UNE COHOMOLOGIE DE ČECH POUR LES ESPACES DIFFERENTIABLES ET SA RELATION A LA COHOMOLOGIE DE DE RHAM

P. Iglesias

Centre de Physique Théorique*
CNRS - Luminy, Case 907
F-13288 MARSEILLE CEDEX 09 (FRANCE)

Abstract : On propose une définition de la cohomologie de Čech pour les espaces différentiables et on construit le bi-complexe de Čech-De Rham associé. On fait apparaître certaines obstructions au théorème de De Rham, qui s'interprètent géométriquement comme la non-trivialité de groupes de fibrés canoniquement attachés à ces espaces.

December 1988
CPT-88/P.2193
(Version 0.5)

* Laboratoire Propre LP.7061, Centre National de la Recherche Scientifique.

A cohomology for differentiable spaces and its reaction to de rahm cohomology

UNE COHOMOLOGIE DE ČECH POUR LES ESPACES DIFFERENTIABLES ET SA RELATION A LA COHOMOLOGIE DE DE RHAM

Patrick Iglesias
Centre de Physique Théorique CNRS
case 907 LUMINY
13288 Marseille cedex 9

27 décembre 1988
(version 0.5)

Résumé

On propose une définition de la cohomologie de Čech pour les espaces différentiables et on construit le bi-complexe de Čech-De Rham associé. On fait apparaitre certaines obstructions au théorème de De Rham, qui s'interprètent géométriquement comme la non-trivialité de groupes de fibrés canoniquement attachés à ces espaces.

1 Introduction

L'axiomatique des espaces différentiables a été posée par par K. T. Chen [1] dans les années 1975 dans le but d'étudier la cohomologie de De Rham de certains "espaces généralisés". Peu après, au début des années 1980, J. M. Souriau [11] introduit les *espaces difféologiques* dont l'axiomatique est voisine de celle des espaces différentiables de Chen, l'objectif poursuivi est cette fois d'établir les fondements de la mécanique quantique et pour cela il faut étendre la notion de groupe de Lie à certains groupes de

difféomorphismes de dimension infinie sans s'embarasser de super-structures. Ces deux tentatives convergent vers des axiomatiques à peine différentes ([1]) et qui définissent la même théorie, c'est pour cela qu'on considère comme synonymes les mots *espaces différentiables* et *espaces difféologiques.*

Avec leurs morphismes, appelés ***applications différentiables***, ces espaces définissent une catégorie $\mathcal{D}$ dite *différentiable* qui étend naturellement celle des variétés. On peut dire qu'elle étend la notion de variété différentiable vers ses deux bouts, d'une part dans la direction des espaces de dimension infinie comme les espaces d'applications différentiables (ou autres espaces de dimension infinie) et d'autre part vers les espaces quotients, espaces de feuilles par exemple, considérés généralement comme singuliers. Une propriété essentielle de cette théorie est qu'elle s'affranchit *a priori* de la topologie. Cela ne signifie pas que celle-ci soit complètement absente du paysage, en effet elle réapparait comme un sous produit de la structure différentiable proprement dite. Et c'est grâce à cette topologie dite *D-topologie* que sont introduites les variétés.

La théorie de ces espaces est maintenant largement développée au moins dans la direction des espaces difféologiques homogènes [2] ou encore dans celle des fibrés et de l'homotopie [7] et bien entendu dans la direction des structures symplectiques des orbites co-adjointes des groupes difféologiques et leur "quantification" [11].

Dans ce travail on s'intéresse particulièrement et à ce qu'il advient du théorème de De Rham. On sait qu'il ne s'étend pas, dans toute se généralité, aux espaces différentiables [8], il suffit de considérer l'exemple, aujourd'hui classique, du tore irrationnel $\mathbf{T}_\alpha$: quotient du tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ par la droite D_α de pente irrationelle $\alpha \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$ [3]. Son premier groupe de cohomologie de De Rham $\mathrm{H}^1_{DR}(\mathbf{T}_\alpha)$ est égal à $\mathbf{R}$ alors que son premier groupe de cohomologie singulière $\mathrm{H}^1_S(\mathbf{T}_\alpha)$, identifié par l'homomorphisme de Hurewiscz au groupe $\mathrm{Hom}(\pi_1(\mathbf{T}_\alpha), \mathbf{R})$, est égal à $\mathbf{R}^2$ ([2]).

On va voir que La solution de cette enigme nécessite la généralisation

[1]Elle diffèrent seulement en ce qui concerne le domaine de définition des applications structurales : c'est un convexe de dimension finie pour Chen et un ouvert de dimension finie pour Souriau, le reste de l'axiomatique est identique.

[2]Le groupe d'homotopie de $\mathbf{T}_\alpha$ vaut $\mathbf{Z}^2$, son revêtement universel est égal à $\mathbf{R}$ et son π_1 s'injecte dans $\mathbf{R}$ comme le sous-groupe des éléments de la forme $n + \alpha m$ où n et m sont des entiers relatifs

de la cohomologie de Čech, des variétés et autres espaces topologiques, aux espaces différentiables, on la définira comme la cohomologie de Hochschild d'un monoïde canoniquement associé à chaque espace différentiable X. Les obstructions à l'existence d'un théorème de De Rham pour X résident alors dans la suite spectrale d'un bi-complexe dont la première cohomologie est celle de De Rham et qui converge vers sa cohomologie de Čech.

La première obstruction s'interprête comme la non trivialité du groupe des classes de fibrés principaux $(\mathbf{R}, +)$ au dessus de X. D'après un théorème classique de théorie des fibrés, ce groupe est nul lorsque X est une variété. Dans ce cas la suite spectrale dégénère (on utilise l'existence d'une partition de l'unité) et induit le théorème de De Rham.

2 Les espaces différentiables

On rappelle, dans cette section, quelques définitions de la théorie des espaces différentiables, pour plus de précision on renvoie à [9]. Le lecteur déjà rompu aux techniques des espaces différentiables (difféologiques) peut directement passer à la lecture des sections sivantes :

- On appelle *espace numérique* de dimension n tout ouvert non vide de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$.
- On appelle *paramétrisation* d'un ensemble X toute application définie sur un espace numérique à valeurs dans X.
- On appelle *famille de paramétrisations compatibles* d'un ensemble X toute famille de paramétrisations $(\phi_i : U_i \to X)_{i \in I}$, telle que :

$$\forall (i,j) \in I^2 \quad U_i \cap U_j = \varnothing \text{ ou } \forall x \in U_i \cap U_j \quad \phi_i(x) = \phi_j(x) \qquad (1)$$

Le plus petit prolongement commun aux éléments de la famille $(\phi_i)_{i \in I}$ est la paramétrisation ϕ, définie sur la réunion des U_i, $i \in I$, par :

$$\phi = \sup_{i \in I}(\phi_i) \quad \forall x \in U_i \quad \sup_{i \in I}(\phi_i)(x) = \phi_i(x), \qquad (2)$$

elle est appelée la *borne supérieure* de la famille.

Les paramétrisations de classe C^∞ sur un espace numérique quelconque U vérifient les propriétés suivantes :

1. La borne supérieure d'une *famille de paramétrisations compatibles* de paramétrisations C^∞ de U est une paramétrisation de clase C^∞ de E.
2. Pour toute paramétrisation de classe C^∞, $\phi : V \to U$, et toute paramétrisation C^∞, $F \in C^\infty(\Omega, V)$, où Ω est un espace numérique, la paramétrisation $\phi \circ F$ est encore de classe C^∞

On déduit de ces propriétés que la restriction de toute paramétrisation de classe C^∞ à un ouvert non vide est encore de classe C^∞, on dit que les paramétrisations C^∞ forment un *faisceau d'applications locales* [6]. Ce sont ces propriétés que l'on érige en axiomes dans la définition des *espaces différentiables*.

Définition 2.1 *On appelle* structure différentiable *ou* difféologie *sur un ensemble non vide X toute famille de paramétrisations $\mathfrak{C}$ de X appelées* plaques *vérifiant les propriétés suivantes :*

ED1 La réunion de l'ensemble des valeurs des plaques recouvre X.

ED2 La borne supérieure d'une famille de plaques compatibles est une plaque.

ED3 La composée à gauche de toute plaque avec une paramétrisation indéfiniment différentiables de son domaine de définition est une plaque.

On appelle espace différentiable *ou* espace difféologique *tout ensemble X équipé d'une structure différentiable $\mathfrak{C}$.*

L'axiome ED1 est appelé *axiome de recouvrement*, l'axiome ED2 est appelé *axiome de localité* et l'axiome ED3 est appelé *axiome de saturation C^∞*. A tout espace numérique Ω est donc associé l'ensemble (nécessairement non vide) des plaques de X défini sur Ω, on le note $\mathfrak{C}(\Omega)$.

