainsi défini :

Si i appartient à Ob_I, $\varphi_o^Y(i) = Hom(Y, \varphi_o(i))$

Si α appartient à Fl_I, $\alpha : i \to j$, $\varphi_1^Y(\alpha)$ est l'application de $Hom(Y, \varphi_o(i))$ dans $Hom(Y, \varphi_o(j))$ qui à f fait correspondre $\varphi_1(\alpha).f$.

Proposition : La famille admissible $(X, (u_i)_{i \in Ob I})$ est limite projective de φ si et seulement si pour tout Y l'application naturelle $*_Y$ de $Hom(Y,X)$ dans $\prod_{i \in Ob I} Hom(Y, \varphi_o(i))$ induit une bijection de $Hom(Y,X)$ sur $\varprojlim \varphi^Y$

La famille admissible $(X, (u_i)_{i \in Ob I})$ est limite projective de φ si et seulement si $*_Y$ est une injection dont l'image est l'ensemble des familles admissibles pour φ de source Y. Or ce sous-ensemble de $\prod_{i \in Ob I} (Y, \varphi(i))$ est par définition $\varprojlim_I \varphi^Y$ (6-1-4)

(6-3) Exemples de limites projectives dans une catégorie quelconque.

(6-3-1) Soit I un type de diagramme discret, et φ un morphisme de I dans C. Si la limite projective de φ existe, $\varprojlim_I \varphi = (P, (p_i)_{i \in Ob I})$, on dit que la famille $(p_i)_{i \in Ob I}$ représente P comme produit des $X_i = \varphi(i)$, P est noté $\prod_{i \in Ob I} X_i$.

Le produit vérifie donc la propriété suivante :

Pour tout objet Z l'application de $Hom(Z, \prod_{i \in Ob I} X_i)$ dans $\prod_{i \in Ob I} Hom(Z, X_i)$ qui à f fait correspondre $(p_i f)_{i \in Ob I}$ est une bijection.

La famille de morphisme $(p_i f)_i$ est appelée quelquefois famille des composantes du morphisme f .

Considérons par exemple $X \prod X$, il existe un unique morphisme de X dans $X \prod X$ de composantes 1_X, 1_X, noté $diag._X$.

$$\begin{tikzcd} & X & \\ X \arrow[ur, "1_X"] \arrow[rr, dotted, "\mathrm{diag}_X"'] \arrow[dr, "1_X"'] & & X \Pi Y \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Dans le cas particulier où I est le type de diagramme vide (($\emptyset,\emptyset,\emptyset,\emptyset$)!) la limite projective d'un morphisme de I dans C est appelée <u>objet final</u> de la catégorie .C'est un objet Ω de C tel que pour tout objet Y de C,il existe un morphisme et un seul de Y dans Ω.

(6-3-2) Si I est le type de diagramme suivant : $\cdot \rightrightarrows \cdot$,la limite projective d'un diagramme de type I dans C : $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ s'appelle ,lorsqu'elle existe,<u>noyau du couple</u> de morphismes (f,g).C'est la donnée d'un objet Z et d'un morphisme u : Z → X possédant les propriétés suivantes :

(i) $f\,u = g\,u$

(ii) pour tout objet Z' et tout morphisme u' : Z' → X tel que $f\,u' = g\,u'$, il existe un morphisme unique v de Z' dans Z tel que u factorise u'.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "u"] & & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ & Z' \arrow[ul, "v"] \arrow[ur, "u'"'] & & \end{tikzcd}$$

Le morphisme u(quelquefois aussi l'objet Z) sera noté Ker(f,g)

<u>Remarque</u> : u est un monomorphisme.

Un diagramme du type $Z \xrightarrow{u} X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ est dit <u>exact</u> s'il fait de u le noyau du couple (f,g).

<u>Proposition</u> : Le diagramme $Z \to X \underset{\alpha}{\overset{\to}{\to}} Y$ est exact si et seulement si pour tout objet M, le diagramme $\mathrm{Hom}(M,Z) \to \mathrm{Hom}(M,X) \underset{\beta}{\overset{\to}{\to}} \mathrm{Hom}(M,Y)$ de $\underline{\mathrm{Ens}}_{\mathcal{U}}$ est exact, c'est-à-dire la première flèche est injective et son image est le sous ensemble de $\mathrm{Hom}(M,X)$ des coïncidences de α et β.

(6-3-3) Soit le type de diagramme I :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] \bullet \arrow[dr] & \\ & \bullet \\ \bullet \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

La limite projective d'un diagramme de type I dans C :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] X \arrow[dr, "f"] & \\ & Z \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

, si elle existe est appelée <u>produit fibré</u> de (X,f) et (Y,g) au dessus de Z ; il est noté $(X,f) \underset{Z}{\Pi} (Y,g)$

C'est la donnée d'un <u>objet P</u> et de <u>deux(*) morphismes</u> , $u : P \to X$, $v : P \to Y$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $f\,u = g\,v$

(ii) pour tout objet P' et tout couple de morphismes $u' : P' \to X, v' : P' \to Y$, tels que $f\,u' = g\,v'$ il existe un morphisme et un seul w de P' dans P tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dr, "f"] & \\ P' \arrow[r, "w"] \arrow[urr, "u'"] \arrow[drr, "v'"'] & P \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & Z \\ & & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Remarque</u> : Si f(resp.g) est un monomorphisme, v(resp.u) est un monomorphisme.

(6-4) Soit C une catégorie, telle que pour tout couple d'objets (X,Y), $\mathrm{Hom}(X,Y)$ soit élément d'un univers $\mathcal{U}$.

(*) Il est inutile de se donner $r : P \to Z$ tel que $r = fu = gv$.

(6-4-1) Soit $(I_\alpha)_\alpha$ une famille de type de diagrammes, I_α appartenant à $\mathcal{U}$ pour tout α, on dit que dans C les limites projectives de type $(I_\alpha)_\alpha$ existent si, pour tout α, tout $\varphi : I_\alpha \to C$ admet une limite projective.

Cette définition donne un sens aux locutions : Dans C les limites projectives existent (la famille $(I_\alpha)_\alpha$ est formée de tous les types de diagrammes appartenant à $\mathcal{U}$), les limites projectives finies existent (la famille $(I_\alpha)_\alpha$ est formée de tous les types de diagrammes finis, c'est-à-dire tels que l'ensemble $\mathrm{Ob}\, I_\alpha$ soit fini), les produits existent (la famille $(I_\alpha)_\alpha$ est formée de tous les types de diagrammes discrets...), les noyaux existent ($(I_\alpha)_\alpha$ se réduit au type de diagramme suivant : $\cdot \rightrightarrows \cdot$), etc......

(6-4-2) On vérifiera les assertions suivantes :

Dans la catégorie C les limites projectives finies existent si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(a) Les produits finis existent

(b) Les produits fibrés existent.

La condition (a) est équivalente à la condition (a') les deux-produits existent et il existe un objet final.

De plus le couple de conditions (a)(b) est équivalent au couple (a)(b') avec (b') les noyaux existent.

Dans la catégorie C, les limites projectives existent si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

(a_1) Les produits existent

(b) Les produits fibrés existent.

Le couple de conditions (a_1)(b) est équivalent au couple (a_1)(b').

Evoquons la démonstration de l'équivalence de (a)(b) et (a)(b').

Supposons (a) et (b') vérifiés et considérons deux morphismes, $f : X \to Z$, $g : Y \to Z$. Soient $X \Pi Y$ le produit de X et de Y, $p_X : X \Pi Y \to X$, $p_Y : X \Pi Y \to Y$, les morphismes canoniques, et $k : K \to X \Pi Y$ le noyau du couple de morphisme $(p_X f, p_Y g)$; $(K,\ u = p_X k,\ v = p_Y k)$ définissent le <u>produit fibré</u> de (X,f) et (Y,g) au dessus de Z. En effet :

(i) Par définition du noyau, $f\ u = g\ v$.

(ii) Soient un objet K' et deux morphismes, $u' : K' \to X$, $v' : K' \to Y$ tels que $f\ u' = g\ v'$. Par définition du produit il existe un morphisme unique $k' : K' \leftrightarrow X \Pi Y$ tel que $u' = p_X k'$, $v' = p_Y k'$. Puisque $f\ p_X k' = g\ p_Y k'$ par définition du noyau il existe un unique morphisme $w : K' \to K$ tel que $k' = k\ w$, donc tel que $u' = u\ w$ et $v' = v\ w$.

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dr, "f"] & \\
K' \arrow[urr, "u'"] \arrow[r, "w"'] \arrow[rr, bend left, "k'"] \arrow[drr, "v'"'] & K \arrow[r, "k"'] & X \Pi Y \arrow[u, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] & Z \\
 & & Y \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Réciproquement supposons (a) et (b) vérifiés, et considérons deux morphismes $f : X \to Y$, $g : X \to Y$. Soient le morphisme $\varphi : X \to Y \Pi Y$ de composantes (f,g), et le morphisme diag : $Y \to Y \Pi Y$; on considère alors le produit fibré,(K,k,k'),de (X,φ) et (Y,diag) au dessus de $Y \Pi Y$ et l'on vérifie que $k : K \to X$ possède les propriétés du noyau du couple de morphismes (f,g).

(6-4-3) Soient un type de diagramme I, un morphisme de type de diagramme $\varphi : I \to C$ et un foncteur F de la catégorie C dans une catégorie C'. Si $(Y,(u_i)_{i \in \mathrm{Ob}I})$ est une famille admissible pour φ alors $(F_0(Y),(F_1(u_i))_{i \in \mathrm{Ob}I})$ est une famille admissible pour $F\varphi : I \to C'$.

