vander
LOUVAIN

LES CATEGORIES MULTIPLICATIVES

d'après le cours de questions
spéciales de mathématique de

J. BENABOU

Rapport n° 27, juillet 1972.
Séminaire de mathématique pure.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUE PURE ET APPLIQUÉE
UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Bâtiment Sc. I, Avenue Baudouin I^{er}, 1348 Louvain - La - Neuve

Le texte ci-après a été rédigé par Francis BORCEUX, Jacqueline DEWULF et Marguerite ZANDARIN à partir de notes prises au cours oral du Professeur BENABOU. Ce texte n'a pas été relu par le Professeur BENABOU avant sa publication.

TABLE DES MATIERES.

CHAPITRE 4 : LES $\mathcal{U}$-CATEGORIES.

CHAPITRE 5 : EXTENSIONS DE KAN.

CHAPITRE 1 :

Les structures multiplicatives.

§ 1 : Les catégories multiplicatives.

<u>Définition 1</u>

Une catégorie multiplicative est la donnée d'un sextuplet $(\mathcal{U}, \otimes, I, a, l, r)$ *où*

(1) $\mathcal{U}$ *est une catégorie*

(2) $\otimes : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ *est un bifoncteur*

(3) I *est un objet de* $\mathcal{U}$

(4) a *est une équivalence naturelle à trois variables*

$$a_{A,\ B,\ C} : (A \otimes B) \otimes C \xrightarrow{\sim} A \otimes (B \otimes C)$$

(5) l *est une équivalence naturelle*

$$l_A : I \otimes A \xrightarrow{\sim} A$$

(6) r *est une équivalence naturelle*

$$r_A : A \otimes I \xrightarrow{\sim} A$$

(7) *axiome d'associativité* (CM1) :
les diagrammes du type suivant commutent

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[rr, "a"] \arrow[d, "a \otimes 1"] & & (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[dd, "a"] \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[d, "a"] & & \\
A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[rr, "1 \otimes a"'] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D))
\end{tikzcd}$$

(8) *axiomes des neutres* :
les diagrammes des types suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes A) \otimes B \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "1 \otimes 1"'] & I \otimes (A \otimes B) \arrow[d, "1"] \\
& A \otimes B
\end{tikzcd} \qquad \text{(CM2)}$$

$$\text{(CM3)} \qquad \begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes I \arrow[d, "a"] \arrow[dr, "r"] & \\
A \otimes (B \otimes I) \arrow[r, "1 \otimes r"'] & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

Il est à noter que l'axiome d'associativité (CM1) permet, par les procédés combinatoires habituels, de démontrer que pour tout entier n on a une associativité générale d'ordre n.

La notion de catégorie multiplicative peut s'enrichir du caractère symétrique ou du caractère fermé :

<u>Définition 2</u>

Une catégorie multiplicative symétrique est un sextuplet ($\mathcal{U}$, $\otimes$, I, a, l, r, s) *où*

(1) ($\mathcal{U}$, $\otimes$, I, a, l, r) *est une catégorie multiplicative*

(2) s *est une équivalence naturelle à deux variables*

$$s_{A,\ B} : A \otimes B \xrightarrow{\sim} B \otimes A$$

(3) *les axiomes de cohérence exprimés par les commutativités des diagrammes des types suivants sont vérifiés :*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes B) \otimes C \arrow[rr, "s \otimes 1"] \arrow[d, "a"'] & & (B \otimes A) \otimes C \arrow[d, "a"] \\
A \otimes (B \otimes C) \arrow[d, "s"'] & & B \otimes (A \otimes C) \arrow[d, "1 \otimes s"] \\
(B \otimes C) \otimes A \arrow[rr, "a"'] & & B \otimes (C \otimes A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, "s"] \arrow[dr, equal] & B \otimes A \arrow[d, "s"] \\
& A \otimes B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes I \arrow[d, "s"'] \arrow[dr, "r"] & \\
I \otimes A \arrow[r, "l"'] & A
\end{tikzcd}$$

En particulier, le dernier axiome exprime que r est entièrement déterminé par l et s.

Définition 3

Une catégorie multiplicative $(\mathcal{U}, \otimes, I, a, l, r)$ *est dite close si chaque foncteur*

$$A \otimes - : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$$

admet un adjoint à droite que l'on note

$$\mathcal{U}(A, -) : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$$

Citons quelques exemples de catégories multiplicatives :

(1) le produit cartésien induit sur la catégorie des ensembles une structure de catégorie multiplicative symétrique avec le singleton pour unité ; cette structure multiplicative est même close, l'adjoint de $(A \times -)$ étant le foncteur $(-)^A$.

(2) l'union disjointe induit sur la catégorie des ensembles une structure de catégorie multiplicative symétrique avec l'ensemble vide comme unité.

(3) le produit tensoriel induit sur la catégorie des groupes abéliens une structure de catégorie multiplicative symétrique close ayant le groupe $\mathbb{Z}$ des entiers comme unité.

(4) l'opération "somme" induit sur la catégorie des groupes abéliens une structure de catégorie multiplicative symétrique admettant le groupe nul comme unité.

(5) les exemples 3 et 4 se généralisent au cas des modules sur un anneau commutatif unitaire.

(6) Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, notons $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ = Nat ($\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$). La composition des foncteurs induit sur $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ une structure de catégorie multiplicative admettant le foncteur identité comme unité ; en outre les flèches a, l, r sont les transformations naturelles identiques.

(7) une catégorie multiplicative discrète est exactement un monoïde.

(8) une catégorie multiplicative discrète close est exactement un groupe ; l'inverse de l'objet A est l'objet $\mathcal{U}(A, I)$.

(9) une catégorie multiplicative close ordonnée (c'est-à-dire : $\forall A\ \forall B$ Hom $(A, B) = \{*\}$) est exactement un groupe ordonné.

§ 2 : Les morphismes de catégories multiplicatives.

Définition 4

Soient $\underline{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}, \otimes, I, a, l, r)$ *et* $\underline{\mathcal{U}}' = (\mathcal{U}', \otimes', I', a', l', r')$ *deux catégories multiplicatives. Un morphisme de catégories multiplicatives de* $\underline{\mathcal{U}}$ *vers* $\underline{\mathcal{U}}'$ *est un triplet* $(F, \phi, \phi_\circ)$ *où*

(1) $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}'$ *est un foncteur*

(2) ϕ *est une transformation naturelle à deux variables*

$$\phi_{A,B} : FA \otimes' FB \longrightarrow F(A \otimes B)$$

(3) $\phi_\circ$ *est un morphisme de* $\mathcal{U}'$.

$$\phi_\circ : I' \longrightarrow FI$$

(4) *ces données vérifient des axiomes de compatibilité s'exprimant par la commutativité de diagrammes des types suivants*

$$\begin{tikzcd}
(FA \otimes' FB) \otimes' FC \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "\phi \otimes' 1"'] & FA \otimes' (FB \otimes' FC) \arrow[d, "1 \otimes' \phi"] \\
F(A \otimes B) \otimes' FC \arrow[d, "\phi"'] & FA \otimes' F(B \otimes C) \arrow[d, "\phi"] \\
F((A \otimes B) \otimes C) \arrow[r, "Fa"'] & F(A \otimes (B \otimes C))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I' \otimes' FA \arrow[r, "\phi_\circ \otimes' 1"] \arrow[d, "l'"'] & FI \otimes' FA \arrow[d, "\phi"] \\
FA & F(I \otimes A) \arrow[l, "Fl"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FA \otimes' I' \arrow[r, "1 \otimes' \phi_\circ"] \arrow[d, "r'"'] & FA \otimes' FI \arrow[d, "\phi"] \\
FA & F(A \otimes I) \arrow[l, "Fr"]
\end{tikzcd}$$

Nous dirons que le morphisme (F, ϕ, ϕ_o) est

+) un homomorphisme, si ϕ est une équivalence naturelle et ϕ_o un isomorphisme.

+) un isomorphisme, si ϕ et ϕ_o sont des identités.

Citons quelques exemples de morphismes de catégories multiplicatives

(1) Si $\underset{\sim}{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}, \otimes, I, a, 1, r)$ est une catégorie multiplicative, il existe un morphisme canonique de $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ vers la catégorie multiplicative des ensembles munie du produit cartésien.

$$F \equiv \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(I, -) : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

$$\phi_{AB} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(I, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(I, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(I, A \otimes B)$$

$$\phi_{AB}(f, g) = (f \otimes g) \circ 1_I^{-1}$$

$$\phi_o : \{*\} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(I, I)$$

$$\phi_o(*) = 1_I$$

(2) Si $\underset{\sim}{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}, \otimes, I, a, 1, r)$ est une catégorie multiplicative, il existe deux morphismes canoniques de $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ vers la catégorie multiplicative $\underset{\sim}{\mathcal{U}^{\mathcal{U}}}$.

$$F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}^{\mathcal{U}}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "a"'] & A \otimes - \arrow[d, "a \otimes -"] \\ B \arrow[r, squiggly] & B \otimes - \end{tikzcd}$$

$$\phi_{A,\,B} : A \otimes (B \otimes -) \longrightarrow (A \otimes B) \otimes -$$

$$\phi_{A,\,B}\,(C) = a^{-1}_{A,\,B,\,C}$$

$$\phi_\circ : 1_{\mathcal{V}} \longrightarrow I \otimes -$$

$$\phi_\circ\,(A) = l^{-1}_{A}$$

Le second morphisme canonique s'obtiendrait à partir de $FA = - \otimes A$. On remarquera que ces deux morphismes sont en fait des homomorphismes.

(3) Soit $(F, U, \varepsilon, \delta)$ une situation d'adjonction

$$\mathcal{A} \underset{U}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{X} \qquad\qquad F \dashv U\ .$$

Il lui est associé un morphisme canonique de $\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ vers $\underset{\sim}{\mathcal{X}}^{\mathcal{X}}$.

$$T : \mathcal{A}^{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{X}^{\mathcal{X}}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, Rightarrow, "\eta"'] & UGF \arrow[d, Rightarrow, "U\eta F"] \\
G' \arrow[r, rightsquigarrow] & UG'F
\end{tikzcd}$$

$$\tau_{G,\,G'} : (U\,GF) \circ (U\,G'F) \Longrightarrow U\,(GG')F$$

$$\tau_{G,\,G'} = U G \delta G' F$$

$$\tau_\circ : 1_{\mathcal{X}} \Longrightarrow U \circ 1_{\mathcal{A}} \circ F$$

$$\tau_\circ = \varepsilon .$$

§ 3 : Les comorphismes de catégories multiplicatives.

Définition 5

Soient $\underset{\sim}{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}, \otimes, I, a, l, r)$ *et* $\underset{\sim}{\mathcal{U}}' = (\mathcal{U}', \otimes', I', a', l', r')$ *deux catégories multiplicatives. Un comorphisme de catégories multiplicatives de* $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ *vers* $\underset{\sim}{\mathcal{U}}'$ *est un triplet* (F, ϕ, ϕ_o) *où*

(1) $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}'$ *est un foncteur*

(2) ϕ *est une transformation naturelle à deux variables*

$$\phi_{A,B} : F(A \otimes B) \longrightarrow FA \otimes' FB$$

(3) ϕ_o *est un morphisme de* $\mathcal{U}'$

$$\phi_o : FI \longrightarrow I'$$

(4) *ces données vérifient des axiomes de compatibilité s'exprimant par la commutativité des diagrammes des types suivants*

$$\begin{tikzcd}
F((A \otimes B) \otimes C) \arrow[rr, "Fa"] \arrow[d, "\phi"'] & & F(A \otimes (B \otimes C)) \arrow[d, "\phi"] \\
F(A \otimes B) \otimes' FC \arrow[d, "\phi \otimes' 1"'] & & FA \otimes' F(B \otimes C) \arrow[d, "1 \otimes' \phi"] \\
(FA \otimes' FB) \otimes' FC \arrow[rr, "a'"'] & & FA \otimes' (FB \otimes' FC)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FI \otimes' FA \arrow[rr, "\phi_0 \otimes 1"] & & I' \otimes' FA \arrow[d, "l'"] \\
F(I \otimes A) \arrow[u, "\phi"] \arrow[rr, "Fl"'] & & FA
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FA \otimes' FI \arrow[rr, "1 \otimes \phi_0"] & & FA \otimes' I' \arrow[d, "r'"] \\
F(A \otimes I) \arrow[u, "\phi"] \arrow[rr, "Fr"'] & & FA
\end{tikzcd}$$

Tout morphisme entre deux catégories multiplicatives fournit un comorphisme entre les catégories duales. La donnée d'un homomorphisme entre catégories multiplicatives est équivalente à la donnée d'un cohomorphisme entre ces mêmes catégories. Ces remarques montrent donc que l'étude des comorphismes de catégories multiplicatives se ramène à celle des morphismes de catégories multiplicatives.

Citons un exemple intéressant de comorphisme. Si $(F, U, \varepsilon, \delta)$ est une situation d'adjonction

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, shift right, "U"'] & \mathfrak{X} \arrow[l, shift right, "F"']
\end{tikzcd} \quad ; \qquad F \dashv U .$$

on en déduit un comorphisme de $\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$ vers $\mathfrak{A}^{\mathfrak{A}}$ de la manière suivante :

$$C : \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathfrak{A}^{\mathfrak{A}}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, squiggly] \arrow[d, Rightarrow, "\eta"'] & FGU \arrow[d, Rightarrow, "F\eta U"] \\
G' \arrow[r, squiggly] & FG'U
\end{tikzcd}$$

$\gamma_{G,\,G'} : F\,(GG')U \Longrightarrow (FGU) \circ (FG'U)$

$\gamma_{G,\,G'} = FG\,\varepsilon\,G'U$

$\gamma_\circ : F \circ 1_{\mathcal{X}} \circ U \Longrightarrow 1_{\mathcal{A}}$

$\gamma_\circ = \delta.$

Proposition 1

Soient F, U *deux foncteurs et* ε, δ *deux transformations naturelles*

$$\mathcal{A} \underset{U}{\overset{F}{\leftrightarrows}} \mathcal{X} \qquad \begin{array}{l} \varepsilon : 1_{\mathcal{X}} \Longrightarrow UF \\ \delta : FU \Longrightarrow 1_{\mathcal{A}} \end{array}$$

Les conditions suivantes sont équivalentes

(1) $(F, U, \varepsilon, \delta)$ *est une situation d'adjonction*

(2) $(T, \tau, \tau_\circ)$ *est un morphisme de catégories multiplicatives et* $(C, \gamma, \gamma_\circ)$ *un comorphisme de catégories multiplicatives*

($(T, \tau, \tau_\circ)$ et $(C, \gamma, \gamma_\circ)$ sont définis comme dans les exemples précédents).

CHAPITRE 2 :

Les monoïdes.

§ 1 : Monoïdes dans une catégorie multiplicative.

Définition 6

Soit $\underset{\sim}{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}, \otimes, I, a, l, r)$ *une catégorie multiplicative. Un monoïde de* $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ *est un triplet* (M, ε, μ) *tel que*

(1) M *est un objet de* $\mathcal{U}$

(2) $\varepsilon : I \longrightarrow M$ *est un morphisme de* $\mathcal{U}$

(3) $\mu : M \otimes M \longrightarrow M$ *est un morphisme de* $\mathcal{U}$

(4) *les diagrammes suivants commutent*

$$\begin{tikzcd}
I \otimes M \arrow[r, "\varepsilon \otimes 1"] \arrow[dr, "l"'] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] \\
& M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \otimes M \otimes M \arrow[r, "1 \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes 1"'] & M \otimes M \arrow[d, "\mu"] \\
M \otimes M \arrow[r, "\mu"'] & M
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M \otimes I \arrow[d, "1 \otimes e"'] \arrow[dr, "r"] & \\
M \otimes M \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

axiomes des neutres   axiome d'associativité.

Proposition 2

Soient $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ et $\underset{\sim}{\mathcal{U}}'$ deux catégories multiplicatives, $(F, \phi, \phi_o) : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}'$ un morphisme de catégories multiplicatives et (M, ε, μ) un monoïde de $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$. Le morphisme (F, ϕ, ϕ_o) transforme le monoïde (M, ε, μ) en un monoïde de $\underset{\sim}{\mathcal{U}}'$.

Le monoïde obtenu est

$$(FM, F\varepsilon \circ \phi_o, F\mu \circ \phi_{M, M})$$

$$I' \xrightarrow{\phi_o} FI \xrightarrow{F\varepsilon} FM$$

$$FM \otimes FM \xrightarrow{\phi_{M, M}} F(M \otimes M) \xrightarrow{F\mu} FM$$

Citons quelques exemples simples de monoïdes.

(1) un monoïde dans la catégorie multiplicative des ensembles munie du produit cartésien est un monoïde au sens habituel.

(2) un monoïde dans la catégorie multiplicative des groupes abéliens munie du produit tensoriel usuel est un anneau unitaire

(3) si $\mathcal{C}$ est une catégorie, un monoïde dans la catégorie multiplicative $\underset{\sim}{\mathcal{C}^{\mathcal{C}}}$ munie de la composition est un triple sur $\mathcal{C}$.

§ 2 : Les catégories internes.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie avec limites gauches finies et Ω un objet de $\mathscr{C}$. La catégorie $\mathscr{C}/_{O \times O}$ admet pour objets les couples (∂_0, ∂_1) de flèches de $\mathscr{C}$ de la forme suivante

$$F \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} O,$$

$\mathscr{C}/_{O \times O}$ se munit alors d'une structure multiplicative déduite du produit fibré dans $\mathscr{C}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & F \underset{O}{\times} F' \arrow[dl, "\overline{\partial'_0}"'] \arrow[dr, "\overline{\partial_1}"] & & \\
 & F \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & p.f. & F' \arrow[dl, "\partial'_0"'] \arrow[dr, "\partial'_1"] & \\
O & & O & & O
\end{tikzcd}$$

$$(\partial_0, \partial_1) \otimes (\partial'_0, \partial'_1) = (\partial_0 \circ \overline{\partial'_0}, \partial'_1 \circ \overline{\partial_1}).$$

l'unité étant le couple $(1_O, 1_O)$.

