Zur Logik der Modalitäten.

Von

Oskar Becker (Freiburg i. Br.).

Vorbemerkung.

Die folgende kleine Abhandlung enthält einen ersten Versuch, an das heute langsam aktuell werdende Problem der Logik der Modalitäten mit einer eigenen Methode heranzutreten. Diese Methode ist einerseits vom Logikkalkül als dem heute unentbehrlichen Instrument formallogischer Forschung, andererseits aber von den Gesichtspunkten der Phänomenologie bestimmt. Die vereinte Benutzung dieser beiden, ihrem inneren Wesen und ihrer methodischen Technik nach so verschiedenen Forschungsweisen mag nicht unbedenklich erscheinen und ist in der Tat nicht ohne Schwierigkeiten. Indessen erscheint sie unumgänglich, wenn man zwei zueinander „polare" Einseitigkeiten, einesteils die mathematische Kombination größtenteils leerer Begriffshülsen, andernteils die gewissermaßen „kurzsichtige" Deskription naheliegender, mehr oder minder willkürlich aufgeraffter konkreter Fälle — das, was man witzig die „Empirie des Apriori" genannt hat — vermeiden will.

Es ist vielleicht verständlich, wenn die Anwendung unserer Methode von Vollkommenheit noch weit entfernt ist. Man wird vor allem das allzu große Übergewicht des Formalen über das Phänomenologische tadeln können. Indessen ist vielleicht die Hoffnung berechtigt, daß die Aufhellung der formal-mathematischen Strukturen als Wegbereitung der phänomenologischen Forschung wird dienen können.

Leider sind auch die formalen Probleme selbst eines verhältnismäßig so eingeschränkten Gebiets, wie das der Rangordnung und Reduktion komponierter Modalitäten keineswegs vollständig gelöst. Es wurde Wert darauf gelegt, die offenen Probleme möglichst klar herauszustellen und die noch bestehenden Lücken nicht zu verdecken, in der Hoffnung, daß spätere Forschung sie schließen wird. —

Während, nach einer allgemeinen, auch über das Historische kurz berichtenden Einleitung, der erste Teil das formale Rangordnungs- und Reduktionsproblem der Modalitäten kalkülmäßig behandelt und — wenn auch nur sehr skizzenhaft — phänomenologisch interpretiert, beschäftigt sich der zweite Teil ganz unabhängig davon mit der Aufgabe, von dem Gesichtspunkt einer unformalen Logik der Modalität aus das philosophische, d. h. logisch-ontologische Problem des mathematischen „Intuitionismus" neu zu beleuchten. Angeregt wurden diese Betrachtungen durch die kürzlich veröffentlichte Auseinandersetzung Ernst Cassirers mit Brouwers Gedanken, auf die fortlaufend eingehender Bezug genommen wurde.

Die beiden ziemlich unabhängigen Teile möchten als erste Versuche auf dem noch wenig erforschten Gebiet angesehen werden, denen der Verfasser später noch weitere hinzuzufügen hofft.

I.

Über Rangordnung und Reduktion logischer Modalitäten.

Einleitung.

Obwohl schon Aristoteles sich (in den letzten Kapiteln der „Hermeneutik" und in der „Ersten Analytik") mit der Logik der Modalität ausführlich beschäftigt hat, ist doch der Versuch einer kalkülmäßigen Darstellung zuerst um die Wende des 20. Jahrhunderts gemacht worden. Und erst im Zusammenhang damit tauchte der Gedanke auf, Modalitäten beliebig zu komponieren und zu iterieren (auf sich selbst wiederholt anzuwenden), welches Verfahren das Thema unserer Betrachtung im ersten Abschnitt dieses Aufsatzes sein soll.

Hugh MacColl hat bereits im Jahre 1906 in seinem Werke „*Symbolic Logic and its applications*" (London, Longmans) und in einer Reihe von Zeitschriftaufsätzen einen logischen Kalkül entwickelt, dem an Stelle der üblichen beiden „Wahrheitswerte" „wahr" und „falsch" deren fünf zugrunde liegen, die aus der Kombination der logischen „Qualitäten" Position und Negation (die sog. „Limitation", die bei Kant als dritte Urteilseigenschaft der Qualität figuriert, blieb unberücksichtigt) mit den sog. „Modalitäten" des Urteils, „Notwendigkeit", „Wirklichkeit" (= Wahrheit) und „Möglichkeit" entstehen. Die Grundprädikate des Urteils sind nach Mac Coll: „*certain*" (notwendig), „*impossible*" (unmöglich), „*true*" (wahr), „*false*" (falsch), „*variable*" = *not certain and not impossible*

d. i. das logische Produkt[1]) von zwei „Möglichkeits"-Prädikaten, die man, allerdings etwas ungenau, wiedergeben kann mit „möglicherweise wahr" = „nicht unmöglich" und „möglicherweise falsch" = „nicht notwendig" [„unnotwendig"] oder „ungewiß".

C. J. Lewis, der in seinem bekannten Werk *„A survey of symbolic logic"* (Berkeley 1918) über H. Mac Coll, allerdings nur sehr kurz, berichtet[2]), hat seinerseits ein System der elementaren Aussagenlogik entwickelt[3]), das außer der gewöhnlichen Negation als „primitive Idee" die Unmöglichkeit einführt und mit ihrer Hilfe dann Möglichkeit und Notwendigkeit (und ihr Gegenteil) definiert.

Während Mac Coll, im Anschluß an die natürliche Sprache und im Gegensatz zu den üblichen Systemen des Logikkalküls, aus prinzipiellen Gründen die 5 Modalitäten einführte, wurde C. J. Lewis von einer bestimmten besonderen Absicht bei der Aufstellung seines *„System of strict implication"* geleitet; nämlich die Vermeidung gewisser „eigentümlicher (d. h. paradoxer) Behauptungen" (*peculiar propositions*) zu ermöglichen, die sich im gewöhnlichen Kalkül zwangsläufig ergaben. Als typische Beispiele können die bekannten paradox anmutenden Sätze gelten: „Ein wahrer Satz wird von allen Sätzen impliziert", „Ein falscher Satz impliziert alle Sätze". Diese und ähnliche Sätze sind, wenn man den in der Logistik üblichen Implikationsbegriff benutzt, unvermeidlich. Daß sie paradox wirken, hängt damit zusammen, daß die in der natürlichen Sprache durch „Wenn ... so ..." ausgedrückte Idee nicht mit jenem Begriff der Implikation zusammenfällt. Lewis bestrebt sich nun, einen neuen, obschon mit dem alten verwandten Begriff von Implikation aufzustellen — er nennt ihn *„strict implication"* —, der der mit „Wenn ... so ..." bezeichneten Gedankenverbindung zum mindesten erheblich näherkommt. Um diesen zu definieren, braucht er eigentlich vor allem den neuen zusätzlichen Negations-Begriff der „Unmöglichkeit". Während nämlich die „klassische Implikation" zwischen p und q — in Zeichen $p \subset q$ nach Lewis (nach Russell $p \supset q$,

1) Wir bezeichnen mit „logischem Produkt" in der üblichen Weise die konjunktive Verknüpfung (durch „und") zweier (und auch mehrerer) Urteile. Daß man neuerdings darunter zuweilen die disjunktive Verknüpfung (durch „oder") versteht, halten wir, trotz gewisser, wie uns scheint unbeträchtlicher formaler Vorteile, für eine nicht zweckmäßige Verwirrung eines Sprachgebrauchs, der auf eine immerhin bereits erhebliche Tradition und Verbreitung hinblicken kann.

2) l. c. p. 108, cf. p. 292.

3) l. c. Ch. V, p. 291—339; dazu eine Berichtigung im *Journal of philosophy, psychology and scientific methods*, die den Exemplaren des Buches jetzt beiliegt.

nach Hilbert $p \rightarrow q$) — definiert werden kann als das Negat des logischen Produkts aus p und dem Negat von q, in Zeichen:

$$p \subset q = -(p \times -q),$$

bedeutet „p *implies strictly* q“, in Zeichen $p < q$, die Unmöglichkeit der Geltung des obigen logischen Produkts aus p und dem Negat von q, in Zeichen:

$$p < q = \sim(p \times -q)$$

($\sim$ ist also das Zeichen der Unmöglichkeit, — das der einfachen Negation). Kurz: „p impliziert q“ bedeutet im klassischen Sinn: „‚p und nicht-q‘ ist falsch“; im „strikten“ Sinn besagt es dagegen: „‚p und nicht-q‘ ist unmöglich, d. i. notwendig falsch“. Damit hängt zusammen, wie hier nicht genauer dargelegt werden kann, daß die „strikte“ Definition der Implikation die Notwendigkeit dieser Verknüpfung, die auch in der populären Vorstellung von der „notwendigen Folge“ sich hervordrängt, betont.

Das Ziel der gegenwärtigen Betrachtung steht nun sowohl mit den Forschungen MacColls wie mit denen von Lewis in enger Beziehung. Er ist die letzte Absicht unserer Untersuchungen, einen elementaren logischen Kalkül zu entwickeln, der die Modalitäten der Aussage in angemessener Weise berücksichtigt, und zwar so, daß das sog. elementare Entscheidungsproblem lösbar ist, wie im gewöhnlichen Aussagenkalkül[1]). Das besondere Interesse, das ein solcher Kalkül beanspruchen darf, liegt nun — abgesehen davon, daß das Problem der Modalitäten sich überhaupt, wie von verschiedenen Seiten gesagt wurde, als eines der nächsten großen „logistischen“ Probleme darbietet — in Folgendem: Die Brouwerschen Ansätze zu einer rein finiten, allein auf wirklicher Klarheitsevidenz (Husserl)[2]) beruhenden Logik werden sich wahrscheinlich formal-kalkulatorisch in der Form einer Modalitäten-Logik zu einem geschlossenen System ausbauen lassen.

Wie schon H. MacColl in einer seiner ersten Arbeiten über den Gegenstand[3]) bemerkt hat, lassen sich die folgenden Prädikate

1) Zur Orientierung über das elementare Entscheidungsproblem vgl. z. B. H. Behmann, Mathematik und Logik (Mathemat.-physik. Bibl. Bd. 71), Leipzig-Berlin 1927, S. 14 f.; H. Weyl im Handbuch der Philosophie, Abt. II A, S. 13 ff.; Hilbert-Ackermann, Grundzüge der mathematischen Logik (Berlin 1928), §§ 4, 7—9.

2) Vgl. Formale und transzendentale Logik, Jahrbuch für Philos. u. phän. F., Bd. X, S. 1 ff., insbes. S. 49 ff.

3) „*Symbolic Reasoning*, II.“ — *Mind*, *New Series Vol. 6* (1897) p. 493 ff., insbes. p. 509 f.

einer Aussage in der Art von Modalitäten behandeln: „*known to be true*", „*known to be false*" und „*neither known to be true nor known to be false*", was man im Hinblick auf die Brouwerschen logischen Grundbegriffe wiedergeben kann mit „nachweislich wahr" (beweisbar bzw. konstruktiv herstellbar), „nachweislich falsch" (widerlegbar bzw. als unmöglich feststellbar) und „unbestimmt" (in dem Sinn, daß weder ein Existenz- noch ein Unmöglichkeitsbeweis gegeben werden kann, bzw. daß weder eine „Tautologie" noch ein Widerspruch vorliegt[1]).

Es besteht hier offenbar nicht das „*tertium non datur*" in dem Sinn, daß es außer dem nachweislich Wahren und dem nachweislich Falschen, anders ausgedrückt dem Gewissen (notwendig Wahren) und dem Unmöglichen (vgl. die MacCollschen Prädikate *certain-impossible*) nichts Drittes gäbe. Dazu ist dieses „Dritte", das zugleich Nichtnotwendige und Nichtunmögliche, zunächst überhaupt in seine beiden Bestandteile (das Nichtnotwendige [‚*uncertain*'] = möglicherweise Falsche und das Nichtunmögliche [‚*impossible*'] = möglicherweise Wahre) zerlegbar und fernerhin rein privativ — lediglich durch das Fehlen der Notwendigkeit bzw. Unmöglichkeit (die als „Widersprüchlichkeit", d. h. als positives Prädikat anzusehen ist) — charakterisiert. In dieser privativen Kennzeichnung ruht die Möglichkeit, die hier vorliegende Unbestimmtheit in verschiedene Stufen zu staffeln, die den phänomenologischen Zugangsmöglichkeiten entsprechen. Es kann lediglich die unmittelbare Evidenz für die anschauliche Erfüllung der vermeinenden Intention bzw. für ihre anschauliche Enttäuschung vorliegen oder aber das Fehlen jener unmittelbaren Evidenz, genauer die unmittelbare Evidenz jenes Fehlens. Es kann aber auch jene letzte Evidenz des Fehlens der primären Evidenz selbst fehlen, was mittels einer Evidenz dritter Stufe erkannt wird, und so fort *in indefinitum*. Alle diese endlos vielen Fälle sind in der obengenannten „Unbestimmtheit" mitinbegriffen[2]).

Es lassen sich nun auch im Modalitäten-Kalkül gewisse Parallelen zur formalen intuitionistischen Logik auffinden, wie sie von Brouwer selbst und von R. Wawre skizziert und ganz neuerdings von A. Heyting systematisch entwickelt worden ist[3]). Besonders die

1) Für die logisch-phänomenologische Interpretation dieser Art „Unbestimmtheit" vgl. des Verfassers „Mathematische Existenz" (Jahrbuch f. Philos. u. phän. F. VIII, S. 441 ff., insbes. S. 496 ff. und S. 775 ff.).

2) Vgl. Verfasser, l. c. S. 775 ff.

3) Vgl. Brouwer, Jahresber. d. D. Math. Vereingg. **33**, S. 251 ff.; Journal für reine u. angew. Math. Bd. **154**, S. 1 ff. — R. Wawre, Revue de métaphysique

Heytingsche Darstellung fordert einen genaueren Vergleich mit den Grundlagen, der Methode und den Ergebnissen des Lewisschen Systems heraus, dem sich aber eigenartige Schwierigkeiten entgegenstellen. Darüber wird im Anhang kurz berichtet werden.

§ 1.

Das „*System of strict implication*" von C. J. Lewis.

I. Undefinierte Begriffe:

1. Aussagen (*propositions*): p, q, r usw.
2. Die Negation: $-p$; d. h. „p ist falsch".
3. Die Unmöglichkeit: $\sim p$; d. h. „p ist unmöglich".
4. Das logische Produkt: pq oder $p \times q$; d. h. „p und q sind beide wahr" oder „p ist wahr und q ist wahr".
5. Die Äquivalenz: $p = q$, zugleich die definierende Relation.

II. Einfachste Definitionen:

A. Modalitäten der Aussage:

Lewis zählt deren fünf auf:

(1) p: „p ist wahr".
(2) $-p$: „p ist falsch".
(3) $\sim p$: „p ist unmöglich".
(4) $-\sim p$: „Es ist falsch, daß p unmöglich ist", d. i. „p ist möglich".
(5) $\sim - p$: „Es ist unmöglich, daß p falsch ist", d. i. „p ist notwendig wahr".

Lewis behauptet ferner, daß die — in seinem Zeichensystem — nächst komplizierteren Modalitäten unreduzierbar sind:

(6) $-\sim - p$: „p ist nicht notwendig", d. i. „p ist möglicherweise falsch" (negatives Analogon zu (5)).
(7) $\sim - \sim p$: „p ist unmöglich möglich" (nicht „ist unmöglich wahr").
(8) $-\sim - \sim p$: „p ist nicht unmöglich möglich", d. i. „p ist möglicherweise möglich"

... „und so fort". (Wobei das Gesetz des Fortschreitens nicht recht klar ist.)

Die komplizierteren Modalitäten werden von Lewis nicht weiter behandelt. Auffallend ist, daß die Iterationen der Unmöglichkeit:

---

et de morale 33, S. 65 ff.; A. Heyting, Berliner Berichte, math.-phys. Kl., 1930 II: „Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik."

$$\sim\sim p, \quad \sim\sim\sim p, \quad \ldots\ldots (\sim)^n p$$

nicht erwähnt werden. Es klafft hier eine offene Stelle im „*System of strict implication*"; wir werden sehen, daß diese Lücke durch Hinzuziehung eines neuen Axioms (bzw. mehrerer neuer Axiome) geschlossen werden kann und daß dann nur die sechs Modalitäten (1) bis (6) als unreduzierbare übrigbleiben.

B. Einfache Beziehungen zwischen Aussagen:

Definitionen:

1.01 Verträglichkeit (*consistency*)
$p \bigcirc q = -\sim(p\,q)$ Def.

1.02 Strikte Implikation (*strict implication*)
$p < q = \sim(p - q)$ Def.

1.03 Gewöhnliche (materiale) Implikation (*material implication*)
$p \subset q = -(p - q)$ Def.[1]

1.04 Strikte logische Summe (*strict logical sum*)
$p \wedge q = \sim(-p - q)$ Def.

1.05 Gewöhnliche logische Summe (*material logical sum*)
$p + q = -(-p - q)$ Def.

1.06 Strikte Äquivalenz (*strict equivalence*)
$(p = q) = (p < q)\,(q < p)$ Def.

1.07 Gewöhnliche Äquivalenz (*material equivalence*)
$(p = q) = (p \subset q)\,(q \subset p)$

Es bestehen folgende einfachen Beziehungen zwischen den „strikten" und den „gewöhnlichen" („materialen") Relationen:

$p < q = -(p \bigcirc -q)$	$p \subset q = -(p - q)$
$p \wedge q = -(-p \bigcirc -q)$	$p + q = -(-p - q)$
$(p = q) = -(p \bigcirc -q) \times -(q \bigcirc -p)$	$(p = q) = -(p - q) \times -(q - p)$

Die „Verträglichkeit" $\bigcirc$ bei den „strikten" entspricht dem logischen Produkt bei den „gewöhnlichen" Relationen. Wo in der gewöhnlichen Logik eine Konjunktion zwischen zwei Aussagen besteht, besteht in der „strikten" Logik nur deren „Verträglichkeit", d. i. die Nicht-Unmöglichkeit (also Möglichkeit) der Konjunktion. Während die gewöhnlichen Beziehungen nur die faktische Implikation, Disjunktion, Äquivalenz usw. ausdrücken, geben die „strikten" Beziehungen notwendige implikative, disjunktive, Äquivalenz- usw. Verknüpfungen.

---

1) Diese Relation wird von Russell mit $\supset$, von Hilbert mit $\rightarrow$ bezeichnet.