Si la limite projective de φ existe, $\varprojlim_{I} \varphi = (X,(v_i)_i)$ et si la limite projective de $F\varphi$ existe, $\varprojlim_{I} F\varphi = (X',(v'_i)_i)$ il existe alors un unique morphisme $\hat{\varphi} : F_0(X) \to X'$ tel que pour tout élément i de $\mathrm{Ob}\,I$ le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F_0(X) \arrow[rr, "F_1(v_i)"] \arrow[dr, "\hat{\varphi}"'] & & F\varphi_0(i) \\
& X' \arrow[ur, "v'_i"'] &
\end{tikzcd}$$

On dit que le foncteur F <u>commute aux limites projectives de type I</u>, si pour toute $\varphi : I \to C$ admettant une limite projective, et tel que $F\varphi : I \to C'$ admette une limite projective, le morphisme $\hat{\varphi}$ est un isomorphisme. Ce qui se traduit par la formule :

$$F(\varprojlim_{I} \varphi) \simeq \varprojlim_{I} F\varphi$$

Soit $(I_\alpha)_\alpha$ une famille de type de diagramme, I_α appartenant à $\mathcal{U}$ pour tout α, on dit que le foncteur F <u>commute aux limites projectives de types $(I_\alpha)_\alpha$</u> si pour tout α, F commute aux limites projectives de type I_α.

Ces définitions donnent un sens aux locutions : le foncteur F <u>commute aux limites projectives, commute aux limites projectives finies, commute aux produits, commute aux noyaux</u>, etc.....

<u>Exemple</u> : Si C est une catégorie définie par des espèces de structures algébriques, ou topologiques, ou algébro-topologiques, on définit un foncteur <u>oubli de structure</u> noté Oub de C dans Ens, qui à un objet de C associe l'ensemble sous-jacent, et à un morphisme de C associe l'application d'ensembles sous-jacente. Pour ces catégories, le foncteur Oub commute généralement aux limites projectives. Par exemple considérons la catégorie notée <u>Top</u>, des espaces topologiques, un type de diagramme I et un morphisme de type de diagramme, φ, de I dans C. On sait que $\varprojlim_I \mathrm{Oub}.\varphi$ existe, c'est un sous-ensemble de $\prod_{i \in \mathrm{Ob} I} \mathrm{Oub}\ \varphi_0(i)$, lequel peut être muni canoniquement d'une structure topologique (topologie initiale). On vérifie alors que le sous-espace topologique $\varprojlim \mathrm{Oub}\ \varphi$ satisfait à la propriété universelle de la limite projective de φ dans <u>Top</u>. On en déduit que dans <u>Top</u>, les limites projectives existent et que de par leur construction même, le foncteur Oub commute aux limites projectives.

(6-4-4) Soient C et C' deux catégories et F un foncteur de C dans C'. Le foncteur F est dit <u>exact à gauche</u>, s'il <u>commute aux limites projectives finies</u>, ou ce qui est équivalent lorsque dans C les limites projectives finies existent, s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(a) F commute aux produits finis.

(b) F commute aux produits fibrés.

La condition (a) est équivalente à

(a') F commute aux deux-produit et transforme objet final en objet final.

Le couple de condition (a)(b) est équivalent au couple (a)(b') avec

(b') F commute aux noyaux.

De plus si dans C les limites projectives existent, F commute aux limites projectives si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

(a_1) F commute aux produits

(b) F commute aux produits fibrés (ou aux noyaux)

(6-5) <u>Limite inductive</u> :

Soit un type de diagramme I, une catégorie C, et un morphisme de type de diagramme $\varphi: I \to C$.

(6-5-1) Une famille de morphismes de C est dite <u>coadmissible</u> pour φ si elle est admissible pour φ^o

(6-5-2) On appelle <u>limite inductive</u> de φ , une limite projective de φ^o.

Une limite inductive de $\varphi, (X, (u_i)_{i \in O\, I})$, est donc "universelle" au sens suivant : pour toute famille coadmissible pour φ, $(Y,(v_i)_{i\in \mathrm{Ob} I})$ il existe un morphisme unique $u : X \to Y$ tel que pour tout élément i de $\mathrm{Ob} I$ le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& \varphi_o(i) \arrow[dl, "v_i"'] \arrow[dr, "u_i"] & \\
Y & & X \arrow[ll, "u"]
\end{tikzcd}$$

Deux limites inductives de φ étant canoniquement isomorphes, si l'ensemble des limites inductives de φ, n'est pas vide on en choisit une que l'on note $\varinjlim_I \varphi$.

On peut alors écrire : $\varinjlim_I \varphi \simeq \varprojlim_I \varphi^o$

(6-6) <u>Exemples de limites inductives</u>

(6-6-1) Soit I un type de diagramme <u>discret</u>, et $\varphi : I \to C$. Si la limite inductive de φ existe, $\varprojlim_I \varphi = (S,(e_i)_{i\in \mathrm{Ob} I})$ on dit que la famille $(e_i)_i$ <u>représente S comme somme directe des $X_i = (i)$</u>. On note $S = \coprod_{i\in \mathrm{Ob} I} X_i$.

Le somme directe vérifie donc la propriété suivante :

Pour tout objet Z l'application de $\mathrm{Hom}(\coprod_{i\in \mathrm{Ob} I} X_i, Z)$ dans $\prod_{i\in \mathrm{Ob} I} \mathrm{Hom}(X_i, Z)$ qui à f fait correspondre $(fe_i)_{i\in \mathrm{Ob} I}$ est une <u>bijection</u>.

Dans le cas particulier où le type de diagramme I est <u>vide</u>, la limite inductive est appelée <u>objet initial</u> de la catégorie C. Donc ε est un objet initial si et seulement si pour tout objet Y de C, $\mathrm{Card}.\mathrm{Hom}(\varepsilon, Y) = 1$

[illegible] initial et final est appelé un <u>objet nul</u> il est souvent noté 0_c.

(6-6-2) Si I est le type de diagramme : $\cdot \rightrightarrows \cdot$, la limite inductive d'un diagramme de type I dans C : $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ s'appelle, lorsqu'elle existe, le <u>conoyau</u> du couple de morphisme (f,g). C'est la donnée d'un objet Z et d'un morphisme $u : Y \to Z$ tel que :

(i) $u f = u g$

(ii) pour tout objet Z' et tout morphisme $u' : Y \to Z'$ tel que $u'f = u'g$, il existe un morphisme unique v de Z dans Z' tel que v factorise u' :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "u'"'] & Z \arrow[d, "v"] \\ & & Z' \end{tikzcd}$$

Le morphisme u, (et quelquefois par abus de langage l'objet Z) sera noté Coker(f,g).

<u>Remarque</u> : u est un epimorphisme.

(6-6-3) Soit le type de diagramme I : $\begin{tikzcd}[row sep=small] \cdot & \\ & \cdot \arrow[ul] \arrow[dl] \\ \cdot & \end{tikzcd}$, la limite inductive d'un diagramme de type I dans C : $\begin{tikzcd}[row sep=small] X & \\ & Z \arrow[ul, "f"'] \arrow[dl, "g"] \\ Y & \end{tikzcd}$ si elle existe est appelée somme <u>amalgamée</u> de (X,f) et (Y,g) au-dessus de Z, elle est notée $(X,f)\coprod_Z (Y,g)$. C'est donc la donnée d'un objet S et de deux morphismes $u : X \to S$, $v : Y \to S$ vérifiant les propriétés.... que le lecteur précisera.

<u>Remarque</u> : Si f(resp.g) est un épimorphisme, v(resp.u) est un épimorphisme.

<u>Exemple</u> :

Dans la catégorie des <u>anneaux commutatifs avec élément unité</u>, on considère trois anneaux X,Y,Z et les morphismes $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$. Grace à f on munit X d'une structure de Z module, l'application de $Z \times X$ dans X étant définie par $(x.y) \rightsquigarrow f(x).y$.

On procède de même pour Y avec g, et Z avec l'application identique. On montrera que le Z module $X \otimes_Z Y$ muni de la multiplication $(x \otimes y).(x' \otimes y') = x x' \otimes y y'$ et les homomorphismes d'anneaux $u : X \to X \otimes_Z Y$ tel que $u(x) = x \otimes e_Y$ (où e_Y est l'élément unité de y) et $v : Y \to X \otimes_Z Y$ tel que $v(y) = e_X \otimes y$, définissent la somme amalgamée $(X,f) \coprod_Z (Y,g)$.

(6-6-4) Dans les catégories définies par des espèces de structures algébriques, <u>les limites inductives existent</u>, mais l'exemple qui précède montre que leur construction n'est pas aussi simple que dans le cas projectif. Cependant dans le cas pqrticulier de la catégorie <u>Top</u>, on constate que le foncteur Oub commute aux limites inductives. Soit $\varphi : I \to$ <u>Top</u> un morphisme de type de diagramme, on considère la limite inductive de Oub. $\varphi : I \to$ <u>Ens</u> , $(E,(u_i)_{i \in \mathrm{Ob} I})$. On munit E de la topologie la plus fine rendant les u_i continues; il suffit de prendre pour ouverts de E, les éléments U de $\mathcal{P}(E)$ tels que pour tout i $\varphi_i^{-1}(U)$ soit un ouvert de $\varphi(i)$. On vérifie que l'espace topologique E est bien la limite inductive cherchée. Mais cette construction n'est valable qu'exceptionnellement, on montrera par exemple qu'elle est en échec dans le cas de <u>Top comp</u> , catégorie des espaces topologiques compacts.