Exemple 2.2 (i) L'ensemble des paramétrisations C^∞ définit sur tout espace numérique U une structure différentiable, dite *canonique*, dont les plaques sont appelées *plaques lisses*. Considéré comme espace différentiable, et sauf mention expresse du contraire, U est toujours muni de cette structure d'espace différentiable. De façon générale les variétés différentielles de la géométrie ordinaire sont naturellement des espaces différentiables pour la structure définie par les paramétrisations infiniment différentiables.

(*ii*) Les paramétrisations localement constantes (constantes au voisinage de chacun des points de leur domaine de définition) définissent, sur un ensemble X, une structure différentiable appelée *structure discrète*, muni de cette structure X est dit *espace différentiable discret.* Il suffit de constater que la borne supérieure d'applications localement constantes est localement constante et que la composée à gauche d'une application localement constante par une paramétrisation $\mathcal{C}^\infty$ de son domaine de définition est encore localement constante.

(*iii*) A l'opposé, l'ensemble de toutes les paramétrisations définies sur X munit cet ensemble d'une structure différentiable appelée *structure grossière* ou *vague*, X est alors dit *espace différentiable grossier* ou *vague.*

Définition 2.3 *Une application f d'un espace différentiable X vers un espace différentiable Y est dite* différentiable *si le composé, à gauche, de f par toute plaque de X est une plaque de Y.*

On note $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ l'ensemble des applications différentiables de X vers Y. On vérifie que les plaques d'un espace diférentiable X sont différentiables, par conséquent on note $\mathcal{C}^\infty(\Omega, X)$ l'ensemble $\mathfrak{C}(\Omega)$ des plaques de X de source Ω. Comme on peut le constater, cette notation est compatible avec l'usage standard du symbole $\mathcal{C}^\infty$. On vérifie immédiatement que la différentiabilité est stable par composition. Ceci, ajouté au fait que l'identité est une application évidemment différentiable, permet de définir la catégorie *différentiable*, notée $\mathcal{D}$, par ses objets : les espaces différentiables, et ses morphismes : les applications différentiables. Les isomorphismes de cette catégories sont appelés *difféomorphismes* ce sont les applications différentiables bijectives dont l'inverse est aussi différentiable.

Les exemples précédents (2.2) suggèrent l'introduction d'une relation d'ordre définie sur les structures différentiables d'un ensemble X :

Définition 2.4 *Soient $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ deux structures différentiables sur un ensemble X, on dit que la structure $\mathfrak{C}_1$ est* plus fine *que la structure $\mathfrak{C}_2$, et on note $\mathfrak{C}_1 \prec \mathfrak{C}_2$, si $\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{C}_2$. Si X_1 et X_2 désignent le même ensemble X équipé, respectivement, des structures $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$, on note aussi $X_1 \prec X_2$.*

Cette relation ordonne l'ensemble des structures différentiables de X, on montre aussi [9] que toute partie E est bornée inférieurement et supérieurement (on dit que cet ensemble est *réticulé achevé*). La borne inférieure

de l'ensemble des structures différentiables de X est la structure vague, la borne inférieure est la structure discrète.

Définition 2.5 *On appelle* recouvrement paramétré, *ou simplement* recouvrement, *d'un ensemble X toute famille de paramétrisations dont la réunion des images est égal à X.*

La proposition suivante donne un mode de construction d'espaces différentiables par *familles génératrices.*

Proposition 2.6 *Soit $\mathcal{F}$ un recouvrement paramétré de X. Parmi toutes les structures différentiables sur X pour lesquelles $\mathcal{F}$ est une famille de plaques, il en existe une plus fine $\mathfrak{C}$, elle est appelée* structure différentiable engendrée *par $\mathcal{F}$. On dit encore que $\mathcal{F}$ est une* famille génératrice *de la structure $\mathfrak{C}$.*

Une plaque ϕ de la structure $\mathfrak{C}$ engendrée par la famille $\mathcal{F}$ est définie par la propriété suivante :

- Il existe une famille $(\xi_i)_{i \in I}$ de plaques lisses d'espaces numériques et une sous-famille $(\psi_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{F}$ telles que $\phi = \sup_{i \in I}(\psi_i \circ \xi_i)$.

Proposition 2.7 *Soit Y un espace différentiable et $f : X \to Y$ une application. Parmi toutes les structures différentiables de X pour lesquelles f est différentiable il en existe une moins fine, appelée* image réciproque *de la structure de Y. Ses plaques sont les paramétrisations ϕ de X telles que $f \circ \phi$ soit une plaque de Y.*

Soit X un espace différentiable et $f : X \to Y$ une application surjective. Parmi toutes les structures différentiables de Y pour lesquelles f est différentiable il en existe une plus fine, appelée image directe *de la structure de X. Elle est engendré par la famille de paramétrisations du type $f \circ \phi$ où ϕ est une plaque de X.*

Définition 2.8 *Soient X et Y deux espaces différentiables et $f : X \to Y$ une application différentiable.*

- *Si f est injective et si l'image réciproque de la structure différentiable de Y coïncide avec celle de X on dit que f est une* induction

- *Si f est surjective et si l'image directe de la structure différentiable de X coïncide avec celle de Y on dit que f est une* subduction

Comme on le remarque immédiatement, tout quotient $X/\sim$ d'un espace différentiable X par une relation d'équivalence $\sim$ possède une structure différentiable canonique : celle pour laquelle la projection naturelle de X sur $X/\sim$ est une subduction, on l'appelle ***structure différentiable quotient***. Dualement, toute partie W de X possède une structure différentiable canonique : celle pour laquelle l'injection naturelle ι_W de W dans X est une induction, on l'appelle ***structure différentiable induite*** ou ***structure différentiable de partie***. On renvoie aux ouvrage déjà cités pour les définitions de ***produits*** et de ***sommes*** d'espaces différentiables que l'on peut introduire à partir des subductions et inductions.

Avant d'achever cette section on donne la définition de la *D-topologie* d'un espace différentiable X : c'est la topologie la plus fine qui rende toutes les plaques continues, en d'autres termes $\Omega \subset X$ est ouvert pour la D-topologie, on dit que c'est un *D-ouvert*, si pour toute plaque ϕ de X l'ensemble $\phi^{-1}(\Omega)$ est ouvert. On peut définir à partir de là les applications différentiables locales, les difféomorphismes locaux etc.... Les variétés (de dimension finie) sont alors définies comme les espaces différentiables localement difféomorphes, en tout point, à un espace vectoriel numérique.

3 Espaces fonctionnels arcs et contractilité

On rappelle dans cette section les quelques éléments d'homotopie différentiable qui sont nécessaires à la suite de cet exposé, pour plus de détail nous renvoyons à [7].

Etant donnés deux espaces différentiables X et Y, l'ensemble des applications différentiables $C^\infty(X,Y)$ possède une structure différentiable canonique donnée par la proposition sivante :

Proposition 3.1 *Soient X et Y deux espaces différentiables on appelle valuation l'application v définie sur le produit $C^\infty(X,Y)\times X$ à valeurs dans Y par $v(f,x) = f(x)$. Parmi toutes les structures différentiables sur $C^\infty(X,Y)$ qui rendent v différentiable, il en existe une moins fine, on l'appelle la* structure fonctionnelle. *Ses plaques sont les paramétrisations $\phi : \Omega \to C^\infty(X,Y)$ telles que $(r,x)\mapsto \phi(r)(x)$ soit différentiable.*

On définit en particulier l'espace des ***arcs différentiables***, on note s et b les applications *source* et *but*, et on note ∂ le couple (s,b) :

$$\gamma \in \mathrm{Arc}(X) = C^\infty(\mathbf{R}, X) : \left\{ \begin{array}{c} s(\gamma) = \gamma(0) \quad b(\gamma) = \gamma(1) \\ \partial(\gamma) = (s,c)(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1)) \end{array} \right. \tag{3}$$

Les applications s, b, et ∂ sont évidemment différentiables. Etre joints par un arc différentiable engendre sur X une relation d'équivalence qui partage X en classes appelées ***composantes***, on dit que X est *connexe* s'il ne possède qu'une seule composante. L'ensemble de ces classes est noté $\pi_0(X)$. On dit que deux points x et y sont ***homotopes*** s'ils appartiennent à la même classe, c'est à dire s'il existe une chaine finie d'arcs différentiables $(\gamma_i)_{i=0}^n$ tel que $s(\gamma_0) = x$, $b(\gamma_i) = s(\gamma_{i+1})$ pour tout $0 < i < n$, et $b(\gamma_n) = y$.

Etant donné un point de base x_0, on note $\mathrm{Arc}(X,x_0)$ le sous-espace des arcs différentiables γ d'origine x_0, c'est à dire $s(\gamma) = x_0$, muni de sa structure de partie. L'espace $C^\infty(X) = C^\infty(X,X)$ étant lui-même muni de la structure fonctionnelle on dit qu'il est ***contractile*** si l'identité $\mathbf{1}_X$ est homotope à l'application constante $x \mapsto x_0$, il est clair que cette propriété ne dépend pas du point de base choisi. Il est équivalent de dire que la projection $b : \mathrm{Arc}(X,x_0) \mapsto X$ possède une section différentiable. On remarque que l'espace $\mathrm{Arc}(X,x_0)$ est lui même contractile, on considère la rétraction $\phi(s) = [\gamma \mapsto [t \mapsto \gamma(st)]]$ pour tout $s \in \mathbf{R}$.

