ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Introduction à l'étude de la distributivité des foncteurs* $\varprojlim$ *par rapport aux* $\varinjlim$ *dans les catégories des faisceaux* (topos). Note (*) de M. **Jan-Erik Roos**, transmise par M. Jean Leray.

Soit U un univers ([1]) et D une catégorie où les U-limites inductives et projectives sont représentables ([2]). Soit, de plus, J une catégorie ($J \in U$) et $J^0 \xrightarrow{\mathrm{I}} (\mathrm{Cat})$ un foncteur contravariant, où (Cat) désigne la catégorie des catégories dans U. On considère donc un système projectif de catégories. Au foncteur I est associée une catégorie fibrée scindée $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathrm{I})$ au-dessus de J ([3]). Nous avons $\mathrm{Ob}(\mathcal{F}) = \coprod_{\alpha \in \mathrm{Ob}(J)} \mathrm{Ob}(\mathrm{I}(\alpha))$ et si (α, β) et (α', β') sont deux objets de $\mathcal{F}[\alpha \in \mathrm{Ob}(J), \beta \in \mathrm{Ob}(\mathrm{I}(\alpha))$, resp. ...], alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}((\alpha, \beta), (\alpha', \beta')) = \coprod_{f \in \mathrm{Hom}_J(\alpha, \alpha')} \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(\alpha)}(\beta, \mathrm{I}(f)\beta').$$

Soit maintenant F un foncteur contravariant $\mathcal{F}^0 \to D$ (F sera moralement un système inductif-projectif). Notons par $\mathrm{F}(\alpha, \beta)$ la valeur de F pour l'objet (α, β) de $\mathcal{F}$, par $\varprojlim_J \mathrm{I}(\alpha)$ la catégorie limite projective de I et par $\mathrm{pr}_\alpha\left(\varprojlim_J \mathrm{I}(\alpha)\right)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{I}(\alpha)$ formée des objets qui sont le $\alpha^{\text{ième}}$ coordonné d'un objet convenable de $\varprojlim_J \mathrm{I}(\alpha)$.

Définition 1. — *On dit que le foncteur* F *est distributif si le morphisme naturel*

$$(1) \qquad \varinjlim_{s \in \varprojlim_J \mathrm{I}(\alpha)^0} \varprojlim_{\alpha \in J} \mathrm{F}(\alpha, s(\alpha)) \to \varprojlim_{\alpha \in J} \varinjlim_{\beta \in \mathrm{pr}_\alpha\left(\varprojlim_J \mathrm{I}(\alpha)^0\right)} \mathrm{F}(\alpha, \beta)$$

est un isomorphisme. Si (1) *est un isomorphisme pour tout* F, *nous dirons que les J-limites projectives sont distributives par rapport aux* $\mathrm{I}(\alpha)$*-limites inductives dans D* ([4]).

Même dans une catégorie comme *U-Ens* (la catégorie des ensembles appartenant à U) il n'est pas vrai que les U-limites projectives générales soient distributives par rapport aux U-limites inductives générales. On est donc amené à étudier la distributivité dans un sens restreint. Dans cette série de Notes nous allons étudier la validité des deux conditions suivantes dans certaines catégories D.

A. *Dans D les U-limites projectives sont distributives par rapport aux U-sommes* [i. e. (1) est un isomorphisme pour tout $\mathrm{F} : \mathcal{F}(\mathrm{I})^0 \to D$, chaque fois que $\mathrm{I} \in U$ et les $\mathrm{I}(\alpha)$ sont discrètes].

B. *Dans D les U-produits sont distributifs par rapport aux U-limites inductives.*

Dans ce dernier cas la distributivité dans D signifie simplement que pour *toute U-famille* $\{(\mathrm{F}(\alpha, \beta))_{\beta \in \mathrm{I}(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathrm{J}}$ (J discrète) de systèmes inductifs le morphisme évident

$$(2) \qquad \varinjlim_{(\beta(\alpha)) \in \prod_{\alpha \in \mathrm{J}} \mathrm{I}(\alpha)} \prod_{\alpha \in \mathrm{J}} \mathrm{F}(\alpha, \beta(\alpha)) \to \prod_{\alpha \in \mathrm{J}} \varinjlim_{\beta \in \mathrm{I}(\alpha)} \mathrm{F}(\alpha, \beta)$$

est un isomorphisme.

On vérifie tout de suite que ces deux conditions sont vérifiées dans la catégorie U-*Ens*. Ce résultat se généralise immédiatement aux catégories D de la forme $\hat{C} = \mathit{Hom}(C^{0}, U\text{-}\mathit{Ens})$, où C est une catégorie appartenant à U, car dans $\hat{C}$ les U-limites inductives et projectives sont représentables et, de plus, ils se calculent « argument par argument » i. e. dans U-*Ens* [2]. Nous voulons généraliser ces résultats de distributivité aux catégories D qui sont des catégories des faisceaux pour une topologie [2] sur C. Donnons d'abord des résultats concernant la condition B.