(6-7) On énoncera les définitions et propriétés duales de celles développées dans le paragraphe (6-4). On établira des conditions nécessaires et suffisantes d'existence <u>des limites inductives</u> (resp. finies) dans une catégorie C. On définira un foncteur F de C dans C' commutant aux limites inductives de type I.......On définira un foncteur exact à droite.

(6-7-1) Un <u>foncteur exact</u> est un foncteur exact à gauche et exact à droite.

(6-7-2) Bien qu'il n'y ait théoriquement rien à ajouter pour un <u>foncteur contravariant</u> F de C dans C', il faut cependant remarquer que F commute aux limites projectives (resp. inductives) de type I, si pour tout $\varphi : I \to C$ admettant une limite inductive (resp. projective) et tel que $F\varphi$ admette une limite **projective** (resp. inductive) on a $\varprojlim_{I}(F\varphi) \simeq F(\varinjlim_{I} \varphi)$ (resp. $\varinjlim_{I}(F\varphi) \simeq F(\varprojlim_{I} \varphi)$).

(6-8) <u>Propriérés générales des limites inductives et projectives</u>.

(6-8-1) Soit C une catégorie, I un type de diagrammes. Les diagrammes de type I dans C qui qui admettent une limite projective forment une sous catégorie strictement pleine de <u>Diag</u> (I,C), notée <u>Diag</u> p(I,C). L'application qui à φ fait correspondre $\varprojlim_{I} \varphi$, de de Diag p(I,C) dans Ob C, <u>définit un foncteur</u> de Diag p(I,C) dans C. En effet si φ et ψ sont deux objets de <u>Diag</u> p(I,C), u une flèche de φ dans ψ, par définition de $\varprojlim \varphi$, $\varprojlim \psi$ et de u, pour tout couple (i,j) d'objets de I et toute flèche $f : i \to j$ on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim \varphi \arrow[dr, "u_i"] \arrow[ddr, "u_j"'] & & & \varprojlim \psi \arrow[dl, "v_i"'] \arrow[ddl, "v_j"] \\
& \varphi_o(i) \arrow[r, "u(i)"] \arrow[d, "\varphi_1(f)"] & \psi_o(i) \arrow[d, "\psi_1(f)"] & \\
& \varphi_o(j) \arrow[r, "v(j)"'] & \psi_o(j) &
\end{tikzcd}$$

La famille $(\varprojlim \varphi, (u(i)u_i)_{i \in \mathrm{Ob}\, I})$ est admissible pour ψ, il existe donc une flèche <u>unique</u> de $\varprojlim \varphi$ dans $\varprojlim \psi$, que l'on note $\varprojlim u$, et telle que $v_i \varprojlim u = u(i)u_i$ pour tout $i \in \mathrm{O}\, I$.

Le foncteur ainsi défini se note $\varprojlim(I,C)$ ou $\varprojlim$: <u>Diag</u> $p(I,C) \to C$

<u>Proposition</u> Pour tout type de diagramme I, et toute catégorie C, le foncteur $\varprojlim(I,C)$ commute aux limites projectives.

Dualement on définit un foncteur de <u>Diag</u> $i(I,C)$ dans C, noté $\varinjlim(I,C)$ qui commute aux limites inductives.

Il n'y a aucun énoncé, valable pour toute catégorie, sur la commutativité entre les limites projectives et injectives.

(6-8-2) <u>Proposition</u> : Soit I un type de diagramme, C' une catégorie où les limites projectives (resp.$_1$ injectives) de type I existent. Alors pour tout type de diagramme D, (resp$_2$ toute catégorie C) les limites projectives (resp$_1$ injectives) de types I existent dans <u>Diag</u>(D,C') (resp$_2$ <u>Hom</u>(C,C')).

Soit φ un diagramme de type I dans <u>Diag</u>(D,C'). A tout objet d de D, l'application $i \rightsquigarrow \varphi(i)(d)$ associe un morphisme $\Phi_d : I \to C'(\Phi_d(i) = \varphi(i)(d))$. Soit $X_d = \varprojlim \Phi_d$ l'application $d \rightsquigarrow X_d$ définit un morphisme Φ de D dans C' :

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & X_d \arrow[d, "\Phi(\delta) = \varprojlim_I \varphi(i)(\delta)"] \\
d' \arrow[r] & X_{d'}
\end{tikzcd}$$

Soit une famille admissible $(\Omega,(v_i)_{i\in \mathrm{Ob}I})$ pour le morphisme φ .Pour tout objet d de D,il existe alors un morphisme v_d unique de $\Omega(d)$ dans X_d tel que pour tout i de ObI le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Omega(d) \arrow[rr, "v_i(d)"] \arrow[dr, dashed, "v_d"'] & & \varphi(i)(d) = \Phi_d(i) \\ & X_d \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Donc $\Phi = \varprojlim\limits_{I} \varphi$

(6-6-3) Dans <u>Cat</u> $\mathcal{U}$,pour tout type de diagramme I élément de $\mathcal{U}$,les limites projectives (resp.inductives) de type I existent.Si I est discret on retrouve le produit (resp.la somme) de catégories.

7 - <u>Catégorie filtrante</u> :

(7-1) <u>Définitions</u> :

(7-1-1) Une catégorie I est <u>pseudo-filtrante</u> à gauche si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

a) pour tout diagramme de I du type $\begin{tikzcd}[row sep=small] X \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & Z \\ Y \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$ il existe un objet M et deux morphismes, $f : M \to X$, $g : M \to Y$.

b) Pour tout diagramme de I du type $X \underset{v}{\overset{u}{\rightrightarrows}} Y$ il existe un morphisme $h : T \to X$ tel que $u\,h = v\,h$.

Une catégorie I est **pseudo** filtrante à droite si I^o est pseudo filtrante à gauche on écrira les conditions a'),b') correspondantes.

(7-1-2) Une catégorie I est <u>connexe</u> si la propriété suivante est vérifiée :

c) Pour tout couple(P,Q) d'objet,il existe une suite finie d'objets :

$P_o = P$, $P_1,\ldots,P_i,P\ldots P_n = Q$,telle que $\mathrm{Hom}(P_i,P_{i+1}) \neq \phi$,ou $\mathrm{Hom}(P_{i+1},P_i) \neq \emptyset$ pour $i = 0,\ldots,n-1$

(7-1-3) Une catégorie I est <u>filtrante à gauche</u> (resp.à droite) si les conditions a),b),c) (resp.a'),b'),c)) sont vérifiées.

<u>Remarque</u> :

On considère la condition suivante :

α) Pour tout couple d'objets (X,Y) de I,il existe un objet M et deux morphismes $f : M \to X$, $g : M \to Y$.

La condition α) est équivalente au couple de conditions (a),c))

Donc une catégorie I est <u>filtrante à gauche</u> (resp. à droite) si les conditions α),b) (resp.α') b')) sont vérifiées.

Une catégorie I est <u>filtrante</u> si elle est filtrante à gauche et à droite.

(7-2) Exemples

(7-2-1) Si dans une catégorie C,pour tout couple d'objet le produit (resp.la somme) existe,et si pour tout couple de morphismes le noyau(resp.le conoyau) existe,alors C est filtrante à gauche (resp. filtrante à droite).

(7-2-2) La catégorie associée à un ensemble préordonné I est filtrante si et seulement si I est filtrant.

(7-2-3) Dans la catégorie des ensembles,des groupes,des modules sur un anneau...., les limites inductives filtrantes,c'est-à-dire les limites inductives de foncteurs d'une catégorie filtrante dans la catégorie en question,sont des foncteurs exacts à gauche,donc exacts,puisqu'on sait qu'ils sont exacts à droite.

Chapitre 2

Catégorie abélienne

1. Catégorie additive

On peut donner deux versions de la définition d'une catégorie additive, l'une consiste à se donner sur les ensembles Hom(X,Y) une structure de groupe abélien, cette structure supplémentaire étant soumise à certaines conditions ; l'autre consiste à construire canoniquement une loi de groupe sur tout Hom(X,Y) en terme d'axiomes convenables sur la catégorie C.

(1-1) Version 1

Une catégorie additive est une catégorie C où pour tout couple d'objets (X,Y) de C est donnée une structure de groupe abélien sur Hom(X,Y), les axiomes suivants étant vérifiés:

C A_1. Pour tout triplet d'objets (X,Y,Z) de C, l'application $(u,v) \rightsquigarrow v\,u$ de $Hom(X,Y) \times Hom(Y,Z)$ dans Hom(X,Z) est bilinéaire.

C A_2. Les sommes directes finies existent, ou ce qui est équivalent il existe un objet initial et pour tout couple d'objets la somme existe.

L'axiome C A_2 est équivalent à l'axiome C A_2'. Les produits finis existent ou ce qui est équivalent il existe un onjet final et pour tout couple d'objets le produit existe.

(1-1-1) Tout objet initial est final. En effet si ε est un objet initial, $Hom(\varepsilon,X)$ se réduit à un seul élément noté 0 (puisque c'est l'élément neutre pour le groupe $Hom(\varepsilon,X)$ en particulier $Hom(\varepsilon,\varepsilon) = 1_\varepsilon = 0$,donc pour tout élément f de $Hom(Y,\varepsilon)$, $f = 1_\varepsilon f = 0$; $Hom(Y,\varepsilon)$ se réduit, à l'élément 0.