On remarque que la décomposition en composantes est la plus fine partition qui fasse de X la somme différentiable de ses parties. L'homotopie d'ordre supérieur est définie par récurence en introduisant l'espace des *lacets*, pointés en x_0, de X. On note :

$$\mathrm{Lac}(X,x_0) = \{\gamma \in \mathrm{Arc}(X) \mid \partial(\gamma) = (x_0,x_0)\} \tag{4}$$

La formule de récurence des ***groupes d'homotopie*** est alors la suivante :

$$\pi_n(X,x_0) = \pi_{n-1}(\mathrm{Lac}(X,x_0),\hat{x}_0) \quad \forall n>0 \quad \hat{x}_0 = [t \mapsto x_0]. \tag{5}$$

On ne décrira pas ici la loi de multiplication des classes d'homotopie de lacets. Si X est connexe les groupes d'homotopie pointés en des points de base différents sont isomorphes. On note parfois $\pi_1(X)$ à la place de $\pi_1(X,x_0)$. Si X est connexe et si $\pi_1(X)$ est trivial on dit que X est ***simplement connexe***.

4 Formes différentiables et recouvrements

On définit dans cette section les formes différentiables sur un espace X, on montre comment elle font apparaitre une variété de dimension variable appelée recouvrement saturé de X, noté $\widetilde{X}$, et un monoïde d'applications différentiables de X attaché canoniquement au recouvrement $\widetilde{X}$.

Définition 4.1 *On appelle* p-forme différentiable *sur l'espace différentiable X toute fonction ω qui associe à chaque plaque ϕ de X une p-forme $\omega(\phi)$, définie sur le domaine Ω de ϕ, telle que pour tout espace numérique Λ et toute plaque lisse $F \in \mathcal{C}^\infty(\Lambda, \Omega)$:*

$$\omega(\phi \circ F) = F^*(\omega(\phi)). \tag{6}$$

On considère alors la somme différentiable des domaines de définition des plaques de X on la note $\widetilde{X}$:

$$\widetilde{X} = \coprod_{\phi \in \mathfrak{C}} \mathrm{def}(\phi) \tag{7}$$

On introduit la somme disjointe $\mathfrak{R}$ de tous espaces vectoriels numériques, et on note $\mathfrak{C}$ la structure différentiable de X, $\widetilde{X}$ s'écrit :

$$\mathfrak{R} = \coprod_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{R}^n \quad \widetilde{X} = \{(\phi, r) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{R} \mid r \in \mathrm{def}(\phi)\} \tag{8}$$

La structure différentiable définie sur $\widetilde{X}$ est la structure induite par le produit $\mathfrak{C} \times \mathfrak{R}$, où $\mathfrak{C}$ est muni de la structure discrète et $\mathfrak{R}$ de la somme des structures différentiables standard de chaque espace vectoriel numérique $\mathbf{R}^n$. Il est alors évident que $\widetilde{X}$ est une variété puisqu'elle est localement difféomorphe en tout point $(\phi, r) \in \widetilde{X}$ à l'espace numérique $\mathrm{def}(\phi)$, c'est une variété non pure de dimension infinie, elle est appelée la ***variété des plaques*** de X ou encore ***recouvrement saturé*** de X. La valuation naturelle $v : \widetilde{X} \to X$ définie par $v(\phi, r) = \phi(r)$ est alors une subduction de $\widetilde{X}$ sur X, en effet toute plaque ϕ se relève différentiablement par $r \mapsto (\phi, r)$ le long de v. De façon générale, étant donnée une famille génératrice $\mathcal{F}$ de X on sait associer la sous-variété $\mathcal{F}[X] \subset \widetilde{X}$ définie par :

$$\mathcal{F}[X] = \{(\phi, r) \in \widetilde{X} \mid \phi \in \mathcal{F}\}, \tag{9}$$

la valuation restreinte à $\mathcal{F}[X]$ est encore une subduction, par définition même des familles génératrices. On remarque que $\widetilde{X}$ peut s'écrire aussi $\mathfrak{C}[X]$.

Remarque 4.2 Réciproquement, on considère une famille d'espaces numériques, $(\Omega_i)_{i \in I}$, quelconque, et on définit sur la somme différentiable $\widetilde{\Omega}$ une relation d'équivalence notée $\sim$. Soit X le quotient différentiable $\widetilde{\Omega}/\sim$ et π la projection canonique de $\widetilde{\Omega}$ sur son quotient. Il est alors évident, par application directe des définitions, que les restrictions π_i de π aux différents ouverts Ω_i constituent une famille $\mathcal{F}$ génératrice de la structure différentiable de X et que $\mathcal{F}[X] = \widetilde{\Omega}$.

On appellera ***nébuleuse*** toute variété obtenue comme la somme différentiable d'une famille quelconque d'espaces numériques, la remarque précédente se traduit alors par la proposition suivante :

Proposition 4.3 *Tout espace différentiable est le quotient différentiable d'une nébuleuse par une relation d'équivalence.*

On considère maintenant une p-forme différentiable ω de X et on note $\tilde{\omega} = v^*(\omega)$, son image réciproque par la valuation $v : \widetilde{X} \to X$, $\tilde{\omega}$ est donc une p-forme sur la variété des plaques de X ([3]), et on a l'égalité :

$$\forall \phi \in \mathfrak{C} \quad \tilde{\omega} \mid \mathrm{def}(\phi) = \omega(\phi) \tag{10}$$

Comment traduire alors la propriété (6), c'est ce qu'on va voir en introduisant le monoïde des applications $\mathcal{C}^\infty$ de $\widetilde{X}$ qui se projettent, le long de la valuation, sur l'identité de X, on note :

$$\mathfrak{M} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{X}) \mid v \circ f = v\} \tag{11}$$

Proposition 4.4 *Soit ω une forme différentiable sur X et $\tilde{\omega}$ son image réciproque sur $\widetilde{X}$ par la valuation v. La propriété (6) est équivalente à la suivante :*

$$\forall f \in \mathfrak{M} \quad f^*(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega} \tag{12}$$

[3] Il est clair qu'elle est non nulle seulement sur les composantes de dimension $\geq p$, mais elle n'est en fait définie que par sa valeur sur les p-plaques

◂ On démontre d'abord le sens direct : soit $\tilde{\omega}$ une p-forme définie sur $\widetilde{X}$ et vérifiant la propriété (12), on définit ω par la formule (10). Soient ϕ une plaque de X et F une application C^∞ définie sur l'espace numérique Λ à valeurs dans $\mathrm{def}(\phi)$, $\phi' = \phi \circ F$ est une plaque de X, considérons l'application f de $\widetilde{X}$ définie par la propriété suivante : $f(\phi', r) = (\phi, F(r))$ et f est l'identité sur $\widetilde{X} - \{\phi'\} \times \Lambda$, on vérifie immédiatement que $f \in \mathfrak{M}$, et on a, par hypothèse : $f^*(\tilde{\omega}) \mid \mathrm{def}(\phi \circ F) = (f \mid \mathrm{def}\phi \circ F)^*(\tilde{\omega})$, c'est à dire $\omega(\phi \circ F) = F^*(\omega(\phi))$. On démontre ensuite le sens réciproque : Soit ω une p-forme de X définie par (6) et soit $\tilde{\omega}$ son image réciproque sur $\widetilde{X}$ par v. Soit $f \in \mathfrak{M}$, f est définie par ses restrictions aux composantes connexes de $\widetilde{X}$, or chacune de ces composantes connexes est le domaine de définition de la restriction d'une plaque à une composante connexe de son domaine de définition, notons $\phi_i : \Omega_i \to X$ une telle restriction, i paramètre les composantes de $\mathrm{def}(\phi)$. L'application f étant différentiable, pour des raisons de connexité elle applique les points de la forme (ϕ, r) où $r \in \mathrm{def}(\phi_i)$ dans une composante connexe de $\widetilde{X}$, c'est à dire dans une composante connexe du domaine de définition d'une plaque ψ de X. La restriction de f à $\{\phi\} \times \mathrm{def}(\phi_i)$ est donc une application C^∞ à valeur dans $\{\psi\} \times \mathrm{def}(\psi_j)$, on la note F. D'autre part $\tilde{\omega}$ est définie par ses restrictions à chacune des composantes connexes de $\widetilde{X}$, il suffit donc de vérifier que $f^*(\tilde{\omega}) \mid \mathrm{def}(\phi_i) = \tilde{\omega} \mid \mathrm{def}(\phi_i)$, or $f^*(\tilde{\omega}) \mid \mathrm{def}(\phi_i) = F^*(\tilde{\omega} \mid \mathrm{def}(\psi_i))$ c'est à dire $F^*(\omega(\psi_i)) = \omega(\psi_i \circ F) = \omega(\phi_i) = \tilde{\omega} \mid \mathrm{def}(\phi_i)$ et donc $f^*(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}$ ▸