Un monoïde dans la catégorie multiplicative $\mathscr{C}/_{O \times O}$ est appelé "catégorie interne à $\mathscr{C}$". Un tel monoïde est donc un triple $((\partial_0, \partial_1), \varepsilon, \mu)$ tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
O \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varepsilon"'] \arrow[dr, equal] & F \arrow[d, "\partial_0"] \\
F \arrow[r, "\partial_1"'] & O
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \underset{O}{\times} F \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "p_2"'] & F \arrow[d, "\partial_0"] \\
F \arrow[r, "\partial_0"'] & O
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F \underset{O}{\times} F \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "p_1"'] & F \arrow[d, "\partial_1"] \\
F \arrow[r, "\mu"'] & O
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \underset{O}{\times} O \arrow[r, "1 \underset{O}{\times} \varepsilon"] \arrow[dr, "p_1"'] & F \underset{O}{\times} F \arrow[d, "\mu"] \\
 & F
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
O \underset{O}{\times} F \arrow[r, "\varepsilon \underset{O}{\times} 1"] \arrow[dr, "p_2"'] & F \underset{O}{\times} F \arrow[d, "\mu"] \\
 & F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \underset{O}{\times} F \underset{O}{\times} F \arrow[r, "1 \underset{O}{\times} \mu"] \arrow[d, "\mu \underset{O}{\times} 1"'] & F \underset{O}{\times} F \arrow[d, "\mu"] \\
F \underset{O}{\times} F \arrow[r, "\mu"'] & F
\end{tikzcd}$$

Prenons maintenant pour $\mathcal{C}$ la catégorie des ensembles et interprétons

1) O comme étant un ensemble d'objets,
2) F comme étant un ensemble de flèches,
3) ∂_0 comme étant l'application "source",
4) ∂_1 comme étant l'application "but",
5) ε comme étant l'application "flèche neutre",
6) μ comme étant la loi de composition des flèches,

nous obtenons exactement la définition d'une petite catégorie. Cet exemple justifie donc la dénomination "catégorie interne à $\mathcal{C}$ ".

Si l'on fait $\mathcal{C}$ = Cat, on retrouve la notion de 2-catégorie ; si l'on fait $\mathcal{C}$ = Top, on retrouve celle de catégorie topologique.

§ 3 : Le monoïde universel $(\Delta, 1)$.

Considérons la catégorie Δ dont

1) les objets sont les ensembles ordonnés

$$[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

2) les morphismes $f : [n] \longrightarrow [p]$ sont les applications croissantes.

On sait que tout morphisme de Δ se décompose de manière unique en une suite de morphismes des formes suivantes

$$\varepsilon_q^i : [q] \longrightarrow [q+1] \quad ; \quad 0 \leqslant i \leqslant q$$

$$t \rightsquigarrow \begin{cases} t \text{ si } t \leqslant i-1 \\ t+1 \text{ si } t \geqslant i \end{cases}$$

$$\eta_q^i : [q] \longrightarrow [q-1] \quad ; \quad 0 \leqslant i \leqslant q-1$$

$$t \rightsquigarrow \begin{cases} t \text{ si } t \leqslant i \\ t-1 \text{ si } t \geqslant i+1 \end{cases}$$

Δ se munit d'une structure multiplicative de la façon suivante :

$$[n] \otimes [p] = [n+p],$$

l'unité étant l'objet $[0] = \phi$.

L'objet [1] de la catégorie multiplicative Δ se munit d'une structure de monoïde ; en effet, [0] est un objet initial de Δ et [1] est objet final, d'où une unique flèche de la forme $e : [0] \longrightarrow [1]$ et une unique flèche de la forme

$$m : [1] \otimes [1] \longrightarrow [1]$$

faisant trivialement de ([1], e, m) un monoïde de Δ, noté plus simplement $\underset{\sim}{1}$.

Théorème 1

Soient $\underset{\sim}{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}, \otimes, I, a, l, r)$ une catégorie multiplicative et $\underset{\sim}{M} = (M, \varepsilon, \mu)$ un monoïde de $\mathcal{U}$.
Il existe un unique homomorphisme de catégories multiplicatives

$$(F, \phi, \phi_0) = \underset{\sim}{\Delta} \longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{U}}$$

transformant le monoïde $\underset{\sim}{1}$ en le monoïde $\underset{\sim}{M}$.

Ce théorème exhibe donc le caractère universel du couple $(\Delta, \underset{\sim}{1})$.

Définissons tout d'abord le foncteur F sur les objets :

$$F([n]) = M \otimes \ldots \otimes M \qquad \text{(n foncteurs).}$$

En vertu d'une remarque précédente, pour définir F sur les flèches, il suffit de le définir sur les flèches de la forme ε_n^i et η_n^i :

$F(\varepsilon_n^i)$ est le composé suivant :

$$\begin{array}{l}
F\,[n] = M \otimes \dots \otimes M \otimes M \otimes \dots \otimes M \\
\qquad\qquad \Big\downarrow {}^{1_{F\,[i-1]} \,\otimes\, l^{-1} \,\otimes\, 1_{F\,[n-i]}} \\
\qquad M \otimes \dots \otimes I \otimes M \otimes M \otimes \dots \otimes M \\
\qquad\qquad \Big\downarrow {}^{1_{F\,[i-1]} \,\otimes\, \varepsilon \,\otimes\, 1_{F\,[n+1-i]}} \\
F\,[n+1] = M \otimes \dots \otimes M \otimes M \otimes M \otimes \dots \otimes M
\end{array}$$

tandis que $F\,(\eta_n^i)$ est le composé suivant :

$$\begin{array}{l}
F\,[n] = M \otimes \dots \otimes M \otimes M \otimes \dots \otimes M \\
\qquad\qquad \Big\downarrow {}^{1_{F\,[i-1]} \,\otimes\, \mu \,\otimes\, 1_{F\,[n-i-1]}} \\
F\,[n-1] = M \otimes \dots \otimes M \otimes \dots \otimes M
\end{array}$$

L'équivalence naturelle ϕ est induite par les morphismes d'associativité généralisée :

$$\phi_{[m],\ [n]} : M^m \otimes M^n = M^{m+n}$$

et ϕ_o n'est autre que l'identité sur I

$$\phi_o : I \longrightarrow F\,[0] = I = M^o$$

$(F,\ \phi,\ \phi_o)$ est bien un homomorphisme de catégories multiplicatives transformant $\underset{\sim}{1}$ en $\underset{\sim}{M}$ et en outre les trois conditions :

$$\begin{cases} F\,[1] = M \\ F\,(e) = \varepsilon \\ F\,(m) = \mu \end{cases}$$

imposent la définition qui a été donnée, d'où l'unicité.

§ 4 : Applications à l'homologie.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et (T, ε, μ) un triple sur $\mathcal{C}$. On sait que (T, ε, μ) est un monoïde dans la catégorie multiplicative $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ d'où, en vertu du théorème précédent, il existe un unique homomorphisme de catégories multiplicatives

$$(F, \phi, \phi_o) : (\underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{1}) \longrightarrow (\underset{\sim}{\mathcal{C}^{\mathcal{C}}}, \underset{\sim}{T})$$

transformant $\underset{\sim}{1}$ en $\underset{\sim}{T}$. Mais comme

$$\mathrm{Hom}_{Cat}(\Delta, \mathcal{C}^{\mathcal{C}}) \approx \mathrm{Hom}_{Cat}(\Delta \times \mathcal{C}, \mathcal{C}) \approx \mathrm{Hom}_{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}^{\Delta}),$$

cela fournit un nouveau foncteur

$$\bar{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\Delta}$$

correspondant de F par les bijections ci-dessus. Pour tout objet de $\mathcal{C}$, $\bar{F}(C) : \Delta \longrightarrow \mathcal{C}$ est un objet co-semi-simplicial de $\mathcal{C}$.

En fait, la plupart des théories de l'homologie et de la cohomologie peuvent s'obtenir par un tel procédé.

Prenons l'exemple de la catégorie Keb des espaces topologiques pointés de Kelley et des applications continues respectant les points de base. Elle se munit d'une structure de catégorie multiplicative au moyen de la somme

$$(X, x_o) \otimes (Y, y_o) = \frac{X \times Y}{(X \times \{y_o\}) \cup (x_o \times y)}$$

l'unité étant le couple $\underset{\sim}{2}$ = ({0, 1}, 0) où {0, 1} est muni de la topologie discrète.

(<u>Note</u> : nous nous sommes restreints aux espaces de Kelley pour être assurés de l'associativité à un isomorphisme près).

Le couple I = ([0, 1], 0) où [0, 1] est l'intervalle unité de la droite réelle, muni de sa topologie habituelle, est un monoïde de Keb pour la multiplication habituelle des nombres réels ; en effet :

(1) [0, 1] est compact et donc de Kelley.

(2) $(\{0, 1\}, 0) \xrightarrow{\varepsilon} ([0, 1], 0)$

$\varepsilon(0) = 0$ et $\varepsilon(1) = 1$

ε est trivialement continue

(3) $([0, 1], 0) \otimes ([0, 1], 0) \xrightarrow{\mu} ([0, 1], 0)$

$\mu(s, t) = s.t$

μ est correctement définie car $s \times 0 = 0 \times t = 0$.

μ est continue car la multiplication des réels est continue.

Le fait que I soit un monoïde de Keb implique que le foncteur

$$I \otimes - : Keb \longrightarrow Keb$$

se munit d'une structure de triple $(I, \bar{\varepsilon}, \bar{\mu})$ où

$$\bar{\varepsilon}_{(X,\, x_0)} : (X,\, x_0) \cong \underset{\sim}{2} \otimes (X,\, x_0) \xrightarrow{\ \varepsilon \otimes 1\ } I \otimes (X,\, x_0)$$

$$\bar{\mu}_{(X,\, x_0)} : I \otimes I \otimes (X,\, x_0) \xrightarrow{\ \mu \otimes 1\ } I \otimes (X,\, x_0).$$

Mais par ailleurs, le foncteur d'oubli U de Keb vers la catégorie Ke des espaces de Kelley admet un adjoint à gauche F défini par

$$F\,(X) = (X \amalg \{*\},\ *).$$

$$\begin{tikzcd} I \otimes - \ \circlearrowright\ \mathrm{Keb} \arrow[r, shift right, "U"'] & \mathrm{Ke} \arrow[l, shift right, "F"'] \end{tikzcd}$$

En notant $\eta : 1_{Ke} \Longrightarrow UF$ et $\delta : FU \Longrightarrow 1_{Keb}$ les deux transformations naturelles décrivant l'adjonction $(F \dashv U)$, la situation précédente fournit un triple sur Ke ;

$$(U \circ (I \otimes -) \circ F,\ (U\,\bar{\varepsilon}\,F) \circ \eta,\ (U * \bar{\mu} * F) \circ (U * (I \otimes -) * \delta * (I \otimes -) * F)$$

$$\begin{cases} Ke \xrightarrow{\ F\ } Keb \xrightarrow{\ I \otimes -\ } Keb \xrightarrow{\ U\ } Ke \\[2ex] 1_{Ke} \xRightarrow{\ \eta\ } UF \xRightarrow{\ U\,\bar{\varepsilon}\,F\ } U \circ (I \otimes -) \circ F \\[2ex] U \circ (I\otimes -) \circ F \circ U \circ (I \otimes -) \circ F \xRightarrow{*(I\otimes -)*\delta*(I\otimes -)*F} U \circ (I\otimes -) \circ (I \otimes -) \circ F \xRightarrow{*\bar{\mu}*F} U \circ (I \otimes -) \circ F \end{cases}$$

d'où, par le procédé indiqué précédemment, un foncteur

$$\bar{I} : Ke \longrightarrow Ke^{\Delta}$$

Evaluant le foncteur $\bar{I}$ en I on obtient

$$\bar{I}\,(I) : \Delta \longrightarrow Ke$$

$$[n] \rightsquigarrow \bar{I}\,(I)\,(n)$$

et le lecteur remarquera aisément de $\bar{\bar{I}}$ (I) (n) n'est rien d'autre que le simplexe d'ordre (n + 1). Dès lors, pour tout espace de Kelley X :

$$S_{n+1}(X) = \mathrm{Hom}_{Ke}(\bar{I}(I)(n), X).$$

CHAPITRE 3 :

Les modules.

§ 1 : Action à gauche d'une catégorie multiplicative.

Définition 7

Soient $\underset{\sim}{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}, \otimes, I, a, l, r)$ *une catégorie multiplicative et* $\mathcal{A}$ *une catégorie. Une action à gauche de* $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ *sur* $\mathcal{A}$ *est un triplet* (G, α, λ) *où*

(1) $G : \mathcal{U} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ *est un foncteur*
(nous noterons $G(U, A) = UA$*)*

(2) α *est une équivalence naturelle à trois variables*

$$\alpha_{U_1, U_2, A} : (U_1 \otimes U_2) A \xrightarrow{\sim} U_1 (U_2 A)$$

(3) λ *est une équivalence naturelle*

$$\lambda_A : I A \xrightarrow{\sim} A$$

(4) *les diagrammes des types suivants sont commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
((U_1 \otimes U_2) \otimes U_3)\, A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "a\, A"'] & & (U_1 \otimes U_2)(U_3\, A) \arrow[dd, "\alpha"] \\
(U_1 \otimes (U_2 \otimes U_3))\, A \arrow[d, "\alpha"'] & & \\
U_1\, ((U_2 \otimes U_3)\, A) \arrow[rr, "U_1\, \alpha"'] & & U_1\, (U_2\, (U_3\, A))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes I)\, A \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "r\, A"'] & & U(I\, A) \arrow[dl, "U \lambda"] \\
& U\, A &
\end{tikzcd}$$

Citons quelques exemples de telles actions à gauche.

(1) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $\underset{\sim}{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ la catégorie multiplicative des endofoncteurs de $\mathcal{C}$. $\underset{\sim}{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ opère à gauche sur $\mathcal{C}$ au moyen du foncteur d'évaluation

$$\mathcal{C}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$\begin{tikzcd}
(F,\ C) \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "(\eta,\ f)"'] & F\ (C) \arrow[d, "\eta_{C'} \circ F(f) = F'(f) \circ \eta_C"] \\
(F',\ C') \arrow[r, squiggly] & F'\ (C')
\end{tikzcd}$$

(2) Soient $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{C}$ deux catégories et $\underset{\sim}{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ la catégorie multi-

plicative des endofoncteurs de $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$ opère à droite sur $\mathcal{C}^{\mathcal{B}}$ au moyen du foncteur de composition :

$$\mathcal{C}^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C}^{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{B}}$$

$$\begin{tikzcd}
(F, G) \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, "{(\eta, \eta')}"'] & F \circ G \arrow[d, "\eta * \eta'"] \\
(F', G') \arrow[r, rightsquigarrow] & F' \circ G'
\end{tikzcd}$$

(3) Soit $\mathfrak{A}$ une catégorie possédant des sommes quelconques. La catégorie multiplicative des ensembles munie du produit cartésien opère à gauche sur $\mathfrak{A}$ au moyen du foncteur somme :

$$\mathrm{Ens} \times \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

$$(X, A) \rightsquigarrow \coprod_{x \in X} A_x$$

avec $A_x = A$ pour tout élément x de X.

Si $\mathfrak{A}$ possède uniquement des sommes indexées par les cardinaux inférieurs à un cardinal α, c'est bien sûr la catégorie des ensembles de cardinal inférieur à α qui opère de cette façon sur $\mathfrak{A}$.

(4) Reprenons l'exemple de la catégorie multiplicative $\mathcal{C}/_{0 \times 0}$ cité au paragraphe II-2. $\mathcal{C}/_{0 \times 0}$ opère à gauche sur la catégorie $\mathcal{C}/_0$:

$$\mathcal{C}/_{0 \times 0} \times \mathcal{C}/_0 \longrightarrow \mathcal{C}/_0$$

$$((\partial_0, \partial_1), p) \rightsquigarrow (\partial_0 \circ p')$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & F \times_0 P \arrow[dl, "p'"'] \arrow[dr, "\partial'_1"] \arrow[dd, phantom, "p.f."] & \\
 & F \arrow[dl, "\partial_0"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & & P \arrow[dl, "p"] \\
0 & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

§ 2 : Les modules à gauche sur un monoïde.

Définition 8

Soient $\underset{\sim}{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}, \otimes, I, a, l, r)$ une catégorie multiplicative opérant à gauche sur une catégorie $\mathcal{A}$ au moyen de (G, α, λ) et $\underset{\sim}{M} = (M, \varepsilon, \mu)$ un monoïde de $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$.

Un $\underset{\sim}{M}$-module à gauche de $\mathcal{A}$ est un couple (A, ξ) où

(1) A est un objet de $\mathcal{A}$

(2) $\xi : MA \longrightarrow A$ est un morphisme de $\mathcal{A}$
(appelé flèche structurelle du module)

(3) les diagrammes des types suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes M)A \arrow[r, "\mu A"] \arrow[d, "\alpha"'] & MA \arrow[dd, "\xi"] \\
M(MA) \arrow[d, "M\xi"'] & \\
MA \arrow[r, "\xi"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
IA \arrow[rr, "\varepsilon A"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & MA \arrow[dl, "\xi"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Citons quelques exemples de modules se rattachant aux exemples d'actions à gauche cités au paragraphe précédent.

(1) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\underset{\sim}{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$. $\underset{\sim}{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ est multiplicative et opère à gauche sur $\mathcal{C}$ tandis qu'un monoïde de $\underset{\sim}{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ est un triple (T, ε, μ) sur $\mathcal{C}$. Un $\underset{\sim}{T}$-module à gauche de $\underset{\sim}{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ est exactement une algèbre sur le triple $\underset{\sim}{T}$.