Il y a donc équivalence entre les propositions suivantes :

ε est un objet initial

ε est un objet final

$1_\varepsilon = 0$

Dans une catégorie additive il existe donc un <u>objet nul</u> ,deux objets nuls étant canoniquement isomorphes, parmi les objets nuls on en choisit un que l'on note aussi 0.

<u>Remarque</u> : Dans une catégorie C à objet nul 0, pour tout couple d'objet (X,Y) on définit un morphisme nul de X dans Y qui est le composé de $X \to 0$ et $0 \to Y$. Dans le cas où C est additive ce morphisme nul est évidemment l'élément neutre du groupe $Hom(X,Y)$

(1-1-2) Si pour tout couple d'objets (X,Y), la somme $X \amalg Y$ existe, alors le produit existe et $X \amalg Y \simeq X \Pi Y$, on peut <u>choisir</u> $X \Pi Y = X \amalg Y$, on note cet objet $X \oplus Y$. Si (e_X, e_Y) représentent $X \amalg Y$ comme somme de X et Y le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "e_X"'] \arrow[dr, "1_X"] & \\ X \amalg Y & & X \\ & Y \arrow[ul, "e_Y"] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

montre qu'il existe un unique morphisme $p_X : X \amalg Y \to X$ tel que $p_X e_X = 1_X$ et $p_X\, e_Y = 0$. De même il existe un unique morphisme $p_Y : X \amalg Y \to Y$ tel que $p_Y\, e_Y = 1_Y$ et $p_Y\, e_X = 0$. On vérifie que les applications $e_X\, p_X + e_Y\, p_Y$ et $1_{X \amalg Y}$ ont les mêmes composantes donc $e_X\, p_X + e_Y\, p_Y = 1_{X \amalg Y}$. Alors p_X et p_Y représentent $X \amalg Y$ comme produit de X et de Y , en effet pour tout objet Z de C et tout couple de morphismes $u : Z \to X$, $v : Z \to Y$, l'application $e_X\, u + e_Y\, v : Z \to X \amalg Y$ rend le diagramme suivant commutatif, et c'est la seule.

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
Z \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, dotted] \arrow[dr, "v"'] & & X \amalg Y \arrow[ul, "p_X"'] \arrow[dl, "p_Y"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

(1-2) <u>Version 2</u> :

Soit C une catégorie satisfaisant aux axiomes suivants :

$C\,A'_1$: Il existe un objet nul

$C\,A'_2$: Pour tout couple (X,Y) d'objets de C , le produit et la somme existent.

La catégorie C admettant un objet nul, il existe un unique morphisme $C_{XY} : X \amalg Y \to X \prod Y$ tel que les diagrammes suivants soient commutatifs.

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
X \arrow[ur, "1_X"] \arrow[rr, dotted, "f_X"] \arrow[dr, "0"'] & & X \prod Y \arrow[ul, "p_X"'] \arrow[dl, "p_Y"] \\
& Y &
\end{tikzcd}
;\quad
\begin{tikzcd}
& X & \\
Y \arrow[ur, dotted, "0"] \arrow[rr, "f_Y"] \arrow[dr, "1_Y"'] & & X \prod Y \arrow[ul, dotted, "p_X"'] \arrow[dl, dotted, "p_Y"] \\
& Y &
\end{tikzcd}
;\quad
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f_X"'] \arrow[dr, dotted, "e_X"] & \\
X \prod Y & & X \amalg Y \arrow[ll, "c_{XY}"'] \\
& Y \arrow[ul, "f_Y"] \arrow[ur, "e_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

C A'_3 Pour tout couple d'objets (X,Y), C_{XY} est un isomorphisme.

A tout couple (u, v) de morphismes de X dans Y on fait correspondre alors un morphisme de X dans Y défini par le diagramme suivant :

$$X \xrightarrow{(u\,;\,v)} Y \prod Y \xrightarrow{C_{XY}^{-1}} Y \amalg Y \xrightarrow{\text{Codiag}} Y$$

On obtient ainsi sur Hom (X,Y) une structure de monoïde commutatif avec élément unité. L'application naturelle de Hom(X,Y) X Hom(Y,Z) dans Hom(X,Z) est bilinéaire.

C A'_4 Pour tout couple d'objets (X,Y), le monoïde Hom(X,Y) construit ci-dessus est un groupe.

On montre le lemme suivant : Soit C une catégorie , il existe au plus une fonction qui à tout couple d'objets (X,Y) de C associe une structure de monoïde associatif sur Hom(X,Y) tel que la composition des morphismes soit bilinéaire.(*) On en déduit que les définitions (1-1) et (1-2) d'une catégorie additive sont équivalentes.

(1-3) Noyau et conoyau d'un morphisme :

Dans une catégorie avec objet nul on considère un morphisme

$f : X \to Y$

(*) Ce lemme est un cas particulier d'une proposition que l'on trouvera dans : Eckmann- Hilton. Group-like structures in general categories-Math.Ann. (62-63)

(1-3-1) Le <u>noyau</u> (resp. conoyau) de f est, lorsqu'il existe, le <u>noyau</u> (resp. conoyau) <u>du couple de morphismes</u> (f,0).

Le noyau de f est donc un morphisme $u : K \to X$ tel que : (i) $f u = 0$

(i i) Pour tout morphisme $u' : K' \to X$, tel que $f u' = 0$, il existe un morphisme unique $v : K' \to K$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "u"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ & K' \arrow[ul, "v"] \arrow[u, "u'"'] & \end{tikzcd}$$

. Le morphisme u (et quelquefois aussi l'objet K) est <u>noté Kerf</u>. On rappelle que le noyau de f est un <u>monomorphisme</u>.

Dualement on écrira la définition du conoyau de f, noté cokerf, qui est un <u>épimorphisme</u>.

Sous la seule hypothèse de l'existence d'un objet nul dans une catégorie C, tout monomorphisme (resp. épimorphisme) a un noyau (resp. un conoyau) nul.

(1-3-2) Dans une <u>catégorie additive</u>, la réciproque est vraie, et l'on a la :

<u>Proposition</u> : Un morphisme est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si son noyau (resp. conoyau) est nul.

(1-4) Foncteur additif :

(1-4-1) Soient C et C' deux catégories additives, F un foncteur de C dans C', les conditions suivantes sont équivalentes

(a) Pour tout couple d'objets (X Y) de C , l'application :

$F o|_{Hom(X,Y)} : Hom(X,Y) \to Hom(F(X), F(Y))$ est un morphisme de groupe abélien .

(b) Le foncteur F commute aux sommes finies.

(c) Le foncteur F commute aux produits finis.

On appelle foncteur additif un foncteur vérifiant l'une de ces conditions.

(1-4-2) Exemples :

Soit C une catégorie additive ; pour tout objet X de C , le foncteur $Hom(X,.)$ de C dans la catégorie des groupes abéliens Ab , défini par $Y \rightsquigarrow Hom(X,Y)$ et le foncteur contrariant $Hom(.,X)$, sont additifs.

Soit Mod_A^S la catégorie des modules à gauche sur un anneau A , pour tout module à droite X sur A le foncteur $X \otimes_A .$ de Mod_A^S dans Ab défini par $Y \rightsquigarrow X \otimes_A Y$ et $f \rightsquigarrow 1_X \otimes f$ est additif.

Plus généralement un foncteur exact à droite ou à gauche, d'une catégorie additive dans une autre est additif.

1-5 Image, coimage d'un morphisme.

Dans une catégorie avec objet nul, soit f un morphisme admettant un noyau et un conoyau. Si le conoyau de Kerf (resp. le noyau de Cokerf) existe, on l'appelle <u>coimage de f</u>, on le note Coim f(resp. <u>image</u> de f , Imf).

Si Imf, Coimf existent, soit $\hat{f}$ l'unique morphisme de X dans K' tel que $Imf.\hat{f} = f$, Imf est un mono, donc $\hat{f}$ Kerf = 0 et il existe un <u>unique morphisme</u> $\bar{f}$ <u>de K' dans C'</u> tel que $f = Imf.\bar{f}.Coimf$.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\mathrm{Ker}\,f"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Coim}\,f"'] \arrow[dr, dotted, "\hat{f}"] & Y \arrow[r, "\mathrm{Coker}\,f"] & C \\
 & C' \arrow[r, "\bar{f}"'] & K' \arrow[u, "\mathrm{Im}\,f"'] &
\end{tikzcd}$$

2. <u>Catégorie abélienne</u>

(2.1) Une <u>catégorie abélienne</u> est une catégorie additive qui vérifie les axiomes suivants :

AB_1 Pour tout morphisme, le noyau et le conoyau existent

AB_2 Pour tout morphisme $f : X \to Y$, $\bar{f} : C' \to K'$ est un isomorphisme.

Une conséquence de ces axiomes est que tout morphisme f se décompose de façon canonique en un monomorphisme et un épimorphisme $f = Imf.Coimf$.

On remarque également que pour tout couple (f,g) de morphismes de même but (resp. de même source) A le produit fibré (resp. la somme amalgamée) existe.

On vérifie par exemple que $(X,f) \prod_A (Y,g) = Ker(f\, p_X - g\, p_Y)$ ou $X = s(f)$, $Y = s(g)$.