On a donc réinterprété l'espace vectoriel des p-formes sur X comme le sous-ensemble des p-formes sur $\widetilde{X}$ invariant par l'action du monoïde $\mathfrak{M}$:

$$\Omega^p(X) = \{\tilde{\omega} \in \Omega^p(\widetilde{X}) \mid \forall f \in \mathfrak{M} \quad f^*(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}\} \tag{13}$$

Il est clair que cette définition en suggère d'autres et notamment celle d'objets géométriques atachés X, mais on ne dévellopera pas ce point de vue ici. On notera toutefois que l'espace $\Omega^0(X)$ ainsi défini coïncide avec $C^\infty(X, \mathbf{R})$. On définit maintenant les opérations de ***dérivation extérieure***, d'***image réciproque*** et de ***produit extérieur*** sur les p-formes de l'espace différentiable X :

- Soit $\omega \in \Omega^p(X)$, c'est à dire : $\omega \in \Omega^p(\widetilde{X})$ tel que pour tout $f \in \mathfrak{M}$: $f^*(\omega) = \omega$. Alors $\mathrm{d}\omega$ vérifie aussi, grâce à la comutation de l'image réciproque et de la dérivation extérieure, $f^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(f^*(\omega)) = \mathrm{d}\omega$, donc $\mathrm{d}\omega$ est une (p+1)-forme de X

- Soient ω une p-forme et λ une q-forme de X, il est clair que pour tout $f \in \mathfrak{M}$: $f^*(\omega \wedge \lambda) = f^*(\omega) \wedge f^*(\lambda) = \omega \wedge \lambda$, et donc $\omega \wedge \lambda$ est une (p+q)-forme de X.

- On considère une application différentiable A de X vers un espace différentiable Y, soit ω une p-forme sur Y, pour toute plaque ϕ de X, on pose $A^*(\omega)(\phi) = \omega(\phi \circ A)$, on vérifie immédiatement que $A^*(\omega)$ ainsi défini est une p-forme de X, elle est appelée image réciproque de ω par A.

Il est immédiat de vérifier que sur les espaces différentiables aussi la dérivée extérieure et l'image réciproque commutent. Il est clair que, pour le produit extérieur et la dérivation extérieure d, la somme directe:

$$\Omega^*(X) = \bigoplus_{p \in \mathbf{N}} \Omega^p(X) \tag{14}$$

est une algèbre différentielle graduée sur $\mathbf{R}$ ayant pour élément unité la fonction constante égale à 1, les définitions de la cohomologie des algèbres différentielles graduées s'appliquent donc. La sous algèbre graduée $Z^*_{DR}(X)$ des cocycles de $\Omega^*(X)$ et l'idéal bilatère gradué $B^*_{DR}(X)$ des cobords de $\Omega^*(X)$ sont égaux à:

$$Z^*_{DR}(X) = \bigoplus_{p \in \mathbf{N}} Z^p_{DR}(X) \quad \text{et} \quad B^*_{DR}(X) = \bigoplus_{p \in \mathbf{N}} B^p_{DR}(X) \tag{15}$$

Où $Z^p_{DR}(X)$ est l'espace vectoriel des p-formes ω fermées, i.e. telles que $d\omega = 0$. Et $B^p_{DR}(X)$, pour $p \geq 1$, est l'espace vectoriel des p-formes exactes, celles qui s'écrivent $d\omega$ quand ω parcourt $\Omega^{p-1}(X)$. Pour $p = 0$, on pose $B^0(X) = \{0\}$. L'algèbre de cohomologie de De Rham de X est alors définie par:

$$H^*_{DR}(X) = \bigoplus_{p \in \mathbf{N}} H^p_{DR}(X) \tag{16}$$

Où $H^p_{DR}(X) = Z^p_{DR}(X)/B^p_{DR}(X)$ est le p-ième espace de cohomologie de De Rham de X. On considère maintenant l'espace des arcs différentiables de X défini précédemment et noté $\mathrm{Arc}(X)$, s et b sont les applications source et but (définitions 3). Il existe un opérateur linéaire K, qu'on appelle *opérateur de chaîne-homotopie*, vérifiant :

$$\begin{array}{ll} \clubsuit & \forall p > 0 \quad K : \Omega^p(X) \to \Omega^{p-1}(\mathrm{Arc}(X)) \\ \spadesuit & K \circ d + d \circ K = b^* - s^* \end{array} \tag{17}$$

Soient φ une plaque de $\mathrm{Arc}(X)$ et Ω son domaine de définition, nous noterons $\bar{\varphi}$ la plaque de X définie par:

$$\forall (r,t) \in \Omega \times \mathbf{R} : \bar{\varphi}(r,t) = \varphi(r)(t) \tag{18}$$

Soit ξ le champ de vecteurs sur $\Omega \times \mathbf{R}$ défini par: $\xi(r,t) = (0,1)$. Pour toute p-forme ω $(0 < p)$ de X, et pour toute plaque φ de $\mathrm{Arc}(X)$, K est défini par :

$$K(\omega)(\varphi) = \int_0^1 j_t^*(\omega(\bar{\varphi})(\xi))dt, \tag{19}$$

où $j_t(r) = (r,t)$. Pour les 0-formes f on posera $K(f) = 0$. On vérifie [3] que $K(\omega)$ est une (p-1)-forme de $\mathrm{Arc}(X)$ et que l'on a bien (17 $\spadesuit$). L'existence de cet opérateur a comme conséquence immédiate l'invariance homotopique de la cohomologie, c'est ce qui est exprimé par la proposition suivante :

Proposition 4.5 *Soient X et Y deux espaces différentiables. Si f et g dans* $\mathrm{D}(X,Y)$ *sont homotopes alors les homomorphismes induits sur la cohomologie de De Rham, notés $f^\#$ et $g^\#$, sont égaux. En particulier tout espace différentiable contractile a la cohomologie de De Rham du point.*

On peut donner aussi l'exemple de $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^n)$ qui se rétracte différentiablement sur le groupe linéaire $\mathrm{Gl}(n,\mathbf{R})$ et donc qui possède la même cohomologie de De Rham.

5 Cohomologie de Čech des espaces différentiables

Dans cette section, on étend la cohomologie de Čech aux espaces différentiables X. Elle est construite à partir d'une cohomologie de Hochschild du monoïde structural $\mathfrak{M}$ d'un *recouvrement simple* de X. On note toujours $\widetilde{X}$ le recouvrement saturé de l'espace différentiable X, on utilisera de façon esentielle le sous recouvrement suivant :

Définition 5.1 *on appelle* recouvrement simple standard *de X le sous-recouvrement $\widehat{X}$ de $\widetilde{X}$, attaché à la famille génératrice S de X, constituée des seules plaques rondes, c'est à dire des plaques dont le domaine de définition est une boule ouverte d'un espace numérique. On notera encore $\mathfrak{M}$ le monoïde des transformations C^∞ de $\widehat{X}$ qui se projettent, le long de la valuation, sur l'identité de X. On l'appelle monoïde du recouvrement simple.*

On rappelle qu'une *action covariante* d'un monoïde $\mathfrak{M}$ sur un ensemble $\mathcal{E}$ est la donnée pour tout élément f de $\mathfrak{M}$ d'une application $f^* \in \mathrm{App}(\mathcal{E})$ tel que pour tout couple $(f,g) \in \mathfrak{M}^2$ on ait $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Définition 5.2 *Soit X un espace différentiable et $\mathfrak{M}$ le monoïde de son recouvrement simple. On considère un groupe abélien A sur lequel $\mathfrak{M}$ agit de façon covariante. On notera $f^*(a)$ l'action de $f \in \mathfrak{M}$ sur $a \in A$. On appelle* k-cochaines *de $\mathfrak{M}$ dans A, les applications ϵ de $\mathfrak{M}^k$ dans A, $k \in$* $\mathbf{N}$. *L'ensemble de ces k-cochaines est noté $C^k(\mathfrak{M},A)$, pour $k = 0$ on a $C^0(\mathfrak{M},A) = A$. On définit la i-ème* face simpliciale *$\delta_i\epsilon$ de ϵ comme la $(k+1)$-cochaine :*

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \delta_0\epsilon(f_0,\ldots,f_k) & = & f_0^*(\epsilon(f_1,\ldots,f_k)) & \\ \delta_i\epsilon(f_0,\ldots,f_k) & = & \epsilon(f_0,\ldots,f_i \circ f_{i-1},\ldots,f_k) & 0 < i \leq k \\ \delta_{k+1}\epsilon(f_0,\ldots,f_k) & = & \epsilon(f_0,\ldots,f_{k-1}) & \end{array} \right. \tag{20}$$

On note que pour une 0-cochaine $\epsilon = a \in A$, les deux faces simpliciales $\delta_0 a$ et $\delta_1 a$ sont données par :

$$\forall f \in \mathfrak{M} \quad \delta_0 a(f) = f^*(a) \quad \delta_1 a(f) = a \tag{21}$$

On définit maintenant l'opérateur cobord $\delta : C^k(\mathfrak{M},A) \to C^{k+1}(\mathfrak{M},A)$ par la somme alternée usuelle :

$$\delta = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \delta_j \tag{22}$$

On vérifie immédiatement la proprité $\delta \circ \delta = 0$ ce qui permet de construire un complexe cohomologique dont les espaces $\mathrm{H}^k(\mathfrak{M},A)$ sont les *k-ème groupe de cohomologie de hochschild* du monoïde $\mathfrak{M}$ à valeur dans A (pour plus de précision sur la cohomologie de Hochschild d'un monoïde voir [10]).

