Motivation für interdisziplinäre Arbeit im Grenzbereich von Mathematik, Physik und Philosophie

Urs Schreiber

26. November 2008

Zusammenfassung

Aktuelle Fragen zu den Fundamenten der modernen theoretischen Physik verlangen eine mathematische Sprache und Modellbildung, die sich ohne echten interdisziplinären Austausch zwischen reiner Mathematik und theoretischer Physik – sowie möglicherweise ontologischer Philosophie – kaum beantworten lassen.

Inhaltsverzeichnis

1 Suche nach einer natürlichen Sprache **2**
- 1.1 In der Mathematik . . . 2
- 1.2 In der klassichen Mechanik . . . 2
- 1.3 In der Quantenfeldtheorie . . . 3

2 Über die Fachgrenzen hinaus **4**
- 2.1 Die Formulierung der Formulierung des Problems . . . 4
- 2.2 Die Puzzlestücke zusammenfügen . . . 5

Kürzlich verfolgte ich eine Kontroverse zum Wesen der mathematischen Physik: aus Anlass der Verleihung eines Preises in diesem Gebiet für zwar formale aber nicht mathematisch-rigorose Arbeiten von Physikern wurde die Missachtung der wahren Bedeutung dieses Begriffes beklagt; die Anwendung lückenloser – "rigoroser" – Beweistechniken auf physikalisch motivierte mathematische Fragestellungen sei die ursprüngliche Bedeutung und das Wesen der mathematischen Physik, nicht die Modellierung physikalischer Theorien durch mathematische Strukturen.

Dies mag wohl so sein – und geht doch an der interessanten Frage vorbei, die sich im Grenzgebiet von Mathematik und Physik – und womöglich von philosophischer Ontologie – stellt:

> Welche mathematischen Strukturen sind *natürlich* in der Physik?

1 Suche nach einer natürlichen Sprache

Die Geschichte der theoretischen Physik ist nicht zuletzt die Geschichte eines Suchprozesses nach geeigneten Begriffen: zwar sind mathematische Theorien – wie zum Beispiel symplektische Geometrie, Gruppentheorie, Differentialgeometrie etc. – zunächst "nur Sprachen", d.h Begriffsbildungen – und jede dieser Sprachen wurde bei ihrer Einführung in die theoretische Physik zunächst, zum Teil lebhaft, ob Ihrer angeblichen Überflüssigkeit angezweifelt und angefeindet (z.B. als "Gruppenpest" von niemand geringerem als Wolfgang Pauli) – doch wissen wir rückblickend, dass die modernen Einsichten und Sätze der, respektive, klassischen Mechanik, Quantenmechanik sowie allgemeinen Relativitätstheorie ohne die Verwendung dieser Sprachen praktisch undenkbar gewesen wäre. Im wahren Sinne des Wortes.

1.1 In der Mathematik

In der reinen Mathematik selbst ist das Ergebnis eines ähnlichen Suchprozesses nach natürlicher Begriffsbildung Ende des letzten Jahrhunderts zu großen Teilen fest etabliert worden: Kategorientheorie – direkte Verallgemeinerung der Gruppentheorie – hilft nicht nur Ordnung in die existierenden mathematischen Erkennntnisse zu bringen, sie hat sich selbst als unerlässlich erwiesen gewisse Erkenntnisse überhaupt erst denkbar zu machen. So wie die Mengentheorie im 19. Jahrhundert erscheint heute ihre Verallgemeinerung zur Kategorientheorie die natürliche Sprache der Mathematik zu liefern. Dies geht so weit, dass selbst eher philosophisch erscheinende Fragestellungen wie: "Was heisst eigentlich 'natürlich' in der Mathematik?" eine formale und nutzbare Bedeutung gewinnen: in der Tat wurde Kategorientheorie von Eilenberg und MacLane im Zuge der Formalisierung dieses Begriffts entdeckt.