(2.2) <u>Axiomes supplémentaires dans une catégorie abélienne</u>

Pour une catégorie C appartenant à un univers $\mathcal{U}$ il est quelquefois utile d'ajouter certains des axiomes suivants :

(2.2.1) <u>$AB_{3\mathcal{U}}$</u> Pour tout objet I de <u>$\text{Diag}_{\mathcal{U}}$</u>, les diagrammes de type I dans C possèdent une limite inductive.

<u>Remarque</u>.Pour qu'il en soit ainsi il suffit que les sommes indéxées par tout I appartenant à $\mathcal{U}$ existent.

(2.2.2) <u>$AB_{4\mathcal{U}}$</u> . $AB_{3\mathcal{U}}$ est vérifié et pour tout objet I de <u>$\text{Diag}_{\mathcal{U}}$</u>, la somme directe $\coprod_{i\in I} u_i$ d'une famille $(u_i)_{i\in I}$ de monomorphisme est un monomorphisme.

<u>Remarque</u>. Cela revient à dire que la somme directe commute aux noyaux, et se trouve donc être un foncteur exact.

(2.2.3) <u>$AB_{5\mathcal{U}}$</u> (est strictement plus fort que $AB_{4\mathcal{U}}$) : $AB_{3\mathcal{U}}$ est vérifié et pour toute catégorie filtrante I, élément de $\mathcal{U}$, le foncteur $\varinjlim_{I}$: <u>Hom</u>(I,C) → C est exact.

On énonce de façon duale des axiomes notés $AB^*_{3\mathcal{U}}$ $AB^*_{4\mathcal{U}}$, $AB^*_{5\mathcal{U}}$. Il serait déraisonnable de prétendre imposer simultanément à une catégorie les axiomes $AB_{5\mathcal{U}}$ et $AB^*_{5\mathcal{U}}$, car alors tout objet de C est nul....

(2.2.4) Famille génératrice

Soit C une catégorie . On dit qu'une famille $(A\,i)_{i\in I}$ d'objet ,de C,est une famille génératrice si pour tout objet X de C et tout monomorphis e $f : Y \to X$ qui n'est pas un isomorphisme, il existe i appartenant à I et un mo phisme $u : Ai \to X$, tels que u ne se factorise pas par f.

Un objet de C est un générateur si la famille réduite à ce se l élément est une famille génératrice.

Proposition Soit $(Ai)_{i\in I}$, une famille d'objets de C telle que la s m $A = \coprod_{i\in I} Ai$ existe. La famille $(Ai)_{i\in I}$ est une famille génératrice si et seulement si A est un générateur.

En effet, soient un objet X et un monomorphisme $f : Y \to X$; pour qu'un morphisme $u : A \to X$ se factorise par f il faut et il suffi que pour tout i élément de I la composante u_i se factorise par f.

Une catégorie additive C admet toujours une famil e génératrice, à savoir la famille de tous les objets. Mais pour une "grosse catégor e", par exemple la catégorie de tous les groupes appartenants à un univers donné $\mathcal{U}$, cette famille a le tort de ne pas être indéxée par un I élément de $\mathcal{U}$. Aus i s'impose-t-on l'áxiome : $AB_{6\mathcal{U}}$: Il existe une famille génératrice $(Ai)_{i\in I}$, de C avec I élément de $\mathcal{U}$.

Exemple : Soit A un anneau appartenant à un univers $\mathcal{U}$, la catégorie Mod_A^s de tous les modules à gauche sur A admet A , considéré comme A module à gauche, comme générateur.

On définit dualement les notions de famille cogénératrice, de cogénérateur, on énonce un axiome $AB^*_{6\mathcal{U}}$ dual de $AB_{6\mathcal{U}}$.

(2.2.5) Il sera bon de vérifier que la catégorie $\mathrm{Mod}^s\, A\, \mathcal{U}$ est abélienne et satisfait aux axiomes précédemment énoncés, à ceci près que AB 5* est faux et que AB^*_6 n'est pas évident.....

3. <u>Exactitude dans une catégorie abélienne</u>.

(3-1) <u>Suite exacte</u> :

Une suite de morphismes $(u_i)_{i\in[a,b]}$, $[a,b] \subset Z$ telle que $s(u_i)= b(u_{i-1})$ est "<u>nulle</u>" (resp. <u>exacte</u>) si pour tout i , $a < i \leq b$, $u_i . u_{i-1} = 0$ (resp. Ker u_i est isomorphe à Im u_{i-1} , ou ce qui est équivalent Coker u_{i-1} est isomorphe à Coim u_i .)

On appelle suite <u>exacte courte</u> une suite exacte du type

$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$. Une telle suite est aussi appelée une <u>extension</u> de A' par A".

Par définition même d'une suite exacte, un morphisme $f : X \to Y$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si la suite $0 \to X \to Y$ (resp. $X \to Y \to 0$) est <u>exacte</u>.

(3-2) Suite soindée.

On dit qu'une suite exacte courte $0 \to A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \to 0$ se scinde si elle possède l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(a) f est rétractable, c'est à dire il existe $r : A \to A'$ tel que $r.f = 1_{A'}$

(b) g est sectionnable, c'est-à-dire il existe $s : A'' \to A$, tel que $g\,s = 1_{A''}$

(c) il existe $s : A'' \to A$ (resp. $r : A \to A'$) tel que (f,s), (resp. (g,r)) représente A comme somme directe (rep. produit direct) de A' et A''.

(d) Il existe $r : A \to A'$ et $s : A'' \to A$ tels que $fr + sg = 1_A$

On dit aussi que A' ou A'' est facteur direct de A.

(3-3) Foncteur exact.

(3-3-1) Proposition : Soient C et C' deux catégories abéliennes T un foncteur de C dans C'. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) T est exact à droite (resp. à gauche)

(b) T est additif et pour toute suite exacte $A' \to A \to A'' \to 0$ (resp. $0 \to A' \to \to A \to A''$) la suite $T(A') \to T(A) \to T(A'') \to 0$ (resp. $0 \to T(A') \to T(A) \to T(A'')$) est exacte.

Remarque : Si l'on considère un foncteur contravariant T de C dans C', la proposition se traduit ainsi :

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(a') T est <u>exact à droite</u> (resp. à gauche)

(b') T est <u>additif</u> et pour toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A''$ (resp. $A' \to A \to A'' \to 0$) la suite $T(A'') \to T(A) \to T(A') \to 0$ (resp. $0 \to T(A'') \to T(A) \to T(A'))$ est exacte.

On en déduit qu'un foncteur T (resp. un foncteur contravariant) est <u>exact</u> si et seulement si T est <u>additif</u> et pour <u>toute suite exacte</u> $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, <u>la suite</u> $0 \to T(A') \to T(A) \to T(A'') \to 0$ (resp. $0 \to T(A'') \to T(A) \to T(A') \to 0$ <u>est exacte</u>.

(3-3-2) <u>Exemples</u> :

Si C est une catégorie abélienne, pour tout objet X de C, les foncteurs Hom(X, .) et Hom(., X) sont exacts à gauche.

Pour tout module à droite X sur A, le foncteur $X \otimes_A . : Mod^s_A \to A_b$ est exact à droite.

(3-3-3) On dit qu'un foncteur T (resp. un foncteur contravariant) est <u>semi exact</u> s'il est additif et si pour toute suite exacte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ la suite $T(A') \to T(A) \to T(A'')$ (resp. $T(A'') \to T(A) \to T(A'))$ est exacte.

4 - <u>Diagrammes dans une catégorie abélienne</u>

(4-1) Deux théorèmes vont nous permettre de transposer certains résultats connus sur les catégories des groupes abéliens, ou de modules, dans une catégorie abélienne quelconque.

(4-1-1) * <u>Théorème</u> .Pour toute catégorie abélienne C appartenant à un univers $\mathcal{U}$,il existe un <u>foncteur exact</u> et <u>fidèle</u> de C dans $Ab_{\mathcal{U}}$.

(4-1-2) * <u>Théorème de Freyd</u>

Pour toute catégorie abélienne appartenant à un univers $\mathcal{U}$,il existe un anneau A appartenant à $\mathcal{U}$ et un foncteur <u>exact et pleinement fidèle</u> de C dans $Mod_{A\mathcal{U}}$

Ce résultat implique le théorème précédent.

(4-1-3) <u>Lemme</u> : Soit C et C' des catégories abéliennes et F un foncteur exact de C dans C'.Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) F est fidèle

(b) Pour tout objet X de C,F(X) = 0 implique X = 0

(c) F est <u>conservatif</u> ,c'est-à-dire pour toute flèche u de C,F(u) est inversible implique que u est inversible.

(d) Pour toute flèche u de C,F(u) est un monomorphisme (resp.un épimorphisme) implique que u est un monomorphisme (resp.un épimorphisme)

(4-2) <u>Applications</u>

(4-2-1) <u>Lemme des 5</u>

Dans une catégorie abélienne C ,on considère le diagramme commutatif suivant,où les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
A_{-2} \arrow[r] \arrow[d, "f_{-2}"] & A_{-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{-1}"] & A_{o} \arrow[r] \arrow[d, "f_{o}"] & A_{1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{1}"] & A_{2} \arrow[d, "f_{2}"] \\
B_{-2} \arrow[r] & B_{-1} \arrow[r] & B_{o} \arrow[r] & B_{1} \arrow[r] & B_{2}
\end{tikzcd}$$

Si f_{-1} et f_1 sont des monomorphismes (resp.des épimorphismes) et si f_{-2} est un épimorphisme (resp.f_2 un monomorphisme),alors f_o est un monomorphisme (resp.un épimorphisme).