Remarque 5.3 En particulier pour $k = 0$, on a $\mathrm{H}^0(\mathfrak{M}, A) = Z^0(\mathfrak{M}, A) = \ker(\delta : A \to C^1(\mathfrak{M}, A))$, tout élément $a \in \mathrm{H}^0(\mathfrak{M}, A)$ vérifie donc, en application de la formule (21) :

$$\forall f \in \mathfrak{M} \quad f^*(a) = a. \tag{23}$$

$\mathrm{H}^0(\mathfrak{M}, A)$ est donc constitué de ce qu'on peut appeler les *objets géométriques* sur X de type A, ceci peut d'ailleurs être considéré comme leur définition.

En utilisant les notations précédentes on définit la cohomologie de Čech de l'espace différentiable X de la façon suivante :

Définition 5.4 *On considère le cas où A est le groupe des applications localement constantes du recouvrement simple $\widehat{X}$ dans un groupe abélien quelconque G, et on fait agir naturellement le monoïde $\mathfrak{M}$ par image réciproque. On note $\check{C}^p(X, G)$ le groupe des p-cochaines $C^p(\mathfrak{M}, A)$, on les appelle* cochaines de Čech *de X à valeurs dans G. On appelle alors* cohomologie de Čech *de X, à valeurs dans G, le complexe :*

$$\check{\mathrm{H}}^*(X, G) = \mathrm{H}^*(\mathfrak{M}, A) \tag{24}$$

Dans ce qui suit on va faire le lien entre la cohomologie de De Rham et la cohomologie de Čech, qu'on vient de définir, pour les espaces différentiables.

6 Bi-complexe de De Rham-Hochschild d'un espace différentiable

On considère un espace différentiable X et son recouvrement simple standard $\widehat{X}$ (définition 5.1), on note $\mathfrak{M}$ le monoïde associé. La restriction d'une p-forme ω à $\widehat{X}$ la définit uniquement, on peut montrer que :

$$\Omega^p(X) = \{\omega \in \Omega^p(\widehat{X}) \mid \forall f \in \mathfrak{M} \quad f^*(\omega) = \omega\} \tag{25}$$

Il suffit d'utiliser le fait que toute plaque ϕ de X est la borne supérieure d'une famille de plaques rondes compatibles. L'équation précédente (25) aurait très bien pu servir de définition, c'est uniquement pour des raisons historiques qu'on a introduit les formes à partir de la définition (6). A partir

de la cohomologie de Hochschild du monoïde $\mathfrak{M}$ à valeur dans $\Omega^q(\widehat{X})$, où $\mathfrak{M}$ agit naturellement par image réciproque sur les p-formes, on construit le double complexe suivant :

$$C^*(X) = \bigoplus_{(p,q)\in \mathrm{N}\times\mathrm{N}} C^{p,q}(X) \quad C^{p,q}(X) = C^p(\mathfrak{M}, \Omega^q(\widehat{X})) \tag{26}$$

Il est muni des deux différentielles d et δ :

$$\begin{cases} \mathrm{d} & : & C^{p,q}(X) \to C^{p,q+1}(X) \\ \delta & : & C^{p,q}(X) \to C^{p+1,q}(X) \end{cases} \tag{27}$$

où $\mathrm{d}\epsilon(f_1, \ldots, f_p) = \mathrm{d}[\epsilon(f_1, \ldots, f_p)]$ est la dérivée extérieure de la q-forme $\epsilon(f_1, \ldots, f_p)$, δ est définie à la section précédente (définition 5.2). Il est évident que ces différentielles commutent : $\mathrm{d} \circ \delta = \delta \circ \mathrm{d}$. Ils définissent un bi-complexe cohomologique qu'on appellera *bi-complexe de Hochschild-De Rham* (HDR) de l'espace différentiable X (figure 1).

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \\
\uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}} & & \\
C^{0,2}(X) & \xrightarrow{\delta} & C^{1,2}(X) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\
\uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}} & & \\
C^{0,1}(X) & \xrightarrow{\delta} & C^{1,1}(X) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\
\uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}} & & \\
C^{0,0}(X) & \xrightarrow{\delta} & C^{1,0}(X) & \xrightarrow{\delta} & \cdots
\end{array}$$

Figure 1: Bi-complexe HDR

On notera les groupes de cohomologie, associés aux deux dérivation d et δ, de la façon suivante :

$$\begin{cases} p \geq 1 & \mathrm{H}^{p,q}_\delta(X) & = & \ker(\delta : C^{p,q}(X) \to C^{p+1,q}(X)/\delta(C^{p-1,q}(X)) \\ p = 0 & \mathrm{H}^{0,q}_\delta(X) & = & \ker(\delta : C^{0,q}(X) \to C^{1,q}(X)) \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} p \geq 1 & \mathrm{H}_{\mathrm{d}}^{p,q}(X) = \ker(\mathrm{d} : C^{p,q}(X) \to C^{p,q+1}(X)/\mathrm{d}(C^{p,q-1}(X)) \\ p = 0 & \mathrm{H}_{\mathrm{d}}^{p,0}(X) = \ker(\mathrm{d} : C^{p,0}(X) \to C^{p,1}(X)) \end{cases} \quad (29)$$

Remarque 6.1 En utilisant la définition $C^{0,q} = \Omega^q(X)$, la remarque (5.3) et l'expression (formule 25) de $\Omega^q(X)$, on a, par définition de l'opérateur δ, la formule :

$$\forall q \in \mathbf{N} \quad \mathrm{H}_{\delta}^{0,q}(X) = \Omega^q(X), \quad (30)$$

de même on a l'égalité :

$$\forall p \in \mathbf{N} \quad \mathrm{H}_{\mathrm{d}}^{p,0}(X) = \check{\mathrm{C}}^p(X, \mathbf{R}), \quad (31)$$

où $\check{\mathrm{C}}^p(X, \mathbf{R})$ désigne le groupe des p-cochaine de Čech de X à valeurs dans $\mathbf{R}$ (définition 5.4).

On a donc deux complexes, associés à chacune des filtrations définies par d et δ. En remarquant que toute q-forme fermée sur une boule ouverte de $\mathbf{R}^n$ est exacte (contractilité de la boule et proposition 4.5) le complexe associé à la filtration δ se réduit à la la suite décrite par la figure (2).

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{H}_{\mathrm{d}}^{0,0}(X) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{H}_{\mathrm{d}}^{1,0}(X) & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{H}_{\mathrm{d}}^{2,0}(X) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\
\| & & \| & & \| & & \\
\check{\mathrm{C}}^0(X, \mathbf{R}) & \xrightarrow{\delta} & \check{\mathrm{C}}^1(X, \mathbf{R}) & \xrightarrow{\delta} & \check{\mathrm{C}}^2(X, \mathbf{R}) & \xrightarrow{\delta} & \cdots
\end{array}$$

Figure 2: filtration δ

Le complexe de Čech de X est alors noté :

$$\mathrm{H}_{\mathrm{d}}^{*,0}(X, \mathbf{R}) = \bigoplus_{p \in \mathbf{N}} \mathrm{H}_{\mathrm{d}}^{p,0}(X) \quad \mathrm{H}_{\mathrm{d}}^{p,0}(X) = \check{\mathrm{C}}^p(x, \mathbf{R}), \quad (32)$$

Le complexe associé à la différentielle d s'écrit, quant-à lui, comme l'indique la figure (3). Pour tout $p \geq 0$, chacun des complexes de De Rham définis par la figure (3) sera noté :

$$\mathrm{H}_{\delta}^{p,*}(X) = \bigoplus_{q \in \mathbf{N}} \mathrm{H}_{\delta}^{p,q}(X). \quad (33)$$

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & \vdots & \\
\uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}} & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}} & \\
\Omega^2(X) = \mathrm{H}_{\delta}^{0,2}(X) & \mathrm{H}_{\delta}^{1,2}(X) & \cdots \\
\uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}} & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}} & \\
\Omega^1(X) = \mathrm{H}_{\delta}^{0,1}(X) & \mathrm{H}_{\delta}^{1,1}(X) & \cdots \\
\uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}} & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{d}} & \\
\Omega^0(X) = \mathrm{H}_{\delta}^{0,0}(X) & \mathrm{H}_{\delta}^{1,0}(X) & \cdots
\end{array}$$