(2) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $\underset{\sim}{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ la catégorie multiplicative des endofoncteurs de $\mathcal{C}$. Soit encore $(F, U, \varepsilon, \delta)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, shift right, "U"'] & \mathcal{C} \arrow[l, shift right, "F"']
\end{tikzcd} ; \qquad F \dashv U$$

une situation d'adjonction. Le triple associé $\underset{\sim}{T} = (UF, \varepsilon, U\delta F)$ est un monoïde de $\underset{\sim}{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ et $\underset{\sim}{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}$ opère à gauche sur $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}$. Le foncteur U peut être muni d'une structure de $\underset{\sim}{T}$-module au moyen de la flèche structurelle $U\varepsilon$:

$$(UF)U \xrightarrow{U\varepsilon} U .$$

(3) Soient $\mathcal{A}$ une catégorie avec sommes infinies et $\underset{\sim}{\mathrm{Ens}}$ la catégorie multiplicative des ensembles munie du produit cartésien.

$\underset{\sim}{Ens}$ opère à gauche sur $\mathcal{A}$. Considérons un monoïde $\underset{\sim}{M} = (M, \varepsilon, \mu)$ de $\underset{\sim}{Ens}$ (c'est-à-dire un monoïde au sens habituel). Munir un objet A de $\mathcal{A}$ d'une structure de $\underset{\sim}{M}$-module revient à se donner un morphisme de la forme

$$MA = \coprod_{x \in M} A \xrightarrow{\xi} A$$

vérifiant deux axiomes. Mais, par définition d'une somme, cela revient à se donner, pour tout élément x de M, un morphisme :

$$\xi_x : A \longrightarrow A.$$

Ceci est encore équivalent à la donnée d'une application du type :

$$\bar{\xi} : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A).$$

Mais un monoïde M étant une catégorie à un seul objet, une telle application $\bar{\xi}$ peut être obtenue à partir d'un foncteur

$$\hat{\xi} : M \longrightarrow \mathcal{A}$$

envoyant sur A l'unique objet de M ; le caractère fonctoriel de $\hat{\xi}$ est équivalent du fait que le morphisme

$$\xi : MA \longrightarrow A$$

correspondant soit la flèche structurelle d'une structure de $\underset{\sim}{M}$-module sur A.

(4) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie avec limites gauches finies et O un objet de $\mathcal{C}$; la catégorie multiplicative $\underset{\sim}{\mathcal{C}/_{O \times O}}$ opère à gauche sur la catégorie $\mathcal{C}/_{O}$. Notons $\underset{\sim}{\mathfrak{F}} = ((\partial_O, \partial_1), \varepsilon, \mu)$ un monoïde de $\underset{\sim}{\mathcal{C}/_{O \times O}}$, c'est-à-dire une catégorie interne à $\mathcal{C}$. Un $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}$-module à gauche est un couple (p, ξ) où

$$\begin{cases} p : P \longrightarrow O \\ \\ \xi : F \underset{O}{\times} P \longrightarrow P \end{cases}$$

sont deux morphismes de $\mathcal{C}$ rendant commutatifs les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} & F \underset{O}{\times} P \arrow[dl, "p'"'] \arrow[dr, "\partial'_1"] \arrow[dd, phantom, "\text{p.f.}"] & \\ F \arrow[d, "\partial_o"'] \arrow[dr, "\partial_1"] & & P \arrow[dl, "p"] \\ O & O & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \underset{O}{\times} P \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "p'"'] & P \arrow[d, "p"] \\ F \arrow[r, "\partial_o"'] & O \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F \underset{O}{\times} F \underset{O}{\times} P \arrow[r, "\mu \underset{O}{\times} P"] \arrow[d, "F \underset{O}{\times} \xi"'] & F \underset{O}{\times} P \arrow[d, "\xi"] \\ F \underset{O}{\times} P \arrow[r, "\xi"'] & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} O \underset{O}{\times} P \arrow[rr, "\varepsilon \underset{O}{\times} P"] \arrow[dr, dash] & & F \underset{O}{\times} P \arrow[dl, "\xi"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Un tel $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}$-module est appelé "préfaisceau interne sur la catégorie interne $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}$". Cette dénomination est justifiée de la manière suivante : si $\mathcal{C}$ = Ens, interprétons $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}$ comme une petite catégorie ; on peut alors associer au module (p, ξ) un préfaisceau π sur la catégorie $\mathfrak{F}^*$:

$$\pi : \mathfrak{J} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "f"'] & p^{-1}(X) \\ Y \arrow[r, squiggly] & p^{-1}(Y) \arrow[u, "\pi(f)"'] \end{tikzcd}$$

où $\pi(f)(y) = \xi(f, y)$.

Réciproquement, si $\pi : \mathfrak{J} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est un préfaisceau, on définit :

(1) $P = \coprod_{X \in O} \pi(X)$

(2) $p : P \longrightarrow O$ est la projection canonique sur l'ensemble d'indices

(3) $\xi : F \underset{O}{\times} P \longrightarrow P$

$\xi(f, y) = \pi(f)(y)$

et l'on obtient un $\mathfrak{J}$-module (p, ξ).

Terminons ce paragraphe en décrivant la notion de morphisme de $\underset{\sim}{M}$-modules.

Définition 9

Soient $\mathcal{U}$ une catégorie multiplicative et (G, α, λ) une opération à gauche de $\mathcal{U}$ sur une catégorie $\mathcal{A}$. Si $\underset{\sim}{M} = (M, \varepsilon, \mu)$ est un monoïde de $\mathcal{U}$ et $\underset{\sim}{A} = (A, \xi)$, $\underset{\sim}{A'} = (A', \xi')$ deux $\underset{\sim}{M}$-modules à gauche de $\mathcal{A}$, un mor-

phisme de $\underset{\sim}{M}$-modules à gauche de $\underset{\sim}{A}$ vers $\underset{\sim}{A}'$ est un morphisme $f : A \longrightarrow A'$ *de* $\mathfrak{A}$ *rendant commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
MA \arrow[r, "Mf"] \arrow[d, "\xi"'] & MA' \arrow[d, "\xi'"] \\
A \arrow[r, "f"'] & A'
\end{tikzcd}$$

Nous noterons $\mathrm{Mod}_{\mathfrak{A}}\ (\underset{\sim}{M})$ la catégorie des $\underset{\sim}{M}$-modules à gauche de $\mathfrak{A}$.

(1) Dans le cas de la catégorie multiplicative $\underset{\sim}{\mathcal{C}^{\mathcal{C}}}$ opérant sur $\mathcal{C}$ par évaluation, la catégorie des modules sur un triple $\underset{\sim}{T}$ est donc exactement la catégorie d'Eilenberg - Moore de ce triple.

(2) Dans le cas où le monoïde M est une catégorie interne à $\mathcal{C}$ et les deux M-modules des préfaisceaux internes, un morphisme entre ces M-modules est une transformation naturelle interne. En reprenant les notations utilisées antérieurement pour cet exemple et en faisant $\mathcal{C}$ = Ens, un morphisme

$$f : (p,\ \xi) \longrightarrow (p',\ \xi')$$

de $\mathfrak{T}$-modules fournit une transformation naturelle de la manière suivante :

$$\forall\ X \in O \qquad p_X : p^{-1}\ (X) \longrightarrow p'^{-1}\ (X)$$
$$x \rightsquigarrow f\ (x).$$

§ 3 : Action à droite d'une catégorie multiplicative.

Définition 10

Soient $\underset{\sim}{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}, \otimes, I, a, l, r)$ *une catégorie multiplicative et* $\mathcal{A}$ *une catégorie. Une action à droite de* $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ *sur* $\mathcal{A}$ *est un triplet* (D, β, ρ) *où*

(1) $D : \mathcal{A} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{A}$ *est un foncteur*
(*nous noterons* $D(A, U) = AU$)

(2) β *est une équivalence naturelle à trois variables*

$$\beta_{A,U_1,U_2} : (AU_1)U_2 \xrightarrow{\sim} A(U_1 \otimes U_2)$$

(3) ρ *est une équivalence naturelle*

$$\rho_A : AI \xrightarrow{\sim} A$$

(4) *les diagrammes des types suivants sont commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
((AU_1)U_2)U_3 \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\beta U_3"'] & (AU_1)(U_2 \otimes U_3) \arrow[dd, "\beta"] \\
(A(U_1 \otimes U_2))U_3 \arrow[d, "\beta"'] & \\
A((U_1 \otimes U_2) \otimes U_3) \arrow[r, "Aa"'] & A(U_1 \otimes (U_2 \otimes U_3))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A\ I)\mathcal{U} \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "\rho\mathcal{U}"'] & & A\,(I \otimes \mathcal{U}) \arrow[dl, "A\,\lambda"] \\
& A\mathcal{U} &
\end{tikzcd}$$

Citons deux exemples de telles actions :

(1) Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{X}$ deux catégories. La catégorie multiplicative $\underset{\sim}{\mathfrak{X}}^{\mathfrak{X}}$ opère à droite sur $\mathfrak{A}^{\mathfrak{X}}$ au moyen de la composition des foncteurs :

$$\mathfrak{A}^{\mathfrak{X}} \times \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}} \longrightarrow \mathfrak{A}^{\mathfrak{X}}$$

$$(F,\ G) \rightsquigarrow F \circ G$$

(2) Le produit cartésien induit sur la catégorie Ens^{*} une structure multiplicative ; cette catégorie multiplicative $\underset{\sim}{\mathrm{Ens}}^{*}$ agit à droite sur toute catégorie $\mathfrak{A}$ admettant des produits.

$$\mathfrak{A} \times \mathrm{Ens}^{*} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

$$(A,\ I) \rightsquigarrow A^{I} = \prod_{i \in I} A_i$$

où l'on a posé pour tout i : $A_i \equiv A$.

§ 4 : Les modules à droite sur un monoïde.

Définition 11

Soient $\underset{\sim}{\mathcal{U}} = (\mathcal{U},\ \otimes,\ I,\ a,\ l,\ r)$ une catégorie multiplicative opérant à droite sur une catégorie $\mathfrak{A}$ au moyen de

(D, β, ρ) *et* $\underset{\sim}{M} = (M, \varepsilon, \mu)$ *un monoïde de* $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$. *Un* $\underset{\sim}{M}$*-module à droite de* $\mathcal{A}$ *est un couple* (A, ξ) *où*

(1) A *est un objet de* $\mathcal{A}$

(2) $\xi : A\,M \longrightarrow A$ *est un morphisme de* $\mathcal{A}$
(appelé flèche structurelle du module)

(3) *les diagrammes des types suivants sont commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
(A\,M)\,M \arrow[rr, "\xi\,M"] \arrow[d, "\beta"'] & & A\,M \arrow[dd, "\xi"] \\
A\,(M \otimes M) \arrow[d, "A\,\mu"'] & & \\
A\,M \arrow[rr, "\xi"'] & & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A\,I \arrow[rr, "A\,\varepsilon"] \arrow[dr, "\rho"'] & & A\,M \arrow[dl, "\xi"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Par exemple :

soit $(F, U, \varepsilon, \delta)$ une situation d'adjonction

$$\mathcal{A} \underset{U}{\overset{F}{\leftrightarrows}} \mathcal{X} \quad ; \quad F \dashv U .$$

$\underset{\sim}{T} = (U F, \varepsilon, U \delta F)$ est un triple sur $\mathcal{X}$, c'est-à-dire un monoïde de $\underset{\sim}{\mathcal{X}^{\mathcal{X}}}$, et $\underset{\sim}{\mathcal{X}^{\mathcal{X}}}$ opère à droite sur $\mathcal{A}^{\mathcal{X}}$. F se munit d'une structure de $\underset{\sim}{T}$-module décrite par $(T, \delta F)$:

$$F\,U\,F \xrightarrow{F\,\delta} F.$$

Définition 12

Soient $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ *une catégorie multiplicaitve et* $(D, B, \circ)$ *une opération à droite de* $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ *sur une catégorie* $\mathcal{A}$.
Si $\underset{\sim}{M} = (M, \varepsilon, \mu)$ *est un monoïde de* $\mathcal{U}$ *et* $\underset{\sim}{A} = (A, \xi)$, $\underset{\sim}{A}' = (A', \xi')$ *deux* M*-modules à droite de* $\mathcal{A}$, *un morphisme de* $\underset{\sim}{M}$*-modules à droite de* $\underset{\sim}{A}$ *vers* $\underset{\sim}{A}'$ *est un morphisme* $f : A \longrightarrow A'$ *de* $\mathcal{A}$ *rendant commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
A\ M \arrow[r, "f\ M"] \arrow[d, "\xi"'] & A'\ M \arrow[d, "\xi'"] \\
A \arrow[r, "f"] & A'
\end{tikzcd}$$

Nous noterons $\mathrm{Mod}^{\mathcal{A}}(\underset{\sim}{M})$ la catégorie des $\underset{\sim}{M}$-modules à droite de $\mathcal{A}$.

§ 5 : Le produit tensoriel au-dessus d'un monoïde.

Définition 13

Soient $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ *une catégorie multiplicative opérant à gauche sur* $\mathcal{A}$ *et à droite sur* $\mathcal{B}$.
Un accouplement de ces deux actions est un triplet $(\mathcal{P}, P, \gamma)$ *où*

(1) $\mathcal{P}$ *est une catégorie possédant des coégalisateurs*

(2) $P : \mathcal{B} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{P}$ *est un foncteur*
(nous noterons $P(B, A) = B \boxdot A$*)*

(3) γ *est une équivalence naturelle à trois variables*

$$\gamma_{B,\,U,\,A} : (B\;U) \boxtimes A \xrightarrow{\ \sim\ } B \boxtimes (U\;A)$$

Définition 14

Dans la situation de la définition 13, soient $\underset{\sim}{M} = (M,\ \varepsilon,\ \delta)$ *un monoïde de* $\mathcal{U}$, $\underset{\sim}{A} = (A,\ \xi)$ *un* $\underset{\sim}{M}$*-module à gauche de* $\mathcal{A}$ *et* $\underset{\sim}{B} = (B, \theta)$ *un* $\underset{\sim}{M}$*-module à droite de* $\mathcal{B}$.
Le produit tensoriel de $\underset{\sim}{A}$ *et* $\underset{\sim}{B}$ *au-dessus de* $\underset{\sim}{M}$ *est défini comme étant le conoyau des deux morphismes* $\theta \boxtimes A$ *et* $(B \boxtimes \xi) \circ \gamma_{B,\,M,\,A}$

$$\begin{tikzcd}
(B\;M) \boxtimes A \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, "\theta \boxtimes A"] & & \\
 & B \boxtimes A \arrow[r] & \underset{\sim}{B} \underset{\underset{\sim}{M}}{\boxtimes} \underset{\sim}{A} \\
B \boxtimes (M,\ A) \arrow[ur, "B \boxtimes \xi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Par exemples :

(1) Avec les notations des définitions 13 et 14, faisons $\mathcal{U} = \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{P} = Ab$ (catégorie des groupes abéliens) ; prenons comme multiplication, comme actions à gauche et à droite et comme bifoncteur P le produit tensoriel habituel des groupes abéliens. Le monoïde $\underset{\sim}{M}$ de Ab est donc un anneau unitaire, $\underset{\sim}{A}$ un $\underset{\sim}{M}$-module à gauche et $\underset{\sim}{B}$ un $\underset{\sim}{M}$-module à droite (au sens habituel) ; le produit tensoriel $\underset{\sim}{B} \underset{\underset{\sim}{M}}{\otimes} \underset{\sim}{A}$ défini ci-dessus est le produit tensoriel habituel des modules $\underset{\sim}{A}$ et $\underset{\sim}{B}$.

(2) Soit la catégorie multiplicative Ens des ensembles munie du produit cartésien ; Ens opère à droite sur elle-même. Soit encore $\mathcal{X}$ une catégorie avec limites inductives : Ens opère à gauche sur $\mathcal{X}$ au moyen du foncteur "somme" (cfr. § 1 - exemple 3). Fixons un monoïde M de Ens, c'est-à-dire un monoïde au sens habituel ; le singleton se munit d'une unique structure de M-module à droite au moyen de l'application constante

$$\{*\} \times M \longrightarrow \{*\}.$$

Un M-module à gauche de $\mathcal{X}$ est un foncteur de la forme

$$F : M \longrightarrow \mathcal{X}$$

(cfr. § 2 - exemple 3). Considérons alors l'accouplement décrit par le foncteur "somme" :

$$\mathrm{Ens} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$$

le produit tensoriel de F et du singleton est exactement la limite inductive du foncteur F.

§ 6 : Application à la théorie des triples.

Considérons la situation suivante

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, shift left, "U'"] & & \mathcal{X}^T \arrow[dl, shift left, "U^T"] \\
& \mathcal{X} \arrow[ul, shift left, "F'"] \arrow[ur, shift left, "F^T"] &
\end{tikzcd}$$

où $\underset{\sim}{T} = (T, \varepsilon, \mu)$ est un triple sur $\mathcal{X}$, $(F', U', \varepsilon', \delta')$ une situation d'adjonction engendrant sur $\mathcal{X}$ un triple noté $\underset{\sim}{T}' = (T', \varepsilon', \mu')$ et Φ un foncteur tel que $U^T \circ \Phi = U'$.

Notons $\alpha : T \Longrightarrow T'$ la transformation naturelle définie comme suit :

$$U^TF^T \xrightarrow{T\varepsilon'} U^TF^TU'F' = U^TF^TU^T\Phi F' \xrightarrow{U^T\delta^T\Phi F'} U^T\Phi F' = U'F'.$$

$\underset{\sim}{T}$ et $\underset{\sim}{T}'$ sont deux monoïdes dans la catégorie multiplicative $\mathcal{X}^{\mathcal{X}}$ et c'est un calcul facile de remarquer que $\alpha ; T \Longrightarrow T'$ est un morphisme de monoïdes, c'est-à-dire que les deux diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
1_{\mathcal{X}} \arrow[r, Rightarrow, "\varepsilon"] \arrow[dr, Rightarrow, "\varepsilon'"'] & T \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"] \\
 & T'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \circ T \arrow[r, Rightarrow, "\alpha * \alpha"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu"'] & T' \circ T' \arrow[d, Rightarrow, "\mu'"] \\
T \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"'] & T'
\end{tikzcd}$$

En reprenant les notations des définitions 13 et 14 considérons alors

$\mathcal{U}$ est $\mathcal{X}^{\mathcal{X}}$ (catégorie multiplicative)

$\mathcal{A}$ est $\mathcal{X}^{(\mathcal{X}^T)}$ (catégorie avec action à gauche)

$\mathcal{B}$ est $\mathcal{A}^{\mathcal{X}}$ (catégorie avec action à droite)

$\mathcal{S}$ est $\mathcal{A}^{(\mathcal{X}^T)}$

$P : \mathcal{A}^{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}^{(\mathcal{X}^T)} \longrightarrow \mathcal{A}^{(\mathcal{X}^T)}$ est le foncteur de composition (accouplement)

$\underset{\sim}{M}$ est $\underset{\sim}{T}$ (monoïde)

$\underset{\sim}{A}$ est U^T (module à gauche - cfr. § 2)

$\underset{\sim}{B}$ est F' (module à droite).