On en déduit que si f_{-1} et f_1 sont des isomorphismes,si f_{-2} est un épimorphisme,et f_2 un monomorphisme,alors f_o est un isomorphisme.

Ce résultat est bien connu dans $A_{b\mathcal{U}}$ et se transpose dans C à l'aide du théorème 4-1-1 et du lemme 4-1-3

(4-2-2) On appelle carré cartésien le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] & B \\
B' \arrow[u, "v'"] \arrow[r, "u'"'] & A' \arrow[u, "v"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel B' est le produit fibré de (A,u) et (A',v) au dessus de B.

Dans une catégorie abélienne si v est un monomorphisme (resp.un épimorphisme) v' est un monomorphisme (resp.un épimorphisme),on a la même propriété pour u.

On écrira la propriété duale dans le carré cocartésien.

(4-2-3) Par les mêmes méthodes on montrera dans une catégorie abélienne la propriété connue dans $\underline{Mod}^s_A$ sous le nom de "lemme du serpent".

(4-3) Le résultat suivant sera fort utilisé:

(4-3-1) <u>Proposition</u> .Soit C' une catégorie additive (resp.abélienne) pour tout type de diagramme D la catégorie <u>Diag</u>(D,C') est additive (resp.abélienne).De plus si C' vérifie l'un des axiomes A B_u 1 à A B 5 ou l'un des axiomes duaux A B^*_u3 à A B^*_u 6 il en est de même de <u>Diag</u> (D,C')

5 - <u>Objet injectif.Objet projectif</u> :

(5-1) Soit C une catégorie abélienne.

(5-1-1) <u>Proposition</u> :

Pour tout objet Q de C les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) Le foncteur Hom(.,Q)(exact à gauche) est <u>exact</u>

(b) Pour tout monomorphisme : X → Y et pour tout morphisme u : X → Q,il existe un morphisme v : Y → Q tel que v f = u.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & Y \arrow[dl, dashed, "v"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

(c) Toute suite exacte 0 → Q → A → A" → 0 se <u>scinde</u>.

La proposition 3-3-1 montre que les assertions (a) et (b) sont équivalentes.

Considérons une suite exacte $0 \to Q \xrightarrow{f} A \to A'' \to 0$, soit $u = 1_Q : Q \to Q$, si (b) est vérifiée il existe un morphisme $r : A \to Q$ tel que $r\,f = 1_Q$, f est <u>rétractable</u>.

Supposons que toute suite exacte $0 \to Q \to A \to A'' \to 0$ se scinde. On considère un monomorphisme $f : X \to Y$ et un morphisme $u : X \to Q$, soit S, f', u', la somme amalgamée de (Q, u) et (Y, f) au dessus de X, comme f est un monomorphisme, f' est un monomorphisme (4-2-2).

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \Big\downarrow u & & \Big\downarrow u' \\ 0 & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{f'} & S \end{array}$$

Q étant facteur direct de S, il existe $r : S \to Q$ tel que $r.f' = 1_Q$. Le morphisme $v = r\,u' : Y \to Q$ est tel que $v\,f = u$.

(5-1-2) <u>Définition</u>

Un objet de C est appelé <u>objet injectif</u>, s'il vérifie l'une des propositions équivalentes précédentes. Un objet de C est appelé <u>objet projectif</u> si c'est un objet injectif de C^o. On explicitera cette définition en écrivant la proposition duale de 5-1-1.

(5-1-3) <u>Proposition</u>

Dans une catégorie abélienne soit $(A_\alpha)_{\alpha \in J}$, J élément de $\mathcal{U}$, une famille d'objets. Le produit $\prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ (resp. la somme $\coprod_{\alpha \in J} A_\alpha$) supposé existant est un objet <u>injectif</u> (resp. projectif) si et seulement si pour tout α, A_α est un <u>objet injectif</u> (resp. projectif)

(5-1-4) <u>Corollaire</u>

Tout facteur direct d'un objet injectif (resp projectif) est injectif (resp.projectif)

(5-1-5) Dans $Mod^{s}_{A\mathcal{U}}$, A élément de $\mathcal{U}$ on vérifie a les résultats suivants :

Les modules libres sont projectifs.

Un module est projectif si et seulement si il est facteur direct d'un module libre.

(5-2)

(5-2-1) <u>Lemme</u> :

Soit $(A_k)_{k \in K}$, K appartenant à un univers $\mathcal{U}$, une famille génératrice d'une catégorie C dans laquelle les produits fibrés existent et telle que pour tout couple d'objets (X,Y), Hom(X,Y) appartient à $\mathcal{U}$. Alors pour tout objet Y de C les sous objets de Y forment <u>un ensemble dont le cardinal est élément de $\mathcal{U}$</u> .

Si les produits fibrés existent, tout couple (X,i),(X',i') de sous objets de Y admet une borne inférieure à savoir le sous objet de Y, $(X,i) \prod_{Y} (X',i')$

A tout sous objet (X,i) de Y on fait correspondre la famille $(H_i^k)_{k \in K}$ où pour tout k, H_i^k est le sous ensemble de $Hom(A_k,Y)$ formé par les morphismes qui se factorisent par i. Supposons qu'il existe un autre sous objet (X',i') de Y tel que pour tout k $H_i^k = H_{i'}^k$. Alors pour tout k et tout morphisme $f_k : A_k \to X$, il existe un morphisme g_k tel que $i f_k = i' g_k$, et par définition du produit fibré, il existe un morphisme unique $A_k \to X \wedge X'$ grâce auquel f_k (resp g_k) se factorise par le monomorphisme canonique $X \wedge X' \to X$ (resp. $X \wedge X' \to X'$). On en déduit que $X = X'$. Il y a donc une correspondance biunivoque entre les sous objets de Y et un sous ensemble de $\prod_{k \in K} \mathcal{P}(\mathrm{Hom}(A_k, Y))$. Or $\mathrm{Hom}(A_k, Y)$ appartient à $\mathcal{U}$ par hypothèse, $\mathcal{P}(\mathrm{Hom}(A_k, Y))$ appartient à $\mathcal{U}$ en vertu de l'axiome u_3 des univers, et $\prod_{k \in K} \mathcal{P}(\mathrm{Hom}(A_k, Y))$ appartient à $\mathcal{U}$ puisque K est un élément de $\mathcal{U}$, donc les sous objets de Y forment un ensemble dont le cardinal appartient à $\mathcal{U}$.

Soit u,v deux morphismes de même but, on dit que v prolonge u si

(i) $s(u) < s(v)$, soit i le morphisme injection canonique de $s(u)$ dans $s(v)$

(ii) $u = v\, i$.

(5-2-2) Théorème

Soit C une catégorie abélienne telle que pour tout couple d'objets (X, Y), Card $\mathrm{Hom}(X,Y)$ appartienne à $\mathcal{U}$ et vérifiant A B_5 $\mathcal{U}$, $(A_k)_{k \in K}$, K élément de $\mathcal{U}$, une famille génératrice. Un objet Q de C est injectif si et seulement si pour tout k appartenant à K, pour tout sous objet V de A_k, et pour tout morphisme $u : V \to Q$, il existe un morphisme $v : A_k \to Q$ qui prolonge u.

Soit un objet Y de C, un sous objet X de Y et un morphisme $f : X \to Q$. On considère l'ensemble E des morphismes de but Q, dont la source est un sous objet de Y et qui prolonge f ; cet ensemble ordonné par la relation : $f' < f''$ si et seulement si f'' prolonge f' est inductif. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une partie totalement ordonnée de E, I étant un élément de $\mathcal{U}$ (5-2-1) ,$L = \varinjlim_{I} s(f_i)$ existe et c'est un sous objet de Y en vertu de A $B_5\mathcal{U}$,de plus il existe un morphisme $l : L \to Q$ qui prolonge f_i pour tout i.L'ensembl E admet donc un <u>élément maximal</u> $f_o : X_o \to Q$.

Montrons que $X_o = Y$.Pour cela supposons que X_o soit différent de Y et montrons qu'il existe un sous objet X_1 de Y, $X_o < X_1$ et un morphisme $l : X_1 \to Q$ qui prolonge f.

Si le monomorphisme canonique $i_o : X_o \to Y$ n'est pas un isomorphisme,il existe k appartenant à K et $\alpha : A_k \to Y$ qui ne se factorise par par i_o.Soit V l'image inverse de X_o par α,c'est-à-dire Ker(coker $i_o.\alpha$),il existe un morphisme $\beta : V \to X_o$ unique tel que $i_o\beta = \alpha j$ avec j = Ker(coker $i_o.\alpha$).On considère X_1,a,b la somme amalgamée de (X_o,β) et (A_k,j) au dessus de V,c'est un sous objet de Y,en effet X_1 est isomorphe à X_oV Im α.Comme j est un mono,a est un mono et X_o est un sous objet de X_1,de plus X_o est différent de X_1,car α se factoriserait alors par i_o au moyen de b. Par hypothèse le morphisme $f_o\beta : V \to Q$ se prolonge en un morphisme $g : A_k \to Q$.Comme $g\,j = f_o\beta$ il existe un morphisme $f_1 : X_1 \to Q$ tel que $f_o = f_1 a$.

$$\begin{tikzcd}
X_o \arrow[rrr, "i_o"] \arrow[drr, "a"] \arrow[ddr, "f_o"'] & & & Y \\
& & X_1 \arrow[dl, "f_1"'] & \\
& Q & & \\
V \arrow[uuu, "\beta"] \arrow[rrr, "j"'] & & & A_k \arrow[uuu, "\alpha"'] \arrow[uul, "b"'] \arrow[ull, "g"]
\end{tikzcd}$$

On énoncera le théorème dual.