Figure 3: filtration d

Les groupes de cohomologie bi-gradués définis par les filtrations d et δ s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \mathrm{H}_{DR}^{p,q}(X) = \mathrm{H}_{\mathrm{d}}^{q}(\mathrm{H}_{\delta}^{p,*}(X)) \\ \mathrm{H}_{DR}^{q}(X) = \mathrm{H}_{DR}^{0,q}(X). \end{cases} \quad (34)$$

Et on notera évidemment :

$$\check{\mathrm{H}}^p(X, \mathbf{R}) = \mathrm{H}_{\delta}^{p}(\mathrm{H}_{\mathrm{d}}^{*,0}(X)). \quad (35)$$

Les secondes suites spectrales définies par d et δ sont donc données par :

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{d}}E_2^{p,q} = \mathrm{H}_{DR}^{p,q}(X) \\ {}^{\mathrm{d}}E_2^{0,q} = \mathrm{H}_{DR}^{q}(X) \end{cases} \quad \begin{cases} {}^{\delta}E_2^{p,q} = 0 \quad \text{si } q > 0 \\ {}^{\delta}E_2^{p,0} = \check{\mathrm{H}}^p(X, \mathbf{R}) \end{cases} \quad (36)$$

La cohomologie totale associée à la différentielle $\mathrm{D} = \mathrm{d} + (-1)^p\delta$ converge vers $\check{\mathrm{H}}^*(X, \mathbf{R})$. La suite exacte des termes de bas degrés s'écrit alors :

$$0 \to \mathrm{H}_{DR}^1(X) \to \check{\mathrm{H}}^1(X, \mathbf{R}) \to {}^{\mathrm{d}}E_2^{1,0} \to \mathrm{H}_{DR}^2(X) \to \check{\mathrm{H}}^2(X, \mathbf{R}) \quad (37)$$

où :

$${}^{\mathrm{d}}E_2^{1,0} = \ker(\mathrm{d} : \mathrm{H}_{\delta}^{1,0}(X) \to \mathrm{H}_{\delta}^{1,1}(X)). \quad (38)$$

Cette suite (formule 37) exprime, au moins au niveau des termes de bas dégrés, la relation qui existe entre la cohomologie de De Rham et la cohomologie de Čech d'un espace différentiable, *a priori* toutes les situations sont permises et on voit apparaitre la première obstruction au théorème de De Rham : le groupe ${}^{\mathrm{d}}E_2^{1,0}$. Le but de la suite de cet exposé sera d'interpréter géométriquement le terme ${}^{\mathrm{d}}E_2^{1,0}$, on verra qu'il s'identifie avec l'espace vectoriel des classes d'isomorphismes des fibrés principaux, de groupe structural $(\mathbf{R}, +)$, ***connexables***, au dessus de l'espace X. La flèche ${}^{\mathrm{d}}E_2^{1,0} \to \mathrm{H}^2_{DR}(X)$ de cette suite, s'interprètera comme une nouvelle classe de Chern, associée aux fibrés de ce type. Il est inutile de préciser que lorsque X est une variété cette suite dégénère, en particulier tous les fibrés principaux $(\mathbf{R}, +)$ au dessus de X sont triviaux ce qui met en évidence l'isomorphisme entre la cohomologie de De Rham et cette cohomologie de Čech de X.

7 Fibrations différentiables et connexions

Par analogie avec les définitions classiques [5] on appellera ***fibration différentiable*** un triplet $\xi = (T, B, p)$ où T et B sont des espaces différentiables et $p : T \to B$ une application différentiable. T est appelé ***espace total*** de la fibration, B est la ***base*** et p la projection. L'image réciproque $T_b = p^{-1}(b)$ est appelée la ***fibre*** au point b. On dit aussi ***fibré*** pour fibration.

On dit que la fibration ξ vérifie la propriété de ***micro-trivialité*** [7], ou que le fibré est ***micro-trivial***, si :

- il existe un espace différentiable F appelé ***fibre type***, tel que pour toute plaque $\phi : \Omega \to B$ de la base, l'image réciproque $\phi^*(\xi)$ de ξ soit localement triviale, de fibre type F, au dessus de Ω.

C'est à dire, en notant $\phi^*(T)$ l'espace total de $\phi^*(\xi)$:

$$\phi^*(T) = \{(r, t) \in \Omega \times T \mid \phi(r) = p(t)\}, \tag{39}$$

pour tout point $r \in \Omega$ il existe un voisinage V de r et un difféomorphisme $\Psi : \phi^*(T) \mid V \to V \times F$ qi se projette sur l'identité de V.

On montre que si la plaque ϕ est ronde alors $\phi^*(\xi)$ est triviale, c'est à dire $\phi^*(T) \simeq \Omega \times F$. On peut alors réinterpréter la microtrivialité :

- le fibré $\xi = (T, B, p)$ est micro-trivial, de fibre type F, si son image réciproque sur le recouvrement simple $\widehat{B}$ de la base, par la valuation $v : \widehat{B} \to B$, est triviale de fibre type F.

Dans la suite on omettra parfois l'adjectif micro-trivial si aucune confusion n'en résulte. On introduit les fibrés différentiables principaux grâce à la proposition suivante qui sera donnée sans démonstration :

Proposition 7.1 *Soit G un groupe différentiable agissant différentiablement sur un espace différentiable X, on note $(g, x) \mapsto g(x)$ l'action de G sur X, X/G le quotient différentiable de X par G et p la projection canonique de X sur X/G. Si l'application $(g, x) \mapsto (x, g(x))$, définie sur le produit $G \times X$ à valeurs dans $X \times X$, est une induction alors le triplet $(X, X/G, p)$ est une fibration différentiable micro-triviale, de fibre type G, on dit que c'est un fibré principal, G est appelé le groupe structural de la fibration.*

On renvoie à [7] pour le rôle particulier que jouent les fibrés principaux dans la théorie des fibrés différentiables. On considère maintenant un espace différentiable X et un groupe différentiable abélien G, on note :

$$\mathbf{F}(X, G) \tag{40}$$

l'ensemble des classes d'isomorphismes des fibrés principaux de groupe structural G de base X (un isomorphisme de fibré principal est un isomorphisme de fibré qui est en même temp un isomorphisme de G-espace). On va munir cet ensemble $\mathbf{F}(X, G)$ d'une structure de groupe. Soient $\xi = (T, X, p)$ et $\xi' = (T', X, p')$ deux fibrés principaux de groupe structural G sur X, on devrait en toute rigueur faire apparaitre l'action de G sur T et T', on la sous-entendra pour l'instant. On note $[\xi]$ et $[\xi']$ les classes des fibrés ξ et ξ', ce sont des éléments de $\mathbf{F}(X, G)$. On pose $\xi \oplus \xi'$ l'image réciproque du fibré ξ' par la projection p du premier fibré. Son espace total est noté $T \oplus T'$, sa projection $p \oplus p'$. C'est un fibré principal de groupe structural $G \times G$, agissant naturellement par :

$$\forall (g, k) \in G \times G \quad \forall (t, t') \in T \oplus T' \quad (g, k)(t, t') = (g(t), g'(t')) \tag{41}$$

On notera alors $\bar{\Delta} G$ l'anti-diagonale dans $G \times G$, c'est à dire les éléments de la forme $(g, -g)$, on montre que la classe du fibré quotient $\xi \oplus \xi' / \bar{\Delta} G$

ne dépend que des classes de ξ et ξ', c'est un fibré principal principal de groupe structural $G \times G/\bar{\Delta}G \simeq G$, et donc on deut définir l'opération, noté $+$ sur $\mathbf{F}(X,G)$:

$$\forall([\xi],[\xi']) \in \mathbf{F}(X,G)^2 \quad [\xi] + [\xi'] = [\xi \oplus \xi'/\bar{\Delta}G] \tag{42}$$

On montre que $\mathbf{F}(X,G)$ muni de cette loi est un groupe abélien, l'élément neutre est le fibré trivial et le symétrique du fibré ξ est le même fibré mais muni de l'action inverse $(g,x) \mapsto (-g)(x)$. Par exemple le groupe des classes de fibrés en cercle sur la sphère S^2, c'est à dire $\mathbf{F}(S^2, \mathrm{U}(1))$, est égal à $\mathbf{Z}$. Un autre exemple qu'on verra plus tard est celui du tore irrationnel $\mathbf{T}_\alpha$, on sait [7] que le calcul de $\mathbf{F}(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{R})$ distingue le cas α diophantien du cas α Liouville.