III. Axiome (Unbewiesene Sätze):

1.1	$pq < qp$	1.5	$p < -(-p)$
1.2	$qp < p$	1.6	$(p < q)\ (q < r) < (p < r)$
1.3	$p < pp$	1.7	$\sim p < -p$
1.4	$p(qr) < q(pr)$	1.8*	$(p < q) < (\sim q < \sim p)$

An der Stelle von Axiom 1.8* stand bei Lewis ursprünglich ein ähnliches Axiom 1.8 mit dem strikten Äquivalenzzeichen (=), d. h. 1.8 war äquivalent mit (1.8*) $\times$ (1.8**), wo

1.8** $(\sim q < \sim p) < (p < q)$

bedeutet, und lautete also:

1.8 $p < q = \sim q < \sim p$

In der oben zitierten „Verbesserung" wurde dann das Axiom 1.8** fallen gelassen, d. h. 1.8* allein gefordert, das in der ursprünglichen Fassung als Theorem 2.2 auftritt, das natürlich leicht aus 1.8 ableitbar war. E. L. Post zeigte nun, daß 1.8** (2.21 bei Lewis) zu der Konsequenz

$$\sim p = -p$$

führt, wodurch das Lewissche System mit dem üblichen (Russellschen) Logikkalkül zusammenfallen würde. (Vgl. die genannte „Verbesserung".)

Es läßt sich aber auch direkt die sachliche Unrichtigkeit von 1.8** (= 2.21) und seinen Konsequenzen an geeigneten Beispielen zeigen, sobald man scharf Notwendigkeit und bloße kontingente Wahrheit bzw. Unmöglichkeit und kontingente Falschheit auseinanderhält.

Beispiel: Man denke sich eine Zahlfolge dadurch entstehen, daß man beliebig oft hintereinander numerierte Kugeln aus einer Urne zieht, wobei jedesmal die gezogene Kugel nach der Ziehung wieder in die Urne zurückgelegt werden soll. Es sei unbekannt, wie viele und mit welchen Zahlen bezeichnete Kugeln sich in der Urne befinden.

Der Satz p bedeute: „Die Zahl 17 tritt im ersten Hundert der Stellen der Folge auf." q bedeute: „Die Zahl 17 tritt innerhalb der ersten 200 Stellen auf."

Offenbar ist dann: $p < q$

Ferner ist aber auch:

$$(p < q) < (\sim q < \sim p)$$

Das heißt (in freier Wiedergabe): Gilt, wie gezeigt, $p < q$ und außerdem $\sim q$, so gilt $\sim p$. Das heißt: „Ist es unmöglich, daß 17 in den ersten 200 Stellen der Folge auftritt, so ist es auch unmöglich, daß die 17 in den ersten 100 Stellen auftritt."

Aber es gilt nicht die Umkehrung:

$$(\sim q < \sim p) < (p < q)$$

wie unser — in geeigneter Weise variiertes — Beispiel zeigt.

Es bedeute nämlich jetzt:

q: „19 tritt in den ersten 100 Stellen auf",
p: „19 tritt in den ersten 200 Stellen auf".

Dann gilt: $\sim q < \sim p$

In der Tat kann die Unmöglichkeit des Auftretens von 19 (im Gegensatz zum einfachen faktischen, d. h. zufälligen Nicht-Auftreten) in der Folge nur daran liegen, daß Kugeln mit der Nummer 19 in der Urne gar nicht vorhanden sind. Diese Unmöglichkeit gilt also für alle Stellen der Folge, wenn sie für irgendeine gilt.

Es folgt nun aber aus $\sim q < \sim p$ keineswegs, daß $p < q$, d. h. die Implikation: „Wenn 19 in den ersten 200 Stellen auftritt, so tritt es notwendig in den ersten 100 Stellen auf." Denn dieser Satz ist offenbar falsch. —

In ähnlicher Weise lassen sich die folgenden Implikationen, aber nicht ihre Umkehrungen im Lewisschen System beweisen:

$$(p < q) < (-\sim p < -\sim p)$$
$$(p < q) < (\sim - p < \sim - p)$$

Das heißt: Ist $p < q$, so gilt auch: „Die Notwendigkeit von p impliziert die von q" und „die Möglichkeit von p impliziert die von q" — aber nicht umgekehrt.

Ein Beispiel für die Ungültigkeit der Umkehrung im ersten Fall läge etwa vor, wenn alle Kugeln unserer schon benutzten Urne die Nummer 19 trügen und p etwa bedeutete: „19 tritt an der 75. Stelle", q: „19 tritt an der 77. Stelle auf". Es gilt dann ja, daß, wenn 19 an irgendeiner Stelle notwendig auftritt, es — notwendigerweise — überall auftritt. Daraus folgt aber natürlich keineswegs, daß, wenn — bei unbekannter Kugelnumerierung — die 19 zufällig herauskommt an der 75. Stelle, sie auch an der 77. Stelle zufällig erscheinen müßte.

Für das Nichtbestehen der Umkehrung im zweiten Fall ist es leicht, Beispiele aus dem täglichen Leben zu finden. Es liege etwa die Supposition zugrunde: „Wenn ich den Zug in Freiburg erreiche, ist es möglich (aber nicht gewiß!), daß ich den Anschlußzug in Basel erreiche." Dann gilt zwar: „Wenn ich den Zug in Freiburg möglicherweise erreiche, so erreiche ich möglicherweise den Zug in Basel" (die eine Möglichkeit schon eröffnet mir die andere). Aber nicht gilt deshalb: „Wenn ich den ersten Zug wirklich erreiche, dann auch den zweiten wirklich." Auch im Falle einer ontologisch (im aristotelischen Sinn) verstandenen Möglichkeit, im Falle einer „Potenz", gilt nicht: „Wenn in der Potenz von P die Potenz von Q liegt, so liegt in der Aktualität von P die Aktualität von Q." Z. B. liegt in der Aktualität der gegenwärtigen Generation die nächste in der Potenz und in dieser, wenn auch erst potentieller, doch schon die übernächste Generation in der Potenz. Aber deswegen liegt doch nicht in der aktualisierten zweiten Generation die dritte schon als aktuelle [1]).

Es ist weiterhin bemerkenswert, daß auch aus der Implikation zweier Möglichkeiten weder die Implikation der entsprechenden Notwendigkeiten folgt noch umgekehrt. Dagegen folgt die inverse Implikation der entsprechenden Unmöglichkeiten bzw. — im Fall der Notwendigkeiten — der „Unnotwendigkeiten".

Beispiele für die Unabhängigkeit der beiden zuerst genannten Implikationen kann man sich nach folgender Methode herstellen, die auch schon in den früher behandelten Fällen anwendbar gewesen wäre.

Eine Urne enthalte 2 Kugeln, von denen jede weiß (w) oder schwarz (s) sein kann. Es werde erst eine Kugel gezogen und nicht zurückgelegt, dann die andere Kugel. Es sind 3 Kugelverteilungen in der Urne (ww, ws = sw, ss) und 4 verschiedene Ziehungsergebnisse (ww, ws, sw, ss) möglich.

Zunächst werde gezeigt:

Wenn notw. p $<$ notw. q, dann folgt nicht: mögl. p $<$ mögl. q.

Es bedeute: p: es kommt w beim 1. Zug.
q: es kommt w beim 2. Zug.

Dann gilt: Wenn p notwendig, so auch q. Denn p ist dann und nur dann notwendig, wenn die Kugelverteilung (ww) ist; dann aber ist auch q notwendig. Aber es gilt nicht: Wenn p möglich,

1) Dies ist historisch insofern interessant, als Aristoteles selbst (Metaphys. Θ 4; 1047 b, 26—30), aus der Implikation der Potenzen die der Aktualitäten folgert. Seine Begründung ist mir allerdings unverständlich geblieben (b 28—30: *τὸ γὰϱ δύνατον εἶναι ἐξ ἀνάγκης τὸ B εἶναι, εἰ τὸ A δυνατόν, τοῦτο σημαίνει, ἐὰν ᾖ τὸ A καὶ ὅτε καὶ ὡς ἦν δυνατὸν εἶναι, κἀκεῖνο τότε καὶ οὕτως εἶναι ἀναγκαῖον.*), der Text ist vielleicht korrupt. —

so auch q. Denn wenn die Kugelverteilung (ws) = (sw) ist, so kann unter Umständen die Möglichkeit von p und zugleich die Un-Möglichkeit von q gegeben sein: nämlich in dem Falle, daß der erste Zug w ergibt. Dann ist es nämlich offenbar möglich, daß im 1. Zug w kommt (da es ja wirklich so ist), aber unmöglich, daß im 2. Zug w kommt, da ja gar keine weiße Kugel mehr in der Urne ist. —

Nun werde gezeigt: Aus „möglich p $<$ möglich q" folgt nicht „notwendig p $<$ notwendig q".

Jetzt bedeute — unter den gleichen allgemeinen Voraussetzungen —:

p: es kommt w beim 2. Zug.
q: es kommt w beim 1. Zug.

Dann gilt — bei beliebiger Kugelverteilung! —: „Wenn p möglich ist q möglich", d. h. „wenn w beim 2. Zug kommen kann, also ein w überhaupt in der Urne ist, so hätte es auch schon beim 1. Zug herauskommen können". Aber es gilt keineswegs immer: „Wenn p notwendig ist q notwendig." Besteht nämlich die Kugelverteilung (ws) und wird beim 1. Zug s gezogen, so ist p notwendig (beim 2. Zug kommt notwendig w) [1], aber q falsch.

§ 2.
Formale Ergänzung des Lewisschen Systems zu einem abgeschlossenen System mit sechs irreduktiblen Modalitäten.

Bevor auf die sachliche Bedeutung des Problems der Reduktion der unendlich vielen komponierten Modalitäten, die sich aus der Iteration und Komposition der Zeichen $\sim$ und — ergeben, eingegangen wird, soll eine rein formale Betrachtung vorausgeschickt werden, durch die das Lewissche System mittels eines Zusatzaxioms zu einem abgeschlossenen gemacht wird, was auf mehrere Weisen geschehen kann, von denen wir zwei betrachten werden.

Die von Lewis eingeführten Voraussetzungen reichen nämlich (anscheinend) nicht hin, um ein geschlossenes System von irreduktiblen Modalitäten zu erhalten.

1) Man kann in dem benutzten Beispiel den Unterschied von „p ist kontingent wahr" und „p ist notwendig" nicht zeigen. Dazu bedürfte man dreier Kugeln (wws) bzw. (wss) und es müßte beim 1. Zug eine schwarze gezogen werden. Dann hätte man nach dem 1. Zug noch in der Urne (ww) bzw. (ws), und es wäre — wenn beim 2. Zug w kommt — p notwendig bzw. kontingent wahr.

Wir fügen daher zu den Lewisschen Axiomen das neue Axiom 1.9 hinzu:

1.9 $$-(\sim p) < \sim(\sim p)$$

Dies ist eine bis zu einem gewissen Grade willkürliche Wahl des Zusatzaxioms. Wir werden später noch andere Wahlen treffen und ihre Konsequenzen ziehen. —

Es sei nun zunächst darauf hingewiesen, daß sich für eine Anzahl der Lewisschen Axiome 1.1 — 1.8* die entsprechenden Äquivalenzen auf Grund des Axiomensystems selbst beweisen lassen; nämlich $pq = qp$, $p = pp$, $p(qr) = q(pr)$, $p = -(-p)$. Dagegen gelten nicht die zu 1.2, 1.6 analogen Äquivalenzen und auch nicht, wie ausführlich gezeigt wurde

$$p < q = \sim q < \sim p$$

obwohl

$$p < q = -q < -p$$

gilt. Es gilt also zwar der Satz 2.2 bei Lewis, aber nicht 1.8 und auch nicht 2.21. Demgemäß müssen alle Sätze, deren Beweis die fraglichen Sätze 1.8, 2.21 enthält, gestrichen werden.

Zu diesen gehört glücklicherweise nicht 2.51

$$-(-p) = p$$

welcher Satz als durch Lewis bewiesen anzusehen ist.

Für uns ist jetzt noch die unserem neuen Axiom 1.9 entsprechende Äquivalenz

$$-(\sim p) = \sim(\sim p)$$

zu beweisen oder, was in Anbetracht des Bestehens von 1.9 genügt, $\sim(\sim p) < -(\sim p)$. Dies ist leicht mit Hilfe von 1.7 zu bewerkstelligen. Substituiert man in 1.7 für p die Aussage $\sim p$, so hat man sofort

$$\sim(\sim p) < -(\sim p)$$

was zu beweisen war.

Damit ist die Grundlage für einen geschlossenen Modalitätenkalkül gelegt. Denn das Problem, die sämtlichen möglichen komponierten Modalitäten auf die sechs obengenannten Grundmodalitäten (1) bis (6) zurückzuführen, ist nunmehr lösbar.

Die Sätze

(α) $p = -(-p)$ (β) $-(\sim p) = \sim(\sim p)$

genügen in der Tat zu diesem Zweck.

Hat man nämlich eine beliebig komponierte Kette von —- und $\sim$-Zeichen, so kann man zunächst alle Wiederholungen („Potenzen") von — ausschließen nach der Regel:

$\alpha\alpha$) $\quad (-)^{2n}\,p = p \quad$ und $\quad (-)^{2n+1}\,p = -\,p \quad$ ($\beta\beta$

Die Begründung dafür liegt unmittelbar in Satz (α).

Danach hat man nur noch einfache —-Zeichen, und Potenzen von $\sim$-Zeichen.

Eine solche Potenz $(\sim)^m$ kann man durch genügend oft wiederholte Anwendung von (β) wie folgt umwandeln:

Für $m = 2n$ ist:

$\gamma\gamma$) $$(\sim)^{2n}\,p = (-)^{2n-1} \sim p = - \sim p$$

Für $m = 2n + 1$ ist:

$\delta\delta$) $$(\sim)^{2n+1}\,p = (-)^{2n} \sim p = \sim p$$ [1])

Die nach ($\gamma\gamma$) neu entstehenden —-Zeichen können, falls sie zu (—)-Potenzen Anlaß geben, nach ($\alpha\alpha$) zum Verschwinden gebracht werden. Alsdann neu entstehende ($\sim$)-Potenzen sind nach (β) usw. weiter zu behandeln. Das Ergebnis ist jedenfalls entweder ein einfaches (—) oder ($\sim$) oder eine kürzere oder längere Kette von alternierenden (—) und ($\sim$), also etwa:

$$- \sim - \sim - \sim - \sim - p$$

Durch Anwendung von (β) kann man die Gruppen ($- \sim$) umformen in Gruppen ($\sim\sim$). Dies gibt also:

$$\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim - p = (\sim)^8 - p$$
$$= - \sim - p$$

Das ist die Modalität (6) „p ist möglicherweise falsch".

Allgemein hat man

1. $\quad (-\sim)^n\,p \;= (\sim\sim)^n\,p \;= (\sim)^{2n}\,p = - \sim p$ (Modalität 4)
2. $\;-(-\sim)^n\,p \;= - - - \sim p \;= \sim p$ (Modalität 3)
3. $\quad (-\sim)^n - p = - \sim - p$ (Modalität 6)
4. $\;-(-\sim)^n - p = - - - \sim - p = \sim - p$ (Modalität 5)

---

1) Die Formeln ($\gamma\gamma$) und ($\delta\delta$) enthalten die Brouwersche Regel für die Iteration der Absurdität. Denn ($\gamma\gamma$) besagt, wenn man (β): $- \sim p = \sim\sim p$ berücksichtigt: $(\sim)^{2n}\,p = \sim\sim p$, was mit ($\delta\delta$) $(\sim)^{2n+1}\,p = \sim p$ zusammengenommen ergibt: Die ungerade „Potenz" der Absurdität ist äquivalent mit der einfachen Absurdität, die gerade Potenz aber mit der zweiten, d. h. der „Absurdität der Absurdität". Das ist aber Brouwers Regel.

Dagegen ist das Axiom 1.9, d. i. (β) zur Begründung der Brouwerschen Regel nicht notwendig. Man kann es vielmehr durch das schwächere „Brouwersche Axiom" $p < \sim\sim p$ ersetzen. Für die Ableitung der „Absurditätsregel" s. z. B. Verf., „Math. Existenz", S. 339 und unten S. 525.

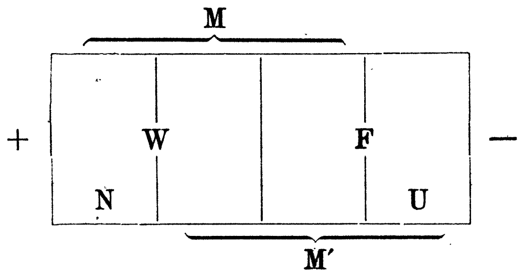
Man sieht, daß man durch dieses in der Praxis ziemlich einfache Verfahren alle Modalitätskombinationen auf die 6 elementaren Modalitäten zurückführen kann.

Der ganze Zusammenhang wird klarer, wenn man an Stelle von ∾p „unmöglich gilt p" ·—p „notwendig nicht-p gilt" setzt. Das ist zunächst nur eine andere Symbolik, die aber die p o s i t i v e n Modalitätsbezeichnungen, im engeren Anschluß an die natürliche Sprache als elementare einführt.

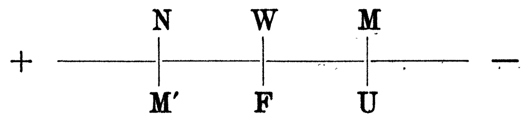
Die sechs Grundmodalitäten stellen sich in beiden Bezeichnungsweisen wie folgt dar:

(1)	p (wahr)	:	p (wahr)
(2)	—p (falsch)	:	—p (falsch)
(3)	∾p (unmöglich)	:	·—p (notwendig falsch)
(4)	—∾p (nicht unmöglich)	:	—·—p (nicht notwend. falsch)
(5)	∾—p (unmöglich falsch)	:	·p (notwendig wahr)
(6)	—∾—p (nicht unmögl. falsch)	:	—·p (nicht notwend. wahr)[1]

Das Verhältnis der 6 Modalitäten kann man durch folgende Figur darstellen:



oder in abgekürzter Form:



Hierbei bedeutet: N: notwendig, W: wahr, F: falsch, U: unmöglich, M: möglich (nicht unmöglich), M': möglicherweise falsch (nicht notwendig).

Das große Rechteck stellt das „All der Aussagen" (*universe of discourse*) dar.

1) Bei (5) hat man genauer: ∾—p = ·——p = ·p,
bei (6): —∾—p = —·——p = —·p.

$$\begin{aligned} W \text{ und } \bar{W} &= F \\ N \text{ und } \bar{N} &= M' \\ U \text{ und } \bar{U} &= M \end{aligned}$$

teilen es vollständig auf. Es gibt also einen dreifachen „Satz vom ausgeschlossenen Dritten“:

1. p ist entweder wahr oder falsch (nicht wahr),
2. p ist entweder notwendig oder möglicherweise falsch (nicht notwendig),
3. p ist entweder möglich (nicht unmöglich) oder unmöglich.