(5-2-3) Dans la catégorie $\mathrm{Mod}^s_{A\ \mathcal{U}}$ un objet Q est injectif si et seulement si pour tout idéal à gauche V de A et tout morphisme $u : V \to Q$ il existe un élément x de Q tel que $u(\lambda) = \lambda x$ pour tout λ appartenant à V.

(5-3) On dit qu'une catégorie abélienne C possède assez d'objets injectifs (resp. assez d'objets projectifs) si pour tout objet X de C il existe un objet injectif Q (resp. un objet projectif P) et un monomorphisme $X \to Q$ (resp. un épimorphisme $P \to X$).

(5-3-1) Théorème

Soit C une catégorie vérifiant $AB_5\mathcal{U}$ et telle que pour tout couple d'objets (X,Y) Hom(X,Y) appartient à $\mathcal{U}$.

S'il existe un générateur, la catégorie C possède assez d'objets injectifs.

Soit X un objet quelconque de C, A le générateur, $(B_k)_{k\in K}$ l'ensemble de tous les sous objets de A, K appartient à $\mathcal{U}$ en vertu du lemme (5-2-1), on pose $\mathcal{J}(X) = \bigcup_{k\in K} \mathrm{Hom}(B_k, X)$

Soient $B = \coprod_{k\in K} B_k^{(\mathrm{Hom}(B_i,X))}$(*), le morphisme de B dans X dont les composantes sont tous les morphismes de tous les sous objets de A dans X, et i le monomorphisme de B dans $A^{\mathcal{J}(X)}$ somme directe des monomorphismes canoniques de B_i dans A, i est bien un monomorphisme d'après $AB_5\mathcal{U}$.

. On considère $T_1(X) = (X,f) \coprod_B (i, A^{\mathcal{J}(X)})$

(*) Si Y est un objet de C, I un ensemble appartenant à $\mathcal{U}$, on note $Y^{(I)}$ la somme $\coprod_{i\in I} Y_i$ où pour tout i, $Y_i = Y$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A^{\mathcal{J}(X)} \arrow[d, "\bar{f}"] \\ X \arrow[r, "j_1"'] & T^1(X) \end{tikzcd}$$

Puisque i est un monomorphisme, j_1 est mono, mais $T^1(X)$ n'est pas en général injectif.

On définit par <u>récurrence transfinie</u>, une <u>suite d'objets</u> $T^\lambda(X)$ et pour tout couple (λ',λ) tel que $\lambda'<\lambda$ un <u>monomorphisme</u> $T^{\lambda'}(X) \to T^\lambda(X)$, de la façon suivante :

Si λ n'est pas un ordinal limite on pose $T^\lambda(X) = T^1(T^{\lambda-1}(X))$

Si λ est un ordinal limite on pose $T^\lambda(X) = \varinjlim_{\lambda'<\lambda} T^{\lambda'}(X)$, on remarque qu'on ne sortira pas de l'univers si l'ensemble des $\lambda'<\lambda$ appartient à l'univers.

Pour tout couple $(\lambda',\lambda), \lambda'<\lambda$ on obtient par cette construction un monomorphisme canonique $T^{\lambda'}(X) \to T^\lambda(X)$.

On pose $T^o(X) = X$

Soit α le plus petit ordinal dont le cardinal est strictement plus grand que Card K.

Montrons que $T^\alpha(X)$ est injectif.

Soit (V,i) un sous objet de A et $u : V \to T^\alpha(X)$. Pour tout $\lambda < \alpha$, on note S^λ l'image inverse par u de $T^\lambda(X)$, α est un ordinal limite, $T^\alpha(X) = \varinjlim_{\lambda<\alpha} T^\lambda(X)$ et en vertu de A $B_5\mathcal{U}$ $V = \varinjlim_{\lambda<\alpha} S^\lambda$. Le cardinal de l'ensemble des sous objets de V est inférieur à Card K et l'ensemble des ordinaux inférieurs à α a un cardinal supérieur à Card K, donc il existe $\lambda_o < \alpha$ à partir duquel la suite S^λ est <u>stationnaire</u>. Donc u se factorise par $u_o : V \to T^{\lambda_o}(X)$ et par définition de $T_1(T^{\lambda_o}(X))$ il existe un morphisme $\bar{u}_o : A \to T^{\lambda_o+1}(X)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif. Donc u se prolonge en un morphisme

$v : A \to T^{\alpha}(X)$

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[ddl, dotted, "u_0"'] \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, dotted, "u"] & \\
& A \arrow[d, "\bar{u}_0"] & \\
T^{\lambda_0}(X) \arrow[r] & T^{\lambda_0+1}(X) \arrow[r] & T^{\alpha}(X)
\end{tikzcd}$$

On énoncera le théorème dual.

(5-3-2) Dans $\mathrm{Mod}^{s}_{A\mathcal{U}}$,A appartenant à $\mathcal{U}$, qui vérifie A $B_5\mathcal{U}$ et dont A est un générateur, il existe assez d'injectifs. On déduit de (5-1-5) qu'il existe assez de projectifs.

Chapitre 3

Foncteurs représentables

1. Généralités :

(1-1) Définition :

Soit $\mathcal{U}$ un univers, C une catégorie telle que pour tout couple (X,Y) d'objets de C, Hom(X,Y) appartient à $\mathcal{U}$. On rappelle que Hom(.,.) est un bifoncteur de $C \times C$ dans $\underline{\text{Ens}}\ \mathcal{U}$, contravariant par rapport à la première variable, covariant par rapport à la seconde.

(1-1-1) On appelle catégorie des préfaisceaux sur C, la catégrorie $\underline{\text{Hom}}(C^{\circ},\underline{\text{Ens}}_{\mathcal{U}})$, que l'on note $\hat{C}$.

On définit un foncteur ε de C dans $\hat{C}$. A tout objet Y de C, ε fait correspondre le foncteur contravariant de C dans $\underline{\text{Ens}}_{\mathcal{U}}$: Hom(.,Y), que l'on note h_Y.

Tout morphisme $f : Y \to Y'$, ε associe le morphisme fonctoriel naturel de Hom(.,Y) dans Hom(.,Y').

(1-1-2) On dit que le foncteur h_Y est le foncteur représenté par Y.

On dit qu'un préfaisceau F est représentable, s'il existe un objet Y de C et un iso isomorphisme φ de h_Y sur F. On dit alors que F est représenté par le couple (Y,φ) ou encore que le couple (Y,φ) est une donnée de représentation de F.

(1-2) Propriétés

(1-2-1) Théorème :

Si F est un préfaisceau sur C, Y un objet de C, il existe une bijection de $Hom(h_Y,F)$ sur $F(Y)$, fonctorielle en Y, F.

a. Soit u un morphisme de h_Y dans F. On rappelle (Chap.1,3-4) qu'à tout objet X de C u fait correspondre une application $u(X)$ de $Hom(X,Y)$ dans $F(X)$ que l'on notera u_X. Soit $\alpha : Hom(h_Y,F) \to F(Y)$ telle que $\alpha(u) = u_Y(1_Y)$

b. Soit $\beta : F(Y) \to Hom(h_Y,F)$, qui à tout élément v de $F(Y)$ fait correspondre le morphisme $\beta(v) : h_Y \to F$, tel que pour tout objet X et tout morphisme $f : X \to Y$ on ait $\underline{\beta(v)}_X(f) = F(f)(v)$. On vérifie en effet que pour tout morphisme $g : X \to X'$ le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} Hom(X'Y) = h_Y(X') \arrow[r, "h_Y(g)"] \arrow[d, "\underline{\beta(v)}_{X'}"] & Hom(X,Y) = h_Y(X) \arrow[d, dotted, "\underline{\beta(v)}_X"] \\ F(X') \arrow[r, "F(g)"] & F(X) \end{tikzcd}$$

c. Pour tout morphisme fonctoriel u de h_Y dans F et tout morphisme $f : X \to Y$ on a $u_X h_Y(f) = F(f)u_Y$, en particulier $F(f)u_Y(1_Y) = u_X(f)$, donc $\beta\,\alpha\,(u) = u$. Inversement pour tout élément v de $F(Y)$, $\alpha\,\beta\,(v) = \underline{\beta(v)}_Y(1_Y) = F(1_Y)(v) = 1_F(Y)(v) = v$.

(1-2-2) Corollaire

Si F est un préfaisceau représentable, représenté par (X,φ) Y un objet de C, il existe une bijection de $Hom(Y,X)$ sur $Hom(h_Y,h_X)$

C'est dire que le foncteur canonique ε est <u>pleinement fidèle</u>, ce qui permet de "plonger" canoniquement toute catégorie C dans la catégorie $\hat{C}$ des préfaisceaux sur C.

Aussi nous arrivera-t-il d'<u>identifier</u> un objet Y de C à h_Y, un morphisme fonctoriel de h_Y dans F à l'élément de F(Y) correspondant. Une donnée de représentation de F est définie à un isomorphisme unique près : en effet, si (X,φ) (X',φ') sont deux données de représentation de F, h_X et $h_{X'}$ sont isomorphes, comme ε est pleinement fidèle X et X' sont isomorphes ainsi que φ et φ'.