Der geneigte theoretisch-mathematisch orientierte Physiker kann diese Entwicklung kaum betrachten ohne über die Konsequenzen für die Begriffsbildung in der Physik nachzudenken. Angesichts der zum Teil tief ontologisch befriedigend wirkenden kategorietheoretischen Erklärungen und Entdeckungen stellt sich sicherlich die berechtigte Frage, ob die Annäherung an eine natürliche mathematische Realität, die hier offenbar erreicht wird, nicht auch in die natürliche physikalische Realität selbst hineinreichen sollte.

In der Tat: bemerkenswerterweise sind eine ganze Reihe von fundamentalen Einsichten in Kategorientheorie von theoretischen Physikern ausgegangen, von solchen die sich die Zeit genommen haben den Strukturen mit denen Sie umzugehen hatten auf ihren eigentlichen Grund zu gehen. Dies gilt insbesondere für William Lawvere und John Roberts.

1.2 In der klassichen Mechanik

Lawvere wurde vom bloßen Studium von Differentialgleichungen in der klassischen Kontinuumsmechanik, über die auf Newton und Leibnitz zurückgehende Frage nach dem Wesen des dafür unerlässlichen Begriffes des *infinitesimalen* in der klassichen Mechanik, zu einer ungeheuer mächtigen kategoriellen Begriffsbildung geführt, die heute als Topos-Theorie wohl etabliert ist. Dass sich Lawveres hellsichtige Neubetrachtung der klassischen Mechanik erst in allerjüngster Zeit bei einigen wenigen interessierten theoretischen Physikern herumzusprechen beginnt ist weniger ein Zeichen für die Berechtigung des zu erwartenden Vorwurfs einer

Topospest, als vielmehr ein Zeichen für die Distanz die sich in dem jetzt zu erkundenden Raum der kategoriell formulierten Physik zurucklegen lässt: Lawvere geht soweit, nicht nur in physikalischen Phänomenen kategorielle Strukturen zu identifizieren, sondern weist immer wieder darauf hin, dass viele grundlegende ontologische Begriffe so eine nutzbringende Formalisierung finden. So zum Beispiel die Dualität zwischen *Raum und Messgröße* – ein immer wiederkehrendes Thema in der Entwicklung physikalischer Theorien, früher für Relativitätstheorie und Quantenmechanik genauso aktuell wie heute für String-Theorie und ihre verallgemeinerten Geometrien – die Lawvere mit der fundamentalen und elementaren kategoriellen Dualität zwischen Garben und Kogarben identifiziert, und damit den konzeptionellen Unterbau für aktuelle intensive Forschung zu verallgemeinerten – zum grossen Teil quantenmechanisch motivierten – Räumen (z.B. in nichtkommutativer und derivierter algebraischer Geometrie) liefert.

1.3 In der Quantenfeldtheorie

Dennoch steht die Lawvere-ifizierung des eigentlichen Zentrums der modernen theoretischen Physik noch aus: der Quantenfeldtheorie. Seit Jahrzehnten etabliert, fällt es dem praktizierenden Physiker nur zu leicht zu vergessen, dass dieser momentane Höhepunkt unseres Verständnisses der fundamentalen physikalischen Wirklichkeit zu großen Teilen noch immer nichts anderes ist als ein Mysterium das gelöst werden will. Wie zu Zeiten von Keplers Beschreibung der Planetenbahnen durch eine Handvoll von ad hoc postulierten Gesetzmässigkeiten gibt es zwar eine Menge von Kochrezepten, die viele Teilaspekte der Quantenfeldtheorie beschreiben, aber die Entdeckung des Analogons der Newtonschen Erklärung der Keplerschen Gesetze als Konsequenzen einer geschlossenen dahinterliegenden Theorie steht in der Quantenfeldtheorie noch immer aus.

