I. Mathematik
33
II. Physik etc.
33

Über eine Klasse nichtassoziativer hyperkomplexer Algebren.

Von

P. Jordan in Rostock.

Vorgelegt von Max Born in der Sitzung am 2. Dezember 1932.

§ 1. Physikalische Überlegungen, über die ich an anderer Stelle berichten will, haben mich auf folgende mathematische Fragestellung geführt. Es sei ein assoziatives hyperkomplexes System gegeben mit Elementen $a, b, c \ldots$ Statt der Produkte ab usw. wollen wir jedoch die Kombinationen

$$(1) \qquad a \times b = \lambda ab + \mu ba$$

betrachten, wo λ, μ zwei beliebige gewöhnliche Zahlen sind; den mit $\times$ bezeichneten Prozeß nennen wir kurz „Quasimultiplikation". Die Quasimultiplikation ist distributiv gegenüber der Addition. Der Spezialfall $\lambda = -\mu$ ergibt bekanntlich eine einer kontinuierlichen Gruppe zugeordnete Algebra; der Fall $\lambda = \mu$ ist physikalisch bedeutungsvoll. Unsere Aufgabe sei, die Gesetzmäßigkeiten der Quasimultiplikation zu formulieren, ohne vermittels (1) auf die Multiplikation zurückzugreifen.

Wir benutzen die Abkürzungen

$$(2) \qquad \{a, b\} = a \times b - b \times a,$$

$$(3) \qquad \{a, b, c\} = (a \times b) \times c - a \times (b \times c).$$

Wäre die Quasimultiplikation gleich der ursprünglichen Multiplikation assoziativ, so wäre also stets $\{a, b, c\}$ gleich Null, was jedoch nicht der Fall ist. Statt dessen gelten als abgeschwächter Ersatz des Assoziativgesetzes die Axiome:

$$(4)\,(\bar{A}) \qquad \{a, b, c\} + \{b, c, a\} + \{c, a, b\} = 0;$$

$$\text{(5) } (\bar{B}) \qquad \{a, d, b \times c\} + \{b, d, c \times a\} + \{c, d, a \times b\} = 0;$$

$$\text{(6) } (\bar{C}) \qquad \{a, b \times c, d\} = b \times \{a, c, d\} + \{a, b, d\} \times c.$$

Aus $(\bar{B})$ folgt übrigens (für $c = 1$):

$$\text{(7) } (\bar{B}') \qquad \{a, d, b\} + \{b, d, a\} = 0.$$

Man kann, wenn man will, $(\bar{A})$ und $(\bar{C})$ zusammenfassen in der einzigen Beziehung

$$\text{(8)} \qquad \{a, b \times c, d\} = \{b, a, d, c\} - \{b, d, a, c\},$$

in der die Abkürzung

$$\text{(9)} \qquad \{b, a, d, c\} = \{b \times a, d, c\} - \{b, a \times d, c\} + \{b, a, d \times c\}$$

gebraucht ist. Darin ist auch noch $(\bar{B}')$ enthalten. Zu $(\bar{C})$ kommt man von (8) aus zurück vermittels der von M. ZORN gefundenen Identität

$$\text{(10)} \qquad \{b, a, d, c\} = b \times \{a, d, c\} + \{b, a, d\} \times c,$$

die sich aus dem distributiven Gesetz allein ergibt.

Die Begründung von $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, $(\bar{C})$ aus der Definition (1) wird sich aus dem Folgenden ergeben. Danach erhebt sich die weitere Frage, ob die wesentlichen Gesetzmäßigkeiten der Quasimultiplikation erschöpfend in $(\bar{A})$, $(\bar{B})$, $(\bar{C})$ ausgedrückt sind. Diese Frage kann bejaht werden in folgendem Sinn. 1) Der Übergang von der Multiplikation zur Quasimultiplikation kann, einmal ausgeführt, beliebig oft wiederholt werden, ohne daß sich ein System wesentlich anderer Struktur ergibt. (Nur die λ, μ ändern sich). Diese Tatsache muß sich aus den Gesetzen der Quasimultiplikation selbst ableiten lassen. Das ist der Fall. 2) Das assoziative Gesetz gewährleistet die Möglichkeit einer eindeutigen Potenzierung ($a^n a^m = a^{n+m}$) der hyperkomplexen Größen. Das muß ebenfalls aus den Gesetzen der Quasimultiplikation abzulesen sein. (Da $a^n \times a^m = a^n a^m$ wird). Auch das ist der Fall.

§ 2. Zur Erledigung der in § 1 gestellten Fragen fassen wir nun von vornherein eine hyperkomplexe Algebra ins Auge, welche nicht assoziativ zu sein braucht, sondern nur den Gesetzen

$$\text{(11) } (A) \qquad [a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0;$$

$$\text{(12) } (B) \qquad [a, d, bc] + [b, d, ca] + [c, d, ab] = 0;$$

$$(13)\,(C) \qquad [a, bc, d] = b\,[a, c, d] + [a, b, d]\,c$$

genügen soll, wobei die Abkürzungen

$$(14) \qquad [a, b, c] = (ab)\,c - a\,(bc)$$

und (im Folgenden)

$$(15) \qquad [a, b] = ab - ba$$

gebraucht werden. Wir nennen eine solche Algebra kurz eine „k-Zahl-Algebra".