(1-2-3) <u>Proposition</u>

Soit F un préfaisceau sur C.

Le couple (X,α), où X est un objet de C, α un élément de F(X) définit une donnée de représentation de F si et seulement si pour tout couple (Y,β) où Y est un objet de C, β un élément de F(Y), il existe un unique morphisme $v : Y \to X$ tel que $\beta = F(v)\alpha$.

Si (X,α) définit une donnée de représentation de F, α s'identifie à un <u>isomorphisme</u> de h_X sur F, β s'identifie à un morphisme de h_Y dans F, et un morphisme v s'identifie à un morphisme de h_Y dans h_X. Pour tout objet Y, et tout morphisme $\beta : h_Y \to F$, il existe bien un unique morphisme $h_Y \to h_X$ tel que $\beta = \alpha\, u$, à savoir $u = \alpha^{-1}\beta$

$$\begin{tikzcd}
h_X \arrow[rr, "\approx\alpha"] & & F \\
& h_Y \arrow[ul, "u"] \arrow[ur, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Réciproquement si (X,α) jouit d'une telle propriété universelle, pour tout Y il existe une bijection de $\mathrm{Hom}(Y,X) = h_X(Y)$ sur $\mathrm{Hom}(h_Y,F) \approx F(Y)$, donc α est un isomorphisme fonctoriel, et (X,α) définit une donnée de représentation de F.

2. Application

De nombreuses notions peuvent s'interpréter avantageusement en langage de foncteurs représentables.

(2-1) Soit C une catégorie, D un type de diagramme et $\varphi : D \to C$. Pour tout objet Y de C, on définit le diagramme constant C_Y : pour tout objet i de D $C_Y(i) = Y$, pour toute flèche f de D $C_Y(f) = 1_Y$. Pour tout objet Y de C, l'ensemble des systèmes admissibles $(Y,u_i)_{i\in \mathrm{Ob}D}$ de φ est l'ensemble $\mathrm{Hom}(C_Y,\varphi)$.

Soit F le préfaisceau sur C défini par $F(Y) = \mathrm{Hom}(C_Y,\varphi)$. En appliquant (1-2-3) on obtient la

(2-1-1) Proposition :

La limite projective de φ existe si et seulement si le foncteur F est représentable.

Si φ ne possède pas de limite projective dans C, on utilise souvent le procédé suivant on plonge C dans $\hat{C}$ au moyen du foncteur ε et on appelle limite projective de φ la limite projective de $\varepsilon\,\varphi$, qui existe toujours puisque $\hat{C} = \underline{\mathrm{Hom}}(C^{\circ},\underline{\mathrm{Ens}}_{\mathcal{U}})$

(2-2) On considère la catégorie des modules sur un anneau commutatif A,Mod_A.Soient M et N deux modules,le foncteur de Mod_A dans Ens qui à tout module P fait correspondr l'ensemble Bil_A $(M \times N,P)$ des applications bilinéaires de $M \times N$ dans P est <u>représentable</u>,et le module qui le représente est le produit tensoriel $M \underset{A}{\otimes} N$.

(2-3) On peut définir dualement un foncteur ε' : $C^o \to \underline{Hom}(C,Ens)$.On définira alors un foncteur représentable et l'on vérifiera que cette notion recouvre celle de limite inductive.

3.<u>Structures algébriques dans les catégories.</u>

On se propose de <u>définir</u> une structure algébrique par exemple une structure de groupe sur un objet X d'une catégorie C.On peut procéder de deux façons .

(3-1) La plus naturelle consiste à généraliser dans la catégorie C,la notion habituell de structure algébrique sur un ensemble.

Supposons que dans C le produit $X \Pi X$ existe,une <u>loi de composition interne</u> sur X est la donnée d'un morphisme $m_X : X \Pi X \to X$.

Les axiomes définissant sur X une <u>structure de C-groupe</u> vont s'exprimer en terme de commutativité de diagrammes.Supposons que $X \Pi X \Pi X$ existe,on a les isomorphismes canoniques : $(X \Pi X) \Pi X \simeq X \Pi X \Pi X \simeq X \Pi (X \Pi X)$

(3-1-1) La loi est <u>associative</u> si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} X\Pi X\Pi X \arrow[r, "m_Y \Pi 1_X"] \arrow[d, "1_X \Pi m_X"'] & X \Pi X \arrow[d, "m_X"] \\ X \Pi X \arrow[r, "m_X"] & X \end{tikzcd}$$

Supposons de plus qu'il existe dans C un objet final E,il existe alors un unique morphisme $e : X \to E$.

(3-1-2) <u>Il existe un morphisme</u> $\omega : E \to X$ tel que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} E \Pi X \arrow[rr, "\omega \Pi 1_X"] & & X \Pi X \arrow[dl, "m_X"] \\ & X \arrow[ul, "(e,1_X)", "\wr"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \Pi E \arrow[rr, "1_X \Pi \omega"] & & X \Pi X \arrow[dl, "m_X"] \\ & X \arrow[ul, "(1_X,e)", "\wr"'] & \end{tikzcd}$$

On montre que w est alors déterminé de façon unique.

(3-1-3) Il existe un <u>morphisme s</u> : $X \to X$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "(s,1_X)"] \arrow[d, "e"'] & X \Pi X \arrow[d, "m_X"] \\ E \arrow[r, "\omega"] & X \end{tikzcd}$$

<u>ainsi</u> que celui obtenu en permettant s et 1_X.On montre que le morphisme s est déterminé de façon unique.

On pourrait de façon duale définir une structure de C-cogroupe.

(3-2) Sans faire d'hypothèses sur la catégorie C, on peut définir une structure sur X en se ramenant au cas ensembliste. Les limites projectives existent dans $\hat{C}$, ainsi pou deux éléments F, F' de $\hat{C}$, pour tout objet X de C, $F \Pi F'(X) = F(X) \Pi F'(X)$.

Une loi de composition interne sur X est la donnée d'un morphisme $M_X : h_X \Pi h_X \to h_X$. Cela revient à se donner pour tout objet Y de C, une loi de composition interne sur l'ensemble $h_X(Y)$ qui soit fonctorielle, c'est-à-dire telle que pour tout $u : Y \to Y'$, $h_X(u) : h_X(Y') \to h_X(Y)$ soit un morphisme au sens de la structure considérée.

(3-3) Dans le cas particulier où le produit $X \Pi X$ existe dans C, $h_X \Pi h_X$ est canoniquement isomorphe à $h_{X \Pi X}$, une loi de composition interne sur X peut donc être considérée comme un morphisme $M_X : h_{X\Pi X} \to h_X$ il lui est donc canoniquement associé (III,1-2-2) un morphisme $m_X : X \Pi X \to X$ tel que $\varepsilon(m_X) = h_{m_X} = M_X$.

(3-3-1) Si l'on suppose que $X \Pi X \Pi X$ existe, $X \Pi X \Pi X$ étant canoniquement identifié à $(X \Pi X) \Pi X$ l'application $M_X(Y) \Pi 1_{h_X(Y)}$ s'identifie pour tout objet Y de C à $h_{m_X \Pi 1_X}(Y)$. Il est donc équivalent de dire que la loi M_X est associative, c'est-à-dire que pour tout Y le diagramme suivant est commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
h_X(Y)\Pi h_X(Y)\Pi h_X(Y) \arrow[r, "M_X(Y)\Pi 1"] \arrow[d, "1\Pi M_X(Y)"'] & h_X(Y)\Pi h_X(Y) \arrow[d, "M_X(Y)"] \\
h_X(Y)\Pi\, h_X(Y) \arrow[r, "M_X(Y)"] & h_X(Y)
\end{tikzcd}
$$

<u>ou que</u> le diagramme (3-1-1) est commutatif.

(3-3-2) S'il existe dans $\hat{C}$ un objet final ...
E, h_E est objet final de C, le morphisme $\Omega : h_E \to h_X$ induit un morphisme $\omega : E \to X$

qui vérifie la propriété (3-1-2)

(3-3-3) Pour tout Y de C il existe un morphisme $S(Y) : h_X(Y) \to h_X(Y)$ fonctoriel par rapport à Y, soit $S : h_X \to h_X$ est un morphisme auquel est canoniquement associé un morphisme $s : X \to X$ tel que $\varepsilon(s) = h_s = S$, et tel que le diagramme (3-1-3) correspondant soit commutatif.

(3-4) Il faut remarquer qu'il y a des structures que l'on ne peut définir de cette façon, par exemple si leur définition fait intervenir des limites inductives, car $\varepsilon : C \to \hat{C}$ ne commute pas aux limites inductives.

Quelques ouvrages de références :

Eckmann - Hilton : Group-like structure in general categories I Math.Ann.145 (1962) 227-255;II Math.Ann.151 (1963),150-186 ;III Math.Ann.150 (1963) 165-187.

Ehresmann : Catégories et structures (Dunod 1965)

Freyd : Abelian categories Harter et Row Publishers N-Y 1964.

Gabriel : Des catégories abéliennes

Thèse.Bulletin Société Mathématiques de France (1962) 323-448.

Grothendieck : Sur quelques points d'algèbre homologique.Tohoku Math.Journal Vol.9 p.119-221 (1977)

Eléments de géométrie algébrique

I.H.E.S Publications mathématiques (1961-62)

Hilton : Catégories non abéliennes

Séminaire d'été de Montréal (1964)

Mitchell : Theory of categories

Academic Press (1965)