Explicitons en quel sens F' est un $\underset{\sim}{T}$-module à droite ; la flèche structurelle est

$$F'T \xrightarrow{F'\alpha} F'T' = F'U'F' \xrightarrow{\delta'F'} F'.$$

Il s'agit bien là d'une structure de $\underset{\sim}{T}$-module à droite car $\delta'F'$ est une structure de $\underset{\sim}{T}'$-module à droite sur F' et α un morphisme de monoïdes.

Introduisons l'hypothèse que $\mathcal{A}$ possède des coégalisateurs : cela implique donc que la catégorie $\mathcal{A}^{(\mathcal{X}^T)}$ possède des conoyaux. Notons alors

$$\Psi = F' \underset{\underset{\sim}{T}}{\otimes} U^T : \mathcal{X}^T \longrightarrow \mathcal{A}$$

le produit tensoriel des modules F' et U^T

$$F'TU^T \underset{F'*U^T*\delta^T}{\overset{(\delta'F'\circ F'\alpha)*U^T}{\rightrightarrows}} F'U^T \xrightarrow{\psi} \Psi$$

Ψ est l'adjoint à gauche de Φ. En effet :

(1) pour tout objet A de $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
F'TU^T\Phi A \arrow[r, shift left, "(\delta'F'\circ F'\alpha)U'A"] \arrow[r, shift right, "F'U^T\delta^T\Phi A"'] \arrow[d, equal] & F'U^T\Phi A \arrow[r, "\psi\Phi A"] \arrow[d, equal] & \Psi\Phi A \arrow[dd, dashed, "\tau_A"] \\
F'T'U'A & F'U'A \arrow[dr, "\delta'_A"'] & \\
& & A
\end{tikzcd}$$

$$\delta'_A \circ \delta'_{F'U'A} \circ F'U^T\delta^T\Phi F'U'A \circ F'T\varepsilon'U'A$$

$$= \delta'_A \circ F'U'\delta'_A \circ F'U^T\delta^T\Phi F'U'A \circ F'T\varepsilon'U'A$$

$$= \delta'_A \circ F'U^T\delta^T\Phi A \circ F'TU'\delta'_A \circ F'T\varepsilon'U'A$$

$$= \delta'_A \circ F'U^T\delta^T\Phi A$$

δ'_A égalise $(\delta'F' \circ F'\alpha)U'A$ et $F'U^T\delta^T\Phi A$ et donc se factorise de manière unique en un morphisme τ_A à travers le coégalisateur $\Psi\,\Phi\,A$; ceci fournit une transformation naturelle

$$\tau : \Psi\,\Phi \Longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$$

(2) Pour tout objet (X, ξ) de $\mathcal{X}^T$ on a un morphisme

$$\sigma_{(X,\ \xi)} : (X,\ \xi) \longrightarrow \Phi\,\Psi(X,\ \xi)$$

défini par le fait que $U^T\,\sigma_{(X,\ \xi)}$ est le composé suivant

$$X \xrightarrow{\varepsilon X} TX \xrightarrow{\alpha_X} T'X = U'F'U^T(X,\ \xi) \xrightarrow{U'\ \psi(X,\ \xi)} U'\Psi(X,\ \xi)\ ;$$

qui est bien un morphisme d'algèbres, car

$$TU'\ \Psi\ (X,\ \xi) \circ TU'\ \psi\ (X,\ \xi) \circ T\alpha_X \circ T\varepsilon_X$$

$$= U'\ \psi\ (X,\ \xi) \circ U^T\delta^T\Phi F'X \circ TU^T\delta^T\Phi F'X \circ TT\varepsilon'_X \circ T\varepsilon_X$$

$$= U'\ \psi\ (X,\ \xi) \circ U^T\delta^T\Phi F'X \circ TU^T\delta^T\Phi F'X \circ T\varepsilon_{T'X} \circ T\varepsilon'_X$$

$$= U'\ \psi\ (X,\ \xi) \circ U^T\delta^T\Phi F'X \circ T\varepsilon'_X \circ T\xi \circ \varepsilon_{TX}$$

$$= U'\ \psi\ (X,\xi) \circ \alpha_X \circ \varepsilon_X \circ \xi\ ;$$

cela induit une transformation naturelle

$$\sigma \; : \; 1_{\mathfrak{X}^T} \Longrightarrow \Phi \; \Psi$$

(3) τ et σ sont les deux transformations naturelles décrivant l'adjonction entre Φ et Ψ.

Les raisonnements développés dans ce paragraphe ont donc permis d'établir un critère intéressant d'existence de foncteur adjoint :

<u>Théorème 2</u>

Soient $\underset{\sim}{T}$ un triple sur une catégorie $\mathfrak{X}$, $\mathcal{A}$ une catégorie avec coégalisateurs et

$$\Phi \; : \mathcal{A} \longrightarrow \mathfrak{X}^T$$

un foncteur.
Une condition nécessaire et suffisante pour que Φ admette un adjoint à gauche est que $U^T \circ \Phi$ admette un adjoint à gauche.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "U^T \circ \Phi"'] & \mathfrak{X}^T \arrow[d, shift left, "U^T"] \\ & \mathfrak{X} \arrow[u, shift left, "F^T"] \end{tikzcd}$$

§ 7 : Construction des monoïdes abéliens libres.

Soit $\mathfrak{X}$ une catégorie avec des sommes infinies et des produits finis et telle en outre que le produit commute aux limites inductives. $\mathfrak{X}$, munie du produit, est donc multiplicative. Notons Mab ($\mathfrak{X}$) la catégorie des monoïdes abéliens de $\mathfrak{X}$ et U le foncteur d'oubli

$$U : \text{Mab}\ (\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathfrak{X}$$

$$(M,\ \varepsilon,\ \mu) \rightsquigarrow M.$$

Etant donné les hypothèses faites sur $\mathfrak{X}$, ce foncteur U admet un adjoint à gauche noté Exp

$$\text{Exp} : \mathfrak{X} \longrightarrow \text{Mab}\ (\mathfrak{X})$$

$$X \rightsquigarrow \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} \frac{X^n}{n!},\ \varepsilon_X,\ \mu_X\right).$$

Définissons tout d'abord l'objet $\dfrac{X^n}{n!}$; nous nous inspirons pour ce faire de l'exemple 2 du paragraphe 5. La catégorie multiplicative des ensembles, munie du produit cartésien, opère à droite sur elle-même et à gauche sur $\mathfrak{X}$, au moyen du foncteur somme ; en outre, ce foncteur somme décrit un accouplement de Ens et de $\mathfrak{X}$ à valeurs dans $\mathfrak{X}$:

$$\text{Ens} \times \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}.$$

Choisissons comme monoïde le groupe symétrique à n lettres σ_n ; on sait que le singleton est un σ_n-module à droite au moyen de l'application constante tandis qu'un σ_n-module à gauche est un foncteur

$$F : \sigma_n \longrightarrow \mathfrak{X} :$$

nous choisissons le foncteur envoyant l'unique objet de σ_n sur X^n et toute permutation à n éléments sur le morphisme de X^n vers X^n correspondant à la permutation choisie des facteurs du produit. L'objet $\frac{X^n}{n!}$ est alors par définition le produit tensoriel du singleton et de F. (Remarquons que σ_n a n! éléments).

Le neutre $\varepsilon_X : 1 \longrightarrow \coprod_{n\in\mathbb{N}} \frac{X^n}{n!}$ n'est rien d'autre que l'injection d'indice 0 dans la somme, car $\frac{X^\circ}{0!} = 1$.

Munissons encore $\coprod_{n\in\mathbb{N}} \frac{X^n}{n!}$ d'une multiplication.

Il faut construire un morphisme

$$\left(\coprod_{p\in\mathbb{N}} \frac{X^p}{p!}\right) \times \left(\coprod_{q\in\mathbb{N}} \frac{X^q}{q!}\right) \xrightarrow{\mu_X} \left(\coprod_{n\in\mathbb{N}} \frac{X^n}{n!}\right)$$

ce qui revient, vu les hypothèses, à construire un morphisme

$$\coprod_{(p,\ q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \left(\frac{X^p}{p!} \times \frac{X^q}{q!}\right) \longrightarrow \coprod_{n\in\mathbb{N}} \frac{X^n}{n!}\ ;$$

il nous suffira pour ce faire de construire des morphismes du type

$$\frac{X^p}{p!} \times \frac{X^q}{q!} \longrightarrow \frac{X^{p+q}}{(p+q)!}.$$

Or le groupe $\sigma_p \times \sigma_q$ opère de manière évidente sur X^{p+q} et le produit tensoriel correspondant est

$$\frac{X^p}{p!} \times \frac{X^q}{q!}$$

vu la commutation du produit avec les conoyaux ; en outre, il existe une inclusion évidente de $\sigma_p \times \sigma_q$ dans σ_{p+q} ; cela fournit donc le diagramme commutatif suivant où les flèches horizontales sont celles apparaissant dans la définition du produit tensoriel :

$$\begin{tikzcd}
(\sigma_p \times \sigma_q) \boxtimes X^{p+q} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "i \boxtimes 1"'] & X^{p+q} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \dfrac{X^p}{p!} \times \dfrac{X^q}{q!} \arrow[d, dashed] \\
\sigma_{p+q} \boxtimes X^{p+q} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & X^{p+q} \arrow[r] & \dfrac{X^{p+q}}{(p+q)!}
\end{tikzcd}$$

d'où l'unique factorisation cherchée de $\dfrac{X^p}{p!} \times \dfrac{X^q}{q!}$ vers $\dfrac{X^{p+q}}{(p+q)!}$.

C'est alors un long calcul de routine de vérifier que

$$\left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} \frac{X^n}{n!}, \varepsilon_X, \mu_X\right)$$

est un monoïde abélien libre de $\mathfrak{X}$ et que le foncteur Exp est bien l'adjoint à gauche du foncteur $\mathcal{U}$.

CHAPITRE 4 :

Les $\mathcal{U}$-catégories.

§ 1 : Les $\mathcal{U}$-catégories.

Définition 15

Soit $\underset{\sim}{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}, \otimes, I, a, l, r)$ *une catégorie multiplicative. Une* $\mathcal{U}$*-catégorie est un quadruplet*

$$\underset{\sim}{\mathcal{A}} = (|\mathcal{A}|, \mathcal{A}, \mu, \eta)$$

où

(1) $|\mathcal{A}|$ *est un ensemble d'objets*

(2) $\mathcal{A} : |\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}| \longrightarrow \mathcal{O}b\,(\mathcal{U})$ *est une application*

(3) *pour tous éléments* A, B, C *de* $|\mathcal{A}|$

$$\mu_{A,\,B,\,C} : \mathcal{A}(A, B) \otimes \mathcal{A}(A, C) \longrightarrow \mathcal{A}(A, C)$$

est un morphisme de $\mathcal{U}$

(4) *pour tout élément* A *de* $|\mathcal{A}|$

$$\eta_A : I \longrightarrow \mathcal{A}(A, A)$$

est un morphisme de $\mathcal{U}$

(5) *les diagrammes des types suivants sont commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{A}(A, B) \otimes \mathcal{A}(B, C)] \otimes \mathcal{A}(C, D)} \arrow[r, "\mu \otimes 1"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \mathcal{A}(A, C) \otimes \mathcal{A}(C, D) \arrow[dd, "\mu"] \\
\mathcal{A}(A, B) \otimes [\mathcal{A}(B, C) \otimes \mathcal{A}(C, D)] \arrow[d, "1 \otimes \mu"] & \\
\mathcal{A}(A, B) \otimes \mathcal{A}(B, D) \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{A}(A, D)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A, B) \otimes I \arrow[r, "1 \otimes n_B"] \arrow[dr, "r"'] & \mathcal{A}(A, B) \otimes \mathcal{A}(B, B) \arrow[d, "\mu"] \\
& \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes \mathcal{A}(A, B) \arrow[d, "n_A \otimes 1"'] \arrow[dr, "l"] & \\
\mathcal{A}(A, A) \otimes \mathcal{A}(A, B) \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{A}(A, B)
\end{tikzcd}$$

Citons quelques exemples de telles situations

(1) si $|\mathcal{A}|$ est un singleton, $\mathcal{A}(A, A)$ est un monoïde de $\mathcal{V}$

(2) si $\mathcal{V}$ = Ens, les $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$-catégories sont les petites catégories au sens habituel

(3) si $\mathcal{V}$ = $\mathcal{A}$b, les $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$-catégories sont les catégories pré-additives.

Proposition 3

Soit $\underset{\sim}{\Phi} = (F, \phi, \phi_o)$ un morphisme de catégories multiplicatives de $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ vers $\underset{\sim}{\mathcal{U}}'$. $\underset{\sim}{\Phi}$ transforme toute $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ -catégorie en une $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$ -catégorie.

Soit $\underset{\sim}{\mathcal{Q}} = (|\mathcal{Q}|, \mathcal{Q}, \mu, n)$ une $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégorie.
Posons

(1) $|\Phi_* \mathcal{Q}| = |\mathcal{Q}|$

(2) $(\Phi_* \mathcal{Q})(A, B) = F\ \mathcal{Q}(A, B)$

(3) $\Phi_*\ \mu$ est construit comme suit

$$\begin{tikzcd}
(\Phi_* \mathcal{Q})(A, B) \otimes (\Phi_* \mathcal{Q})(B, C) \arrow[rr, "\Phi_*\ \mu"] \arrow[d, equal] & & (\Phi_* \mathcal{Q})(A, C) \arrow[d, equal] \\
F\ \mathcal{Q}(A, B) \otimes F\ \mathcal{Q}(B, C) \arrow[dr, "\phi"'] & & F\ \mathcal{Q}(A, C) \\
& F\ (\mathcal{Q}(A, B) \otimes \mathcal{Q}(B, C)) \arrow[ur, "F\ \mu"'] &
\end{tikzcd}$$

(4) $\Phi_*\ n$ est construit comme suit

$$\begin{tikzcd}
I' \arrow[r, "\Phi_*\ n"] \arrow[d, "\phi_o"'] & (\Phi_* \mathcal{Q})(A, A) \arrow[d, equal] \\
FI \arrow[r, "F\ n"'] & F\ \mathcal{Q}(A, A)
\end{tikzcd}$$

En particulier le morphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(I, -) : \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

transforme toute $\mathcal{U}$-catégorie en une Ens-catégorie, c'est-à-dire une petite catégorie au sens habituel ; cette dernière est appelée "catégorie sous-jacente à la $\mathcal{U}$-catégorie".

Définition 16

Soient $\mathcal{U}$ une catégorie multiplicative et $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ deux $\mathcal{U}$-catégories. Un $\mathcal{U}$-foncteur de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}'$ est un couple (F, f) *où*

(1) $F : |\mathcal{A}| \longrightarrow |\mathcal{A}'|$ *est une application*

(2) *pour tous objets* A, B *de* $|\mathcal{A}|$

$$f_{A,B} : \mathcal{A}(A, B) \longrightarrow \mathcal{A}'(FA, FB)$$

est un morphisme de $\mathcal{U}$

(3) *les diagrammes suivants commutent*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A, B) \otimes \mathcal{A}(B, C) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f \otimes f"'] & \mathcal{A}(A, C) \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{A}'(FA, FB) \otimes \mathcal{A}'(FB, FC) \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{A}'(FA, FC)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "n_A"] \arrow[dr, "n'_{FA}"'] & \mathcal{A}(A, A) \arrow[d, "f"] \\
& \mathcal{A}'(FA, FA)
\end{tikzcd}$$

Définition 17

Soient $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ une catégorie multiplicative, $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$, $\underset{\sim}{\mathcal{A}}'$ deux $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégories et (F, f), (G, g) *deux $\mathcal{U}$-foncteurs de $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ vers $\underset{\sim}{\mathcal{A}}'$. Une $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-transformation naturelle de* (F, f) *vers* (G, g) *est la donnée, pour tous objets* A, B *de* $|\mathcal{A}|$, *d'un morphisme de $\mathcal{U}$*

$$\alpha_{AB} : \mathcal{A}(A, B) \longrightarrow \mathcal{A}'(FA, GB)$$

rendant commutatifs les deux diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A, B) \otimes \mathcal{A}(B, C) \arrow[r, "f \otimes \alpha"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{A}'(FA, FB) \otimes \mathcal{A}'(FB, GC) \arrow[d, "\mu'"] \\
\mathcal{A}(A, C) \arrow[r, "\alpha"'] & \mathcal{A}'(FA, GC)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(A, B) \otimes \mathcal{A}(B, C) \arrow[r, "\alpha \otimes g"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathcal{A}'(fA, GB) \otimes \mathcal{A}'(gB, gC) \arrow[d, "\mu'"] \\
\mathcal{A}(A, C) \arrow[r, "\alpha"'] & \mathcal{A}'(fA, GC)
\end{tikzcd}$$

Théorème 3

Soit $\mathcal{U}$ une catégorie multiplicative.
Les $\mathcal{U}$-catégories, $\mathcal{U}$-foncteurs et $\mathcal{U}$-transformations naturelles constituent une 2-catégorie, notée Cat ($\mathcal{U}$).