Aber es gilt offenbar nicht:

„p ist entweder notwendig (tautologisch) oder unmöglich (widerspruchsvoll).“

In diesem Falle *datur tertium*, nämlich (in der Figur) das den Rechtecken M und M′ gemeinsame Gebiet, das zwischen N und U liegt und mit ihnen zusammen das „All“ ausfüllt[1]).

Man hat also: Entweder N oder $M \times M'$ oder U: „p ist entweder notwendig oder unmöglich oder zugleich möglicherweise wahr und möglicherweise falsch“ (d. i. „unbestimmt“ bzw. „weder notwendig noch unmöglich“).

Ferner gilt:

$$N < W < M \quad \text{und} \quad U < F < M'$$

Daraus folgt die folgende Ordnung der Modalitäten vom Positiven zum Negativen

$$+\, N\, W\, M \qquad M'\, F\, U\, -$$

Ebenso ergeben sich die Verträglichkeitsverhältnisse leicht.

Bemerkung zu § 2.

Führt man an Stelle von 1.9 als Axiom 1.9* ein:

1.9* $$\sim(\sim p) < \sim(-p)$$

so ergibt sich im wesentlichen dasselbe System für die Rangordnung der Modalitäten.

1) Im Falle der ‚Logik der Notwendigkeiten‘ gilt also der ‚Satz vom ausgeschlossenen Dritten‘ nicht, wohl aber der Satz vom Widerspruch. („Keine Aussage kann zugleich notwendig und unmöglich sein.“) — Dagegen gilt im Falle der ‚Logik der Möglichkeiten‘ gerade der Satz vom ausgeschlossenen Dritten. („Eine Aussage ist stets möglicherweise wahr oder (*vel*) möglicherweise falsch“), aber nicht der ‚Satz vom Widerspruch‘ („Eine Aussage kann nicht zugleich möglicherweise wahr und möglicherweise falsch sein.“). — Dieses Verhältnis zwischen Aussagen hieß in der klassischen Logik im ersten Fall konträr, im zweiten subkonträr.

Es gilt dann, da nach 1.7 und 1.8*

$$\sim(-p) < \sim(\sim p)$$

ist, die Gleichung:

$$\sim - p = \sim\sim p$$

(an Stelle von $- \sim p = \sim\sim p$).

Es ist also $\sim\sim p$ stärker als p (gegen Brouwers Auffassung). Rein formal scheint sich auch dieser Ansatz widerspruchslos durchführen zu lassen; wenn er auch ohne sachliche Bedeutung sein dürfte, so zeigt er doch die Unabhängigkeit von 1.9 von den übrigen Axiomen.

§ 3.

Über eine andere mögliche formale Ergänzung des Lewisschen Axiomensystems: Der Zehn-Modalitäten-Kalkül.

Wie schon erwähnt, hatte Lewis ursprünglich an Stelle des Axioms

1.8* $$(p < q) < (\sim q < \sim p)$$

die weitergehende Forderung

1.8 $$(p < q) = (\sim q < \sim p)$$

aufgestellt, die äquivalent dem logischen Produkt (1.8*) $\times$ (1.8**) ist, wo

$$(1.8^{**}) \;:\; (\sim q < \sim p) < (p < q).$$

Post zeigte, daß 1.8 die Gleichung

$$\sim p = - p$$

nach sich zieht (also nicht bloß 1.7: $\sim p < - p$, sondern auch dazu noch die Umkehrung $- p < \sim p$). Damit ist aber die Einführung von $\sim p$ offenbar überflüssig und der ganze Kalkül wird mit dem klassischen identisch.

Andererseits entsteht in dem Lewisschen System durch Fortlassung von 1.8** eine empfindliche Lücke. Fügt man nach dieser Fortlassung zum Ersatz kein neues Axiom zu, so kann man zwar noch zeigen, daß mit der üblichen Russellschen Definition der klassische Kalkül als Teil des neuen Modalitätenkalküls begründbar ist, aber man kann keinen als Ganzes in sich geschlossenen Modalitätenkalkül aufstellen. Denn 1. ergeben sich (abzählbar) unendlich viele aufeinander nicht reduzierbare Modalitäten;

2. ergibt sich nicht einmal eine lineare Rangordnung unter den positiven bzw. negativen Modalitäten nach ihrer implikativen Potenz;

3. sind nicht einmal die reinen Iterationen oder „Potenzen" der einfachsten Modalitäten „unmöglich", „notwendig", „möglich" auf endlich viele Grundmodi zurückführbar. Nur die Falschheitspotenzen ergeben, je nachdem ob sie gerade oder ungerade sind, die Wahrheit oder die Falschheit.

Die einfachsten Modalitäten zeigen folgende Implikationsverhältnisse:

$$\sim - p < - - p < - \sim p \qquad \text{(nach 1.7)}$$
$$\sim - p < \sim \sim p < - \sim p \qquad \text{(nach 1.8* und 1.7)}$$

Also in „Pfeilform" geschrieben ($\rightarrow$ statt $<$):

$$\begin{tikzcd} & - - p \arrow[dr] & \\ \sim - p \arrow[ur] \arrow[dr] & & - \sim p \\ & \sim \sim p \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \text{oder} \quad \begin{tikzcd} & W \arrow[dr] & \\ N \arrow[ur] \arrow[dr] & & M \\ & U^2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Die Beziehung von $p = - - p$ und $\sim \sim p$ oder von W und U^2 bleibt unbestimmt.

Man kann nun (das ist der schwächste von uns vorgeschlagene Zusatz) diese Bestimmung ergänzen durch das „Brouwersche Axiom"

$$p = - - p < \sim \sim p \qquad (1.91)$$
$$W \rightarrow U^2$$

Die Wahrheit impliziert die Absurdität der Absurdität (aber nicht umgekehrt!).

Man hat so die lineare Rangordnung

$$\sim - p < - - p < \sim \sim p < - \sim p$$
$$N \rightarrow W \rightarrow U^2 \rightarrow M$$

Brouwer hat gezeigt, daß man mit Hilfe von (1.91) und (1.8*) die Potenzen der Absurdität auswerten kann:

$$U^{2n+1} = U, \quad U^{2n} = U^2$$

Dazu hat man:

$$F^{2n+1} = F, \quad F^{2n} = W$$

Trotzdem genügt dies nicht, um alle relativen Produkte (d. h. Kompositionen) von Modalitäten auf endlich viele zurückzuführen.

Denn alternierende Verbindungen wie z. B.

$$\underset{N^3p}{\sim - \sim - \sim - p} \quad \text{oder} \quad \underset{MN^3p}{- \sim \sim - \sim - \sim - p}$$

kann man so nicht reduzieren.

Nimmt man indessen ein Axiom (1.92) hinzu, das die Potenzen der Notwendigkeit auszuwerten gestattet, so kann man alle Modalitäten zwar nicht auf die früher in Betracht gezogenen 6 Grundmodalitäten N W M M′ F U, wohl aber auf 10 Grundmodi zurückführen.

Es gilt schon nach Lewis:

$$\sim - \sim - p < \sim - p \quad \text{oder} \quad \cdot\cdot p < \cdot p \qquad (N^2 \rightarrow N)$$

Denn nach 1.7:

$$\begin{aligned} \sim - \sim - p &= \sim(- \sim - p) < -(- \sim - p) \\ &= --(\sim - p) \\ &= \sim - p \end{aligned}$$

Als Axiom wählen wir die Umkehrung dieser Implikation:

$$(1.92) \qquad \sim - p < \sim - \sim - p \quad \text{oder} \quad \cdot p < \cdot\cdot p \qquad (N \rightarrow N^2)$$

Während schon nach Lewis gilt: „Wenn es notwendig ist, daß p notwendig ist, ist es wahr, daß p notwendig ist“, soll jetzt auch gelten: „Wenn es wahr ist, daß p notwendig ist, so ist es auch notwendig, daß p notwendig ist“; d. h. die Notwendigkeit soll ihre eigene Notwendigkeit in sich schließen, gerade so wie die Wahrheit ihre eigene Wahrheit. Daraus folgt sofort $N^n = N$.

Da:

$$- \sim p = - \sim - - p = -(\sim -) - p$$
$$- \sim - \sim p = - \sim - \sim - - p = -(\sim - \sim -) - p,$$

allgemein

$$(- \sim)^n p = -(\sim -)^n - p, \quad \text{d. h.} \quad M^n = FN^nF$$

ist, so gilt auch:

$$M^n = FN^nF = FNF = M$$

d. h. auch alle Möglichkeitspotenzen reduzieren sich auf die erste Potenz.

Fordert man (1.91) $\times$ (1.92), so kann man also einen Zehn-Modalitätenkalkül begründen.

Systematische Reduktion auf die zehn Grundmodalitäten:

Außer der Wahrheit W ergeben sich die irreduktiblen Modalitäten F, U, U^2; N, M, M′; U^2F, FU^2, FU^2F.

Man kann nämlich folgende „Potenzen“ auflösen:

$$(-)^{2n} p = p; \qquad (-)^{2n+1} p = - p \qquad (F^{2n} = W,\ F^{2n+1} = F)$$
$$(\sim)^{2n} p = \sim^2 p; \qquad (\sim)^{2n+1} p = \sim p \qquad (U^{2n} = U^2,\ U^{2n+1} = U)$$
$$(\sim -)^m p = \sim - p \quad \text{und auch} \quad (- \sim)^m p = - \sim p$$
$$(N^m = N) \qquad\qquad (M^m = M)$$

Um eine Übersicht zu gewinnen, verwendet man am besten die Punkt-Strich-Notation, wo $\sim\!— = \cdot$ (N) und $\sim\, = \cdot —$ (NF) ist. Die Reduktion verläuft dann so:

a) Ein beliebiger Punkt-Strich-Ausdruck kann zunächst durch Reduktion der N- und F-Potenzen auf die Form alternierender N- und F-Zeichen (Punkte und Striche) gebracht werden.

b) Von solchen alternierenden Ausdrücken gibt es 4 Typen, je nachdem ob die Anfangs- und Endzeichen: NN, NF, FN, FF, d h. $\cdot\,\cdot$, $\cdot\,—$, $—\,\cdot$, $—\,—$ sind.

Man hat also:		D. h. in Lewis' Notation:
Typ I:	$(\cdot —)^{l} \cdot$:	$\sim^{l} \sim — = \sim^{l+1} —$
Typ II:	$(\cdot —)^{l}$:	$\sim^{l} = \sim^{l}$
Typ III:	$— (\cdot —)^{l} \cdot$:	$— \sim^{l} \sim — = — \sim^{l+1} —$
Typ IV:	$— (\cdot —)^{l}$:	$— \sim^{l} = — \sim^{l}$

Von hier ab ist die Lewissche Notation bequemer. Es sind hier 2 Unterfälle möglich, nämlich:

$$\text{A)}\ l = 2n; \quad l + 1 = 2n + 1$$
$$\text{B)}\ l = 2n — 1; \quad l + 1 = 2n$$

Das gibt 8 Fälle:

IA:	$\sim^{2n+1} — =$	$\sim —$	N	IB	$\sim^{2n} — =$	$\sim^{2} —$	$U^{2}F$
IIA:	$\sim^{2n} =$	$\sim^{2}$	U^{2}	IIB	$\sim^{2n-1} =$	$\sim$	U
IIIA:	$— \sim^{2n+1} — =$	$— \sim —$	$FUF = M'$	IIIB	$— \sim^{2n} — =$	$— \sim^{2} —$	$FU^{2}F$
IVA:	$— \sim^{2n} =$	$— \sim^{2}$	FU^{2}	IVB	$— \sim^{2n-1} =$	$— \sim$	M

Dazu kommen noch W und F, der einfache —, der kein alternierender Ausdruck in der Punkt-Strich-Notation ist.

Man hat also die irreduziblen 10 Grundmodi:

$$N, W, M, M', F, U; U^{2}, FU^{2}F, U^{2}F, FU^{2}$$

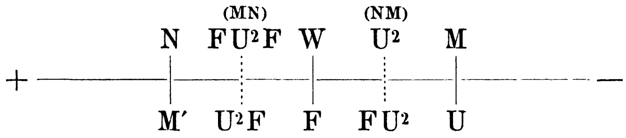
Von den reinen Modi sind

U^{2}, $FU^{2}F$ (gerade Zahl von U, F-„Faktoren") positiv,
$U^{2}F$, FU^{2} (ungerade Zahl von U, F-„Faktoren") negativ.

Von U^{2} wissen wir schon, daß es, gemäß dem Brouwerschen Axiom, zwischen W und M liegt[1]). $(W \rightarrow U^{2} \rightarrow M)$

1) Ob (1.91), das Brouwersche Axiom, und (1.92) unabhängig sind, wissen wir nicht. Doch ist es zu vermuten. Jedenfalls regelt (1.92) nicht unmittelbar die Rangordnung der Modalitäten.

An der früher eingeführten Figur können wir die Sachlage übersichtlich darstellen:



Erläuterung:

(1) U^2 wird dargestellt durch ein Gebiet, das einerseits W enthält, andererseits in M enthalten ist, denn es ist: $W < U^2 < M$

(2) FU^2 ist dasjenige Gebiet, das U^2 zum „All“ ergänzt. (Analog: $FW = F$; $FN = M'$; $FU = M$)

(3) U^2F ist das zu U^2 in bezug auf die Mittelachse (die zwischen W und F hindurchgeht) symmetrische Gebiet, unter Vorzeichenwechsel. (Analog: N symm. zu U; M symm. zu M′; W symm. zu F)

(4) FU^2F ist dasjenige Gebiet, das U^2F zum „All“ ergänzt.

Bestätigung der Behauptungen (2) (3) (4):

a) (2) besagt:
$$U < FU^2 < F$$
$$\sim p < -\sim\sim p < -p$$

In der Tat:
$$\sim p = --(\sim p) < -\sim(\sim p) \quad (\text{da: } --q < -\sim q)$$
und
$$-(\sim\sim p) < -p \quad (\text{da, nach 1.91: } p < \sim\sim p)$$

b) (3) besagt:
$$F < U^2F < M'$$
$$-p < \sim\sim -p < -\sim -p$$

In der Tat ist:
$$--(-p) < \sim\sim(-p) \quad (\text{nach } (1.91))$$
und
$$\sim(\sim -p) < -(\sim -p) \quad (\text{nach } 1.7)$$

c) (4) besagt:
$$N < FU^2F < W$$
$$\sim -p < -\sim^2 -p < p$$

In der Tat:
$$--(\sim -p) < -\sim(\sim -p) \quad (\text{da } --q < -\sim q)$$
ferner:
$$p < \sim\sim p \quad (1.91)$$
$$(-p) < \sim\sim(-p)$$
$$-(\sim\sim(-p)) < -(-p)$$
d. h.
$$-\sim\sim -p < --p = p$$

Ergebnis:

Wir erhalten folgende Implikationsreihen:

$$N < FU^2F < W < U^2 < M$$
$$U < FU^2 < F < U^2F < M'$$

und folgende polare Rangordnung:

$$(+)\ N,\ FU^2F,\ W,\ U^2,\ M \mid M',\ U^2F,\ F,\ FU^2,\ U\ (-)$$

§ 4.

Die sachliche Bedeutung des Sechs- und des Zehn-Modalitäten-Kalküls.

Die Reduktionsregel des Sechs-Modalitäten-Kalküls kommt darauf hinaus, daß in einem Ausdruck von der Form:

$$(F)N^{x1}FN^{x2}F\ldots.N^{xp}(F)$$

nur (wenn man sich alle „Potenzen" in aufgelöster Form geschrieben denkt, also NN für N^2, NNN für N^3 usw.) das am weitesten rechts stehende N gilt, während alle anderen N gestrichen werden. Ferner tritt dann natürlich die Reduktion der übrigbleibenden F-Potenz ein ($F^{2q} = F^2 = W$; $F^{2q+1} = F$).

Was besagt diese Reduktionsregel für die N sachlich?

a) Zunächst bedeutet sie eine Reduzierung der reinen N-Potenz: $N^x = N$, was man aus $N^2 = N$ induktiv ableiten kann.

Die Notwendigkeit der Notwendigkeit ist also gleichzusetzen der einfachen Notwendigkeit. Entsprechend ist die Möglichkeit der Möglichkeit gleichzusetzen der einfachen Möglichkeit[1]).

Nun bedeutet $N^2 = N$ das logische Produkt zweier Implikationen:

$$(N^2 \rightarrow N)\ \ (N \rightarrow N^2)$$

Die erste Implikation $N^2 \rightarrow N$ ist selbstverständlich, denn sie ist nur ein spezieller Fall des allgemeinen Prinzips $N \rightarrow W$, da sie ja auch geschrieben werden kann $N(N) \rightarrow W(N)$[2]). Anders steht es mit der zweiten $N \rightarrow N^2$: die einfache Notwendigkeit impliziert die Notwendigkeit ihrer selbst. Oder die Iteration der Modalität „Notwendigkeit" (und „Möglichkeit", also jeder positiven, geraden oder „obliquen" Modalität) hat keinen Effekt, leistet nichts.

---

1) Das ergibt sich formal so: $M = FNF$; $M^2 = FNFFNF = FNNF = FNF = M$. Daraus durch vollständige Induktion $M^x = M$, da $M^{x+1} = M^{x-1+2} = M^{x-1}M^2 = M^{x-1}M = M^x$.

2) In Lewisscher Symbolik: $\sim - (\sim - p) < \sim - p$.

Was hat das für eine sachliche (phänomenologische) Bedeutung?

Es besagt, daß die Notwendigkeit als eine absolute Modalität aufzufassen ist. Notwendigkeit ist Notwendigkeit schlechthin, sie ist keiner Steigerung fähig. Wenn eine solche „absolute" Notwendigkeit besteht, so ist sie selbst notwendig, sie hat einen gewissermaßen idealen Charakter.