Eine der besten Näherungen an dieses Fernziel ist sicherlich die von Haag und Kastler begründete *Algebraische Quantenfeldtheorie*: diese Axiomatisierung baut bemerkenswerterweise zentral auf dem kategorietheoretischen Begriff der Kogarbe auf (das sogenannte *Netz von lokalen Observablen* einer Quantenfeldtheorie). Noch bemerkenswerter ist vielleicht nur, dass diese Tatsache in der bisher existierende Literatur höchstens am Rande erwähnt wird:

Obwohl ihre volle Tragweite für unser konzeptionelles Verständnis von Quantenfeldtheorie noch immer kaum erforscht ist, wurde sie schon früh von John Roberts erkannt und weiterverfolgt. Höhere Garben und Kogarben bilden den Grundstein einer allgemeinen Kohomologietheorie die erst in jüngster Zeit unter dem dem Stichwort ∞-*Stacks* intensiver studiert wird und wiederum Anwendung in der Quantenfelldtheorie findet. John Roberts sah bereits Ende the 1960er aus seinen quantenfeldtheoretischen Betrachtungen heraus die Notwendigkeit von höheren Kategorien. Tatsächlich basiert Ross Street's kurz darauf etablierter Begriff von "ω-Kategorien" auf Roberts' frühen Arbeiten. Nicht nur dies, Roberts sah auch dass eine allgemeine Theorie der Kohomologie von (Ko-)Garben, die er als Heimat gewisser Invarianten von Quantenfeldtheorien erkannte, über (Ko-)Garben mit Werten in solchen Unendlich-Kategorien zu beschreiben ist, also durch ∞-*Praestacks* wie man heute sagt.

Diese beachtlich Menge an grundlegender kategorietheoretischer Begriffsbildung, die von Lawvere und Roberts vor einigen Jarhzehnten bereits aus der theoretischen Physik heraus gefunden wurde, sollte wohl theoretischen Physikern ebenso wie Mathematikern und naturwissenschaftlich interessierten Philosophen zu denken geben.

In Teilbereichen ist dies bereits der Fall. So hat der zweite existierende Vorschlag zur Axiomatisierung von Quantenfeldtheorie, Atiyah und Segals Definition einer Quantenfeldtheorie als einer funktoriellen Darstellung von Kobordismenkategorien – auch dies, obwohl ein elementares Konzept, ohne kategorietheoretische Sprache kaum denkbar – zu bemerkenswerter Aktivität geführt. Einige vergleichsweise einfache Spezialfälle von Quantenfeldtheorien auf topologisch nichttrivialen Räumen wurden so zum ersten Mal einer strengen mathematischen Klassifizierung zugänglich, neben topologischen Feldtheorien zum Beispiel rationale konforme Feldtheorien sowie kohomologische Feldtheorien. Vor kurzem erst haben Hopkins und Lurie mittels Joyals Modells von ∞-Kategorien die nun zehn Jahre alte Baez-Dolan Hypothese zu topologischer Quantenfeldtheorie beweisen können. Arbeiten von Freed wiederum liefern konkrete Anwendungen und Beispiele, gerade bezüglich der wichtigen Chern-Simons Quantenfeldtheorien.

Auch in dem nahe verwandten Bereich der Theorie offener topologischer Strings und der String-theoretischen *mirror symmetry* hat sich kategorietheoretische Sprache nicht zuletzt durch die Arbeiten von Kontsevich zu verallgemeinerten Geometrien unentbehrlich gemacht. In diesen Bereichen mathematisch-theoretischer Physik ist kategorietheoretische Sprache seit längerem so etabliert dass deren Benutzung keinem der Beteiligten mehr besonders auffällt. Dies ist das sicherste Zeichen einer natürlichen Sprache.

2 Über die Fachgrenzen hinaus

Dass Außenstehende, sowohl auf der mathematischen als auch auf der physikalischen Seite, diesem entstehenden Phänomen einer Neuformulierung von Quantenfeldtheorie in kategorieller Sprache – trotz vielversprechender Ansätze sicherlich erst in den Anfängen befindlich – reserviert bis skeptisch gegenüberstehen hat zum guten Teil mit Spezialistentum zu tun: der Mathematiker weiss nicht um die Anwendungsmöglichkeiten seiner Ergebnisse in der theoretischen Physik und kann die betreffenden Arbeiten auch nicht dechiffrieren, der theoretische Physiker kennt die für seine Anwendungen geeignete mathematische Sprache und ihre Modellbildung nicht.