§ 2 : Les $\mathcal{U}$-categories libres.

Définition 18

Une catégorie multiplicative $\mathcal{U}$ est dite bien complète à droite si

(1) $\mathcal{U}$ est complète à droite

(2) le bifoncteur $\otimes$ commute aux limites inductives.

Etant donné une catégorie multiplicative $\mathcal{U}$, un $\mathcal{U}$-type de diagramme est un couple $(|\mathcal{D}|, \mathcal{D})$ où

(1) $|\mathcal{D}|$ est un ensemble

(2) pour tous objets C, D de $|\mathcal{D}|$, $\mathcal{D}(C, D)$ est un objet de $\mathcal{U}$.

Si $(|\mathcal{D}'|, \mathcal{D}')$ est un autre $\mathcal{U}$-type de diagramme, un morphisme de $(|\mathcal{D}|, \mathcal{D})$ vers $(|\mathcal{D}'|, \mathcal{D}')$ est un couple (F, f) où

(1) $F : |\mathcal{D}| \longrightarrow |\mathcal{D}'|$ est une application,

(2) Pour tous objets C, D de $|\mathcal{D}|$

$$f_{C,D} : \mathcal{D}(C, D) \longrightarrow \mathcal{D}'(FC, FD)$$

est un morphisme de $\mathcal{U}$.

Nous obtenons de la sorte la catégorie Typ $(\mathcal{U})$ des $\mathcal{U}$-types de diagrammes.

Théorème 4

Soit $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ une catégorie multiplicative bien complète à droite. Le foncteur d'oubli

$$U : Cat\ (\mathcal{U}) \longrightarrow Typ\ (\mathcal{U})$$

admet un adjoint à gauche F.

Soit $\underset{\sim}{\mathfrak{D}} = (|\mathfrak{D}|, \mathfrak{D})$ un $\mathcal{U}$-type de diagramme.

Notons $\mathcal{M}_{\circ}^{+}(|\mathfrak{D}|)$ l'ensemble obtenu en privant le monoïde libre engendré par $|\mathfrak{D}|$ de son élément neutre (la suite vide). Construisons encore l'application

$$\Phi : \mathcal{M}_{\circ}^{+}(|\mathfrak{D}|) \longrightarrow \mathcal{O}b\ (\mathcal{U})$$

$$\begin{cases} \text{si } D \in |\mathfrak{D}|,\ \Phi(D) = I \\ \text{si } D_1 \dots D_n \in \mathcal{M}_{\circ}^{+}(|\mathfrak{D}|) \text{ avec } n > 1 \\ \qquad \Phi(D_1 \dots D_n) = \mathfrak{D}(D_1, D_2) \otimes \dots \otimes \mathfrak{D}(D_{n-1}, D_n). \end{cases}$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir $F(\underset{\sim}{\mathfrak{D}})$:

(1) $|F(\underset{\sim}{\mathfrak{D}})| = |\mathfrak{D}|$

(2) $$F(\underset{\sim}{\mathfrak{D}})(D, D') = \coprod_{\substack{m \in \mathcal{M}_{\circ}^{+}(|\mathfrak{D}|) \\ \partial_{\circ}(m) = D \\ \partial_1(m) = D'}} \Phi(m)$$

où $\partial_{\circ}$ et ∂_1 désignent respectivement les applications "source" et "but".

(3) $\mu_{D_1,\, D_2,\, D_3} : F(\underset{\sim}{\mathcal{D}})(D_1, D_2) \otimes F(\underset{\sim}{\mathcal{D}})(D_2, D_3) \longrightarrow F(\underset{\sim}{\mathcal{D}})(D_1,$

en vertu des hypothèses, il faut définir un morphisme du type

$$\coprod_{m,\, n} [\Phi(m) \otimes \Phi(n)] \longrightarrow \coprod_{p} \Phi(p)$$

avec $\partial_o(m) = D_1$, $\partial_1(m) = \partial_o(n) = D_2$, $\partial_1(n) = D_3$

$$\partial_o(p) = D_1,\ \partial_1(p) = D_3.$$

Mais pour m et n fixés,

$$\Phi(m) \otimes \Phi(n) = \mathcal{D}(D, \bar{D}_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{D}(\bar{D}_i, D_2) \otimes \mathcal{D}(D_2, \bar{\bar{D}}_1) \otimes \dots$$
$$\otimes \mathcal{D}(\bar{\bar{D}}_j, D_3)$$

est un des facteurs de la somme $\coprod_p \Phi(p)$, d'où μ est simplement l'unique morphisme rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \coprod_{m,\, n} [\Phi(m) \otimes \Phi(n)] \arrow[r, "\mu"] & \coprod_{p} \Phi(p) \\ \Phi(m) \otimes \Phi(n) \arrow[u, "s"] \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

où les flèches notées s sont les injections canoniques.

(4) $\eta_D : I \longrightarrow F(\underset{\sim}{\mathcal{D}})(D, D)$ est l'injection canonique de $\Phi(D) = I$ dans la somme $F(\underset{\sim}{\mathcal{D}})(D, D)$.

On remarque alors aisément que pour toute $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégorie $\underset{\sim}{\mathcal{Q}}$ on a des bijections naturelles en $\underset{\sim}{\mathcal{Q}}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}\ (\underset{\sim}{\mathcal{U}})}\ (F\ (\underset{\sim}{\mathfrak{D}}),\underset{\sim}{\mathcal{Q}}) \approx \mathrm{Hom}_{\mathrm{Typ}\ (\underset{\sim}{\mathcal{U}})}\ (\underset{\sim}{\mathfrak{D}}\ ,\ \underset{\sim}{\mathcal{Q}})$$

d'où l'application F s'étend en un foncteur

$$F\ :\ \mathrm{Typ}\ (\underset{\sim}{\mathcal{U}}) \longrightarrow \mathrm{Cat}\ (\underset{\sim}{\mathcal{U}})$$

adjoint à gauche de U .

En particulier si $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ est close, tout objet X de $\mathcal{U}$ engendre un type de diagramme trivial ayant le singleton {X} comme ensemble d'objets et tel que $\mathfrak{D}(X,\ X) = \mathcal{U}(X,\ X)$. La $\mathcal{U}$-catégorie F $(\underset{\sim}{X})$ engendrée est telle que

$$F\ (\underset{\sim}{X})\ (X,\ X) = \coprod_{n\in\mathbb{N}} (\overset{n}{\otimes}\ X)$$

c'est-à-dire que F $(\underset{\sim}{X})$ (X, X) est le monoïde libre engendré par X.

Nous allons maintenant chercher à construire un adjoint à gauche G et un adjoint à droite D au foncteur d'oubli (foncteur "objets"

$$\mathcal{O}b\ :\ \mathrm{Cat}\ (\underset{\sim}{\mathcal{U}}) \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

$$(|\mathcal{Q}|\ \mathcal{Q},\ \mu,\ \eta) \rightsquigarrow |\mathcal{Q}|.$$

Rappelons que dans le cas où $\underset{\sim}{\mathcal{U}} = \underset{\sim}{\mathrm{Ens}}$

(1) DE est la catégorie possédant E pour ensemble d'objets et une seule flèche de chaque objet vers chaque autre.

(2) GE est la catégorie discrète sur E, c'est-à-dire celle possédant E comme ensemble d'objets et n'ayant comme flèches que les identités.

En outre le foncteur G admet lui-même un adjoint à gauche C, à savoir le foncteur qui à une catégorie $\mathcal{X}$ associe l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{X}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Cat} \arrow[d, bend right=60, "C"'] \arrow[d, shift left, "\mathrm{Ob}"] \\
\mathrm{Ens} \arrow[u, shift left, "C"] \arrow[u, bend right=60, "D"']
\end{tikzcd}$$

$$C \dashv G \dashv \mathrm{Ob} \dashv D.$$

Ces propriétés se généralisent comme suit dans le cadre relatif :

Théorème 5

Si la catégorie multiplicative $\mathcal{U}$ *possède un objet final 1, le foncteur* $\mathrm{Ob} : \mathrm{Cat}\,(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathrm{Ens}$ *admet un adjoint à droite* $D : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathrm{Cat}\,(\mathcal{U})$ *injectif et plein tel que*
$\mathrm{Ob} \circ D = 1_{\mathrm{Ens}}$.

Si E est un ensemble, nous définissons

(1) $|DE| = E$

(2) si e_1 et e_2 sont deux éléments de E

$$DE\,(e_1, e_2) = 1.$$

Dès lors, les morphismes de composition $1 \otimes 1 \longrightarrow 1$ et les morphismes neutres $I \longrightarrow 1$ sont évidents. Il est alors immédiat que D s'agence en un foncteur vérifiant les conditions annoncées.

Théorème 6

Si la catégorie multiplicative $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ *possède un objet initial* 0, *le foncteur* Ob : Cat $(\underset{\sim}{\mathcal{U}}) \longrightarrow$ Ens *admet un adjoint à gauche* G : Ens $\longrightarrow$ Cat $(\mathcal{U})$ *injectif et plein , tel que* Ob $\circ$ G = 1_{Ens}.

Si E est un ensemble, nous définissons

(1) $|GE| = E$

(2) si e est un élément de E,

$$GE\ (e,\ e) = I$$

si e_1 et e_2 sont deux éléments <u>distincts</u> de E

$$GE\ (e_1,\ e_2) = 0$$

(3) si e_1, e_2, e_3 sont trois éléments de E

$$\mu_{e_1,\ e_2,\ e_3} : GE\ (e_1,\ e_2) \otimes GE\ (e_2,\ e_3) \longrightarrow GE\ (e_1,\ e_3)$$

a : si $e_1 \neq e_2$ ou $e_2 \neq e_3$, $GE\ (e_1,\ e_2) \otimes GE\ (e_2,\ e_3) = 0$

et $\mu_{e_1,\ e_2,\ e_3}$ est définie trivialement

b : si $e_1 = e_2 = e_3$, $\mu_{e_1,\ e_2,\ e_3} : I \otimes I \longrightarrow I$

est l'isomorphisme canonique.

(4) si e est un élément de E,

$$\eta_e : I \longrightarrow GE\ (e,\ e) = I$$

est le morphisme identité.

A nouveau, il est clair que G s'agence en un foncteur vérifiant les conditions indiquées.

On remarquera que G n'admet généralement pas d'adjoint à gauche. En effet, si $\mathcal{U}$ = Ab, G ne commute pas aux limites à gauche (et donc n'admet pas d'adjoint à gauche) car si E est un ensemble et e un élément de E

$$\begin{cases} (GE \times GE)((e, e), (e, e)) = GE\ (e, e) \times GE\ (e, e) = \mathbb{Z} \times \\ G\ (E \times E)((e, e), (e, e)) = \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Théorème 7

Si la catégorie multiplicative $\mathcal{U}$ est bien complète à droite, le foncteur d'oubli Cat $(\mathcal{U}) \longrightarrow$ Cat, *associant à une $\mathcal{U}$-catégorie sa catégorie sous-jacente, admet un adjoint à gauche.*

Nous allons déduire ce résultat de la construction plus générale suivante. Soient $\mathcal{A}$ une $\mathcal{U}$-catégorie et $\mathcal{X}$ une petite catégorie ; construisons une nouvelle $\mathcal{U}$-catégorie notée $\mathcal{A}[\mathcal{X}]$.

(1) $|\mathcal{A}[\mathcal{X}]| = |\mathcal{A}| \times \mathrm{Ob}\ (\mathcal{X})$

(2) $\mathcal{A}[\mathcal{X}]((A_1, X_1), (A_2, X_2)) = \coprod_{\xi \in \mathrm{Hom}(X_1, X_2)} \mathcal{A}(A_1, A_2)$

(3) $\bar{\mu} : \mathcal{A}[\mathcal{X}]((A_1, X_1), (A_2, X_2)) \otimes \mathcal{A}[\mathcal{X}]((A_2, X_2), (A_3, X_3)) \longrightarrow \mathcal{A}[\mathcal{X}]((A_1, X_1), (A_3, X_3))$

peut se définir, vu les hypothèses, comme étant un morphisme du type

$$\overline{\mu} : \coprod_{\substack{\xi_1 \in Hom(X_1,\ X_2) \\ \xi_2 \in Hom(X_2,\ X_3)}} \mathcal{A}(A_1,\ A_2) \otimes \mathcal{A}(A_2\ ,\ \mathcal{A}_3) \to \coprod_{\xi \in Hom(X_1,\ X_3)} \mathcal{A}(A_1,\ A_3)$$

et ce dernier n'est rien d'autre que l'unique factorisation à travers les sommes des morphismes

$$\mu : \mathcal{A}(A_1,\ A_2) \otimes \mathcal{A}(A_2,\ A_3) \longrightarrow \mathcal{A}(A_1,\ A_3)$$

(4) le morphisme

$$\bar{n}_{(A,\ X)} : I \longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{A}}\,[\mathfrak{X}]((A,\ X),\ (A,\ X))$$

n'est rien d'autre que le composé

$$I \xrightarrow{\ \bar{n}_A\ } \mathcal{A}(A,\ A) \xrightarrow{\ s_{1_X}\ } \coprod_{\xi \in Hom(X,\ X)} \mathcal{A}\,(A,\ A)$$

où s_{1_X} est l'injection canonique d'indice 1_X.

Particularisons maintenant la construction précédente en choisissant comme $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégorie le monoïde I :

$$\begin{cases} |\mathfrak{I}| = \{*\} \\ \mathfrak{I}(*,\ *) = I. \end{cases}$$

L'adjoint cherché n'est rien d'autre alors que

$$\underset{\sim}{\mathfrak{I}}\,[\quad] : Cat \longrightarrow Cat\ (\underset{\sim}{\mathcal{U}})$$

$$\mathfrak{X} \rightsquigarrow \underset{\sim}{\mathfrak{I}}\,[\mathfrak{X}]\ ;$$

il est en effet immédiat que $\underset{\sim}{\mathfrak{I}}\,[\mathfrak{X}]$ vérifie la propriété universelle souhaitée, d'où $\underset{\sim}{\mathfrak{I}}\,[\quad]$ s'étend bien en un foncteur adjoint à gauche du foncteur d'oubli de Cat ($\underset{\sim}{\mathcal{U}}$) vers Cat.

Dans le cas particulier où $\mathcal{U} = \mathcal{A}b$, $\mathcal{A}$ a un seul objet (= un anneau) et $\mathcal{X}$ a un seul objet (= un monoïde), la catégorie $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ [$\mathcal{X}$] est l'algèbre du monoïde $\mathcal{X}$ à coéfficients dans l'anneau $\mathcal{A}$. Donc si $\mathcal{X} = \mathbb{N}$ avec l'addition comme loi de composition, $\mathcal{A}$ [$\mathbb{N}$] est l'anneau des polynômes sur $\mathcal{A}$ à une indéterminée.

§ 3 : Propriétés de complétion de Cat ($\underset{\sim}{\mathcal{U}}$).

Théorème 8

Si la catégorie multiplicative $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ est complète à gauche, Cat ($\underset{\sim}{\mathcal{U}}$) est également complète à gauche.

Soit $(\underset{\sim}{\mathcal{A}}_i)_{i \in I}$ une famille de $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégories.
Notons $\underset{\sim}{\mathcal{A}} = \prod_{i \in I} \underset{\sim}{\mathcal{A}}_i$ leur produit défini comme suit

(1) $|\mathcal{A}| = \prod_{i \in I} |\mathcal{A}_i|$

(2) $\mathcal{A}((A_i)_{i \in I}, (A'_i)_{i \in I}) = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i (A_i, A'_i)$

(3) $\mu : \mathcal{A}((A_i), (A'_i)) \otimes \mathcal{A}((A'_i), (A''_i)) \longrightarrow \mathcal{A}((A_i), (A''_i))$

est l'unique factorisation rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i(A_i, A_i') \otimes \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i(A_i', A_i'') \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "p_i \otimes p_i"'] & \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i(A_i, A_i'') \arrow[d, "p_i"] \\
\mathcal{A}_i(A_i, A_i') \otimes \mathcal{A}_i(A_i', A_i'') \arrow[r, "\mu_i"] & \mathcal{A}_i(A_i, A_i'')
\end{tikzcd}$$

(4) $n : I \longrightarrow \mathcal{A}((A_i), (A_i))$ est l'unique morphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "n"] \arrow[dr, "n_i"'] & \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i(A_i, A_i) \arrow[d, "p_i"] \\
& \mathcal{A}_i(A_i, A_i)
\end{tikzcd}$$

Ceci montre donc que Cat $(\underset{\sim}{\mathcal{V}})$ a des produits. Cat $(\underset{\sim}{\mathcal{V}})$ a également des égalisateurs car si (F, f) et (G, g) sont deux $\mathcal{V}$-foncteurs :

$$\begin{tikzcd}
\overline{\underset{\sim}{\mathcal{A}}} \arrow[r, dashed] & \underset{\sim}{\mathcal{A}} \arrow[r, shift left, "(F, f)"] \arrow[r, shift right, "(G, g)"'] & \underset{\sim}{\mathcal{A}}'
\end{tikzcd}$$

on définit $\overline{\underset{\sim}{\mathcal{A}}}$ comme suit

(1) $|\overline{\mathcal{A}}| = \{A \mid A \in |\mathcal{A}| \ \text{ et } \ FA = GA\}$

(2) si A et B sont deux objets de $\overline{\mathcal{A}}$

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{A}}(A, B) \arrow[r, dashed] & \mathcal{A}(A, B) \arrow[r, shift left, "f_{A,B}"] \arrow[r, shift right, "g_{A,B}"'] & \mathcal{A}'(FA, FB) = \mathcal{A}'(GA, GB)
\end{tikzcd}$$

$\overline{\mathcal{A}}(A, B)$ est l'égalisateur de $f_{A,B}$ et de $g_{A,B}$.