Daß dies nicht unter jedem Gesichtspunkt so ist, zeigt die Husserlsche Unterscheidung von kontingentem und formalem Apriori [1]) — eigentlich müßte man sagen „notwendigem Apriori". Wenn man zu den entsprechenden Wesensgesetzen und Wesensnotwendigkeiten übergeht, gelangt man unmittelbar zu dem Begriffspaar: „kontingente — notwendige (Wesens-) Notwendigkeit". Hier ist also N^2, die „notwendige Notwendigkeit", von der „kontingenten", d. h. der „einfachen" Notwendigkeit N durchaus unterschieden. Die apriorische Struktur der Farbmannigfaltigkeit ist z. B. zwar notwendig, aber der Grund dieser Wesensstruktur ist uneinsichtig, sie scheint „zufälligerweise" dieser „hyletischen Region" anzuhaften. Vom Gesichtspunkt der formalen konstitutiven Phänomenologie aus ist zwar das Bestehen hyletischer Regionen mit bestimmten Wesensgesetzen notwendig, aber diese Gesetze sind nicht im einzelnen bestimmt, sondern nur nach gewissen formalen Grundzügen. Die formale Notwendigkeit ist also eine der „materialen" übergeordnete und, daß von verschiedenen formal möglichen material-apriorischen Strukturen gewisse gelten, andere nicht, ist zufällig. Die formalen Notwendigkeiten sind also solche, deren Bestand selbst notwendig ist — wie ja auch die formale Phänomenologie als Ganzes genommen sich auf sich selbst zurückbezieht, sich selbst rechtfertigt [2]) —, die materialen (insbesondere die „hyletischen" im engeren Sinn [3])) solche, deren Bestehen als eine „Tatsache" in einem höheren Sinn, gewissermaßen als eine „Wesenstatsache" — dieser Ausdruck ist auch nicht paradoxer als der des „kontingenten Apriori" — hingenommen werden muß.

Durch die These $N \rightarrow N^2$ werden also derartige „kontingenten" Wesensnotwendigkeiten, derartige „Wesenstatsachen" ausgeschlossen.

---

1) Husserl, Formale und transzendentale Logik (Halle 1929), § 6 (Jahrbuch X, S. 25).

2) Husserl, Formale und transzendentale Logik, §§ 102, 104 (Jahrb. X, S. 236 ff., 241 ff.).

3) Husserl, Ideen zu einer reinen Phänomenologie, §§ 65, 85 (Jahrb. I, 1, S. 122 ff., 171 ff.).

Ähnlich verhält es sich mit den Möglichkeiten. Nur ist hier die fragliche Implikation von den beiden, die aus der Gleichung $M = M^2$ resultieren, nicht $M \rightarrow M^2$ (denn das besagt ja $W(M) \rightarrow M(M)$: „Die Wahrheit der Möglichkeit implizierte die Möglichkeit der Möglichkeit" und das ist selbstverständlich!), sondern $M^2 \rightarrow M$ [1]).

Das heißt: die Frage ist, ob die Möglichkeit einer Möglichkeit auch die einfache Möglichkeit impliziert. Dies ist nun in der Tat der Fall, wenn man die Möglichkeit als „ideale" oder „formale", also in einem sehr weiten und sozusagen absoluten, keiner weiteren realen „Abschwächung" zugänglichen Sinn faßt [2]). Es trifft dieser Fall also zusammen mit dem der formalen Notwendigkeit, wie das ja auch sein muß wegen der logistischen Äquivalenz der Beziehungen $N \rightarrow N^2$ und $M^2 \rightarrow M$.

b) Die Reduzierung der N-Potenzen reicht nun offenbar noch nicht hin, die Reduktionsregel des Sechs-Modalitäten-Kalküls (§ 2) zu begründen. Vielmehr ist damit erst der Zehn-Modalitäten-Kalkül (§ 3) erreicht. Zur weiteren Reduktion reicht hier die Implikation $M \rightarrow NM$ (§ 2, denn es ist $NM = NFNF = U^2$) oder auch $M' = FN \rightarrow NFN = NM'$. Das bedeutet: Wenn ein Satz möglicherweise wahr (oder falsch) ist, so ist er mit Notwendigkeit möglicherweise wahr oder falsch. Oder kurz: Jede Möglichkeit impliziert ihre eigene Notwendigkeit. Dies folgt offenbar nicht aus den unter (a) gemachten Voraussetzungen. Aber es läßt sich an die dort angestellten Betrachtungen eine Überlegung anknüpfen, die den Satz von der Notwendigkeit jeder Möglichkeit einsichtig werden läßt.

Die Reduktion der N- bzw. M-Potenzen beruhte auf dem Begriff einer absoluten, „idealen" (logisch stärksten) Notwendigkeit und einer ebensolchen (logisch schwächsten) Möglichkeit, die nicht überboten (bzw. unterboten) werden kann. Die beiden genannten Modalitäten bestimmen gewissermaßen eine „ideale" oder „absolute" Sphäre, der gegenüber die „geraden" Modi „kontingent" sind oder sein

---

1) Formal folgt dies in der Tat bis $N \rightarrow N^2$, denn das ergibt, auf einen negativen Satz angewandt, $N(F) \rightarrow N^2(F)$, daraus durch Umkehrung: $FN^2F \rightarrow FNF$ oder $M^2 \rightarrow M$. Umgekehrt folgt auch hieraus wieder $N \rightarrow N^2$. Denn: $(FN^2F \rightarrow FNF) \rightarrow (FFNF \rightarrow FFN^2F) \rightarrow (NFF \rightarrow N^2FF) = (N \rightarrow N^2)$.

2) Man braucht deshalb noch nicht die Sphäre der positiven Möglichkeit zu verlassen und in die der *privatio* der Unmöglichkeit (d. i. „Widerspruchslosigkeit") überzugehen (vgl. u. S. 534). Sondern es handelt sich um ideale „sachliche" (das ist nicht dasselbe wie sachhaltig = material!), also formal-ontologisch relevante Möglichkeit.

können. Man kann nun sagen, daß in dem Wesen dieser idealen Sphäre die Notwendigkeit schon liegt, so daß ihr ausdrückliches Zusprechen an eine Modalität der Sphäre eine selbstverständliche Berechtigung hat und daher nichts Neues leistet.

So angesehen hat der Sechs-Modalitäten-Kalkül gegenüber dem Zehn-Modalitäten-Kalkül scheinbar die größere Konsequenz des logischen Ansatzes voraus: nur die M- und N-Potenzen allein reduzieren zu wollen, erscheint als eine unverzeihliche Halbheit.

Aber freilich gibt es im Sechs-Modi-Kalkül auch paradoxe Sätze, z. B. ist:

$$MN = FNFN = FFN = N$$

Die Möglichkeit einer Notwendigkeit ist äquivalent der Notwendigkeit selbst, d. h. für die Notwendigkeit fällt ihre Möglichkeit und ihre „Wirklichkeit" zusammen. Man kann allerdings auch diese Paradoxie durch den Begriff der streng idealen Sphäre rechtfertigen. Diese Sphäre idealer Möglichkeiten ist eben so, daß in ihr jede Struktur wesensnotwendig ist. Dem „Idealen" als solchem haftet Notwendigkeit an (man denke etwa an das aristotelische ἀίδιον) und jede Möglichkeit ist sofort in ihm realisiert.

Trotzdem wird man Gebiete finden können, wo zwar die M- und N-Potenzen ohne Bedeutung sind, aber trotzdem NM und M, und auch MN und N auseinanderfallen.

c) Es ist noch die Frage übrig, wie das Brouwersche Axiom $W \rightarrow NM$ sachlich zu begründen ist.

Im Falle, daß man notwendige Möglichkeit und einfache Möglichkeit trennt, ist dennoch die erste niemals von derselben logischen Potenz wie die Wahrheit. Eine wie immer näher charakterisierte Möglichkeit ist noch keine Wahrheit. Umgekehrt ist die Wahrheit auch stets notwendigerweise möglich.

Die Folgerung aus dem Brouwerschen Axiom $MN \rightarrow W$ (d. h. $FNMF \rightarrow FWF$, wo $FNMF = FNFNFF = MN$) ist auf den ersten Blick weniger plausibel. Indessen ist die Wahrheit offenbar eine notwendige Bedingung der Notwendigkeit, d. h. die Notwendigkeit von p ist nicht einmal möglich, wenn p nicht wahr ist; d. h. aber nichts anderes, als daß MN das Wahre impliziert.

* * *

Es soll im folgenden nun noch ein Kalkül entwickelt werden, bei dem möglichst alle nicht aus formalen kalkülmäßigen Gründen unbedingt notwendigen Beschränkungen der Mannigfaltigkeit der Modalitäten wegfallen.

§ 5.

Über den voraussetzungsärmsten Modalitäten-Kalkül, der noch eine lineare Rangordnung gestattet.

a) Man kann versuchen, sich von allen durch besondere *sachliche* Annahmen bedingten Voraussetzungen freizumachen, und lediglich die allgemeinsten *formalen* Bedingungen eines Modalitäten-Kalküls einzuführen suchen. Zunächst kann man die Forderung der Möglichkeit der Reduktion auf endlich viele Grundmodi aufheben. Diese ist ja in der Tat sofort aufgehoben, sobald man alle N-Potenzen als verschiedene Modi zuläßt.

Andererseits wird man an der allgemeinen Forderung einer linearen Rangordnung der Modi, wodurch das Implikationsverhältnis jedes Modus zu jedem anderen eindeutig bestimmt ist, festzuhalten haben. Denn sonst läßt sich ein Modus durch seinen logischen „Stärkegrad" nicht mehr eindeutig bestimmen. Diese Forderung soll jedenfalls die obere Schranke unserer formalen Freiheit sein.

Es fragt sich nun einerseits, ob die *Lewis*sche Kalkül dieser Forderung genügt und andererseits, ob nicht die natürlichen Axiome einer Theorie der Modalitäten-Rangordnung unabhängig vom *Lewis*schen Kalkül aufgestellt werden können. Die erste Frage ist zu verneinen, die zweite zu bejahen.

Denn die Frage, ob p oder $\sim\sim$ p stärker ist, läßt sich, wie oben ausgeführt (s. S. 513) mittels des *unergänzten* *Lewis*schen Axiomensystems augenscheinlich[1]) nicht beweisen. Damit ist von vornherein eine lineare Rangordnung *sämtlicher* Modalitäten ausgeschlossen.

Die zweite Frage läßt sich dagegen beantworten in dem Sinne, daß eine Reihe einfacher *Operationsregeln* mit Modalitäten, die sich auf denselben Satz p beziehen, angegeben werden können, so daß mit ihrer Hilfe eine Rangordnungstheorie begründet werden kann. Dabei sollen diese Regeln nicht mehr leisten als der *unergänzte* Lewiskalkül, aus dem sie leicht abzuleiten sind. Durch geeignete *Zusatzaxiome* werden sie dann ergänzt werden.

Man kann die Modalitäten als eine Art *Operationen* auffassen, die auf denselben Satz p angewandt werden. Sie können komponiert und deshalb auch iteriert werden. ($\sim$ p, — p, $\sim$ — p, $\sim\sim$ p beispielsweise, was wir schreiben wollen Up, Fp, Np, U^2p oder auch kurz U, F, N = UF, U^2; *unbestimmte* Operationen sollen mit großen *griechischen* Buchstaben bezeichnet werden, wie Λ, Θ usw.).

---

1) Ein eigentlicher Unabhängigkeits*beweis* steht allerdings noch aus.

Regel I: Jede nichtelementare Modalität läßt sich aus zwei elementaren Modalitäten N und F (oder U = NF und F) zusammensetzen. Die Komposition („Multiplikation") ist assoziativ; aber nicht kommutativ. (Es ist also rechtsseitige und linksseitige Multiplikation zu unterscheiden.)

Regel II: Eine Implikation (folglich auch eine Gleichung) zwischen zwei (einfachen oder zusammengesetzten) Modalitäten kann ohne ihre Geltung zu verlieren rechtsseitig multipliziert werden.

Definition: Eine zusammengesetzte Modalität ist positiv, wenn sie eine gerade Anzahl von einfachen negativen Grundmodi (U, F) enthält; negativ, wenn eine ungerade Anzahl.

(Man kann alle komponierten Modalitäten durch N und F oder durch U und F; alle positiven durch M und N darstellen.)

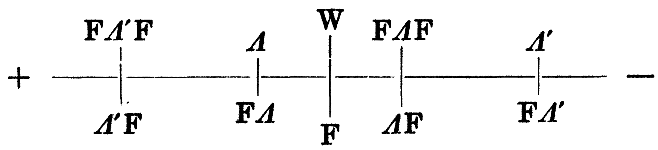
Regel III: Eine Implikation zwischen zwei Modalitäten kann ohne Änderung der Geltung mit einer positiven Modalität, ferner unter Umkehrung der Implikationsbeziehung mit einer negativen Modalität linksseitig multipliziert werden.

In Zeichen können Regel II und III so wiedergegeben werden:

$$(\Lambda \rightarrow \Lambda') \rightarrow (\Lambda\Theta \rightarrow \Lambda'\Theta)$$
$$(\Lambda \rightarrow \Lambda') \rightarrow (\Pi\Lambda \rightarrow \Pi\Lambda'), \text{ wo } \Pi \text{ positiv}$$
$$(\Lambda \rightarrow \Lambda') \rightarrow (\Sigma\Lambda' \rightarrow \Sigma\Lambda), \text{ wo } \Sigma \text{ negativ}$$

Anmerkung: Die in Regel II und III genannten „Multiplikationen" können nicht durch „Divisionen" ersetzt werden, auch dann nicht, wenn diese Divisionen „aufgehen"; d. h. bereits ausgeführte Multiplikationen wieder rückgängig machen. Aus $\Pi\Lambda \rightarrow \Pi\Lambda'$ folgt nicht $\Lambda \rightarrow \Lambda'$[1]).

Wendet man insbesondere auf eine beliebige Implikation $\Lambda \rightarrow \Lambda'$ die rechts- bzw. linksseitige Multiplikation mit F an, so folgt ΛF $\rightarrow$ Λ'F bzw. FΛ' $\rightarrow$ FΛ. Dies kann man mittels der für die endlichen Kalküle in §§ 2—3 benutzten graphischen Darstellung veranschaulichen: die linksseitige Multiplikation mit F bedeutet „Ergänzung zum All", die rechtsseitige Übergang zum symmetrischen Modus unter Vorzeichenwechsel.



1) Dies ist, vom Lewis-Kalkül aus gesehen, Folge der auf S. 504 ff. erörterten Verhältnisse. Man muß beim Vergleich aber berücksichtigen, daß es sich hier immer um denselben (unmodalisierten) Satz p, nicht um zwei verschiedene Sätze p, q handelt.

Man sieht leicht, daß die folgenden Implikationen simultan gelten.

$$\Lambda \rightarrow \Lambda', \quad \Lambda\mathrm{F} \rightarrow \Lambda'\mathrm{F}, \quad \mathrm{F}\Lambda' \rightarrow \mathrm{F}\Lambda, \quad \mathrm{F}\Lambda'\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{F}\Lambda\mathrm{F}$$

Regel IV: Es ist FF = W (Falschheit der Falschheit = Wahrheit). W kann beliebig zugesetzt und weggelassen werden.

* * *

b) Was nun das Problem der Rangordnung sämtlicher Modalitäten unter möglichst geringen Voraussetzungen angeht, so sind die in den 4 „Regeln" enthaltenen Postulate offenbar dazu nicht hinreichend. Denn noch nicht einmal die Beziehung $\mathrm{W} \rightarrow \mathrm{U}^2$ läßt sich aus ihnen deduzieren. Welche weiteren Voraussetzungen müssen eingeführt werden?

Es ist zunächst zweckmäßig, die Betrachtung auf die positiven Modalitäten zu beschränken. Sie enthalten beliebig viele N und eine gerade Anzahl F, können daher auch aus N und FNF = M zusammengesetzt werden.

Rein kombinatorisch ergeben sich folgende Möglichkeiten:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \mathrm{N} & & & & \mathrm{M} & & \\
\mathrm{N}^2 & & \mathrm{MN} & & \mathrm{NM} & & \mathrm{M}^2 & \\
\mathrm{N}^3 & \mathrm{MN}^2 & \mathrm{NMN} & \mathrm{M}^2\mathrm{N} & \mathrm{N}^2\mathrm{M} & \mathrm{MNM} & \mathrm{NM}^2 & \mathrm{M}^3
\end{array}$$

. . . .

nach dem allgemeinen Schema

$$\begin{array}{ccc} & \Theta & \\ \mathrm{N}\Theta & & \mathrm{M}\Theta \end{array}$$

oder auch — was man leicht nachprüfen kann — nach der Regel, daß die linke Hälfte der i^{ten} Reihe aus der (i—1)ten durch rechtsseitige Multiplikation mit N entsteht, die rechte durch rechtsseitige Multiplikation mit M.

Über die Implikationsverhältnisse ist durch dieses rein kombinatorische Schema der Erzeugung zunächst noch nichts ausgemacht, aber das zweitgenannte Erzeugungsverfahren gestattet doch wichtige vorläufige Schlüsse in dieser Hinsicht.

Da nämlich nach Regel II durch rechtsseitige Multiplikation die Geltung einer Implikation nicht angetastet wird, so ergibt sich sofort, daß, falls die (i — l) Zeile des Schemas von links nach rechts nach fallenden logischen Potenzen geordnet ist (so daß also jedes Glied das nachfolgende impliziert), dasselbe für jede i^{te} Halbzeile der Fall ist. Dagegen ist über das Implikationsverhältnis zwischen Gliedern verschiedener Halbzeilen noch nichts gesagt.

So ist am Anfang zunächst bekanntlich $N \rightarrow M$; deshalb auch: $N^2 \rightarrow MN$ und $NM \rightarrow M^2$, aber über das Verhältnis von MN und NM ist zunächst noch nichts gesagt.

Man kann noch etwas weiterkommen, wenn man berücksichtigt, daß $N \rightarrow W \rightarrow M$. Daraus folgt nach Regel II: $N^2 \rightarrow N \rightarrow MN$ und weiterhin $N^3 \rightarrow N^2 \rightarrow MN^2$, $NMN \rightarrow MN \rightarrow M^2N$ usw.

Man sieht aber, daß man so keine vollständige Rangordnung erhält.

Dazu braucht man die Beziehung $MN \rightarrow NM$ oder vollständiger, damit auch W mit in das Schema einbezogen wird: $MN \rightarrow W \rightarrow NM$. Es genügt dazu $W \rightarrow NM$ oder $W \rightarrow U^2$ zu fordern, d. h. das „Brouwersche Axiom" (s. o. S. 513). Daraus ergibt sich nämlich durch rechts- und linksseitige Multiplikation mit F nach Regel II und III: $FNMF \rightarrow FWF$ oder $MN \rightarrow W$ (da $FWF = FF = W$ [Regel IV] und, weil $M = FNF$, $FNMF = FNFNFF = MN$).

Das Brouwersche Axiom ist also gerade hinreichend, um die zwei ersten Zeilen (mit W als Mittelglied) so zu ordnen: $N^2 \rightarrow N \rightarrow MN \rightarrow W \rightarrow NM \rightarrow M \rightarrow M^2$, wo, wegen der Transitivität der „$\rightarrow$"-Beziehung, auch das W weggelassen werden kann.