2.1 Die Formulierung der Formulierung des Problems

Man möchte vermuten dass *mathematische Physik*, als offenbar inhärent interdisziplinär angelegtes Gebiet, genau hier als Bindeglied wirken kann. Das funktioniert aber sicher nicht wenn man die eingangs erwähnte enge Vorstellung von mathematischer Physik verfolgt: damit eine physikalische Aussage einem lückenlosen mathematischen Beweis überhaupt zugänglich gemacht werden kann muss sie erstmal formalisiert werden. Zum Beispiel muss erst erkannt werden, dass Diracs Einsicht in die Quantisierung magnetischer Ladung eigentlich eine Aussage über die Klassifikation von Hauptfaserbündeln ist um daraus ein mathematisches Theorem machen zu können. Diese Modellierung von physikalischen Phänomenen durch mathematische Strukturen ist aber nicht gottgegeben. Sie ist meist ein Resultat von viel Versuch umd Irrtum – und manchmal einfach des Zufalls.

Was wenn der Mathematiker Minkowski nicht zu Ende seines Lebens Interesse an mathematischer Physik entwickelt und nicht erkannt hätte, dass die frisch erdachte spezielle Relativitätstheorie mathematisch durch die Theorie pseudo-Riemannscher Metriken modelliert wird? Mit diesem mathematischen Modell, dieser dem Problem natürlich angepassten mathematischen Sprache, wird der Schritt zur allgemeinen Relativitätstheorie fast zwingend. Ohne diese Perspektive scheint er praktisch undenkbar.

Es ist nicht klar, dass solche Einsichten unbedingt dem Zufall überlassen werden müssen. Angesichts der immensen konzeptionellen Schwierigkeiten, die einem in der Quantenfeldtheorie und nicht zuletzt der Stringtheorie begegnen, und angesichts gleichzeitig der Reihe interessanter mathematischer Strukturen – zum Teil ganzer Untergebiete der Mathematik – die aus dem Studium von Quantenfeld- und Stringhteorie entstanden sind, scheint es durchaus ratsam, aktiv und systematisch nach den richtigen mathematischen Modellen für physikalische Theorien zu suchen.

So ist zum Beispiel trotz all der oben erwähnten Fortschritte ein herausragendes Problem der mathematischen Quantenfeldtheorie eine sinnvolle Formalisierung und Axiomatisierung der phänomenologisch wirklich interessanten Quantenfeldtheorien: auf topologisch nichttrivialen Mannigfaltigkeiten von Dimension grösser als 3 und von einer Hintergrundstruktur, wie zum Beispiel einer Riemannschen Metrik, abhängig. Das kanonische Beispiel ist 4-dimensionale Yang-Mills Eichtheorie, wie sie dem Standardmodell der Elementarteichenphysik zugrunde liegt. In Ihrer Beschreibung des Clay-Millenium Problems zur Yang-Mills Theorie schreiben Arthur Jaffe und Edward Witten daher auch:[1]

> Man hat noch kein mathematisch vollständiges Beispiel einer Quanten-Eichtheorie in vier-dimensionaler Raumzeit, noch nicht einmal eine präzise Definition von Quanten-Eichtheorie in vier Dimensionen. Wird sich dies im 21ten Jahrhundert ändern? Das hoffen wir!

[1] http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills_Theory/yangmills.pdf

Demnach ist eines der herausragenden Probleme der mathematischen Physik unserer Zeit nicht die Lösung eines exakt formulierten Problems, sondern die exakte Formulierung des Problems selbst!

2.2 Die Puzzlestücke zusammenfügen

Eine solche Aktivität ist anscheinend weder in der reinen Mathematik, noch in der theoretischen Physik selbst genuin verankert, noch ist offenbar die praktizierte mathematische Physik wirklich darauf ausgelegt. Es geht um echte Interdisziplinarität zwischen Mathematik und theoretischer Physik. Und wenn man Lawveres Gedanken folgen mag, so ist für die Lösung eines solchen Problems eine gewisse Dosis fundamental ontologisch-philosophischer Überlegungen, wie die nach der kategoriellen Formulierung von grundsätzlichen Konzepten unserer Anschauung, wie Raum und Messgrößen, eher zielführend als eine Ablenkung.