(3) $\bar{\mu}$ est obtenue par unique factorisation

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{A}}(A, B) \otimes \overline{\mathcal{A}}(B, C) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\bar{\mu}"] & \mathcal{A}(A, B) \otimes \mathcal{A}(B, C) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\mu"] & \mathcal{A}'(FA, FB) \otimes \mathcal{A}'(FB, FC) \arrow[d, "\mu'"] \\
\overline{\mathcal{A}}(A, C) \arrow[r] & \mathcal{A}(A, C) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{A}'(FA, FC)
\end{tikzcd}$$

(4) de même que $\bar{n}$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[d, dashed, "\bar{n}"] \arrow[dr, "n"] \arrow[drr, "n'"] & & \\
\overline{\mathcal{A}}(A, A) \arrow[r] & \mathcal{A}(A, A) \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{A}'(FA, FA)
\end{tikzcd}$$

Théorème 9

Si la catégorie multiplicative $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$ est bien complète à droite, Cat $(\underset{\sim}{\mathcal{V}})$ est complète à droite.

Soit $(\underset{\sim}{\mathcal{A}}_i)_{i \in I}$ une famille de $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$-catégories.

$\underset{\sim}{\mathcal{A}} = \prod_{i \in I} \underset{\sim}{\mathcal{A}}_i$ est définie comme suit

(1) $|\mathcal{A}| = \coprod_{i \in I} |\mathcal{A}_i|$

$$(2)\quad \mathcal{A}(A_i, A'_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ \mathcal{A}_i\ (A_i, A'_i) \text{ si } i = j. \end{cases}$$

$$(3)\quad \mu : \mathcal{A}(A_i, A'_j) \otimes \mathcal{A}(A'_j, A''_k) \longrightarrow \mathcal{A}(A_i, A''_k) \ ;$$

si $i \neq j$ ou $j \neq k$, μ est définie trivialement ;

si $i = j = k$, $\mu \equiv \mu_i$

(4) $n : I \longrightarrow \mathcal{A}(A_i, A_i) = \mathcal{A}_i\ (A_i, A_i)$
est simplement n_i.

Cat ($\underset{\sim}{\mathcal{V}}$) admet donc des sommes dès que $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$ admet un objet initial avec lequel le foncteur $\otimes$ commute. Voyons maintenant que, sous les hypothèses du théorème, Cat ($\underset{\sim}{\mathcal{V}}$) admet des coégalisateurs.

Soient (F, f) et (G, g) deux $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$-foncteurs

$$\underset{\sim}{\mathcal{A}} \overset{(F,\ f)}{\underset{(G,\ g)}{\rightrightarrows}} \underset{\sim}{\mathcal{A}}' \dashrightarrow \underset{\sim}{Q}$$

(1) $|Q| = \dfrac{|\mathcal{A}'|}{\simeq}$

où la relation d'équivalence est engendrée par

$$\forall A \in |\mathcal{A}| \qquad FA \simeq GA$$

(2) soient B et C deux objets de $\mathcal{A}'$; Q ([B], [C]) est défini par le conoyau ci-dessous :

$$X \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\rightrightarrows}} X' \longrightarrow Q\ ([B],\ [C])$$

où X, X', ∂_0, ∂_1 sont définis comme suit :

$$X = \coprod \mathcal{A}'(B, \alpha_1 A_1) \otimes \mathcal{A}(A_1, A'_1) \otimes \mathcal{A}'(\beta_1 A'_1, \alpha_2 A_2)$$

$$\otimes \mathcal{A}(A_2, A'_2) \otimes \dots \otimes \mathcal{A}'(\beta_{n-1} A'_{n-1}, \alpha_n A_n)$$

$$\otimes \mathcal{A}(A_n, A'_n) \otimes \mathcal{A}'(\beta_n A'_n, C)$$

cette somme définissant X étant calculée sur toutes les suites $(\alpha_1, \dots \alpha_n, \beta_1, \dots \beta_n, A_1, \dots A_n, A'_1, \dots A'_n)$ où les α_i et les β_i sont soit F, soit G et les A_i, A'_i des objets de $|\mathcal{A}|$

$$X' = \coprod \mathcal{A}'(B, \alpha_1 A_1) \otimes \mathcal{A}'(\beta_1 A_1, \alpha_2 A_2) \otimes \dots$$

$$\dots \otimes \mathcal{A}'(\beta_{n-1} A_{n-1}, \alpha_n A_n) \otimes \mathcal{A}'(\beta_n A_n, C)$$

cette somme définissant X' étant calculée sur toutes les suites $(\alpha_1, \dots \alpha_n, \beta_1, \dots \beta_n, A_1, \dots A_n)$ où les α_i et les β_i sont soit F, soit G et les A_i des objets de $|\mathcal{A}|$

∂_o est l'unique factorisation entre les sommes correspondant à la famille de morphismes :

$$\mathcal{A}'(B, \alpha_1 A_1) \otimes \mathcal{A}(A_1, A'_1) \otimes \dots$$

$$\xrightarrow{1 \otimes \alpha_1 \otimes \dots} \mathcal{A}'(B, \alpha_1 A_1) \otimes \mathcal{A}'(\alpha_1 A_1, \alpha_1 A'_1) \otimes \dots$$

$$\xrightarrow{\mu' \otimes \dots} \mathcal{A}'(B, \alpha_1 A_1) \otimes \dots$$

∂_1 est l'unique factorisation entre les sommes correspondant à la famille de morphismes

$$\mathcal{A}'(B,\ \alpha_1 A_1) \otimes \mathcal{A}(A_1,\ A_1') \otimes \mathcal{A}'(\beta_1 A_1',\ \alpha_2 A_2) \otimes \dots$$

$$\Big\downarrow\ 1 \otimes \beta_1 \otimes 1 \otimes \dots$$

$$\mathcal{A}'(B,\ \alpha_1 A_1) \otimes \mathcal{A}'(\beta_1 A_1,\ \beta_1 A_1') \otimes \mathcal{A}'(\beta_1 A_1',\ \alpha_2 A_2) \otimes \dots$$

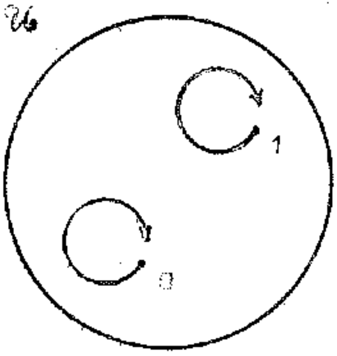
$$\Big\downarrow\ 1 \otimes \mu'$$

$$\mathcal{A}'(B,\ \alpha_1 A_2) \otimes \mathcal{A}'(\beta_1 A_1,\ \alpha_2 A_2) \otimes \dots$$

On remarquera que les théorèmes 8 et 9 donnent des conditions suffisantes pour que Cat $(\underset{\sim}{\mathcal{U}})$ soit complète à gauche ou à droite, mais ces conditions ne sont pas nécessaires comme le prouve l'exemple suivant.

Notons $\mathcal{U}$ la catégorie discrète à deux objets, notés 0 et 1. $\mathcal{U}$ se munit comme suit d'une structure multiplicative $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ admettant 1 comme unité

$\mathcal{U}$



$$\otimes : \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$$

$$\begin{cases} 0 \otimes 1 = 1 \otimes 0 = 0 \otimes 0 = 0 \\ 1 \otimes 1 = 1. \end{cases}$$

Si $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ est une $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégorie,

(1) il existe un morphisme $n_X : 1 \longrightarrow \mathcal{A}(X,\ X)$ pour tout objet X de $|\mathcal{A}|$ et donc $\mathcal{A}(X,\ X) = 1$.

(2) il existe un morphisme

$$\mu_{X,\ Y,\ X} : \mathcal{A}(X,\ Y) \otimes \mathcal{A}(Y,\ X) \longrightarrow \mathcal{A}(X,\ X)$$

pour tous objets X, Y de $|\mathcal{A}|$; comme $\mathcal{A}(X, X) = 1$,
$\mathcal{A}(X, Y) \otimes \mathcal{A}(Y, X) = 1$ et donc $\mathcal{A}(X, Y) = 1$.

Ceci montre que sur tout ensemble $|\mathcal{A}|$ d'objets il existe une unique structure de $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégorie définie par $\mathcal{A}(X, Y) = 1$ pour tous objets X et Y. En d'autres termes, on a un isomorphisme de catégories entre Cat ($\underset{\sim}{\mathcal{U}}$) et la catégorie des ensembles, ce qui prouve que Cat ($\underset{\sim}{\mathcal{U}}$) est complète à gauche et à droite. Or $\mathcal{U}$ n'est complète ni à gauche ni à droite, car $0 \amalg 1$ et 0×1 n'existent pas.

§ 4 : Produit tensoriel de $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégories.

Théorème 10

Si $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ est une catégorie multiplicative symétrique, la catégorie duale de toute $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégorie existe.

Soit $\mathcal{A}$ une $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégorie.

(1) $|\mathcal{A}^*| = |\mathcal{A}|$

(2) $\mathcal{A}^*(X, Y) = \mathcal{A}(Y, X)$

(3) $\mu^* : \mathcal{A}^*(X, Y) \otimes \mathcal{A}^*(Y, Z) \longrightarrow \mathcal{A}^*(X, Z)$

c'est-à-dire

$\mu^* : \mathcal{A}(Y, X) \otimes \mathcal{A}(Z, Y) \longrightarrow \mathcal{A}(Z, X)$

est le composé suivant :

$$\mathcal{A}(Y, X) \otimes \mathcal{A}(Z, Y) \simeq \mathcal{A}(Z, Y) \otimes \mathcal{A}(Y, X) \xrightarrow{\mu} \mathcal{A}(Z, X)$$

(4) $n^*_X : I \longrightarrow \mathcal{A}^*(X, X) = \mathcal{A}(X, X)$

$n^*_X = n_X$.

<u>Théorème 11</u>

Si $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ est une catégorie multiplicative symétrique, le produit tensoriel de deux $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégories existe.

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégories.

(1) $|\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}'| = |\mathcal{A}| \times |\mathcal{A}'|$

(2) $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}')((A_1, A'_1), (A_2, A'_2)) = \mathcal{A}(A_1, A_2) \otimes \mathcal{A}'(A'_1, A'_2)$

(3)
$$\begin{array}{c}
(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}')((A_1, A'_1), A_2, A'_2)) \otimes (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}')((A_2, A'_2), (A_3, A'_3)) \\
\Big\downarrow \mu \\
(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}')((A_1, A'_1), (A_3, A'_3))
\end{array}$$

est le composé suivant

$$\begin{array}{c}
\mathcal{A}(A_1, A_2) \otimes \mathcal{A}'(A'_1, A'_2) \otimes \mathcal{A}(A_2, A_3) \otimes \mathcal{A}'(A'_2, A'_3) \\
\wr\!\!\!\wr \\
\mathcal{A}(A_1, A_2) \otimes \mathcal{A}(A_2, A_3) \otimes \mathcal{A}'(A'_1, A'_2) \otimes \mathcal{A}'(A'_2, A'_3) \\
\Big\downarrow \mu \otimes \mu' \\
\mathcal{A}(A_1, A_3) \otimes \mathcal{A}'(A'_1, A'_3)
\end{array}$$

(4) $n_{(A,\ A')} : I \longrightarrow (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}')((A, A'), (A, A'))$ est le composé suivant

$$I \simeq I \otimes I \xrightarrow{n_A \otimes n'_{A'}} \mathcal{A}(A, A) \otimes \mathcal{A}'(A', A').$$

En particulier, si $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$ est symétrique et bien complète à droite, $\underset{\sim}{\mathcal{A}}[\mathcal{X}] = \mathcal{A} \otimes \underset{\sim}{\mathcal{I}}[\mathcal{X}]$ (cfr. théorème 7).

§ 5 : Caractère fermé de Cat ($\underset{\sim}{\mathcal{V}}$).

Théorème 12

Si $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$ est une catégorie multiplicative symétrique, close et complète à gauche, Cat ($\underset{\sim}{\mathcal{V}}$) est également une catégorie multiplicative symétrique close et complète à gauche.

En vertu des théorèmes 8 et 11, il reste à voir le caractère clos de Cat ($\underset{\sim}{\mathcal{V}}$). Construisons donc un bifoncteur

$$\text{Cat}(\underset{\sim}{\mathcal{V}})^* \times \text{Cat}(\underset{\sim}{\mathcal{V}}) \longrightarrow \text{Cat}(\underset{\sim}{\mathcal{V}})$$

$$(\mathcal{A}, \mathcal{A}') \rightsquigarrow \mathcal{A}'^{\mathcal{A}}$$

(1) $|\mathcal{A}'^{\mathcal{A}}| = \{(F, f) : \underset{\sim}{\mathcal{A}} \longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{A}'} \mid (F, f)$ est un $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$-foncteur$\}$

(2) si (F, f) et (G, g) sont deux objets de $|\mathcal{A}'^{\mathcal{A}}|$,

$$\mathcal{A}'^{\mathcal{A}}((F, f), (G, g))$$

est défini comme étant l'égalisateur ci-dessous

$$\mathcal{A}'^{\mathcal{A}}((F,f),(G,g)) \dashrightarrow \prod_{A\in|\mathcal{A}|} \mathcal{A}'(FA,GA) \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\rightrightarrows}} \prod_{A,B\in|\mathcal{A}|} \mathcal{V}(\mathcal{A}(A,B),\mathcal{A}'(FA,GB))$$

où ∂_0 et ∂_1 sont définis comme suit :
aux deux morphismes

$$\mathcal{A}'(FA,GA)\otimes\mathcal{A}(A,B) \xrightarrow{1\,\otimes\, g} \mathcal{A}'(FA,GA)\otimes\mathcal{A}'(GA,GB) \xrightarrow{\mu'} \mathcal{A}'(FA,GB)$$

$$\begin{array}{l} \mathcal{A}'(FB,GB)\otimes\mathcal{A}(A,B) \xrightarrow{1\,\otimes\, f} \mathcal{A}'(FB,GB)\otimes\mathcal{A}'(FA,FB) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wr\!\wr \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{A}'(FA,FB)\otimes\mathcal{A}'(FB,GB) \xrightarrow{\mu'} \mathcal{A}'(FA,GB) \end{array}$$

correspondent, vu le caractère clos de $\mathcal{V}$, deux morphismes d_0 et d_1 ; ∂_0 et ∂_1 sont alors les uniques morphismes rendant commutatifs les deux diagrammes ci-après :

$$\begin{tikzcd} \prod_{A} \mathcal{A}'(FA,GA) \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d] & \prod_{A,B} \mathcal{V}(\mathcal{A}(A,B),\mathcal{A}'(FA,GB)) \arrow[d] \\ \mathcal{A}'(FA,GA) \arrow[r, "d_i"'] & \mathcal{V}(\mathcal{A}(A,B),\mathcal{A}'(FA,GB)) \end{tikzcd}$$

Le reste de la démonstration est alors un calcul de routine.

<u>Corollaire</u>

Si $\mathcal{V}$ est une catégorie multiplicative symétrique, close, complète à gauche et bien complète à droite et si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{V}$-catégorie, le foncteur

$$\begin{array}{c} Cat(\mathcal{V}) \longrightarrow Cat \\ \mathfrak{B} \rightsquigarrow \mathfrak{B}^{\mathcal{A}} \end{array}$$

admet pour adjoint à gauche le foncteur

$$\mathit{Cat} \longrightarrow \mathit{Cat}\ [\underset{\sim}{\mathcal{U}}]$$

$$\mathcal{X} \rightsquigarrow \mathfrak{A}[\mathcal{X}]$$

car $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}\ (\mathcal{U})}\ (\underset{\sim}{\mathfrak{A}}[\mathcal{X}], \mathfrak{B}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}\ (\underset{\sim}{\mathcal{U}})}\ (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{I}[\mathcal{X}], \mathfrak{B})$

$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}\ (\mathcal{U})}\ (\mathfrak{I}[\mathcal{X}] \otimes \mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}\ (\underset{\sim}{\mathcal{U}})}\ (\mathfrak{I}[\mathcal{X}], \mathfrak{B}^{\mathfrak{A}})$

$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}\ (\mathcal{X}, \mathfrak{B}^{\mathfrak{A}})$.

CHAPITRE 5 :

Extensions de Kan.

§ 1 : Les catégories $\mathcal{U}$-complètes.

Dans ce paragraphe, les $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégories sont supposées posséder une classe d'objets et non nécessairement un ensemble d'objets.

Définition 19

Soient $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ une catégorie multiplicative bien complète à droite et $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ une $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégorie. $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ est dite $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-complète à droite si

(1) *la catégorie sous-jacente à $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ est complète à droite*

(2) $\forall\, U \in |\mathcal{U}| \qquad \forall\, A \in |\mathcal{A}| \qquad \exists\, U \otimes A \in |\mathcal{A}|$ *tel que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\,(U \otimes A,\ B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}\,(U,\ \mathcal{A}(A,\ B))$$

et ce de manière naturelle en U, A, B.

Définition 20

Soient $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ une catégorie multiplicative complète à gauche et $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ une $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ catégorie. $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ est dite $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-complète à gauche si

(1) *la catégorie sous-jacente à $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ est complète à gauche*

(2) $\forall\, \mathcal{U} \in |\mathcal{V}| \qquad \forall\, A \in |\mathcal{A}| \qquad \exists\, A^{\mathcal{U}} \in |\mathcal{A}|$ *tel que*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A^{\mathcal{U}}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, \mathcal{A}(B, A))$$

et ce de manière naturelle en $\mathcal{U}$, A, B.