Man erhält nun, wie oben gesagt, daraus sofort die Rangordnung der beiden 3^{ten} Halbzeilen in sich (wobei natürlich W nicht auftritt) und nicht nur das, sondern, wie man leicht übersieht, die Ordnung beider halben Schemata, bis mit zur dritten Zeile, also z. B. das linke, wie folgt:

$$N^3 \rightarrow N^2 \rightarrow MN^2 \rightarrow N \rightarrow NMN \rightarrow MN \rightarrow M^2N$$

(Zweifelhaft könnte nur $MN^2 \rightarrow N \rightarrow NMN$ sein, aber das ergibt sich aus $MN \rightarrow W \rightarrow NM$ durch rechtsseitige Multiplikation mit N nach Regel II.)

Was nun wiederum nicht bestimmt ist, ist das Verhältnis von M^2N, N^2M und W, und dies muß durch eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Axioms festgelegt werden: $W \rightarrow N^2M$, woraus, wie oben, sofort $M^2N \rightarrow W$ folgt.

Damit ist das ganze Schema bis mit zur dritten Zeile geordnet.

Man sieht, daß man so fortfahren kann, wenn man das Brouwersche Axiom schrittweise verallgemeinert, d. h. $W \rightarrow N^3M$, $W \rightarrow N^4M$; ..... $W \rightarrow N^iM$ fordert. Durch vollständige Induktion ergibt sich leicht, daß das „verallgemeinerte Brouwersche

Axiom" $W \rightarrow N^i M$ hinreicht, um das ganze unbegrenzte Schema der MN-Kombinationen, d. h. alle positiven Modalitäten mit Einschluß von W linear zu ordnen (nach dem Ordnungstyp η der rationalen Zahlen).

Das verallgemeinerte Brouwersche Axiom ist aus demselben Grunde plausibel wie das einfache, auch die Notwendigkeit der Notwendigkeit usw. einer Möglichkeit ist niemals logisch so stark wie die Wahrheit. Und ferner, was nicht wahr ist, davon ist auch nicht die Möglichkeit der Möglichkeit usw. der Notwendigkeit gegeben (vgl. oben § 4c, S. 520)[1].

c) Damit ist das Rangordnungsproblem unseres Kalküls gelöst. Als zweite Frage bleibt nun noch das Reduktionsproblem übrig. Unser Kalkül hat unendlich viele irreduktible Modalitäten, wie schon aus der Verschiedenheit von N, N^2, N^3 ... hervorgeht. Damit ist aber noch nicht gesagt, daß sämtliche MN-Kombinationen verschiedene positive Modalitäten darstellen. Vielmehr könnten sich gewisse Typen auf andere reduzieren. Inwieweit ist das der Fall?

Zunächst führt schon das einfache Brouwersche Axiom zum Beweis der Periodizität der U-Potenzen. ($U = U^3$, $U^4 = U^2$; allgemein: $U = U^{2n+1}$; $U^2 = U^{2n}$). Der Beweis ist bekanntlich folgender: Aus $W \rightarrow U^2$ (Brouwers Axiom) folgt nach Regel II durch rechtsseitige Multiplikation mit U: $U \rightarrow U^3$; durch linksseitige Multiplikation mit U dagegen nach Regel III: $U^3 \rightarrow U$; also $(U \rightarrow U^3) \times (U^3 \rightarrow U)$ oder $U = U^3$.

Dieser Beweis läßt sich weitgehend verallgemeinern. Sei nämlich Λ irgendeine negative Modalität von der Eigenschaft $W \rightarrow \Lambda^2$, so ergibt sich durch rechtsseitige Multiplikation mit Λ: $\Lambda \rightarrow \Lambda^3$, durch linksseitige dagegen: $\Lambda^3 \rightarrow \Lambda$; also wie oben $\Lambda = \Lambda^3$. Analog würde aus $\Lambda^2 \rightarrow W : \Lambda^3 \rightarrow \Lambda$, $\Lambda \rightarrow \Lambda^3$, also ebenfalls $\Lambda = \Lambda^3$ folgen.

Welches ist die allgemeinste Form von Λ? Man sieht aus dem MN-Schema, daß positive Modalitäten, die von W impliziert werden, alle mit M enden (und nur sie). Λ^2 muß also als MN-„Produkt" dargestellt mit M (im „analogen" Fall mit N) enden.

---

1) Die Beziehung $MN \rightarrow W \rightarrow NM$ an Stelle der formal zunächst anscheinend gleichmöglichen $NM \rightarrow W \rightarrow MN$ zu wählen, ist nicht ohne rein formale Bedeutung. Denn das im Text wesentlich benutzte Prinzip zur Herstellung der Rangordnung hängt davon ab. Eine Abweichung würde tiefgreifende Änderung der Ordnungsbeziehungen im ganzen Schema mit sich bringen. Ob überhaupt noch eine lineare Rangordnung aller Modalitäten möglich wäre, muß bezweifelt werden. Doch bedarf dies noch genauerer Untersuchung.

In FN-Form dargestellt, muß es also eine gerade Zahl von F enthalten und mit F enden (da $M = FNF$). Also enthält Λ selbst eine ungerade Zahl von F und endet auch mit F. Λ hat also die Formen

$$\Lambda = N^{x1} F N^{x2} F \ldots F N^{x2s+1} F$$

$$\text{oder } \Lambda = F N^{y1} F N^{y2} F \ldots\ldots F N^{y2s} F$$

Also:

$$\Lambda^2 = N^{x1} F N^{x2} F \ldots\ldots N^{x2s+1} F N^{x1} \ldots\ldots N^{x2s+1} F$$

$$\text{oder } \Lambda^2 = F N^{y1} F N^{y2} F \ldots N^{y2s+y1} F N^{y2} \ldots N^{y2s} F$$

Oder in der MN-Form geschrieben:

$$\Lambda^2 = N^{x1} M^{x2} \ldots\ldots M^{x2s} N^{x2s+1} M^{x1} \ldots N^{x2s} M^{x2s+1}$$

$$\text{bezw. } \Lambda^2 = M^{y1} N^{y2} \ldots M^{y2s-1} N^{y2s+y1} M^{y2} \ldots N^{y2s-1} M^{y2s}$$

Für diese und die „analogen“ Formen, also für alle negativen Formen Λ gilt: $\Lambda^2 = \Lambda^{2m}$; $\Lambda = \Lambda^{2m+1}$. Damit sind offenbar weitgehende Reduktionen gegeben. Einige einfache Beispiele sind etwa:

$$NMN = N;\ NMN^2 = N^2;\ N^2MN = N^3,\ MNMN = MN$$

Die Auswirkungen dieser Reduktion im einzelnen sind nicht leicht übersehbar und können hier nicht weiter betrachtet werden. Es scheint hier noch ein schwieriges kombinatorisches Problem vorzuliegen, dessen Lösung den Mathematikern überlassen bleiben muß.

Anhang zum I. Abschnitt.

Die Logik der Modalitäten und der Brouwer-Heytingsche „intuitionistische“ Logikkalkül.

A. Heyting hat in seiner Abhandlung „Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik“[1]) einen Kalkül von hoher mathematischer Vollendung entwickelt. Wie in der Einleitung dargelegt, fordert diese intuitionistische formale Logik einen Vergleich mit dem Modalitätenkalkül heraus (s. o. S. 500ff.).

Heytings Kalkül ist aus dem klassischen elementaren Logikkalkül von Russell gewonnen durch Unterdrückung aller der Axiome, Definitionen und Theoreme, die auf dem Prinzip des *Tertium non datur* beruhen oder dieses Prinzip zur Folge haben.

Es werden die vier Grundbegriffe $\supset$ (Implikation), $\wedge$ (Konjunktion, „und“), $\vee$ (Disjunktion, „oder“), $\neg$ (Negation besonderer Art) eingeführt. Keiner dieser vier Grundbegriffe kann auf die anderen zurückgeführt werden!

1) Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Klasse, 1930 II, S. 3 ff.

Es gelten ferner für diese Begriffe die folgenden 11 Axiome:

(1) 2.1 $a \supset a \wedge a$
(2) 2.11 $a \wedge b \supset b \wedge a$
(3) 2.12 $a \supset b \cdot \supset \cdot a \wedge c \supset b \wedge c$
(4) 2.13 $a \supset b \cdot \wedge \cdot b \supset c \cdot \supset \cdot a \supset c$
(5) 2.14 $b \supset \cdot a \supset b$
(6) 2.15 $a \wedge \cdot a \supset b \cdot \supset b$
(7) 3.1 $a \supset a \vee b$
(8) 3.11 $a \vee b \supset b \vee a$
(9) 3.12 $a \supset c \cdot \wedge \cdot b \supset c \cdot \supset . a \vee b \supset c$
(10) 4.1 $\neg a \supset \cdot a \supset b$
(11) 4.11 $a \supset b \cdot \wedge \cdot a \supset \neg b \cdot \supset \neg a$

Alle diese Sätze gelten im Russellschen Kalkül, wenn man die Zeichen wie folgt „übersetzt“:

Heyting: $\supset$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$
Russell: $\supset$, $\cdot$, $\vee$, $\sim$

Dagegen gelten viele Sätze und auch schon Definitionen des Heytingschen Kalküls nicht im Russellschen.

Wie verhält sich nun der Heytingsche Kalkül zum unergänzten und ergänzten Lewisschen?

Es entsteht zunächst die Frage nach einer geeigneten „Übersetzung“ der Zeichen.

Da der H.-Kalkül im R.-Kalkül enthalten ist und der R.-Kalkül seinerseits im L.-Kalkül (wenn man übersetzt: R.: $\supset$, $\cdot$, $\vee$, $\sim$; L.: $\subset$, $\times$, $+$, $-$), so scheint die Beantwortung leicht: der H.-Kalkül ist natürlich auch (in der Übersetzung: H.: $\supset$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$; L.: $\subset$, $\times$, $+$, $-$) im L.-Kalkül enthalten. Allein dies ist eine Trivialität ohne Wert. Denn der Zweck eines Vergleichs von intuitionistischer und Modalitätenlogik kann ja nur sein, die Ausfallserscheinungen der ersten gegenüber der klassischen Logik dadurch verständlich zu machen, daß man die intuitionistischen Begriffe durch die spezifisch modalitätslogischen, also die Lewisschen „strikten“ Begriffe (*strict implication, strict logical sum, impossibility*) interpretiert.

Dieser Gesichtspunkt legt folgende Übersetzung nahe: H.: $\supset$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$; L.: $<$, $\times$, $\wedge$, $\sim$.

Der durchgeführte Vergleich ergibt, wie zu erwarten ist, daß in den Heytingschen Axiomen wesentlich mehr vorausgesetzt wird, wie im Lewisschen System. Leider ist so viel bei dieser Interpretation vorausgesetzt, daß das ganze Lewissche System gesprengt wird.

Es gilt nämlich im Heytingschen System (Axiom 3.1 und Theorem 3.22, vgl. S. 8 der Heytingschen Abhandlung)

$$a \vee a \supset \subset a$$

Dem entspricht die L.-Übersetzung

$$p \wedge p = p$$

Nun ist im L.-System:

$$p \wedge p = \sim(-p \times -p) = \sim -p$$

(nach Definition L. 1.04, s. o. S. 503).

Der fragliche Satz bedeutet also nichts anderes als, daß $\sim - p = p$ ist. Also $N = W$. Setzt man für p speziell $-p$ ein, so kommt $\sim - - p = - p$ oder $\sim p = - p$. D. h.: Die Eigenart des Lewisschen Systems verschwindet und es wird auf den gewöhnlichen klassischen Kalkül ohne „oblique" Modalitäten reduziert.

Dieses Resultat macht einen paradoxen Eindruck, erklärt sich aber daraus, daß das System der undefinierbaren Begriffe bei Lewis ein anderes ist als bei Heyting. Das Lewissche System analysiert die Begriffe stärker, hat zwar 2 Negationen (bzw. außer der Negation F noch ein Zeichen für die *obliquitas* des einfachen positiven Modus N), kann dafür aber auch sämtliche übrigen Beziehungen durch das logische Produkt allein darstellen. Das verschafft ihm eine größere Beweglichkeit der deduktiven Technik und deshalb sind „dieselben" Axiome im L.-System „stärker" als im H.-System[1]).

Da sich die beiden bisher gewählten Übersetzungen als unbrauchbar erwiesen haben, soll noch eine dritte betrachtet werden, die vielleicht zum Ziele führt, soweit unsere bisherigen Untersuchungen darüber ein Urteil erlauben.

Es sollen jetzt sich entsprechen: Heyting: $\supset$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$; Lewis: $\subset$, $\times$, $+$, $\sim$ (d. i. *material implication, logical product, material logical sum, impossibility*). Es sind also diesmal die „gewöhnlichen" Relationen gewählt, bis auf die Negation, die als Unmöglichkeit wiedergegeben wird.

Diese Wahl hat sofort zur Folge, daß die Heytingschen Axiome (1)—(9), die sämtlich „$\neg$" nicht enthalten, ins Lewissche System

1) Auf der anderen Seite ist das L.-Axiom 1.5 $p < -(-p)$ im H.-System vermutlich gar nicht ausdrückbar, so daß das H.-System das L.-System in der angewandten Interpretation nicht vollständig enthalten dürfte. Es verlohnt sich nicht, dies genauer zu untersuchen, da die angewandte „Übersetzung" ohnehin aus den im Text genannten Gründen nicht brauchbar ist.

transskribiert werden können. Denn sie gelten ja im Russellschen „*System of material implication*“ und dieses ist im Lewisschen System vollständig enthalten.

Dagegen gelten (10) und (11) mit der Übersetzung $\sim$ (unmöglich!) für $\neg$ bei Heyting nicht im Russellschen System[1]).

Es fragt sich, ob sie im unergänzten oder geeignet ergänzten Lewisschen System gelten.

In die Lewissche Notation übertragen, lauten die fraglichen Axiome:

(10)′ $\quad \sim p \subset (p \subset q)$

(11)′ $\quad p \subset q)\ (p \subset \sim q) \subset \sim p$

(10)′ gilt auch bei Lewis. Denn da $\sim p < -p$, ist auch $\sim p \subset -p$ (a) und es gilt ferner:

(10)* $\quad -p \subset (p \subset q)$

weil das bei Russell gilt. (Der entsprechende Satz in den „*Principia mathematica*“ trägt die Nummer *2.21.) Aus (a) und (10)* folgt aber, nach dem syllogistischen Prinzip, das auch für die materiale Implikation gilt, (10)′.

Dagegen ist (11)′ allem Anschein nach im unergänzten Lewisschen System nicht beweisbar.

Das ergibt sich auch daraus, daß der Satz $\sim\sim\sim p \equiv \sim p$ aus Heytings Axiomen (1)—(11) folgt (H. 4.31 und 4.32). Dieser Satz ist allerdings etwas schwächer als unser $\sim\sim\sim p = \sim p$ ($U^3 = U$, vgl. S. 509, 513, 525), da die „materiale“ statt der „strikten“ Äquivalenz steht.

Hier muß nun die weitere Untersuchung einsetzen mit dem Ziel, festzustellen: ob und welche Zusätze zum ergänzten Lewisschen System (10-Modi-Kalkül, 6-Modi-Kalkül) gemacht werden müssen, damit das Heytingsche Axiom (11) gilt. Es könnten sich allerdings dann immer noch Schwierigkeiten ergeben aus der Verschiedenheit der Systeme der undefinierten Begriffe bei Heyting und Lewis. Die Lösung dieser Aufgaben und die Überwindung der angedeuteten Schwierigkeiten muß der Zukunft überlassen bleiben.

Zum Schluß sei aber noch ein Fingerzeig gegeben. Heyting beweist — sehr dankenswerter Weise — die Unabhängigkeit seiner Axiome voneinander und endlich auch die Unbeweisbarkeit des *tertium non datur* in seinem System. Zu diesem Zwecke gibt er ein

1) Man darf nicht vergessen, daß das Zeichen „$\sim$“ bei Russell im Sinne des Lewisschen „—“ verwandt wird.

System von 3 Elementen 0, 1, 2 und eine dazugehörige „Gruppe“ [1]) an, in dem alle seine Axiome erfüllt sind, aber der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht (Heyting, l. c. S. 17, Gruppe XII). Er fügt folgende Interpretation der Elemente hinzu: „0 bedeute einen beliebigen richtigen Satz, 1 einen beliebigen falschen Satz, 2 einen Satz, der nicht falsch sein kann, aber nicht bewiesen ist.“ Darin liegt offenbar, daß Heyting drei einander ausschließende Modalitäten annimmt, die eine vierte ausschließen. (*Quartum non datur!*) Damit stimmt eine weitere Bemerkung über eine Arbeit von Glivenko überein [2]), der bewiesen habe:

1. Wenn der Satz a in der klassischen Logik beweisbar ist, so ist der Satz „a kann nicht falsch sein“ ($\neg\neg a$) es im Heytingschen System.

2. Wenn der Satz „a ist falsch“ in der klassischen Logik beweisbar ist, so ist er es auch im Heytingschen System ($\neg a$).

Das heißt aber: Es gilt im Heytingschen System: „Entweder $\neg a$ oder $\neg\neg a$“, wo $\neg\neg a$ heißt, daß a entweder beweisbar wahr oder zwar unbeweisbar aber doch wahr ist.

Dies legt eine enge Beziehung zum Sechs-Modi-Kalkül nahe. Man wird die „beweisbare Wahrheit“ als Notwendigkeit, die Falschheit als „Unmöglichkeit“ und die unbeweisbare Wahrheit entweder als „*variability*“ im Sinne von Mac Coll (s. o. S. 498 f.), d. h. als $M \times M'$ oder als „kontingente“ Wahrheit, d. h. als $W \times M'$ interpretieren.

Daß damit indessen noch nichts Endgültiges erreicht ist, zeigt Heytings Tabelle

$$\begin{array}{c|ccc} \neg & 0 & 1 & 2 \\ & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

welche Folgendes besagt:

$$\neg 0 = 1; \quad \neg 1 = 0; \quad \neg 2 = 1 \quad \text{oder:}$$

1. Wenn a nachweislich wahr (also notwendig) ist, ist $\neg a$ nachweislich falsch (unmöglich).

2. Wenn a nachweislich falsch (unmöglich) ist, ist $\neg a$ nachweislich wahr (notwendig).

3. Wenn a nicht nachweislich wahr, d. h. nicht (beweisbar?) falsch und auch nicht beweisbar wahr ist (d. h. wenn a sei es $M \times M'$

1) Nach dem bekannten von Bernays entwickelten Verfahren. Vgl. Bernays, Axiomatische Untersuchung des Aussagekalküls der „Principia mathematica“. Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 305.