Théorème 1. — *Soient U un univers et* (C, J) *un site* [2] *appartenant à U avec une topologie moins fine que la topologie canonique. Notons* $\tilde{C}$ (resp. $\hat{C}$) *la catégorie des faisceaux* (resp. des préfaisceaux) *de U-ensembles sur* (C, J), $i : \tilde{C} \to \hat{C}$ *le foncteur d'inclusion,* $a : \hat{C} \to \tilde{C}$ *un foncteur adjoint à gauche* (faisceau associé) *de i tel que* $ia = \mathrm{LL}$, *où* $\mathrm{L} : \hat{C} \to \hat{C}$ *est le foncteur « préfaisceau séparé associé »* [2]. *Les conditions suivantes sur* (C, J) *sont équivalentes :*

(i) *Dans* $\tilde{C}$ *les U-produits sont distributifs par rapport aux U-limites inductives* (i. e. $\tilde{C}$ vérifie la condition B);

(ii) *Dans* $\tilde{C}$ *chaque U-produit d'épimorphismes est encore un épimorphisme, et de plus les U-produits sont distributifs par rapport aux U-sommes;*

(iii) *Le foncteur* $a : \hat{C} \to \tilde{C}$ *commute aux U-limites projectives;*

(iii)′ [resp. (iii)″] *Même assertion pour* L (resp. $\mathrm{LL} = ia$) : $\hat{C} \to \hat{C}$;

(iv) *Le foncteur* $a : \hat{C} \to \tilde{C}$ *admet un adjoint à gauche* $g : \tilde{C} \to \hat{C}$;

(iv)′ [resp. (iv)″] *Même assertion pour* L (resp. $\mathrm{LL} = ia$) : $\hat{C} \to \hat{C}$;

(v) *Chaque* $\mathrm{V} \in \mathrm{Ob}(C)$ *admet un crible couvrant minimal* R_{V} (i. e. un *raffinement* maximal).

(Il revient au même de dire que *chaque* intersection de cribles couvrants de V est encore un crible couvrant.)

Remarque 1. — Notons que la condition (v) est indépendante de l'univers U. Il en résulte que si le site (C, J) vérifie l'une des conditions du théorème 1 pour un univers V tel que $(C, \mathrm{J}) \in V$, alors ce site vérifie toutes ces conditions pour tout univers U auquel il appartient [$\tilde{C}$($\hat{C}$) dénote alors les (pré)faisceaux de V- ou de U-ensembles selon le cas].

Remarque 2. — Comme a commute toujours aux limites projectives finies, il est clair que (iii) signifie simplement que a commute aux U-produits.

Début de la démonstration du théorème 1. — Nous donnons ici quelques implications faciles qui sont valables sans aucune restriction sur la topologie du site. Il est clair que (i) $\Rightarrow$ (ii) car, d'une part (i) implique bien que les U-produits sont distributifs par rapport aux U-sommes, ces dernières étant des cas particuliers des U-limites inductives. D'autre part, (i) entraîne aussi la première assertion de (ii), car $\tilde{C}$ est un topos et un épimorphisme y est donc un épimorphisme effectif universel ([2]). Il en résulte que si $\{ X_\alpha \to Y_\alpha \}_{\alpha \in J}$ est une famille d'épimorphismes dans $\tilde{C}$, alors on a des isomorphismes pour tout α

$$\varinjlim \Big(X_\alpha \amalg_{Y_\alpha} X_\alpha \underset{p_{1\alpha}}{\overset{p_{0\alpha}}{\rightrightarrows}} X_\alpha \Big) \xrightarrow{\sim} Y_\alpha,$$

d'où, par produit, un isomorphisme

$$\prod_{\alpha \in J} \varinjlim \Big(X_\alpha \amalg_{Y_\alpha} X_\alpha \underset{p_{1\alpha}}{\overset{p_{0\alpha}}{\rightrightarrows}} X_\alpha \Big) \xrightarrow{\sim} \prod_{\alpha \in J} Y_\alpha. \tag{3}$$

En vertu de (i) on peut appliquer la formule de distributivité (2) au premier membre de (3), et nous obtenons donc un isomorphisme

$$\varinjlim_{(\beta(\alpha)) \in \prod_{\alpha \in J} D} \prod_\alpha Z(\alpha, \beta(\alpha)) \xrightarrow{\sim} \prod_{\alpha \in J} Y_\alpha \tag{4}$$

où D est la catégorie $0 \rightrightarrows 1$ et où $Z(\alpha, \beta(\alpha))$ est égal à $X_\alpha \amalg_{Y_\alpha} X_\alpha$ si $\beta(\alpha) = 0$ et égal à X_α si $\beta(\alpha) = 1$. Mais on voit alors facilement que $\amalg Y_\alpha$ s'identifie *aussi* à la limite inductive du système inductif