Citons quelques exemples de telles situations :

(1) si $\underset{\sim}{\mathcal{V}} = \underset{\sim}{\mathrm{Ens}}$ (avec comme multiplication le produit cartésien)

a - $\mathcal{U} \otimes A = \coprod_{u \in \mathcal{U}} A$ car

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(\coprod_{u\in\mathcal{U}} A, B\right) \simeq \prod_{u\in\mathcal{U}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\mathcal{U}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B))$$

b - $A^{\mathcal{U}} = \prod_{u\in\mathcal{U}} A$ car

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\left(B, \prod_{u\in\mathcal{U}} A\right) \simeq \prod_{u\in\mathcal{U}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A)$$

$$\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\mathcal{U}, \mathrm{Hom}(B, A))$$

d'où dans ce cas, la complétion est équivalente à la $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$-complétion

(2) si $\underset{\sim}{\mathcal{V}} = \underset{\sim}{\mathrm{Ab}}$ (avec comme multiplication le produit tensoriel), tout objet $\mathcal{U}$ de Ab peut s'écrire comme quotient de deux groupes abéliens libres :

$$\mathbb{Z}^{(\mathbb{Z}^{(\mathcal{U})})} \underset{\delta_{\mathbb{Z}^{(\mathcal{U})}}}{\overset{\mathbb{Z}^{(\delta_{\mathcal{U}})}}{\rightrightarrows}} \mathbb{Z}^{(\mathcal{U})} \longrightarrow \mathcal{U}$$

dès lors si A est un objet d'une $\underset{\sim}{\mathrm{Ab}}$-catégorie,

a - $\mathcal{U} \otimes A$ est défini par le conoyau suivant

$$\coprod_{\mathbb{Z}^{(U)}} A \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\rightrightarrows}} \coprod_{U} A \longrightarrow U \otimes A$$

où ∂_0 est induit par l'application δ_U existant entre les ensembles d'indices, tandis que ∂_1 est l'unique factorisation entre les sommes de la famille suivante de morphismes d_f : pour tout élément f de $\mathbb{Z}^{(U)}$, c'est-à-dire pour toute application $f : U \longrightarrow \mathbb{Z}$ presque partout nulle, considérons les injections canoniques,

$$A_f \xrightarrow{s_u} \coprod_{U} A$$

pour tout élément u de U : d_f est alors la somme suivante :

$$d_f = \sum_{U} f(u).s_u$$

$$d_f : A_f \longrightarrow \coprod_{U} A$$

ce qui a bien un sens puisque f est presque partout nulle.

b - A^U est défini par l'égalisateur suivant

$$A^U \longrightarrow \prod_{U} A \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\rightrightarrows}} \prod_{\mathbb{Z}^{(U)}} A$$

où ∂_0 est l'unique factorisation entre les produits correspondant à la famille de projections

$$p_{\delta_U}(f) : \prod_{U} A \longrightarrow A$$

pour tout élément f de $\mathbb{Z}^{(U)}$, tandis que ∂_1 est l'unique factorisation correspondant à la famille q_f de morphismes définie comme suit :

$$\begin{cases} q_f = \sum_{U} f(u).p_u \\ q_f : \prod_{U} A \longrightarrow A_f \end{cases}$$

où $p_u : \underset{u}{\pi} A \longrightarrow A$ désigne la projection d'indice u.

(3) Si $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ vérifie les hypothèses du corollaire du théorème 12, Cat ($\underset{\sim}{\mathcal{U}}$) est $\underset{\sim}{\text{Cat}}$-complète à gauche et à droite :

$$\mathcal{X} \otimes \underset{\sim}{\mathcal{A}} = \underset{\sim}{\mathcal{A}} [\mathcal{X}]$$

$$\underset{\sim}{\mathcal{A}}^{\mathcal{X}} = \underset{\sim}{\mathcal{A}}^{\underset{\sim}{\mathfrak{I}[\mathcal{X}]}}$$

§ 2 : Les extensions de Kan (cas habituel).

Rappelons que si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont trois catégories et f, g deux foncteurs

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\overset{\eta}{\nearrow}"] & \mathcal{B} \arrow[d, dashed, shift right, "k"'] \arrow[d, dashed, shift left, "h"] \\ & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

l'extension de Kan à droite de g par f est la donnée d'un couple (k, η) où k : $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur et η : g $\Longrightarrow$ k f une transformation naturelle, le couple (k, η) étant universel pour cette propriété. En d'autres termes, l'extension de Kan à droite de g par f est un foncteur k : $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ tel que, pour tout foncteur h : $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$

$$\text{Nat}(g, h \circ f) \simeq \text{Nat}(k, h)$$

ces bijections étant naturelles en h.

Le théorème de Kan indique que si $\mathcal{A}$ est petite et $\mathcal{C}$ complète à droite, l'extension k existe.

Les exemples d'extensions de Kan sont nombreux:

(1) si F est adjoint à gauche de G

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift right, "F"'] & \mathcal{B} \arrow[l, shift right, "G"'] \end{tikzcd}$$

G est l'extension de Kan à droite de l'identité par F

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, equal] & \mathcal{B} \arrow[d, "G"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

(2) considérons la situation suivante

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, "Y"] \arrow[dr, "g"'] & \mathrm{Nat}\,(\Delta^{*}, \mathrm{Ens}) = \hat{\Delta} \arrow[d, dashed, shift right, "k"'] \\ & \mathrm{Top} \arrow[u, dashed, shift right, "1"'] \end{tikzcd}$$

où Y est le plongement de Yoneda et

$$g\ ([n]) = \Delta_n = n\text{-simplexe}.$$

L'extension à droite de g par Y existe : c'est le foncteur réalisation géométrique k. L'extension de Y par g existe également : c'est le foncteur complexe singulier 1.

(3) si $\mathcal{A}$ est petite et $\mathcal{C}$ complète à droite, pour tout foncteur g de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "Y"] \arrow[dr, "g"'] & \hat{\mathcal{A}} \arrow[d, dashed, shift right, "k"'] \\
& \mathcal{C} \arrow[u, dashed, shift right, "l"']
\end{tikzcd}$$

l'extension k de g par Y (plongement de Yoneda) existe de même que l'extension l de Y par g et k est adjoint à gauche de l.

§ 3 : Les $\mathcal{U}$-extensions de Kan.

Dans ce paragraphe, les $\mathcal{U}$-catégories sont supposées posséder une classe d'objets et non nécessairement un ensemble d'objets.

Définition 21

Soient $\mathcal{U}$ une catégorie multiplicative, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ trois $\mathcal{U}$-catégories et (F, f), (G, g) *deux $\mathcal{U}$-foncteurs.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "{(F,\ f)}"] \arrow[drr, "{(G,\ g)}"'] & & \mathcal{B} \arrow[d, dashed, shift right, "{(K,\ k)}"'] \arrow[d, dashed, shift left, "{(H,\ h)}"] \\ & & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

La $\mathcal{U}$-extension de Kan de (G, g) *par* (F, f), *si elle existe, est un $\mathcal{U}$-foncteur* (K, k) *de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ telle que l'on ait des bijections*

$$\mathcal{U}\text{-Nat}\ ((G,\ g),\ (H,\ h) \circ (F,\ f)) \simeq \mathcal{U}\text{-Nat}\ ((K,\ k),\ (H,\ h))$$

ces bijections étant $\mathcal{U}$-naturelles en (H, h).

Le théorème de Kan se généralise alors comme suit au cadre des $\mathcal{U}$-catégories.

Théorème 13

Soient $\mathcal{U}$ une catégorie multiplicative bien complète à droite, $\mathcal{A}$ une petite $\mathcal{U}$-catégorie, $\mathcal{C}$ une $\mathcal{U}$-catégorie $\mathcal{U}$-complète à droite, $\mathcal{B}$ une $\mathcal{U}$-catégorie et (F, f), (G, g) *deux $\mathcal{U}$-foncteurs :*

$$\begin{tikzcd} \underset{\sim}{\mathcal{A}} \arrow[rr, "{(F,\ f)}"] \arrow[drr, "{(G,\ g)}"'] & & \underset{\sim}{\mathcal{B}} \arrow[d, dashed, "{(K,\ k)}"] \arrow[dl, phantom, "\eta"] \\ & & \underset{\sim}{\mathcal{C}} \end{tikzcd}$$

Sous ces hypothèses, la $\mathcal{U}$-extension de Kan de (G, g) *par* (F, f) *existe. Si de plus $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ est close et complète à gauche, le foncteur*

$$\mathcal{C}^{(F,\ f)} : \mathcal{C}^{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$$

admet un adjoint à gauche.

Si B est un objet de $|\mathcal{B}|$, K(B) est défini au moyen du conoyau suivant

$$\begin{tikzcd} \coprod_{A,\ A' \in |\mathcal{A}|} G\ A \otimes \mathcal{A}(A,\ A') \otimes \mathcal{B}(F\ A',\ B) \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] & \coprod_{A \in |\mathcal{A}|} G\ A \otimes \mathcal{B}(F\ A,\ B) \arrow[r] & K\ B \end{tikzcd}$$

∂_0 et ∂_1 étant définis comme suit :
$\underset{\sim}{\mathcal{C}}$ étant $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-complète à droite, on a des bijections

$$\mathrm{Hom}\ (G\ A \otimes \mathcal{A}(A,\ A'),\ G\ A') \simeq \mathrm{Hom}\ (\mathcal{A}\ (A,\ A'),\ \mathcal{C}\ (G\ A,\ G\ A'))$$

$$\gamma_{A,\ A'} \leftrightsquigarrow g_{A,\ A'}$$

et nous noterons $\gamma_{A,\ A'}$ le morphisme en correspondance avec $g_{A,\ A'}$ par cette bijection :

∂_0 est alors l'unique factorisation à travers les sommes des morphismes

$$G\,A \otimes \mathfrak{A}(A, A') \otimes \mathfrak{B}(F\,A', B) \xrightarrow{\eta \otimes 1} G\,A' \otimes \mathfrak{B}(F\,A', B)$$

tandis que ∂_1 est la factorisation des morphismes

$$\begin{tikzcd}
G\,A \otimes \mathfrak{A}(A, A') \otimes \mathfrak{B}(F\,A', B) \arrow[dr, "1 \otimes f \otimes 1"] & & \\
& G\,A \otimes \mathfrak{B}(F\,A, F\,A') \otimes \mathfrak{B}(F\,A', B) \arrow[dr, "1 \otimes \mu"] & \\
& & G\,A \otimes \mathfrak{B}(F\,A, B).
\end{tikzcd}$$

Il faut encore, pour tous objets B, B' de $\mathfrak{B}$, construire un morphisme

$$k_{B,\,B'} : \mathfrak{B}(B, B') \longrightarrow \mathcal{C}(K\,B, K\,B').$$

$\mathcal{C}$ étant $\mathcal{U}$-complète à droite,

$$\mathrm{Hom}\,(K\,B \otimes \mathfrak{B}(B, B'), K\,B') \simeq \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{B}(B, B'), \mathcal{C}(K\,B, K\,B'))$$

$$\hat{k}_{B,\,B'} \rightsquigarrow k_{B,\,B'}$$

c'est équivalent à construire un morphisme

$$\hat{k}_{B,\,B'} : K\,B \otimes \mathfrak{B}(B, B') \longrightarrow K\,B' ;$$

mais le foncteur

$$- \otimes \mathfrak{B}(B, B') : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

commute aux limites à droite, car c'est un adjoint à gauche, d'où le morphisme $\hat{k}_{B,\ B'}$ s'obtient comme unique factorisation dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{A,\ A'} G\ A \otimes \mathcal{A}(A,\ A') \otimes \mathcal{B}(F\ A',\ B) \otimes \mathcal{B}(B,\ B') \arrow[dd, "\coprod_{A,\ A'} 1 \otimes \mu"'] \arrow[dr, shift left, "\partial_1 \otimes 1"] \arrow[dr, shift right, "\partial_\circ \otimes 1"'] & & \\
& \coprod_{A} G\ A \otimes \mathcal{B}(F\ A,\ B) \otimes \mathcal{B}(B,\ B') \arrow[dd, "\coprod_{A} 1 \otimes \mu"] \arrow[dr] & \\
\coprod_{A\ A'} G\ A \otimes \mathcal{A}(A,A') \otimes \mathcal{B}(F\ A',B') \arrow[dr, shift left, "\partial_1"] \arrow[dr, shift right, "\partial_\circ"'] & & k\ B \otimes \mathcal{B}(B,\ B') \arrow[dd, dashed, "\hat{k}_{B,\ B'}"] \\
& \coprod_{A} G\ A \otimes \mathcal{B}(F\ A,\ B') \arrow[dr] & \\
& & k\ B'
\end{tikzcd}$$

Nous avons donc déjà défini le $\mathcal{V}$-foncteur $(K,\ k)$. Définissons maintenant la $\mathcal{V}$-transformation naturelle

$$\eta\ :\ (G,\ g) \Longrightarrow (K,\ k) \circ (F,\ f)\ ;$$

pour tous objets A_1, A_2 de $\mathcal{A}$ il faut donc définir un morphisme ;

$$\eta_{A_1,\ A_2}\ :\ \mathcal{A}(A_1,\ A_2) \longrightarrow \mathcal{C}(G\ A_1,\ K\ F\ A_2).$$

Mais $\mathcal{C}$ est $\mathcal{V}$-complète à droite, donc

$$\mathrm{Hom}\ (G\ A_1 \otimes \mathcal{A}(A_1,\ A_2),\ K\ F\ A_2) \simeq \mathrm{Hom}\ (\mathcal{A}(A_1,\ A_2),\ \mathcal{C}(G\ A_1,\ K\ F\ A_2))$$

$$\hat{\eta}_{A_1,\ A_2} \longleftrightarrow \eta_{A_1,\ A_2}$$

il nous suffit de définir un morphisme

$$\hat{n}_{A_1,\ A_2} : G\ A_1 \otimes \mathcal{A}(A_1,\ A_2) \longrightarrow K\ F\ A_2$$

et ce dernier s'obtient comme suit

$$\begin{tikzcd}
G\ A_1 \otimes \mathcal{A}(A_1,\ A_2) \arrow[dr, "1 \otimes f"] & & & \\
& G\ A_1 \otimes \mathcal{B}(F\ A_1,\ F\ A_2) \arrow[dr, "s_{A_1}"] & & \\
& & \coprod_A G\ A \otimes \mathcal{B}(F\ A,\ F\ A_2) \arrow[dr] & \\
& & & K\ F\ A_2,
\end{tikzcd}$$

La propriété universelle découle aisément de ces constructions. En effet, si (H, h) est un $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$-foncteur et ρ une $\underset{\sim}{\mathcal{V}}$-transformation naturelle :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "(F,\ f)"] \arrow[dr, "(G,\ g)"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "(H,\ h)"] \\
\arrow[ur, phantom, "\Rightarrow \rho"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

il faut construire une $\mathcal{V}$-transformation naturelle

$$\rho' : (K,\ k) \Longrightarrow (H,\ h)$$

c'est-à-dire, pour tous objets B et B' de $\mathcal{B}$, un morphisme

$$\rho'_{B,\ B'} : \mathcal{B}(B,\ B') \longrightarrow \mathcal{C}(K\ B,\ H\ B').$$

A nouveau, vu le caractère $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-complet à droite de $\underset{\sim}{\mathcal{C}}$, cela revient à construire un morphisme

$$\hat{\rho}'_{B,\ B'} : K\ B \otimes \mathcal{B}(B,\ B') \longrightarrow H\ B',$$

ce dernier est obtenu comme suit :
pour tout objet A de $|\mathcal{A}|$ on a un morphisme

$$I \xrightarrow{\ n_A\ } \mathcal{A}(A,\ A) \xrightarrow{\ \rho_{A\ A}\ } \mathcal{C}(G\ A,\ H\ F\ A)$$

de l'existence duquel on déduit aisément l'existence d'un morphisme :

$$\mathcal{C}(\rho_{A\ A} \circ n_A,\ 1) : \mathcal{C}(H\ F\ A,\ H\ B') \longrightarrow \mathcal{C}(G\ A,\ H\ B') ;$$

on construit alors

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(F\ A,\ B) \otimes \mathcal{B}(B,\ B') \arrow[dr, "\mu"] & & & \\
& \mathcal{B}(F\ A,\ B') \arrow[dr, "h"] & & \\
& & \mathcal{C}(H\ F\ A,\ H\ B') \arrow[dr, "\mathcal{C}(\rho_{A\ A} \circ n_A,\ 1)"] & \\
& & & \mathcal{C}(G\ A,\ H\ B')
\end{tikzcd}$$

ce qui fournit pour tout A un morphisme

$$G\ A \otimes \mathcal{B}(F\ A,\ B) \otimes \mathcal{B}(B,\ B') \xrightarrow{\ d_A\ } H\ B'$$

et donc une factorisation à travers la somme

$$d : \coprod_A G\ A \otimes \mathcal{B}(F\ A,\ B) \otimes \mathcal{B}(B,\ B') \longrightarrow H\ B' \ ;$$

$$\begin{tikzcd}
\coprod\limits_{A\ A'} G\ A \otimes \mathcal{A}(A,\ A') \otimes \mathcal{B}(F\ A',\ B) \otimes \mathcal{B}(B,\ B') \arrow[dr, shift right, "\partial_1 \otimes 1"'] \arrow[dr, shift left, "\partial_0 \otimes 1"] & & \\
& \coprod\limits_A G\ A \otimes \mathcal{B}(F\ A,\ B) \otimes \mathcal{B}(B,\ B') \arrow[dl, "d"'] \arrow[dr] & \\
H\ B' & & K\ B \otimes \mathcal{B}(B,\ B') \arrow[ll, dashed, "\hat{\rho}'_{B,\ B'}"]
\end{tikzcd}$$

dès lors d égalise $\partial_0 \otimes 1$ et $\partial_1 \otimes 1$, d'où l'unique factorisation $\hat{\rho}'_{B,\ B'}$ cherchée.

On remarquera que les hypothèses sont des conditions suffisantes, mais pas des conditions nécessaires. En effet, si $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur et A un objet de $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}\ (A,\ -)"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "\mathrm{Hom}\ (F\ A,\ -)"] \\
& \mathrm{Ens}
\end{tikzcd}$$

l'extension de Hom (A, −) par F existe et est égale à Hom (F A, −) même si $\mathcal{A}$ n'est pas une petite catégorie.

CHAPITRE 6 :

Les $\mathcal{U}$ -préfaisceaux.

§ 1 : Les $\mathcal{U}$ -préfaisceaux.