2) Glivenko, Acad. R. de Belgique, Bull. de la classe des Sciences, s. 5, t. 15, p. 183 (1929).

oder $W \times M'$ als Modalität hat), ist $\neg a$ nachweislich falsch (unmöglich).

Man sieht nicht recht, wie sich diese Thesen, insbesondere die dritte, in der Sprache des Sechs-Modi-Kalküls interpretieren lassen sollen. Besonders, wenn man berücksichtigt, daß $\neg a$ mit $\sim p$ wiedergegeben werden soll. Auch ist die eigene Definition, die Heyting von der Bedeutung der „2" gibt, nicht ganz klar. „2" soll einen Satz bedeuten, „der nicht falsch sein kann, dessen Richtigkeit aber nicht bewiesen ist". Soll das heißen, daß der Satz weder nachweislich wahr, noch nachweislich falsch sein kann (also weder tautologisch noch widerspruchsvoll, d. h. weder notwendig noch unmöglich) oder, daß er weder nachweislich wahr noch überhaupt falsch sein kann (also auch nicht kontingent falsch sein kann), folglich kontingent wahr ist?

Wir müssen leider auch dieses Problem an dieser Stelle ungelöst dem Scharfsinn des Lesers anheimstellen.

II.

Die logische Deutung des mathematischen Intuitionismus von der Modalität aus.

Mit besonderer Rücksicht auf E. Cassirers „Philosophie der symbolischen Formen".

Abgesehen von den in der Einleitung genannten formalen Parallelen ist das Modalitätsproblem auch für die nichtformale „philosophische" Erfassung der intuitionistischen Grundlegung der Mathematik sehr bedeutsam. Das zeigt sich an der neuesten philosophischen Auseinandersetzung, zu der Brouwers Gedanken Anlaß gegeben haben, der kritischen Darstellung, die Ernst Cassirer im III. Teil seiner „Philosophie der symbolischen Formen": „Phänomenologie der Erkenntnis"[1]) vom Intuitionismus gegeben hat. Diese Kritik erreicht ihre eigentliche Schärfe durch Einführung des Unterschieds von Möglichkeit und Wirklichkeit an einer entscheidenden Stelle (l. c. S. 431 ff.).

Cassirer geht davon aus, daß der Intuitionismus den „Primat des Funktionsbegriffs vor dem Dingbegriff" anerkenne und von dem Gedanken der Operation aus die gegenständlichen Individuen der „Zahlen" gewinne. Das Wissen vom „Gesetz" gehe hier in strengem

1) Berlin 1929. In Frage kommt näher: III. Teil (des III. Bandes), Kap. IV: „Der Gegenstand der Mathematik", S. 415 ff.

Sinne dem Wissen vom „Gesetzten“ voran. Der Intuitionismus müsse sich mit diesem idealistischen Gedanken ganz durchdringen, freilich im Sinne eines streng objektiven Idealismus. Der Gegenstandsbereich der Mathematik dürfe nicht auf den psychologischen Akt des Zählens, sondern müsse auf die reine Idee der Zahl gegründet werden. Weiterhin wird dem Brouwerschen Ausspruch, daß die gesamte Mathematik „weit mehr ein Tun, denn eine Lehre sei“ zwar zugestimmt, aber mit dem Bemerken: Das mathematische „Tun“ sei ein rein intellektuelles Tun, das nicht in der Zeit verlaufe, sondern ein Grundmoment, auf dem die Zeit selbst beruhe, das das Moment der „Reihung“ erst ermögliche. Es bestehe demgemäß nicht in einem „Inbegriff von Einzelhandlungen im Verhältnis des empirischen ‚Nacheinander‘“, die nur „‚nach und nach‘ ein Ganzes aufzubauen“ vermöchten. Sondern das Ganze sei vor dem Teil, als „Prinzip der Operation“, als erzeugendes Gesetz am Anfang stehend. Brouwer verlange demgegenüber die Begründung einer mathematischen Aussage von der Form „es gibt“ durch einen Einzelakt des „Gebens“ und verwische damit die Grenzen des rein-ideellen und des empirischen Gebens. Hier müsse man auf eine berühmte Unterscheidung Leibnizens zurückgreifen: so wie dieser *observabilité* (mögliche Beobachtung, Beobachtbarkeit) und *observation* (wirkliche Beobachtung) unterschieden habe [1]), so müsse man heute neben dem Begriff der (wirklichen) Konstruktion den der „Konstruktibilität“ (möglichen Konstruktion, Konstruierbarkeit) einführen. Zur Erfassung des Begriffs der mathematischen Existenz genüge die Möglichkeit der Konstruktion bzw. — wie man hinzufügen könnte — die Möglichkeit des Beweises (die Beweisbarkeit, „*démonstrabilité*“). Das läuft dann darauf hinaus, daß für die Existenz einer Menge lediglich die „Umfangsdefinitheit“, nicht aber — wie bei Brouwer — die „Entscheidungsdefinitheit“ gefordert wird; also auf die sogenannte „halbintuitionistische“ Position [2]).

1) Briefwechsel mit Clarke: L.s fünftes Schreiben § 52.

2) Dies ist Weyls Position von 1918 (in der Schrift „Das Kontinuum“). Im Jahre 1921 (im Artikel „Die neue Grundlagenkrise in der Mathematik“, Math. Zeitschr. Bd. 10) ging Weyl zum Brouwerschen Intuitionismus im wesentlichen über, um später (in den „Randbemerkungen“, Math. Zeitschr. 20 [1924], im „Symposion“-Artikel und in der Abhandlung im „Handbuch der Philosophie“, Abt. II A.) die Idee der „symbolischen Mathematik“ hinzuzufügen. Das Zitat, das Cassirer aus dem Artikel in Math. Zeitschr. 10 bringt (C., S. 433 f.), ist insofern etwas irreführend, als es einem Rückblick auf die „halbintuitionische“ Position von 1918 entstammt, die Weyl etwas später in demselben Artikel ausdrücklich zu-

Will man eine Entscheidung zwischen der „halbintuitionischen" (logisch-idealistischen bzw. objektiv-idealistischen) und der eigentlich „intuitionistischen" (der sogenannten „empiristischen") Auffassung fällen, so wird man, wie man sieht, unmittelbar auf ein Modalitätenproblem geführt. Es erhebt sich nämlich die Frage: Ist die Unterscheidung von (nichtleerer, „positiver") Möglichkeit und Wirklichkeit im mathematischen Felde überhaupt sinnvoll? Kann man jemals in der Mathematik die positive Möglichkeit einer Konstruktion oder eines Beweises auf eine andere Weise dartun — als indem man die Konstruktion wirklich ausführt, den Beweis wirklich vordemonstriert?

Im Bereich der empirischen Beobachtung und des historischen Erkennens gibt es ganze Stufenfolgen von mehr oder minder wahrscheinlichen „realen" Möglichkeiten, bis zur absoluten realen Unmöglichkeit. Man kann es für eben noch real möglich halten, daß die Menschen der Zukunft mit Weltraumschiffen andere Planeten besuchen oder doch wenigstens den Mond umfahren und seine uns heute unzugängliche Rückseite direkt beobachten werden. Für sehr unwahrscheinlich, aber doch nicht ganz (real) unmöglich, daß man einmal wieder einen ganzen Petronius oder Livius besitzen wird. Man wird es nicht mehr für real möglich erklären können, daß Menschen den Mittelpunkt der Erde oder gar der Sonne oder eines entfernten Fixsterns, vielleicht gar Nebelflecks erreichen können. Ebensowenig, daß uns eine Dichtung in urindogermanischer Sprache jemals wieder geschenkt werden könnte. Trotzdem gehört hier immer noch zum Sinn der Realität jener Weltkörper und jener Ursprache, an die wir alle glauben, daß es denkbar (in freier Phantasie vorstellbar) wäre, daß durch irgendeinen Zauber ein beobachtendes Subjekt in jene unzugänglichen Räume gebracht oder in jene Urzeiten zurückversetzt würde. Diese „Denkbarkeit" ist wesentlich mehr als bloße Widerspruchsfreiheit. Sie bedeutet die Möglichkeit des phantasierenden Sich-Ausmalens bis in alle Einzelheiten.

Im Gebiet der reinen Mathematik gibt es nichts dergleichen. Man kann eine Konstruktion oder einen Beweis, wenn man will, „möglich"

---

gunsten der Brouwerschen aufgibt. Das Zitat C., S. 434, in dem der charakteristische Begriff des „Urteilsabstrakts" auf die mathematischen Existentialurteile angewandt wird, gehört dem zweiten (intuitionistischen) Teil des W.schen Aufsatzes an, daher die Diskongruenz der in den beiden Zitaten zutage tretenden Auffassungen. Ich glaube kaum, daß zwischen der zweiten Weylschen Position (von 1921) und der Brouwers wesentliche Unterschiede bestehen: beide Autoren fordern die wirkliche Vorlegung einer Konstruktion beim Existenzbeweis, also für Mengen die „Entscheidungsdefinitheit".

nennen, wenn man zeigen kann, daß die Annahme ihrer Ausführung oder seines Bestehens widerspruchsfrei mit den sonst gemachten Voraussetzungen vereinbar ist. Aber es ist damit nicht im geringsten angedeutet, wie diese „mögliche" Konstruktion oder dieser „mögliche" Beweis aussehen könnten. Während im „empirischen" Fall ein erträumter Beobachter erträumte Beobachtungen anstellen könnte, wäre im „rein" mathematischen Fall eine erträumte Konstruktion unmittelbar äquivalent einer „wirklichen", ja von ihr eigentlich gar nicht unterscheidbar. Ebensowenig verliert ein mathematischer Beweis seine Gültigkeit dadurch, daß er mir „im Traume eingefallen ist" und nicht durch methodisches Arbeiten im Wachen errungen wurde [1]).

Es besteht — das ist das Ergebnis der vorhergehenden Überlegung — keine Analogie zwischen der *observabilité* realer Gegenständlichkeiten im Sinne von Leibniz und der „*constructibilité*" oder „*démonstrabilité*" im mathematischen Felde.

Den letzten beiden Begriffen scheint ein „positiver" Inhalt über den „privativen" der Widerspruchslosigkeit hinaus nicht gegeben werden zu können. In der Tat ist dieser Unterschied zwischen der Positivität jeder auch noch so phantastischen „realen" Möglichkeit, ja jeder auch nur „denkbaren" realen Unmöglichkeit und der Privation, die in der bloßen Widerspruchsfreiheit liegt, entscheidend. Es handelt sich bei der „Widerspruchslosigkeit" nicht nur um einen privativen Terminus. Es ist wesentlich für die modernen Widerspruchsfreiheitsbeweise der Hilbertschen Schule, daß sie lediglich die Unmöglichkeit eines nachweislichen Widerspruchs demonstrieren, die Unmöglichkeit des Auftretens der Formel $0 \neq 0$ oder eines anderen Äquivalents für eine widerspruchsvolle Aussage in einer gültigen formal-mathematischen Argumentation. Nicht im geringsten leistet die Hilbertsche Methode mehr, nicht im geringsten kann sie und will sie „ideale" Strukturen zugänglich machen, die in irgendwie formal-ontologisch haltbarer Weise (etwa als mengentheoretische Konstruktionen) die bereits eingeführten „intuitionistischen" Strukturen ergänzen. Dadurch

1) Es handelt sich dabei nicht um die „Chancen" des Findens. Einen Beweis für den großen Fermatschen Satz zu suchen ist immerhin viel aussichtsreicher als die Venus im Raumschiff erreichen zu wollen. Auch mag man sich mit einer gar nicht geringen Wahrscheinlichkeit die Art jenes zahlentheoretischen Beweises — nicht ihn selbst! — vorstellen können, aber trotzdem ist innerhalb der rein mathematischen Sphäre keine modale Zwischenstufe zwischen der Widerspruchsfreiheit und der „wirklichen" Vorlegung des Beweises denkbar.

unterscheidet sie sich grundsätzlich von allen früheren Methoden zur Einführung „idealer" mathematischer Gegenstände [1]).

Vergleicht man mit dem eben Gesagten die bedeutenden Bemerkungen, die Cassirer (l. c. S. 452 ff.) über die Frage der idealen Elemente in der Mathematik gemacht hat, so sieht man sich wiederum einem Endergebnis gegenüber, dem man nicht in vollem Maße wird beipflichten können, so sehr der allgemeinen methodischen Haltung zuzustimmen ist. Denn auch Cassirer versucht über die bloße Widerspruchsfreiheit hinaus zu einer positiveren Charakteristik des Sinnes und der Berechtigung der Adjunktion idealer Elemente zu gelangen und damit strebt er seinerseits danach, den Begriff der „Möglichkeit" einer „formalistischen" Konstruktion positiv zu kennzeichnen. Cassirer geht davon aus, daß nach Hilberts Meinung die Adjunktion idealer (transfiniter) Aussagen zu den finiten in der mathematischen Logik durch die Widerspruchsfreiheit des Gesamtkomplexes nach der Adjunktion und eine gewisse Permanenz der formalen Gesetze vor und nach ihr bestimmt und gerechtfertigt ist. Er selbst möchte über diese Forderung im Namen der „philosophischen Kritik der Erkenntnis" hinausschreiten: von der Idee der „widerspruchslosen Verbindung", der „bloß formellen Vereinbarkeit" zur „Gewähr für einen wahrhaft-innerlichen Zusammenschluß", einen „in sich homogenen logischen Aufbau der Mathematik". Dieser sei erst dann gesichert, wenn die adjungierten Elemente nicht einfach neben die alten treten, sondern „eine systematisch-notwendige Entfaltung der letzteren sind". Eine „logische Urverwandtschaft" der alten und neuen Elemente wird gefordert; vermöge der der implizite Sinn der alten erst vermittels der neuen Elemente expliziert werden kann. Nicht nur der Kreis der Gegenstände der Mathematik werde erweitert, sondern ihre Fundamente würden tiefergelegt; jede „Extensivierung" komme hier sogleich einer „logischen Intensivierung" gleich. Selbst wenn die *ratio essendi* der idealen Gebilde im Bereich der alten gesucht werden müsse, liege doch die *ratio cognoscendi* der letzteren in den idealen Elementen. Cassirer denkt hier konkret an die Aufklärung undurchsichtiger Zusammenhänge im reellen Gebiet vom komplexen aus (Fundamentalsatz der Algebra, Konvergenzkreis u. dgl.) und ähnliche Dinge (Idealzahlen, ideale und imaginäre

1) Insbesondere auch, wie hier gegenüber Adolf Fraenkel nochmals betont sei, von der Cauchyschen und verwandten Methoden zur Einführung des Imaginären; die alle gewisse mengentheoretische Konstruktionen verwenden. Näheres siehe in meinem Artikel im „Philos. Anzeiger", Jahrg. III, S. 369 ff.; insbesondere S. 377, Anm. 3.

Gebilde in der Geometrie usw.). Im Sinne der Relationslogik handele es sich um neue Systéme von Beziehungen, die die alten Relationsgefüge zum Ausgangspunkt haben, um „Systeme von Systemen", Systeme höherer Ordnung und reicherer Struktur, in denen die alten Gefüge eingebettet erscheinen, wodurch sie dann in ihrer eigenen Struktur verständlicher werden. Die idealen Elemente seien „aus keinem anderen gedanklichen Stoffe als jene elementaren Gegenstände gewoben"; die Urteile, die sich über sie fällen lassen, seien demgemäß „stets[1]) (!) so zu fassen, daß sie sich in Urteile innerhalb der ersten Gegenstandsklasse zurückverwandeln lassen[1]): nur daß jetzt als Subjekte dieser Urteile nicht mehr einzelne Gegenstände, sondern Gruppen und Gesamtheiten derselben fungieren"[2]) (reelle Zahlen als „Schnitte" oder „Segmente" rationaler Brüche und komplexe Zahlen als Zahlenpaare usw.; — in jedem Falle irgendwelche mengentheoretischen Konstruktionen!).

Diese Ausführungen wurden deshalb so ausführlich wiedergegeben, weil sie — wie sich sogleich zeigen wird — auf das Verhältnis von Intuitionismus und Logik der Modalitäten indirekt ein helles Licht werfen. Cassirer schließt in seine Deutung der idealen mathematischen Gebilde die Hilbertschen „idealen Aussagen" ausdrücklich ein, ja er geht sogar bei seiner Aufrollung der ganzen Fragestellung von ihnen aus (l. c. S. 455). Aber, so sehr seine Deutung des logischen „Wertes" der übrigen idealen Elemente den Nagel auf den Kopf trifft, bezüglich der idealen Aussagen irrt er nach unserer Meinung. Urteile über Hilbertsche „ideale Aussagen" lassen sich auf keine Weise in solche „innerhalb der ersten Gegenstandsklasse", d. h. hier innerhalb des Bereichs der finiten Aussagen (die auch in einer intuitionistischen Logik gelten), zurückverwandeln. Es gibt keine noch so verwickelte „Gesamtheit" von „finiten" Aussagen, die imstande wäre, eine „transfinite" („ideale") Aussage darzustellen. Also bricht die Analogie zwischen der „Idealität" der transfiniten Aussagen in der Hilbertschen mathematischen Logik und dem Charakter der anderen bisher bekannten „idealen" Gebilde im entscheidenden Punkte zusammen!

Man könnte dieses Versagen immerhin vielleicht noch für im letzten Grunde irrelevant halten. Man könnte die konkrete These

1) Sperrung von mir.
2) l. c. S. 460.

von der „Zurückverwandlung“ der Urteile des neuen in solche innerhalb des alten Bereichs aufgeben und doch die grundsätzliche Auffassung Cassirers von der „logischen Intensivierung“ durch die Adjunktion und die Meinung, daß die *ratio cognoscendi* der alten Gebilde bei den neuen läge, für richtig halten, — wie schwierig es im einzelnen auch sein möchte, dies zu durchschauen. Aber auch dann noch sprechen die „Tatsachen“ (*sit venia verbo!*) gegen Cassirer! Die durch die idealen Aussagen „abgerundete“ Hilbertsche Logik ist keine andere als die des „gewöhnlichen“ Logikkalküls Schröders, Peanos, Freges und Russell-Whiteheads. Sie ist viel einfacher als die „intuitionistische“, wie sie Heyting neuerdings ausführlich entwickelt hat. Keineswegs verhält sich das Hilbertsche System zum Brouwer-Heytingschen etwa wie die komplexe zur reellen Algebra! So gibt es bei Heyting drei irreduzible Grundmodalitäten, bei Hilbert nur zwei (die beiden bekannten Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“). Man kann durchaus nicht die neuen und verwickelteren logischen Beziehungen der intuitionistischen Logik als „spezielle Fälle“ in denen der alten enthalten finden. Im Gegenteil ist in gewissem Sinn die klassische Logik ein „Teil“ der neuen, so wie etwa die euklidische Geometrie ein „Teil“ der allgemeinen Riemannschen Geometrie ist[1]). Es kann ja auch unmöglich ohne sachliche Bedeutung sein, daß die klassische Logik schon längst bekannt, die intuitionistische eben entdeckt, ja noch nicht einmal ganz entdeckt ist, — in geradem Gegensatz zu dem historischen Verhältnis der „alten“ und der idealen „neuen“ Gebilde überall sonst, wie es ja schon die Terminologie anzeigt.