$$\prod_\alpha (X_\alpha \amalg_{Y_\alpha} X_\alpha) \rightrightarrows \prod_\alpha X_\alpha.$$

obtenu par restriction du système inductif du premier membre de (4). Il en résulte bien que $\amalg X_\alpha \to \amalg Y_\alpha$ est un épimorphisme. Montrons maintenant que les conditions (iii) à (v) sont équivalentes et commençons par l'implication (iii) $\Rightarrow$ (v). Soit $J(V) \in U$ l'ensemble des cribles couvrants de V. Ces cribles forment un système projectif par inclusion, et nous avons donc un système projectif de monomorphismes dans $\hat{C} : \{ R \to h_V \}$. Un passage à la limite donne un monomorphisme $\varprojlim R = \bigcap_{R \in J(V)} R \to h_V$.

Appliquons maintenant le foncteur a à ce morphisme et utilisons (iii) ainsi que le fait que $a(R) \xrightarrow{\sim} ah_V$. Nous obtenons

$$a\Big(\bigcap R \Big) \xrightarrow{\sim} \varprojlim a(R) \xrightarrow{\sim} ah_V,$$

ce qui démontre que $\bigcap \mathrm{R}$ est encore un crible couvrant de V, de sorte que (v) est bien vérifié avec $\mathrm{R}_{\mathrm{V}} = \bigcap\limits_{\mathrm{R} \in \mathrm{J}(\mathrm{V})} \mathrm{R}$. De plus, il est clair que R_{V} dépend fonctoriellement de V. Pour voir que (v) $\Rightarrow$ (iv)' on observe que, par définition de L, nous avons

$$\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_{\mathrm{V}}, \mathrm{LF}) \xleftarrow{\sim} \varinjlim_{\mathrm{R} \in \mathrm{J}(\mathrm{V})} \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(\mathrm{R}, \mathrm{F}). \tag{5}$$

Or, par hypothèse, J(V) admet un élément minimal R_{V} et la limite dans (5) s'identifie donc à $\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(\mathrm{R}_{\mathrm{V}}, \mathrm{F})$, d'où la formule

$$\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(h_{\mathrm{V}}, \mathrm{LF}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(\mathrm{R}_{\mathrm{V}}, \mathrm{F}). \tag{6}$$

Comme chaque objet de $\hat{C}$ est limite inductive d'objets représentables, on peut définir un foncteur $\mathrm{R} : \hat{C} \to \hat{C}$ par $\mathrm{RG} = \varinjlim_{C/G} \mathrm{R}_{\text{source}}$ et la formule (6) donne, par passage à la limite,

$$\mathrm{Hom}_{\hat{C}}(\mathrm{G}, \mathrm{LF}) \xleftarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\hat{C}}(\mathrm{RG}, \mathrm{F}),$$

ce qui montre bien que L admet un adjoint à gauche R [(iv')]. Cette assertion implique alors automatiquement (iv)'', (iv), (iii), (iii)' et (iii)'' : En effet, pour (iv)'' [resp. iv)], on vérifie que RR (resp. $g = \mathrm{RR}i$) est un adjoint à gauche de LL (resp. de a). Les conditions (iii) à (iii)'' sont tous des conséquences des conditions (iv) à (iv)'' (un foncteur qui admet un adjoint à gauche commute aux limites projectives). De plus, (iii)' $\Rightarrow$ (iii)'' $\Rightarrow$ (iii) de sorte que les conditions (iii) à (v) sont bien équivalentes. D'autre part, (iii) $\Rightarrow$ (i). La condition (iii) implique en effet même que chaque relation de distributivité valable dans *U-Ens* reste valable dans $\tilde{C}$. Pour finir la démonstration du théorème 1, il suffira maintenant de montrer par exemple que (ii) $\Rightarrow$ (v) et ceci résultera de deux théorèmes plus précis de la Note suivante, où l'on utilisera effectivement l'hypothèse sur la topologie de (C, J).

(*) Séance du 27 juillet 1964.

(1) *Cf.* P. GABRIEL, *Thèse*, Paris, 1961, chap. I, 1; *Bull. Soc. Math. Fr.*, 90, fasc. 3, 1962.

(2) Nous utilisons ici librement les notions et les résultats sur les catégories, sites, topos, faisceaux, etc. qui sont contenus dans *Séminaire* M. ARTIN-A. GROTHENDIECK, I.H.E.S., 1963-1964, exposés I-III (de J.-L. VERDIER).

(3) A. GROTHENDIECK, *Séminaire*, I.H.E.S., 1960-1961, exposé VI.

(4) On pourrait aussi étudier la distributivité par rapport aux pseudo-foncteurs $J^0 \to (\mathrm{Cat})$ Dans ce cas, la catégorie fibrée $\mathcal{F}(\mathrm{I})$ n'est plus scindée en général et pour définir les deux membres de (1) il faut utiliser les sections cartésiennes (3) de $\mathcal{F}(\mathrm{I})$ sur J.

(*Université de Lund, Suède.*)