Inwiefern dies zutrifft hängt natürlich wiederum von der Weise ab in der man den Erfolg einer solchen Unternehmung misst. Viele der involvierten Fragestellungen sind kaum geeignet in schneller Folge Veröffentlichungen zu produzieren, sondern erfordern im Gegenteil wahrscheinlich eher einen gewissen Langmut. Die Erfahrung zeigt, dass dies gerade in der schnellebigen Welt der aktuellen theoretischen und Hochenergiephysik zu Missverständnissen und Irritationen führen kann. In manchen Bereichen der modernen Hochenergiephysik wurde ein beachtlicher Turm aus halb-bewiesenen Aussagen errichtet, deren Wahrheit nach jahrelanger Wiederholung oft einfach als gegeben angenommen wird. So stoßen zum Beispiel einige der oben erwähnten Klassifizierungsresultate in niederdimensionaler Quantenfeldtheorie in gerade den Gebieten der formalen Hochenergiephysik auf zum Teil auf wenig Enthusiasmus, in denen diese relevant sein sollten: es wird gerne angenommen dass diese Resultate nicht eigentlich neu sind und in jedem Fall die ihnen zugrunde liegenden Annahmen zu strikt für die wirklich faszinierenden physikalischen Anwendungen. Dass diese wirklich faszinierenden Anwendungen natürlich noch viel weniger wirklich verstanden werden wird dabei gerne übersehen. Obwohl von großer Relevanz für die potentielle Lösung offener fundamentaler Fragen, ist also gerade die Kommunikation zwischen theoretischen Physikern zu ihren mathematisch arbeitenden Kollegen gestört.

Daher sollte die Suche und Weiterentwicklung guter mathematischer Modelle für Quantenfeldtheorien, wiewohl womöglich langwierig, keinesfalls in Isolation vor sich gehen. Im Gegenteil gibt es möglicherweise bereits entscheidende isoliert verstandene Puzzleteile in den Arbeiten von Mathematikern und theoretischen Physikern, die nur richtig zusammengefügt werden müssten um einen deutlichen Fortschritt zu erziehlen.

Ein gutes Beispiel hierfür ist die verbreitete Anwendung graduierter Differentialalgebren in der theoretischen Physik, insbesondere im Kontext des sogenannten BRST-BV-Formalismus. Durch Arbeiten von Ševera, Sullivan und Getzler weiss man seit relativ kurzer Zeit, dass diese graduierten Differenzialalgebren auf natürliche Weise als Lie-algebraische, also infinitesimale, Analoga zu glatten ∞-Kategorien betrachtet werden können. Auf diese Weise erkennt man, mit vielleicht berechtigtem Erstaunen, dass die in der funktoriellen Quantenfeldtheorie im Sinne von Baez-Dolan und Hopkins-Lurie postulierten ∞-kategoriellen Strukturen auf leicht versteckte Art und Weise von Physikern seit langem eingeführt sind und mit Gewinn angewandt werden. Die bloße Zusammenfügung dieser beiden Puzzlestücke birgt einen nicht zu unterschätzenden Erkenntnisgewinn auf beiden Seiten: durch die konzeptionelle Einordnung werden viele Konstruktionen in der Physik plötzlich transparenter und verlieren ihren mysteriösen Charakter – ganz so wie die Einführung des deRham Kalküls die Maxwellschen Gleichungen ordnete – während man sich auf der mathematischen Seite unerwartet zu dem eben definierten Problem mit einem grossen Werkzeugkasten und einem Fundus an Beispielen ausgestattet sieht.

Für die Entdeckung dieses BRST-BV-Formalismus wurde übrigend der eingangs erwähnte Preis vergeben[2].

[2] http://www.aps.org/programs/honors/prizes/heineman.cfm