Man ersieht dann aus (A), daß, wie im assoziativen Falle,

$$(16) \qquad [a, bc] + [b, ca] + [c, ab] = 0$$

ist; also auch (Jacobische Identität)

$$(16') \qquad [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0.$$

Mit Heranziehung von (B'), d. h. $[a, b, c] = -[c, b, a]$ neben (A) ist ferner

$$(17) \qquad [ab, c] = a\,[b, c] + [a, c]\,b$$

zu beweisen.

Definieren wir nun

$$(18) \qquad a^{n+1} = a^n\,a; \quad a^1 = a,$$

so gilt der

Satz 1: In jeder k-Zahl-Algebra ist eindeutiges Potenzieren möglich:

$$(19) \qquad a^n\,a^m = a^{n+m}.$$

Der Beweis soll auf § 4 verschoben werden, wo er unter noch geringeren Voraussetzungen, als hier, durchgeführt wird. Dort wird ferner auch bewiesen:

Satz 2: Es gelten die Formeln

$$(20) \qquad [a^n, b, a^m] = 0;$$

$$(20') \qquad [b, a^m, a^n] + [a^m, a^n, b] = 0;$$

übrigens ist (20′) aus (20) unmittelbar zu folgern aufgrund von (A).

Wir bilden nun in unserer k-Zahlalgebra eine Quasimultiplikation:

$$a \times b = \lambda a b + \mu b a; \tag{21}$$

die Abkürzungen (2), (3) werden beibehalten. Mit (A) und (B') erhält man dann:

$$\{a, b, c\} = (\lambda + \mu)^2 [a, b, c] + \lambda\mu [b, [a, c]]; \tag{22}$$

und mit (16), (17) ergibt sich daraus

Satz 3: Bei Ersatz der Multiplikation durch eine Quasimultiplikation geht aus einer k-Zahl-Algebra wieder eine k-Zahl-Algebra hervor.

Damit sind die Behauptungen (A), (B), (C) von § 1 bewiesen.

§ 3. Im Fall einer kommutativen k-Zahl-Algebra folgt (A) — und ebenso übrigens (B') — sogleich aus der Definition (14). Also bleiben nur (B) und (C) als Axiome übrig. Man kann aber weiterhin im kommutativen Fall (C) aus (B) ableiten, sodaß als einziges Axiom (B) verbleibt, das dann auch durch

$$[a, b, a^2] = 0 \tag{23}$$

ausgedrückt werden kann[1]).

Man kann danach leicht einsehen: Es sei eine beliebige kommutative Algebra gegeben; und es sei die Möglichkeit festgestellt, ihre Elemente $a, b, \ldots$ in linearer Weise abzubilden auf ein gewisses Matrizensystem $T(a)$, $T(b), \ldots$ (sodaß also $T(a+b) = T(a) + T(b)$ ist) derart, daß folgendes gilt: Schreiben wir kurz $T \times S = \frac{1}{2}(TS + ST)$ für diese Matrizen (also Quasimultiplikation mit $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$), und gebrauchen wir die Abkürzung

$$\delta(a, b) = \delta(b, a) = T(ab) - T(a) \times T(b), \tag{24}$$

so sei stets

$$\delta(ab, c) = T(a) \times \delta(b, c) + T(b) \times \delta(a, c), \tag{25}$$

und

$$[T(a), \delta(a, a)] = [T(a), T(a^2)] = 0. \tag{26}$$

Satz 4: Unter diesen Bedingungen ist die fragliche kommutative Algebra eine k-Zahl-Algebra.

1) Um von (23) zu (B) zurückzukommen, setze man $a = \lambda_1 x + \lambda_2 y = \lambda_3 z$ mit beliebigen Zahlkoeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und beachte, daß (23) identisch in den λ_k gelten muß.

Denn es wird nach (24), (25) und (22):

$$\begin{aligned} T([a, b, a^2]) &= T(ab) \times T(a^2) + \delta(ab, a^2) \\ &\quad - T(a) \times T(ba^2) - \delta(a, ba^2) \\ &= \{T(a),\ T(b),\ T(a^2)\} = \tfrac{1}{4}[T(b),\ [T(a),\ T(a^2)]]. \end{aligned}$$

Man kann (26) auch in der Form

(26′) $$[T(a),\ T(bc)] + [T(b),\ T(ca)] + [T(c),\ T(ab)] = 0$$

schreiben. (Vergl. die Fußnote zu (23)).