On considère maintenant l'extension de la définition des *connexions principales* aux fibrés différentiables principaux. On considère le foncteur Arc, il associe à un fibré principal $\xi = (T,B,p)$ de groupe structural G, le fibré $\mathrm{Arc}[\xi] = (\mathrm{Arc}(T), \mathrm{Arc}(B), p^\#)$, l'application $p^\#$ associe à tout arc γ de T l'arc $p \circ \gamma$ de B. Il s'avère que $\mathrm{Arc}[\xi]$ est un fibré principal de groupe structural $\mathrm{Arc}(G)$ muni de sa structure fonctionnelle (définition 3.1). Le fibré ξ s'induit naturellement dans $\mathrm{Arc}[\xi]$ grâce aux arcs constants, les connexions principales sur ξ sont alors définies par :

Définition 7.2 *On appelle* connexion principale *sur le fibré principal $\xi = (T,B,p)$ de groupe structural G toute réduction du fibré* $\mathrm{Arc}[\xi]$ *au groupe G qui respecte l'induction naturelle $\xi \hookrightarrow$* $\mathrm{Arc}[\xi]$.

En d'autre termes, une connexion du fibré ξ est une section du fibré quotient $\mathrm{Arc}[\xi]/G$ au dessus de $\mathrm{Arc}(B)$ qui associe à tout arc constant $[s \mapsto b]$ la classe (modulo G) de l'arc constant $[s \mapsto t]$ où $t \in T_b$. Une telle réduction du fibré des arcs est définie grâce à une fonction différentiable $\psi : \mathrm{Arc}(T) \to \mathrm{Arc}(G)/G$, équivariante. Si on identifie alors $\mathrm{Arc}(G)/G$ à $\mathrm{Arc}(G,1)$ où 1 désigne l'identité de G (attention cette identification n'est pas un morphisme de groupe), ψ est n'importe quelle application dans $C^\infty(\mathrm{Arc}(T), \mathrm{Arc}(G,1))$ vérifiant les équations suivantes :

$$\begin{cases} \forall c \in \mathrm{Arc}(T) \quad \forall \gamma \in \mathrm{Arc}(G) \quad \psi(\gamma.c) = [s \mapsto \gamma(s)\psi(c)(s)\gamma(0)^{-1}] \\ \forall b \in B \quad \psi([s \mapsto b]) = [s \mapsto 1] \end{cases} \tag{43}$$

Ces équations définissent complètement l'espace des connexions du fibré ξ. On considère le cas particulier où $G = \mathbf{R}$, on dit que la connexion est *infinitésimale d'ordre 1* si ψ est donnée, grâce à une forme différentiable $\omega \in \Omega^1(T)$, par la formule suivante :

$$\forall s \in \mathbf{R} \quad \forall c \in \mathrm{Arc}(T) \quad \mathrm{d}[\psi(c)] = c^*(\omega) \tag{44}$$

ω s'appelle *forme de connexion*, elle est invariante par l'action de $\mathbf{R}$ et vérifie la propriété suivante : $\forall t \in T : \hat{t}^*(\omega) = \theta$, où $\hat{t} = [s \mapsto s(t)] \in C^\infty(\mathbf{R}, T)$ et θ est le volume unité de $\mathbf{R}$. On peut écrire aussi sous forme intégrale la formule (44), c'est sous cette forme qu'est alors définit le *transport parallèle.*

On revient au groupe $\mathbf{F}(X,\mathbf{R})$ des classes de fibrés principaux de groupe structural $(\mathbf{R},+)$ au dessus de l'espace X, on notera :

$$\mathbf{F}^*(X,\mathbf{R}) \hookrightarrow \mathbf{F}(X,\mathbf{R}) \tag{45}$$

le sous groupe des classes de fibrés *infinitésimalement connexables d'ordre 1*, c'est à dire pouvant être munis d'une connexion infinitésimale d'ordre 1. On verra dans la suite de cet exposé comment ces deux espaces interviennent dans l'étude des relations qu'entretiennent les cohomologies de De Rham et Čech de l'espace X.

8 Les obstructions au théorème de De Rham

On rappelle que l'espace $\mathrm{H}^{1,0}_\delta(X)$ est, par définition :

$$\mathrm{H}^{1,0}_\delta(X) = \ker(\delta : C^{1,0}(X) \to C^{2,0}(X))/\delta(C^{0,0}(X)) \tag{46}$$

où $C^{1,0}(X) = C^1(\mathfrak{M}, \Omega^0(X))$ est l'espace des applications du monoïde $\mathfrak{M}$ du recouvrement simple de X à valeurs dans $\Omega^0(X) = C^\infty(X,\mathbf{R})$. On considère un élément $\tau \in Z^{1,0}_\delta(X) = \ker(\delta : C^{1,0}(X) \to C^{2,0}(X))$, c'est à dire :

$$\forall (A,B) \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \quad \tau(B \circ A) = A^*(\tau(B)) + \tau(A) \tag{47}$$

Si $\tau \in B^{1,0}_\delta(X) = \delta(C^{0,0}(X))$ alors il existe ϵ tel que :

$$\forall A \in \mathfrak{M} \quad \tau(A) = A^*(\epsilon) - \epsilon \tag{48}$$

Il faut donc calculer, ou plus précisemment interpréter, les solutions de l'équation (47) modulo celles de l'équation (48). On considère, pour cela, un fibré principal de groupe structural $(\mathbf{R},+)$ au dessus de X, soit $\xi = (T, X, p)$. Son image réciproque par la valuation $v : \widehat{X} \to X$ sur le recouvrement simple de X est triviale puisque chaque composante connexe de $\widehat{X}$ est contractile, on peut donc choisir au dessus de chacune de ces composantes, indéxées par les plaques rondes ϕ de X, une section globale $\gamma : \mathrm{def}(\phi) \to v^*(T)$ de la projection $p^* : v^*(T) \to \widehat{X}$. Soit $A \in \mathfrak{M}$, l'image réciproque de ξ par $v \circ A$ est identique à celle de ξ par v puisque $v \circ A = v$, par définition même du monoïde $\mathfrak{M}$. La fibre au dessus de $A(\phi, r)$ coïncide donc avec la fibre au dessus de (ϕ, r), pour tout $(\phi, r) \in \widehat{X}$. Il existe donc une application $\tau = \mathfrak{M} \to C^\infty(\widehat{X}, \mathbf{R})$ telle que :

$$\forall \tilde{x} = (\phi, r) \in \widehat{X} \quad \gamma(A(\tilde{x})) = \tau(A)(\tilde{x}).\gamma(\tilde{x}) \tag{49}$$

Il est alors facile de vérifier que τ défini par cette équation (49) vérifie la formule (47), c'est dont un 1-cocycle de Hochschild du monoïde $\mathfrak{M}$ à valeur dans $C^\infty(\widehat{X}, \mathbf{R})$. On constate immédiatement que si on change la section γ, τ se transforme par addition d'un cobord ϵ. On peut donc associer à toute classe $[\xi] \in \mathbf{F}(X, \mathbf{R})$ (définition 40) un élément de la cohomologie $\mathrm{H}^{1,0}_\delta(X)$. On vient même de montrer, indirectement, que cette application Θ est injective :

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & \mathbf{F}(X,\mathbf{R}) & \to & \mathrm{H}^{1,0}_\delta(X) \\ & [\xi] & \mapsto & [\tau] \end{array} \tag{50}$$

Réciproquement, étant donné un cocycle $\tau \in Z^{1,0}_\delta(X)$, on relève l'action du monoïde $\mathfrak{M}$ au fibré principal trivial de groupe $\mathbf{R}$ au dessus de $\widehat{X}$ par :

$$\forall A \in \mathfrak{M} \quad \forall (\tilde{x}, \lambda) \in \widehat{X} \times \mathbf{R} \quad A_\tau(\tilde{x}, \lambda) = (A(\tilde{x}), \lambda + \tau(A)(\tilde{x})). \tag{51}$$

L'espace différentiable X peut être considéré comme le quotient de $\widehat{X}$ par l'action du monoïde $\mathfrak{M}$, de même le quotient du produit direct $\widehat{X} \times \mathbf{R}$ par $\mathfrak{M}$, pour l'action définie ci-dessus, est un espace différentiable, qu'on notera $\widehat{X}_\tau$, et qui se projette naturellement sur X, de sorte qu'on a le diagramme

commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{X} \times \mathbf{R} & \xrightarrow{v_\tau} & \widehat{X}_\tau \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\tau} \\ \widehat{X} & \xrightarrow{v} & X \end{array} \tag{52}$$

On vérifie alors que $\xi_\tau = (\widehat{X}_\tau, X, p)$ est un fibré principal de groupe structural $(\mathbf{R},+)$ (l'action naturelle de $\mathbf{R}$ sur $\widehat{X} \times \mathbf{R}$ passe immédiatement au quotient), tel que $\Theta([\xi_\tau] = [\tau]$ (définition 50). Ainsi, Θ est surjective, on a vu qu'elle était injective, c'est donc une bijection, elle identifie ainsi l'espace des classes de fibrés principaux de groupe $(\mathbf{R},+)$ au dessus de X, c'est à dire l'espace $\mathbf{F}(X, \mathbf{R})$ à l'espace de cohomologie $\mathrm{H}^{1,0}_\delta(X)$

$$\mathbf{F}(X, \mathbf{R}) \simeq \mathrm{H}^{1,0}_\delta(X). \tag{53}$$

Il reste maintenant à identifier ${}^{\mathrm{d}}E_2^{1,0}$. Par définition :

$${}^{\mathrm{d}}E_2^{1,0} = \ker(\mathrm{d} : \mathrm{H}^{1,0}_\delta(X) \to \mathrm{H}^{1,1}_\delta(X)). \tag{54}$$