Indessen hat dieses Verhältnis des „Ganzen“ der intuitionistischen Logik zu ihrem klassischen „Teil“ solange etwas Paradoxes, als der

1) In beiden Fällen, in denen der „nichteuklidischen“ und analogen Geometrien (der „nichtarchimedischen“, der „nichtpascalschen“, der „nichtdesarguesschen“ u. ä.) handelt es sich um etwas ganz Ähnliches wie bei der „nichtaristotelischen“ (intuitionistischen) Logik. Die Weglassung bestimmter Axiome führt auf neue Gebiete von vielfach reicherer Struktur als die der als klassisch bekannten Disziplin. Allerdings besteht auch hier ein bedeutsamer Unterschied zwischen Logik und Geometrie: Die Gebilde der „pathologischen“ Geometrien lassen sich zumeist (vielleicht stets?) durch verwickeltere Gebilde im euklidischen System darstellen (Gerade z. B. durch Kreisbüschel usw.), in der Logik geht das nicht! Der Grund liegt, zu einem gewissen Teil jedenfalls, in dem „Nominalismus“ in der (abstrakten) Geometrie. Man kann da Kreisbüschel und sonstwelche Gebilde Gerade „nennen“ — ohne jede Hemmung: aber man kann in dem stets irgendwie absoluten und nicht-konventionellen Gebiet der formalen Logik selbst niemals irgend etwas, was nicht im geringsten eine Aussage ist, eine „ideale“ Aussage nennen!

Begriff der ersteren lediglich durch das „Faktum" der intuitionistischen Mathematik bestimmt ist, — was sich ja auch in der Brouwerschen Ableitung der klassischen Logik aus der finiten Mengenlehre zeigt, während die Logik des Intuitionismus der transfiniten Mengenlehre entspricht[1]).

Es erhebt sich hier die Forderung, den Unterschied der beiden „Logiken" mit intern logischen oder besser mit genuin logischen Mitteln zu bestimmen. Und ist nicht schon die Konzeption zweier „Logiken" eine unerträgliche Paradoxie? An diesem Punkte greift nun der schon von MacColl stammende Gedanke[2]) ein, eine mehr als zwei-„wertige" formale Logik, unter Berücksichtigung aller Modalitäten zu entwerfen. Eine solche „mehrwertige" Logik scheint die legitime Erweiterung der klassischen zu sein und viel eher ist diese Erweiterung mit derjenigen der reellen zur komplexen Algebra zu vergleichen. Freilich bedarf sie keiner idealen Elemente, sie braucht nicht etwa „ideale" Modalitäten außer der Wahrheit und Falschheit einzuführen, sondern nur sich auf die sehr „realen", d. h. in den konkretesten logischen „Phänomenen" unmittelbar begründeten der Möglichkeit, Notwendigkeit, Unmöglichkeit usw. zu besinnen. Wäre eine restlose Zurückführung der „intuitionistischen" Logik auf die Logik der Modalitäten gelungen — ein Ziel, das heute allerdings noch nicht ganz erreicht ist — dann läge in dem „Faktum" der intuitionistischen Logik nichts Paradoxes mehr, denn dann wäre dieses „Faktum" — oder dieses allenfalls „kontingent-apriorische" Phänomen — als eine reine Notwendigkeit erwiesen. —

Von der Seite der Modalität aus erhält endlich das Problem von Mathematik und Zeitlichkeit eine zwar einseitige aber doch scharfe Beleuchtung. Darauf sei noch kurz eingegangen, da Cassirer in diesem Punkte den entscheidenden Unterschied des „logischen Idealismus" und der „hermeneutischen Phänomenologie" in ihrer Anwendung auf das Problem der Mathematik sieht[3]).

---

1) Man beachte, wie hier die Rollen des Finiten und Transfiniten im Verhältnis zu denen, die sie bei Hilbert spielen, vertauscht erscheinen: Dort ist gerade die klassische Logik die transfinite, und dort fundiert sie auch die transfinite Mengenlehre des Formalismus, der Brouwer denn auch folgerichtig eine zu weitgehende Analogie mit der finiten nachsagt. (Vgl. Weyls Vorwurf des „Existenzialabsolutismus" gegen die klassische Cantorsche Mengenlehre!)

2) S. o. S. 498 f.

3) Ich beziehe mich hier außer auf die oben schon zitierten Äußerungen (s. o. S. 532) auf die kritischen Bemerkungen, die Cassirer (l. c. S. 469, Anm. 3) meiner Abhandlung „Mathematische Existenz" (im VIII. Band dieses Jahrbuchs) gewidmet hat. Ich tue das um so lieber, als diese Bemerkungen im Unterschied

Die „Logik" der Modalität hat einen tiefgehenden Bezug auf Zeitlichkeit. Man kann sogar sagen, daß die philosophische „Entdeckung" der „*modi obliqui*" Möglichkeit und Notwendigkeit, die sich ihre ontologische Anerkennung erst nach dem „*modus rectus*" der „Wahrheit" (Wirklichkeit) (und seines Gegenteils der Falschheit oder Unwirklichkeit) errungen haben, zugleich den ersten Schritt zur Entdeckung der „eigentlichen" Zeitlichkeit bedeutet. Denn deren entscheidende „Modi" Zukunft und „Gewesenheit" können geradezu als „*modi obliqui temporales*" gekennzeichnet werden im Gegensatz zur „geraden" temporalen Modalität „Gegenwart"[1]). Das „Zukünftige" ist in der Tat das „Mögliche", ebenso das Vergangene als ein „Gewesenes" oder zugespitzter „Gewesendes" (Heidegger). Dies gilt für die „historische" Zeitlichkeit, die „eigentliche Zeit" Heideggers[2]). Die „naturhafte" Zeitlichkeit, in der das Gleiche wiederkehrt, kann dagegen — von der historischen aus gesehen — als durch die Modalität der Notwendigkeit bestimmt angesehen werden[3]).

---

zu mancher anderen Kritik, die meine Abhandlung erfahren hat, sich grundsätzlich auf denselben „idealistischen" Boden stellen wie ich und auch sonst der philosophischen Perspektive, die ich zu entwerfen versucht habe, ein wirklich in die Tiefe gehendes Verständnis entgegenbringen. Trotzdem glaube ich an meinem „anthropologistischen" Standpunkt auch gegenüber Cassirers Kritik festhalten zu müssen.

1) Die schon früher gelegentlich verwandten Termini „*modus rectus — obliquus*" sind natürlich aus der lateinischen Grammatik entnommen, und zwar nicht sowohl den Bezeichnungen „*casus rectus — obliquus*" als vielmehr der grammatischen Benennung der verbalen Modi nachgebildet: der Indikativ ist der „gerade", der Konjunktiv der „ungerade" (oblique) Modus. Entsprechend ist auch die Unterscheidung der „geraden" (direkten) und „ungeraden" (indirekten) Rede (*oratio recta — obliqua*). Die *modi verbi* bezeichnen in der Tat prinzipiell die Wirklichkeit (Indikativ) bzw. die Möglichkeit oder Unmöglichkeit (Potentialis, Irrealis) eines Vorgangs (Tuns oder Leidens) d. h. eines zeitlichen Seins (*verbum* = Zeitwort). Die „*tempora*" des Verbums, nicht seine *modi*, scheinen freilich die Zeitmodalitäten sprachlich zu kennzeichnen. Aber die *tempora* bezeichnen nur die unanalysierte, schon konstituierte, ja schon unter dem Schema eines objektiven Vorgangs (Geschehens) angeschaute Zeitlichkeit. Der Ursprung der Zeit, die „vollzugsmäßige" Weise ihres eigentümlichen „Sich-Zeitigens", wird viel eher durch die *modi verbi* wiedergegeben. — Vgl. (zum Ganzen) die Bemerkung u. S. 547 f. über F. Brentanos Sprachgebrauch.

2) Die „Wiederholung" in der Geschichte ist ein Wiederverfügbarmachen von Möglichkeiten, sie bedeutet: sich wieder vor jene Möglichkeiten bringen, sie zu eigenen Möglichkeiten, d. h. „Zukünften" machen. (Nietzsche, Vom Nutzen und Nachteil der Historie für das Leben; Heidegger, Sein und Zeit I, 2. Abschn., Kap. 5.)

3) Die vorausberechnete Sonnenfinsternis z. B. tritt „notwendig" ein; jedes tragische „Schicksal" ist „notwendig"; die Unentrinnbarkeit einer ursprünglichen

Von sich selbst aus gesehen — soweit dies überhaupt möglich ist — kennt die „Natur“ den Unterschied der logischen Modi nicht, insbesondere nicht die *modi obliqui*. Die schlichte „Wirklichkeit“ allein „ist“, entsprechend der schlichten Gegenwart, dem „einfach da Sein“ [1]).

Die parmenideische Ontologie kennt nur Sein als „Anwesenheit“, ständige Gegenwart; die aristotelische vollzieht demgegenüber durch die modale Unterscheidung Dynamis — Energie die erste andeutungsweise Explikation des Phänomens der historischen Zeit. Freilich hat Aristoteles, wie ähnlich noch viel später Hegel, an der Stelle, wo die Zeit thematisch ausdrücklich behandelt wird (Physik, Buch IV, c. 10—14) den neuen Begriff der *δύναμις* nicht zum Tragen gebracht, sondern ist in entscheidenden Punkten der parmenideisch-platonischen Tradition treu geblieben [2]). Halten wir uns aber an die Darlegungen über Potenz und Aktus (vor allem in der Metaphysik, Buch *Θ*), so erweist sich für ein „gegenwärtiges“ (anwesendes) potentielles Seiende sein aktuelles Sein als zukünftiges und auch gewesenes (z. B. Kind, Erwachsener, Vorfahr). Oder mehr in Übereinstimmung mit dem vorhin Gesagten ausgedrückt: Das „in der Möglichkeit Seiende“ (*δυνάμει ὄν*) — das Kind — „wird (aktuell) sein“ — als Erwachsener —, ist demgemäß selbst „zukünftig“ (zukunftsträchtig) und „ist gewesen“ — als sein erwachsener Vater —, ist also zugleich selbst auch „gewesend“ (die Existenz des Vater „wiederholend“) [3]). (Met. *Θ*, 8.)

Triebwirkung ist eine notwendige, „verhängnisvolle“; Nietzsches „ewige Wiederkunft“ ist notwendig.

1) Aristoteles hat schon die drei wesentlichen Bedeutungen von Notwendigkeit (*ἀναγκαῖον*) unterschieden:

1. das Wozu Nötige, das Unentbehrliche;

2. der „gezwungene Zwang“, die zwingende Gewalt;

3. das schlicht oder „einfach“ Notwendige, das mit Zwang oder Zweck (1.) nichts zu tun hat. — Diese dritte Form ist die eigentlichste und dominierende. (Met. *Δ* 5, 1015 b 11: *ὥστε τὸ πρῶτον καὶ κυρίως ἀναγκαῖον τὸ ἁπλοῦν ἐστίν*) Sie ist diejenige, nach der das „Naturhafte“ schlicht notwendig ist, und gerade wegen dieser „Schlichtheit“ hebt es sich „von sich selbst“, d. i. vom Naturhaften aus gesehen gar nicht als „ungerade“ Modalität von der des einfachen Da-Seins ab: Vgl. außer Met. *Δ* 5 noch die sehr prägnante Äußerung des Aristoteles in *Λ* 7, 1072 b 11—13: *τὸ γὰρ ἀναγκαῖον τοσαυταχῶς, τὸ μὲν βίᾳ ὅτι παρὰ τὴν ὁρμὴν* (2), *τὸ δὲ οὗ οὐκ ἄνευ τὸ εὖ* (1), *τὸ δὲ μὴ ἐνδεχόμενον ἄλλως ἀλλ' ἁπλῶς* (3).

2) Bei Hegel ist der Gedanke des „dialektischen Prozesses“ ein historisch-zeitlicher. Die Zeitdeutung im naturphilosophischen Teil der „Encyclopädie“ (II, 1 A b, §§ 257—59) ist dagegen wesentlich Reproduktion der aristotelischen Doktrin. (Vgl. Heidegger, Sein und Zeit, § 82 a; Verf., Mathemat. Existenz, S. 668.)

3) Zu vergleichen ferner die grundlegende Unterscheidung zwischen *τὸ ἐνδεχόμενον καὶ ἄλλως ἔχειν* und seinem Gegenteil, wozu das *ἀεὶ* (*ἐξ ἀνάγκης*) *ὄν*,

Auf die „modalen“ Unterschiede von naturhafter und historischer Zeitlichkeit ist hier nicht näher einzugehen. Das Gesagte genügt immerhin, um die Rolle der sog. „logischen“ Modalität bei der Analyse des Wesens der Zeitlichkeit zu kennzeichnen. Hinzugefügt sei nur, daß auch die Daseins- und Zeitanalyse Heideggers an entscheidender Stelle vom Begriff des *modus obliquus* „Möglichkeit“ Gebrauch macht:

„Als modale Kategorie der Vorhandenheit bedeutet Möglichkeit das noch nicht Wirkliche und das nicht jemals Notwendige. Sie charakterisiert das nur Mögliche. Sie ist ontologisch niedriger als Wirklichkeit und Notwendigkeit. Die Möglichkeit als Existenzial dagegen ist die ursprünglichste und letzte positive ontolologische Bestimmung des Daseins“ [1]).

Man könnte vielleicht überhaupt den Grundcharakter der Heideggerschen Ontologie im Vergleich zur aristotelischen durch die ähnliche und doch unterschiedene Rolle am kürzesten kennzeichnen, die die Modalitäten Möglichkeit und Wirklichkeit jedesmal spielen. Bei Aristoteles ist zwar auch der Dynamis-Begriff der eigentlich neue und vorwärtstreibende gegenüber den in ihren Elementen älteren Begriffen der Energie (*ἔργον*) und Entelechie (*τέλος* und *ἔχειν*) [2]). Aber jene Wirklichkeits-Begriffe sind bei Aristoteles die das eigentliche und dominierende Sein kennzeichnenden; das *δυνάμει ὄν* ist zwar nicht mehr „nicht seiend“, aber es haftet ihm doch noch etwas vom Nichtseienden an: das, was sein kann, kann auch nicht sein [3]). Für Heidegger ist aber das Möglichsein (Seinkönnen)

---

aber auch das *γεγονός* gehört, und die Beziehung des letzteren zur *προαίρεσις* und zur Zukunft in Buch VI der Nikomachischen Ethik, vgl. z. B. Z. 2, 1139 b 5—9: *οὐκ ἔστι δὲ προαιρετὸν οὐδὲν γεγονός ... οὐ δὲ γὰρ βουλεύεται περὶ τοῦ γεγονότος, ἀλλὰ περὶ τοῦ ἐσομένου καὶ ἐνδεχομένου, τὸ δὲ γεγονὸς οὐκ ἐνδέχεται μὴ γενέσθαι* (und natürlich ebensowenig das *ἀεὶ ὄν*).

1) Sein und Zeit I, p. 143—144. Sperrung des letzten Satzes von mir.

2) Um Mißverständnis zu vermeiden: Es handelt sich nicht um die Worte, von denen *δύναμις* alt ist, *ἐνέργεια* und *ἐντελέχεια* aber Neubildungen sind, sondern um die in ihnen verkörperten ontologischen Gedanken. Da ist nun das als reines *ἐνεργεῖν* bezeichnete Sein nichts anderes als das alte selbstgenügsame, „ständig anwesende“ (Heidegger) Sein des Parmenides; daß aber das *δυνάμει ὄν* ein *ὄν* ist und kein *μὴ ὄν*, daß also der „oblique“ Seinsmodus der Möglichkeit dann gerade der „Wirklichkeit“ sozusagen „ebenbürtig“ ist — wenn freilich noch die „Wirklichkeit“ den ersten Rang behält —, das ist selbst Platon gegenüber entscheidend neu und ermöglicht u. a. erst die gesamte positive Lehre von der „Bewegtheit“ (*κίνησις*).

3) Met. Λ 6, 1071 b 19: *ἐνδέχεται γὰρ τὸ δυνάμει ὂν μὴ εἶναι* cf. Θ 3 (1047 a 35—37); Θ 8 passim.

eindeutig das Primäre, das was den eigentlichen S i n n des Seins und Daseins (der „Existenz") ausmacht. Damit hat sich der Dynamis-Gedanke erst völlig durchgesetzt und hat den „Eleatismus" erst völlig überwunden. Der innere Zusammenhang der „hermeneutischen" Zeitanalyse mit diesem Wandel des modalen Schemas ist offenbar: die „gewesende Zukunft", die Einheit der *modi obliqui temporales,* ist die entscheidende Zeit-„E k s t a s e" — auch dieser Terminus *ἔκ-στασις* soll (ganz im Gegensatz zu seinem Gebrauch bei P l o t i n) das „Dynamische" entgegen dem Statischen (*στάσις*), dem Unbewegten des *ἀεὶ ὄν* andeuten.

Das Gesagte scheint von dem Thema Mathematik und Zeit weit abzuführen. Aber das Mathematische kommt sofort wieder in Sicht, wenn man die ausschlaggebende Bedeutung der Modalität, insbesondere wieder der „obliquen" Möglichkeit, für die ontologische Charakteristik des U n e n d l i c h e n ins Auge faßt. Das *ἄπειρον* ist, wie A r i s t o t e l e s in heute noch vorbildlichen Analysen zeigte, ein *δυνάμει ὄν* und zwar in einer besonderen Modifikation, die es auch schon bei A r i s t o t e l e s in expliziter Weise mit der Zeit verknüpft [1]). Es verhält sich nicht wie ein Stoff zu einer (getrennten) Form (das Erz zur Bildsäule), sondern *ὡς ἡ ἡμέρα καὶ ὁ ἀγών*, wie der Tag und das (olympische) Spiel, das wegen seiner regelmäßigen Wiederkehr den Griechen als Z e i t m e s s e r diente. Es ist gekennzeichnet als *τὸ ἐν τῷ γίγνεσθαι τὸ εἶναι ἔχον* (Simplicius) — es ist durch das „immer anders und anders Werden" (*τῷ ἀεὶ ἄλλο καὶ ἄλλο γίγνεσθαι*) —, als das niemals Aufhörende (*μηδέποτε ὑπόλειπον*), als das *ἀεὶ πάλιν καὶ πάλιν*, das immer Wiederkehrende. Wie an anderer Stelle gezeigt wurde, ist diese Auffassung des zeitlichen Ursprungs und Seinssinns des *ἄπειρον* allgemeingriechisch.