§ 4. Wir wollen jetzt solche Systeme betrachten, welche — ohne notwendigerweise k-Zahl-Algebren zu sein — jedenfalls diese Eigenschaft haben: bei Ersatz der Multiplikation durch die symmetrische Quasimultiplikation ($\lambda = \mu$) geht eine (kommutative) k-Zahl-Algebra hervor. Mit $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ soll also

(27) $$4\{a, b, a^2\} = (ab + ba)\, a^2 + a^2 (ab + ba) - (a^2 b + ba^2)\, a - a\,(a^2 b + ba^2) = 0$$

sein; oder:

(28) $$[a, b, a^2] - [a^2, b, a] + [b, a, a^2] - [a^2, a, b] + [a, a^2, b] - [b, a^2, a] = [[a, a^2], b].$$

Dafür ist offenbar hinreichend, daß das System folgende Axiome erfüllt:

(29) (A^*) $$[b, a, a^2] + [a, a^2, b] = 0,$$

(30) (B^*) $$[a, b, a^2] = 0.$$

Wir nennen eine Algebra, die diesen Axiomen (A^*), (B^*) genügt, eine r-Zahl-Algebra. Jede k-Zahl-Algebra ist eine r-Zahl-Algebra. Im kommutativen Fall ist umgekehrt eine r-Zahl-Algebra auch k-Zahl-Algebra. Im nichtkommutativen Fall jedoch existieren r-Zahl-Algebren, welche nicht zugleich k-Zahl-Algebren sind. Ein Beispiel dafür ist das von Cayley angegebene, von M. Zorn [2]) ausführlich untersuchte „alternierende“ System. Es gilt

Satz 5: Eine Quasimultiplikation in einem r-Zahl-System definiert wiederum eine r-Zahl-Algebra.

2) Abh. d. math. Sem. Hamburg.

Satz 6: In jeder r-Zahl-Algebra ist eindeutige Potenzierung möglich: $a^n a^m = a^{n+m}$.

Satz 7: In jeder r-Zahl-Algebra gelten die Formeln

$$[b, a^n, a^m] + [a^n, a^m, b] = 0, \tag{31}$$

$$[a^n, b, a^m] = 0. \tag{32}$$

Mit diesen Eigenschaften erweisen sich die r-Zahlalgebren als eine besonders naturgemäße und untersuchenswerte Verallgemeinerung der assoziativen Systeme. Die Formeln (31), (32) dürften wichtig sein für die Aufsuchung der für r-Zahl-Algebren geltenden Verallgemeinerung des WEDDERBURNschen Satzes; sie besagen ja z. B., daß für zwei orthogonale Einzelgrößen (Idempotente) $e_1 = e_1^2$, $e_2 = e_2^2$ (wo also $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$) die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} [b, e_1, e_2] + [e_1, e_2, b] &= 0, \\ [e_1, b, e_2] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

gelten.

Vermutlich wird man Satz 7 erweitern können zu folgendem Satz, der eine Verallgemeinerung eines von ARTIN festgestellten Satzes für alternierende Systeme darstellt:

Satz 8 (Vermutung): Ein aus nur zwei Elementen a, b durch Multiplikationen und Additionen erzeugtes Teilsystem einer r-Zahl-Algebra ist eine k-Zahl-Algebra, falls $[a, [a, b,] b] = 0$ ist.

Endlich sollen die Beweise der Sätze 6, 7 skizziert werden. Es sei $a^n a^m = a^{n+m}$ bewiesen für alle Fälle $n + m \leqq N$. Dann ist aus (B^*) zu folgern

$$[a, b, a^{n+m}] + [a^n, b, a^{m+1}] = [a^{n+1}, b, a^m], \tag{34}$$

und daraus ist leicht

$$[a^\mu, b, a^\nu] = 0 \text{ für } \mu + \nu \leqq N \tag{35}$$

zu erkennen. Für $b = a$ ergibt das sogleich $a^\mu a^{\nu+1} = a^\mu a^{\nu+1}$, sodaß Satz 6 auch für $n + m = N + 1$ bewiesen ist.

Mit (35) ist dann auch (32) schon bewiesen; dabei haben wir (A^*) noch garnicht benutzt. Man erhält aber aus (A^*) weiterhin

$$\begin{aligned} [b, a, a^{n+m}] + [a, a^{n+m}, b] + [b, a^n, a^{m+1}] + [a^n, a^{m+1}, b] \\ = [b, a^{n+1}, a^m] + [a^{n+1}, a^m, b]. \end{aligned} \tag{36}$$

Diese Gleichung hat hinsichtlich n, m denselben Bau, wie (34), und läßt das Verschwinden der rechten Seite erkennen. Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

Es wäre wichtig, die mathematisch möglichen r-Zahlsysteme vollständig zu übersehen. Betreffs der nichtkommutativen k-Zahlsysteme ist vielleicht die Vermutung berechtigt, daß sie alle durch Übergang zur Quasimultiplikation abgeleitet werden können aus assoziativen Größen. —

Auf die Frage der physikalischen Bedeutung dieser Ergebnisse und Probleme denke ich an anderer Stelle einzugehen.

Nachbemerkung bei der Korrektur: Inzwischen hat sich ergeben, daß (A^*) und (B^*) nicht unabhängig von einander sind; (A^*) ist eine Folge von (B^*), sodaß also (B^*) als einziges r-Zahlaxiom verbleibt.