C'est à dire $[\tau] \in^{\mathrm{d}} E_2^{1,0}$ si et seulement si $\mathrm{d}[\tau] = 0$. Soient $\xi = (T, X, p)$ un fibré principal de groupe $(\mathbf{R},+)$ tel que $\Theta([\xi]) = [\tau]$ on peut choisir une section γ de l'image réciproque de ξ $v : \widehat{X} \to X$ telle que pour tout $A \in \mathfrak{M}$: $\gamma(A(\tilde{x})) = \tau(A)(\tilde{x}).\gamma(\tilde{x})$. A chaque plaque ψ de l'espace total T du fibré ξ est associée la plaque $p \circ \psi$ de la base X, pour tout $r \in \mathrm{def}(\psi)$, $\gamma(p \circ \psi, r)$ et $\psi(r)$ appartiennent à la même fibre, il existe donc un réel unique dont l'action applique $\psi(r)$ sur $\gamma(p \circ \psi, r)$. Cette remarque permet de construire la fonction ν , qui à la plaque ψ de T associe $\nu(\psi) \in C^\infty(\mathrm{def}(\psi), \mathbf{R})$:

$$\nu \in C^\infty(\mathrm{def}(\psi), \mathbf{R}) \quad \forall r \in \mathrm{def}(\psi) \quad \gamma(p \circ \psi, r) = \nu(\psi)(r).\psi(r). \tag{55}$$

D'autre part l'équation $\mathrm{d}[\tau] = 0$ implique l'existence de $\alpha \in \Omega^1(\widehat{X})$ tel que :

$$\forall A \in \mathfrak{M} \quad \mathrm{d}\tau(A) = A^*(\alpha) - \alpha \tag{56}$$

On définit alors l'application $\bar{\alpha}$ qui, à toute plaque ronde ψ de T associe la 1-forme suivante, définie sur le domaine de ψ :

$$\bar{\alpha}(\psi) = \alpha(p \circ \psi) - \mathrm{d}\nu(\psi) \tag{57}$$

On vérifie que $\bar\alpha$, ainsi défini, est une 1-forme sur T, et que c'est même une forme de connexion. Réciproquement on peut montrer que si ξ possède une forme de connexion alors $d[\tau] = 0$. Donc le sous-espace ${}^{d}E_2^{1,0} \subset \mathrm{H}_\delta^{1,0}(X)$ s'identifie naturellement au sous-espace des classes d'équivalences de fibrés principaux de groupe $(\mathbf{R}, +)$ au dessus de X pouvant être muni d'une connexion infinitésimale d'ordre 1. On résume ces propriétés par les équations :

$$\mathrm{H}_\delta^{1,0}(X) \simeq \mathbf{F}(X,\mathbf{R}) \quad {}^{d}E_2^{1,0} \simeq \mathbf{F}^\bullet(X,\mathbf{R}) \tag{58}$$

De plus, muni de cette identification, la flèche ${}^{d}E_2^{1,0} \to \mathrm{H}^2_{DR}(X)$ est l'homomorphisme qui associe au fibré associé à $[\tau]$ la classe de cohomologie de la courbure $d\bar\alpha$. Cette flèche est donc une nouvelle classe de Chern associé à ces fibrés, on la notera c_1. Muni de ces informations on ré-écrit la suite exacte des termes de bas degrés de la suite spectrale associée au complexe de Čech-De Rham de l'espace différentiable X :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{F}(X,\mathbf{R}) & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^1_{DR}(X) \arrow[r, "h_1"] & \check{\mathrm{H}}^1(X,\mathbf{R}) \arrow[r] & \mathbf{F}^\bullet(X,\mathbf{R}) \arrow[u] \arrow[r, "c_1"] & \mathrm{H}^2_{DR}(X) \arrow[r, "h_2"] & \check{\mathrm{H}}^2(X,\mathbf{R}) \\
 & & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Figure 4: suite exacte des termes de bas degrés

Comme exemple on peut considérer celui du tore $\mathbf{T}_\alpha$, quotient de $\mathbf{T}^2$ par l'enroulement irrationnel de pente α, le calcul donne dans ce cas :

$$\begin{cases} \mathrm{H}^1_{DR}(\mathbf{T}_\alpha) = \mathbf{R} & \check{\mathrm{H}}^1(\mathbf{T}_\alpha,\mathbf{R}) = \mathbf{R}^2 \\ \mathbf{F}^\bullet(\mathbf{T}_\alpha,\mathbf{R}) = \mathbf{R} & \\ \mathrm{H}^2_{DR}(\mathbf{T}_\alpha) = 0 & \mathrm{H}^2(\mathbf{T}_\alpha,\mathbf{R}) = 0 \end{cases} \tag{59}$$

La suite exacte associée s'écrit donc $0 \to \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \to 0$. C'est le calcul du groupe $\mathbf{F}(\mathbf{T}_\alpha,\mathbf{R})$ qui met en évidence le cas α diophantien, on a alors $\mathbf{F}^\bullet(\mathbf{T}_\alpha,\mathbf{R}) = \mathbf{F}(\mathbf{T}_\alpha,\mathbf{R})$, et le cas α Liouville, auquel cas l'inclusion

$\mathbf{F}^\bullet(\mathbf{T}_\alpha,\mathbf{R}) \subset \mathbf{F}(\mathbf{T}_\alpha,\mathbf{R})$ est stricte. On voit donc sur cet exemple la nature complexe des relations qu'entretiennent *a priori* ces deux cohomologies.

Remarques 8.1 (*i*) Le noyau de l'homomorphisme de Chern c_1 (figure 4) est le sous groupe de $\mathbf{F}^\bullet(\mathbf{T}_\alpha,\mathbf{R})$ constitué des fibrés à connexion plate, si X est simplement connexe on peut montrer que le seul fibré à connexion plate est le fibré trivial, donc c_1 est une injection. Dans ce cas la suite se scinde, on a d'une part $\check{\mathrm{H}}^1(X,\mathbf{R}) = 0$ et d'autre part $0 \to \mathbf{F}^\bullet(\mathbf{T}_\alpha,\mathbf{R}) \to \mathrm{H}^2_{DR}(X) \to \cdots$, le noyau de h_2 est alors justement le groupe $\mathbf{F}^\bullet(X,\mathbf{R})$ tout entier. Dans ces conditions une deux-forme fermée σ de X est la courbure d'une connexion d'un fibré principal de groupe $\mathbf{R}$ si et seulement si $h_2(\sigma) = 0$.

(*ii*) A titre de curiosité on peut s'amuser à généraliser cette condition de préquantification géométrique, cette fois non pas comme certains auteurs le proposent, en remplaçant le groupe S^1 par le tore irrationnel $\mathbf{T}_\alpha$, mais en considérant des espaces différentiables symplectiques singuliers (X,σ) et en fibrant au dessus par le groupe $\mathbf{R}$, la condition de préquantification devient dans ces condition $h_2(\sigma) = 0$ et non plus $h_2(\sigma) \in \mathbf{Z}$ comme c'était le cas avec S^1.

Bibliographie

[1] Chen K.T. *Iterated path integral*, Bull. of Am. Math. Soc. **83**, N 5, 831-879, 1977.

[2] Donato P. *Revêtement et groupe fondamental des espaces différentiels homogènes*, Thèse Université de Provence, 1984.

[3] Donato P. Iglesias P. *Cohomologie des formes dans les espaces difféologiques*, CPT87/P.86, 1986.

[4] Donato P. Iglesias P. *Exemple de groupes difféologiques : flots irrationnels sur le tore*, C. R. Acad. Sc. Paris ser. 1, **301**, N 4, 1985.

[5] Fuchs D. - Rohlin V. *Premier cours de topologie - Chapitres géométriques*, Editions MIR, Moscou, 1981.

[6] Godement R. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1964.

[7] Iglesias P. *Fibrés difféologiques et Homotopie*, Thèse doctorat, Université de Provence, 1985.

[8] Iglesias P. *Le troisième terme de la suite de De Rham des espaces difféologiques*, CPT-87/P.2052, 1987.

[9] Iglesias P. *Introduction à la géométrie des espaces différentiables*, CPT-88/P.2451, 1987.

[10] MacLane S. *Homology*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1967.

[11] Souriau J.M. *Groupes différentiels et physique mathématique*, Collection travaux en cours Hermann, Paris, 75-79, 1984.