Der Grund, weshalb Z a h l u n d Z e i t zusammengehören, liegt nun hier: Die u n e n d l i c h e Zahlreihe ist — eben als u n e n d l i c h e — durch die Potentialität und damit durch „Zukünftigkeit" bestimmt. Es ist wieder der eigentümliche Charakter der *„obliquitas"* entscheidend. Wenn C a s s i r e r [1]) sagt, die einzige „Zeitlichkeit", die in mathematischen Zusammenhängen in Frage käme, sei das „allgemeine Reihenprinzip", das „allgemeine Schema der ‚Ordnung in der Folge' (*‚order in progression'* nach W. H a m i l t o n)", so ist das vielleicht richtig für e n d l i c h e Folgen, für die es charakteristisch ist, daß ihre Glieder v e r t a u s c h b a r sind und zwar auch willkürlich,

1) Für die genaueren Belege für das Folgende s. „Mathem. Existenz", S. 641 ff.
2) l. c. S. 470.

rein kombinatorisch, ohne „Gesetz". Aber nicht mehr für endlose. Schon Kant hat in der „Antithetik der reinen Vernunft" die Unendlichkeit des Raumes (und der „Reihe" überhaupt) auf die der Zeit zurückgeführt[1]: „Die Zeit ist an sich selbst eine Reihe (und die formale Bedingung aller Reihen)[2]. ....Was aber den Raum betrifft, so ist in ihm an sich selbst kein Unterschied des Progressus vom Regressus, weil er ein Aggregat, aber keine Reihe ausmacht, in dem seine Teile insgesamt zugleich sind. .... Allein die Synthesis der mannigfaltigen Teile des Raumes, wodurch wir ihn apprehendieren, ist doch sukzessiv, geschieht also in der Zeit und enthält eine Reihe. ... In Ansehung der Begrenzung ist also der Fortgang im Raum auch ein Regressus, und die transzendentale Idee der absoluten Totalität der Synthesis in der Reihe der Bedingungen trifft auch den Raum ..."

Dies könnte man nicht nur, sondern dies muß man auf alle anderen Fälle von Unendlichkeiten übertragen. Denn „Unendlichkeit" ist näher expliziert immer unendliche Perspektive, endloser Horizont, unbegrenztes „Und so weiter". Allen diesen Phänomenen aber ist (nach grundlegenden Analysen Husserls, die sachlich durchaus zu den aristotelischen stimmen) gemeinsam das Grundphänomen „Ich kann immer wieder", diejenige *δύναμις*, die sich auf das „*πάλιν καὶ πάλιν*" bezieht. „Ich kann immer wieder von neuem", darin liegt: „Ich werde immer wieder können", und das besagt: Die innige Einheit von Möglichkeit und Zukunft. Jede Unendlichkeit ist also als solche den *modi obliqui* „logischer" und zeitlicher Art zugleich und in einem verhaftet.

Freilich darf man nicht aus dem Auge verlieren, welche „Zeit" gemeint ist. Man muß streng festhalten, daß es sich um die ursprüngliche Zeitlichkeit, die „Zeitigung" der Zeit selbst handelt. Seit dem Zusammenbruch des Millschen Empirismus und seiner Theorie der Mathematik ist es eine Art *communis opinio*, daß die allgemeine Idee der Reihe und der Ordnungszahl wie von vielem anderen so auch von dem „sinnlich-anschaulichen", „psychologisch-anthropologischen" Element der Zeit zu abstrahieren habe. Aber diese *communis opinio* gründet sich auf einen naiven (wie Heidegger sagt: „vulgären") Zeitbegriff. Zumeist wird kaum die „innere" psychische Zeit (die Erlebniszeit) von der „äußeren" Weltzeit, „in"

1) Kritik der reinen Vernunft 1. Aufl. S. 412, 2. Aufl. S. 348 f.

2) Von mir gesperrt. Man sieht, wie unkantisch die im Text erwähnte W. Hamiltonsche Meinung ist, der Cassirer sich anschließt.

der „der Mensch“ lebt, unterschieden; niemals wird über die „Erlebniszeit“ als fertiges Phänomen hinaus gefragt; im besten Fall wird noch etwas über ihre Rätselhaftigkeit geklagt — schon seit Augustinus. Von dieser allgemeinen kaum mehr als fragwürdig empfundenen Meinung sind selbst manche Äußerungen Cassirers nicht ganz frei: wenn es bei ihm heißt (l. c., s. o. S. 532): „Das mathematische Tun ist ein rein intellektuelles Tun, das nicht in der Zeit verläuft, sondern ein Grundmoment, auf dem die Zeit selbst beruht, das das Moment der „Reihung“ erst ermöglicht“, so ist dem (vielleicht bis auf das Prädikat „rein intellektuell“, das nicht unbedenklich erscheint) völlig beizustimmen — sofern „Zeit“ eben die fertig konstituierte psychische oder gar physische Zeit bedeutet. In der Tat „verläuft“ das mathematische Urphänomen des unendlichen Horizonts nicht „in der Zeit“ (welcher?!), die räumlich-kinematische Metapher schließt ein klares ὕστερον πρότερον ein. Ebenso ist es durchaus berechtigt, nach dem „Grundmoment“ zu fragen, das „Zeit“ und „Reihung“ allererst ermöglicht; denn das ist doch nichts anderes als nach dem Ursprung der konstituierten Phänomene „Zeit“ und „Reihe“ (Zahl) fragen. Aber dieses Grundmoment ist eben der „unendliche Horizont“ bzw. sein Fundament in Möglichkeit und Zukünftigkeit.

Das „Seinkönnen“ des Daseins und seine „gewesende Zukunft“, sofern es „historisch“ ist, seine schlichte Notwendigkeit (Getragenheit) und seine „wiederkünftige Gegenwart“, sofern es „naturhaft“ ist, — das sind die Wurzeln, aus denen Zahlenreihe und konstituierte Zeit zugleich entspringen. Das hier gemeinte „Dasein“ ist freilich nicht der Mensch „in“ der Zeit (der ‚Weltzeit‘ der Astronomen und historiographischen Chronologen, der ‚Erlebniszeit‘ der experimentellen Psychologen), sondern der „Mensch“, sofern er die Zeit selbst zeitigt, — indirekt schließlich auch jene „Weltzeit“ und „Erlebniszeit“. Der hier verteidigte „Anthropologismus“ ist keine versteckte Erneuerung irgendeines empirischen „Psychologismus“. Diejenige „Endlichkeit“ des Menschen, die Mathematik überhaupt erst sinnvoll macht, ist nicht ein objektives oder irgendwie objektiv darzustellendes „Faktum“. Sie liegt „vor“ der Möglichkeit einer Konstitution von Objektivität überhaupt; denn sie ist eigentlich nur ein zusammengefaßter Ausdruck für die „ekstatische“ („oblique“) Zeitlichkeit, in der der „Mensch“ nicht „lebt“, sondern die das menschliche Dasein selbst „ist“, die seine Seinsweise selbst ursprünglich ausmacht. Wenn Cassirer hier den Begriff der „reinen Subjektivität“ des idealen Mathematikers und der reinen „Objektivität“ des Mathematischen selbst einwirft, so ist darauf zu erwidern: ein „reines“ Subjekt (von dem man *ex definitione* nicht weiß, ob es endlich ist oder nicht — wobei auch zu fragen wäre: was heißt das: ein Subjekt ist „nicht endlich“?) kann gar nicht sinnvoll Mathematik treiben, sofern Mathematik Beherrschung des Unendlichen bedeutet. Man kann der Deutlichkeit halber zufügen „mit endlichen Mitteln“: im Grunde ist dies freilich überflüssig! Denn der im Begriff der „Beherrschung“ liegende Kampf-Sinn ist nur möglich unter der Voraussetzung einer primären Spannung, und die hat zum Un-Endlichen eben wesentlich das Endliche. Noch mehr: die Konstitution des *ἄπειρον δυνάμει ὄν* selbst weist zurück auf Seinkönnen und Zukünftigkeit; der Begriff des Unendlichen selbst und „allein“-genommen — ganz abgesehen von seiner „Beherrschung“ — entspringt seinem ursprünglichen Sinn nach denjenigen Strukturen des Seins, die die Endlichkeit menschlichen Daseins kennzeichnen.

Man muß sich von der *communis opinio* völlig freimachen, das Mathematische sei etwas „Objektives“, Gegenstandsartiges, etwa ein „objektives unendliches Relationssystem“: „Objektive Unendlichkeit“ ist eine *contradictio in adjecto*!

Mathematik ist allerdings *a priori*, über die Zufälligkeiten der „ontischen“ Fakta erhaben: aber die „Faktizität“ des Daseins ist selbst kein Faktum, sondern eine apriorische prinzipiell-ontologische Struktur [1]). „Sterblichkeit“ ist eine „reine“ Struktur dieser „Faktizität“; der „Tod“ in dem hier relevanten Sinn ist kein „Faktum“. Er kommt so auch dem „immerseienden Dämon“ [2]) zu. Nur deshalb kann dieser „mathematisieren“; weil er wie der Mensch ein „*Ζῶον ἐν τῷ γίγεσθαι τὸ εἶναι ἔχον*“ (Simplicius) ist, und deshalb des Unendlichen fähig [3]).

---

1) Streng genommen eine „hyperontologische“, sowohl „ontologische“ wie „parontologische“ (paraexistenziale). Doch kann hier darauf nicht näher eingegangen werden.

2) Vgl. dazu meinen Aufsatz im „Philos. Anzeiger“, Jahrg. III, S. 380 ff. und auch schon „Math. Existenz“, S. 751.

3) Husserls „reines Ich“ ist in demselben Sinn „sterblich“ wie der „Dämon“; das „reine Bewußtsein“, sofern es in einem konkreten „Exemplar“ gedacht würde, wäre nichts anderes als solch ein Dämon; es ist gewissermaßen die Idee (das Eidos) eines solchen Dämons.

Und schließlich ist die ganze Philosophie Kants, so wie sie historisch vorliegt, auf der Grundthese der Endlichkeit des philosophierenden Subjekts begründet. Insbesondere die Antinomien gewinnen erst von hier aus einen Sinn. Trat uns nicht gerade dort die Verknüpfung von Unendlichkeit und

Der Hinweis auf Husserls „reines Ich" und Kants „transzendentale Apperzeption" ist deshalb nicht ausschlaggebend. Denn sie haben höchstens (besonders bei Kant ist das sehr zweifelhaft!) die „schlechte Unendlichkeit" eines „dämonischen Wesens". Außerdem ist diejenige Mathematik, die wir allein kennen, keine „dämonische", sondern eine durchaus „menschliche"[1]). Gerade wer vom Faktum menschlicher Wissenschaft ausgeht, dürfte das nicht außer acht lassen. Gewiß bedeutet die Mathematik, wie die Griechen sie zuerst entworfen und wie wir sie heute nach Leibnizens großem Durchbruch zur „*mathesis universalis*" besitzen, eine „Befreiung" von mancherlei primitiven Bindungen. Aber niemals kann sie dazu dienen, daß der Mensch über sich selbst hinausgeht, daß er sich den unverbrüchlichen „reinen" Strukturen entwindet, die sein Wesen als Mensch ausmachen. Noch mehr: Wenn man schon naturnahe Primitivität und die Höhe historischen (d. i. selbstbewußten) Daseins einander gegenüberstellt, so bedeutet der „Fortschritt" zur Hochkultur nicht Überwindung des Endlichen, sondern viel eher Ver-Endlichung, klares Heraustreten der endlichen Züge im Antlitz des Menschen. Diese an sich klare Entwicklungslinie wird freilich durch „Archaismen" getrübt, die sie vielfach durchkreuzen: Der hier wichtigste ist die Illusion einer völlig „reinen", von allen „anthropomorphen" Bindungen gelösten „unendlichen" *Ratio* — eine Illusion, deren „transzendentalen Schein" Kant erkannte und zu zerstören trachtete. Insofern ist die Idee der „reinen Wissenschaft" von gefährlicher Zweideutigkeit: sie tendiert auf Selbst-Bewußtheit, sich selbst

Zeit entgegen? Und kann man die Kantsche These, die Zahlenreihe sei das Schema der Zeitreihe, leugnen, ohne seine ganze Philosophie zu erschüttern? —

Über Heideggers Kantbuch, das ja die Idee der Endlichkeit und Zeitlichkeit zum Fundament der Kantschen Philosophie macht, ist hier nicht zu reden. Die These der Endlichkeit scheint mir bewiesen, selbst wenn man die zweite These als historische Interpretation nicht in vollem Umfang anerkennen könnte.

1) Das gilt insbesondere auch für die abendländische moderne Mathematik. Allein der ausgedehnte Gebrauch, der dort (im Unterschied zur Antike!) von abkürzenden Symbolsystemen gemacht wird, hat nur dann einen Sinn, wenn das Maß des übersehbaren Endlichen unter einer bestimmten (*de facto* überaus niedrigen) Schranke liegt. Man sieht, es handelt sich dabei durchaus um die „immanente Leistung" der mathematischen „Methode" und nicht um eine „willkürliche" Hineintragung sachfremder subjektiv-psychologischer Gesichtspunkte oder um eine „künstliche" anthropologische Interpretation. Man vgl. auch den in diesem Zusammenhang schon bei früheren Gelegenheiten öfters zitierten Hilbertschen Aufsatz „Axiomatisches Denken" (Math. Annalen, Bd. 78); ferner: Verf., Mathemat. Existenz, S. 772 ff.

rechtfertigendes Methodenbewußtsein, aber auch auf Losreißung vom Grundsinn aller *μέθοδος* als eines Weges: Die Idee des Weges selbst enthält die Endlichkeit; „im Unendlichen" wären alle „Orte" zugleich; man bedürfte nirgendwohin eines Weges. Gerade weil der „logische Idealismus" immer wieder auf die „Eigenart der Methode" reflektiert, sollte er dieser Grunddefinition der Methode als eines Weges eingedenk bleiben. Und nichts anderes als die wesenhafte Endlichkeit dieser reinen „Methode" ist es, was die abstraktesten und „freiesten" Wissenschaften der *mathesis universalis* primär und prinzipiell durch den Begriff der Endlichkeit bestimmt sein läßt.

Nachträgliche Bemerkung:

Über F. Brentanos Gebrauch der Termini „*modo recto*" und „*modo obliquo*". (Zu S. 539, Anm. 1.)

Brentano hat in seiner „Psychologie" (neu herausgegeben von O. Kraus, Leipzig 1924—28, in bisher 3 Bänden) vielfach die Ausdrücke „*modo recto*" und „*modo obliquo*" verwendet. (Vgl. bes. Bd. II, Anhang I—IV; Bd. III, 1. Abschnitt, 5. Kap.) Indessen meint er damit etwas wesentlich anderes, als oben im Text damit bezeichnet wurde. Bei Brentano handelt es sich durchgängig um Modi des Vorstellens oder Empfindens, nicht um logische Modalitäten, und zwar ist das Vorstellen *modo recto* das direkte oder primäre, dasjenige *modo obliquo* das indirekte oder sekundäre (das *ἐν παρέργῳ* geschieht, vgl. Aristoteles, Metaphysik *Λ* 9, 1074 b 35—36). „Denke ich einen Blumenliebenden", sagt Brentano (l. c. II, 134), „so ist der Blumenliebende das Objekt, das ich *in recto* denke, die Blumen aber sind das, was ich *in obliquo* denke. Das ist aber ähnlich dem Fall, wo ich einen denke, der größer ist als Cajus. Der Größere wird *in recto*, Cajus *in obliquo* gedacht." So vielfach die Weisen des indirekten „obliquen" Vorstellens bei Brentano sind, — das angeführte Beispiel gibt davon nur einen schwachen Begriff — so handelt es sich dabei doch nie um Unterschiede wie Wirklichkeit und Möglichkeit u. dgl. oder jedenfalls nie um das Spezifische dieser modalen logischen Differenzen. Alles, was in einer gewissen Beziehung zu einem direkt (*modo recto*) Vorgestellten steht, wird nach Brentano *modo obliquo* vorgestellt (l. c. III, 42).

Brentano kennt auch „*modi obliqui temporales*" in gewissem Sinn. Vgl. l. c. III, 39: „... so werde ich nunmehr hinzufügen, daß ich mich selbst in *modo recto* mit dem *modus praesens* vorstelle, aber als etwas, was außerdem etwas anderes *in modo obliquo* und von diesem das eine zwar ebenfalls mit dem *modus praesens*, ander(e)s aber kontinuierlich sich unterscheidend mit einer Reihe von *modis praeteritis* vorstellt. Alles zusammengefaßt werde ich sagen, ich erfasse mich *in modo recto* als gegenwärtig und gleichzeitig bzw. später und in verschiedenem Maße später seiend als gewisse äußere Objekte, die mir *modo obliquo* und in verschiedenen *modis praeteritis* gegeben sind." Die Vergangenheit ist also auch bei Brentano bedingt durch ein Vorstellen *modo obliquo*, obwohl doch noch, wie vorstehende Stelle zeigt, der *modus praeteritus* vom *modus obliquus* unterschieden und auch nicht einfach als besonderer Fall des letzteren aufgefaßt wird. Mir scheint daher O. Kraus (Archiv f. d. ges. Psychologie, Bd. 75 [1930], S. 2) doch etwas zu weit zu gehen, wenn er von der „Darstellung der temporalen Modi als *modi obliqui*" spricht. Beistimmen kann ich ihm dagegen, wenn er („Franz Brentano", München 1919, S. 40) sagt, „daß die (Brentanosche) Lehre von den temporalen Modis im wesentlichen nichts anderes ist als eine Anwendung der Theorie vom *modus rectus* und *modus obliquus*". — Wie dem aber auch sei, die oben im Text vertretene Auffassung enthält den Brentanoschen Grundgedanken der Unterscheidung des direkten und indirekten Vorstellens nicht, die Ausdrücke „*modus rectus* — *obliquus*" werden primär auf die logischen Modalitäten angewandt und dann erst *per analogiam* auf die temporalen Modi; sie sind ferner nicht von Brentano übernommen — auf den Brentanoschen Sprachgebrauch bin ich erst nachträglich wieder aufmerksam geworden — sondern der bekannten Terminologie der lateinischen Grammatik entlehnt, woher sie Brentano wohl auch bezogen haben dürfte.