Définition 22

Soient $\mathcal{U}$ une catégorie multiplicative et $\mathcal{A}$ une $\mathcal{U}$-catégorie. Un $\mathcal{U}$ -foncteur de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{U}$ est un couple (F, f) *où*

(1) $F : |\mathcal{A}| \longrightarrow |\mathcal{U}|$ *est une application*

(2) $\forall A, A' \in |\mathcal{A}|$

$$f_{A, A'} : F A \otimes \mathcal{A}(A, A') \longrightarrow F A'$$

(3) *les diagrammes des types suivants sont commutatifs*

$$\begin{tikzcd}
F A \otimes \mathcal{A}(A, A') \otimes \mathcal{A}(A', A'') \arrow[r, "1 \otimes \mu"] \arrow[d, "f \otimes 1"'] & F A \otimes \mathcal{A}(A', A'') \arrow[d, "\phi"] \\
F A' \otimes \mathcal{A}(A', A'') \arrow[r, "\phi"'] & F A''
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F A \simeq F A \otimes I \arrow[r, "1 \otimes \eta_A"] \arrow[dr, equal] & FA \otimes \mathcal{A}(A, A) \arrow[d, "\phi"] \\
 & F A
\end{tikzcd}$$

On remarquera que si $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ est close, alors $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ est une $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-catégorie et les définitions 16 et 22 fournissent la même notion de $\mathcal{U}$-foncteur vu l'existence des bijections

$$\mathrm{Hom}\,(FA \otimes \mathcal{A}\,(A, A'), F\,A') \approx \mathrm{Hom}\,(\mathcal{A}\,(A, A'), \mathcal{U}\,(F\,A, F\,A')).$$

Donnons quelques exemples de $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-foncteurs à valeurs dans $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$:

(1) Si $\underset{\sim}{\mathcal{U}} = \underset{\sim}{Ab}$ et $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ possède un seul objet, $\mathcal{A}\,(*, *)$ est un monoïde de $\underset{\sim}{Ab}$, c'est-à-dire un anneau. Un $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-foncteur de $\mathcal{A}$ vers $\underset{\sim}{Ab}$ est alors exactement un $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$-module à droite : en effet, on a bien une action

$$F\,(*) \otimes \mathcal{A}\,(*, *) \longrightarrow F\,(*)$$

et les axiomes expriment que $F\,(*)$ est un $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$-module à droite.

(2) Plus généralement, si $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ est une catégorie multiplicative et $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ possède un seul objet, un $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-foncteur de $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ vers $\underset{\sim}{Ab}$ est un objet de $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ sur lequel le monoïde $\mathcal{A}\,(*, *)$ opère à droite.

(3) Si $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ est une catégorie multiplicative et $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ une $\mathcal{U}$-catégorie, tout objet $A_o \in |\mathcal{A}|$ définit un $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-foncteur de $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$ vers $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$:

$$\mathcal{A}\,(A_o, -) : \underset{\sim}{\mathcal{A}} \longrightarrow \underset{\sim}{\mathcal{U}}$$

$$A \rightsquigarrow \mathcal{A}\,(A_o, A)$$

c'est bien un $\mathcal{U}$-foncteur puisque l'on a les morphismes

$$\mathcal{A}\,(A_o, A) \otimes \mathcal{A}\,(A, A') \xrightarrow{\mu} \mathcal{A}\,(A_o, A')$$

qui vérifie trivialement les conditions exigées.

§ 2 : Les $\mathcal{U}$ -bifoncteurs.

<u>Définition 23</u>

Soient $\mathcal{U}$ une catégorie multiplicative et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ deux $\mathcal{U}$-catégories.
Un $\mathcal{U}$ -bifoncteur covariant sur $\mathcal{A}$, contravariant sur $\mathcal{B}$ et à valeurs dans $\mathcal{U}$ est un triplet (F, α, β) *où*

(1) $F : |\mathcal{B}| \times |\mathcal{A}| \longrightarrow |\mathcal{U}|$ *est une application*

(2) $\forall A, A' \in |\mathcal{A}|, \forall B \in |\mathcal{B}|$

$$\alpha_{A, A', B} : F(B, A) \otimes \mathcal{A}(A, A') \longrightarrow F(B, A')$$

(3) $\forall B, B' \in |\mathcal{B}|, \forall A \in |\mathcal{A}|$

$$\beta_{B, B', A} : \mathcal{B}(B, B') \otimes F(B', A) \longrightarrow F(B, A)$$

(4) *les axiomes suivants sont satisfaits*

a - *Pour tout objet* B *fixé dans* $|\mathcal{B}|$, (F, α) *décrit un $\mathcal{U}$ -foncteur de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{U}$.*

b - *Pour tout objet* A *fixé dans* $|\mathcal{A}|$, (F, β) *décrit un $\mathcal{U}$ -foncteur de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{U}$.*

c - *Les diagrammes du type suivant sont commutatifs :*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(B, B') \otimes F(B', A) \otimes \mathcal{A}(A, A') \arrow[d, "\beta \otimes 1"'] \arrow[dr, "1 \otimes \alpha"] & \\
F(B, A) \otimes \mathcal{A}(A, A') \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathcal{B}(B, B') \otimes F(B', A') \arrow[d, "\beta"] \\
& F(B, A')
\end{tikzcd}$$

Dans le cas où $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ = $\underset{\sim}{Ab}$ et $\underset{\sim}{\mathcal{A}}$, $\mathcal{B}$ ont chacune un seul objet, un $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$-bifoncteur tel que décrit ci-dessus est un $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ -bimodule.

Remarquons que dans la définition 23, en supposant en outre que $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ possède un objet initial 0, si on se donne $\Phi = (F, \alpha, \beta)$, les axiomes énoncés au point (4) expriment exactement le fait que $C(\Phi)$ telle que décrite ci-dessous est une $\mathcal{U}$ -catégorie :

1) $|C(\Phi)| = |\mathcal{A}| \amalg |\mathcal{B}|$

2) $C(\Phi)(A_1, A_2) = \mathcal{A}(A_1, A_2)$

$C(\Phi)(B_1, B_2) = \mathcal{B}(B_2, B_1)$

$C(\Phi)(B, A) = F(B, A)$

$C(\Phi)(A, B) = 0$

3) $n_A : I \longrightarrow C(\Phi)(A, A) = \mathcal{A}(A, A)$

$n_B : I \longrightarrow C(\Phi)(B, B) = \mathcal{B}(B, B)$.

Remarquons encore que si $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ est symétrique, un $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ -bifoncteur tel que décrit dans la définition précédente est exactement un $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ -foncteur de $\underset{\sim}{\mathcal{B}}^{*} \otimes \underset{\sim}{\mathcal{A}}$ vers $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$.

Si $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ est une catégorie multiplicative, un $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ -bifoncteur tel que décrit ci-avant sera généralement appelé un $\underset{\sim}{\mathcal{U}}$ -distributeur.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. APPELGATE and M. TIERNEY - Categories with models. Sem. on triples and categorical homology theory (ETH - Zürich - 1966/67). Springer, Berlin (1969) ; 156-244.

[2] - Iterated cotriples - Lectures Notes in Math. 137 (1970) ; 56-100.

[3] M. BARR - Relational algebras - Lectures Notes in Math. 137 (1970) ; 39-56.

[4] - Coalgebras in a category of algebras. Lect. Notes in Math. 86 (1969) ; 1-13.

[5] - Composite cotriples and derived functors. Lect. Notes in Math. 80 (1969) ; 336-356.

[6] J. BECK - Distributive laws - Sem. on triples and categorical homology theory (ETH - Zürich - 1966/67). Springer, Berlin (1969) ; 119-140.

[7] J. BENABOU - Catégories avec multiplication ; c.R. Ac. Sc. Paris, 256 (1963) ; 1887-1890.

[8] - Algèbre élémentaire dans les catégories avec multiplication ; c.R. Ac. Sc. Paris, 258 (1964) ; 771-774.

[9] - Catégories relatives ; c.R. Ac. Sc. Paris, 260 (1965) ; 3824-3827.

[10] - Structures algébriques dans les catégories. Cah. top. géom. diff. (1968) ; 1-26.

[11] F. BORCEUX et R. LAVENDHOMME - Une axiomatique de l'algèbre catégorique relative. Rap. Sém. Math. Pure, Louvain, 17 (1972).

[12] - Catégories de foncteurs relatifs et lemme de Yoneda relatif. Rap. Sém. Math. Pure, Louvain, 18 (1972).

[13] F. BORCEUX - Les problèmes de représentation relatifs. Rap. Sém. Math. Pure, Louvain, 19 (1972).

[14] - Les problèmes universels relatifs. Rap. Sém. Math. Pure, Louvain, 20 (1972).

[15] - La théorie de Gel'fand comme exemple d'adjonction relative. Rap. Sém. Math. Pure, Louvain, 21 (1972).

[16] - Structures initiales et finales. Rap. Sém. Math. Pure, Louvain, 22 (1972).

[17] - Topologies généralisées, cas ensembliste et vectoriel. Rap. Sém. Math. Pure, Louvain (1972).

[18] F. BORCEUX et J.R. ROISIN - Structures internes et structures relatives. Rap. Sém. Math. Pure, Louvain (1972).

[19] M. BUNGE - Relative functor categories and categories of algebras ; J. Algebra, 11 (1969) ; 64-101.

[20] S. BURRIS - Clotem homomorphismes. J. Algebra, 1 (1970) ; 68-72.

[21] M.S. CALENKO - Functors between structured categories. Mat. Sb. (N.S.) 80 (122) ; (1969) ; 533-552.

[22] M. CHARTRELLE - Sur la catégorie des applications quasi-continues. Cah. Top. Géom. Diff. ; XI - 2 (1969) ; 215-226.

[23] J.M. CORDIER - Sur la notion de catégorie tensoriellement dominée ; c.R. Ac. Sc. Paris, 270 (1970) ; A - 572-574.

[24] B.J. DAY - On closed categories of functors. Lect. Notes Math., 137 (1970) : 1-38.

[25] B.J. DAY and G.M. KELLY - Enriched functor categories. Lect. Notes Math., 106 (1969) ; 178-192.

[26] E.J. DUBUC and R. STREET - Dinatural transformations. Lect. Notes Math., 137 (1970) ; 126-138.

[27] E.J. DUBUC - Kan extensions in enriched category theory. Lect. Notes Math. (1970).

[28] R. DAVIS - Equational systems of functors ; Report of the Midwest Category Seminar. Springer (1967) ; 92-109.

[29] A. DUMA - Morphismes among autonomous categories ; Lhud. Cuc. Mat., (19) ; (1967) ; 697-699.

[30] S. EILENBERG and G.M. KELLY - Closed categories ; Proc. conf. cat. alg. La Jolla ; Springer ; (1966) ; 421-562.

[31] S. EILENBERG and J.C. MOORE - Foundations of relative Homological Algebra ; A.M.S. (Memoir), 55 ; (1965).

[32] F. FOLTZ - Produit tensoriel généralisé. Cah. Top. Géom. Diff. ; 10 ; (1968) ; 301-331.

[33] M. FUCHS - Verallgemeinerte Homotopic Homomorphismen und klassifizierende Raüme ; Math. Ann. ; 161 ; (1965) ; 197-230.

[34] D.B. FUKS - Duality of functors in the category of homotopy types ; Dokl. Akad. Nauk. S.S.R.R. ; 175 ; (1967) ; Soviet. Math. (A.M.S.) ; 8-4 ; (1967) ; 1232-1235.

[35] - An homotopy duality ; Dokl. Akad. Nauk. S.S.R.R. ; 141 ; (1961) ; 818-821.

[36] - Natural transformations of functors in the category of topological spaces ; Mat. Sb. (N.S.) ; 62 ; (1963) ; 160-179.

[37] - Some remarks on the duality of functors in the category of Abelian groups ; Dokl. Akad. Nauk. S.S.R.R. ; 176 ; (1967) ; 273-276.

[38] D.B. FUKS and A.S. ŠVARC - On the homotopy theory of functors in the category of topological spaces. Dokl. Akad. Nauk. S.S.R.R. ; 143 ; (1962) ; 543-546.

[39] J.W. GRAY - The 2-adjointness in the fibred category construction ; Symposia Mathematica, IV ; (1970) ; 457-492.

[40] G.M. KELLY - Tensor products in categories ; J. Algebra, 2 ; (1965) ; 15-37.

[41] - Complete functors in homology (I-II) ; Proc. Cambridge Flibs. Soc. ; 60 ; (1964) ; 721-735 ; 737-749.

[42] - Adjunction for enriched categories ; Lect. Notes Math. ; 106 ; (1969) ; 166-177.

[43] - On Mac Lane's conditions for coherence of natural associativities, commutativities ; J. Algebra, 1 ; (1964) ; 97-402.

[44] L.M. KISSINA and A.S. ŠVARC - On the question of description of the duality functor ; Dokl. Akad. Nauk. S.S.R.R. ; 167 ; (1966) ; 282-285.

[45] A. KOCK - Closed categories generated by commutative monads ; preprint, Aarhus Universitet ; 13 ; (1968/69).

[46] - On monads in symetric monoïdal closed categories ; preprint, Aarhus Univ. ; 21 ; (1970).

[47] V.V. KUZNECOV et A.S. ŠVARC - Dualité des foncteurs et dualité des catégories ; Sb. Mat. Zh. ; 9-4 ; (1968) ; 840-856.

[48] V.V. KUZNECOV - Duality of functors in the category of sets with a distinguished point ; Dokl. Akad. Nauk. S.S.R.R. ; 159 ; (1964) ; 738-741.

[49] C. LAIR - Transformations $H^{\cdot\cdot}$ - naturelles et $H^{\cdot}$ - quintettes ; c.R. Ac. Sc. Paris ; 271 ; (1970) ; A - 213-216.

[50] R.G. LARSON - The order of the antipode of a Hopf algebra ; Proc. A.M.S. ; 21 ; (1969) ; 167-170.

[51] - An associative orthogona bilinear form for Hopf algebras ; Am. J. Math. ; 91 ; (1969) ; 75-94.

[52] R. LAVENDHOMME - Algèbre catégorique relative - I - La 2-catégorie CATREL ; Ann. Soc. Sci. Bruxelles ; I - 83 ; (1969) ; 339-352.

[53] - Algèbre catégorique relative - II - Les limites relatives ; Math. Zeit. ; 122 ; (1971) ; 275-284.

[54] - Algèbre catégorique relative - III - Les adjoints relatifs ; Math. Zeit. ; 122 ; (1971) ; 307-318.

[55] - Algèbre catégorique relative -IV - Les bifoncteurs homoïdes ; Rap. Sém. Math. Pure ; 3 ; Louvain ; (1970).

[56] - Algèbre catégorique relative - V - Lemmes de Yoneda ; Rap. Sém. Math. Pure ; 4 ; Louvain ; (1970).

[57] - Les objets de transformations naturelles. A paraître.

[58] F.W. LAWVERE - Diagonal arguments and cartesian closed categories ; Lect. Notes Math. ; 92 ; (1969) ; 134-145.

[59] F.E.J. LINTON - The functorial foundations of measure theory ; Dissertation ; Columbia University ; (1963).

[60] - Autonomous categories and duality of functors ; J. Algebra, 2 ; (1965) ; 315-349.

[61] - Relative functorial semantics : adjointness results ; Battelle Institute Conference ; Lect. Notes Math. ; 99 ; (1969) ; 384-419.

[62] - An outline of functorial semantics ; Sém. on triples and Categorical Homology Theory ; (ETH - Zürich - 1966/67) ; Springer (1969) ; 7-52.

[63] - Coequalizers in categories of algebras ; Sem. on Triples and Categorical Homology theory ; (ETH - Zürich - 1966/67) ; Springer (1969) ; 75-90.

[64] - Applied functorial semantics ; Sem. on Triples and Categorical Homology theory ; (ETH - Zürich - 1966/67) ; Springer (1969) ; 75-70.

[65] J. MAC DONALD - Coherence of adjoints associativities and identities ; Arch. Math. (Basel) ; 19 ; (1968) ; 398-401.

[66] - Relative functor representability ; Pacific J. Math. ; 23 ; (1967) ; 311-319.

[67] S. MAC LANE - Natural associativity and commutativity ; Rice Uni. Studies ; 49-4 ; (1963) ; 28-46.

[68] - An algebra of additive relations ; Proc. Ac. Sc. U.S.A. ; 43-7 ; (1961) ; 1043-1051.

[69] - Coherence and canonical maps ; Symposia Mathematica ; IV ; (1970).

[70] - Mappings as a Basic Mathematical Concept. Dep. Math. ; Univ. Chicago ; (1967).

[71] J.M. MARANDA - Catégories multiplicatives et catégories primitives ; Sém. Math. Sup. n° 10 ; Presse Univ. Montreal ; (1965) ; 111-126.

[72] E. MENDELSOHN - An elementary characterization of the category of relational systems ; Math. Zeit. ; 113-3 ; (1970) ; 224-233.

[73] T. NISHIDA - On sheaves with values in a category ; Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect ; A 10 ; (1969) ; 146-153.

[74] C.I. NIŢĂ - The standard resolution in a category with multiplication ; Shud. Cuc. Math. ; 19 ; (1967) ; 1285-1288.

[75] U. OBERST and H. ROHRL - Flat and coherent functors ; J. Algebra ; 14 ; (1970) ; 91-105.

[76] A.I. PILATOVSKAJA - Free objects in categories ; Sibirsk. Mat. Ž. ; 10 ; (1969) ; 1276-1299.

[77] R.S. POKASEEVA and A.S. ŠVARC - Duality of functors ; Mat. Sb. (N.S.) ; 71 ; (1966) ; 357-385.

[78] A.S. ŠVARC - Duality of functors ; Dokl. Akad. Nauk. S.S.R.R. ; 148 ; (1963) ; 288-291.

[79] S. TAKAHASHI - Analysis in categories. Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, n° 18 ; Queen's University ; Kingston ; (1969).

[80] M. TIERNEY - Autonomous categories with models ; Lecture Notes Math. ; 106 ; (1969) ; 130-166.

[81] F. ULMER - Representable functors with values in arbitrary categories ; J. Algebra , 8 ; (1968) ; 96-129.

[82] - Satelliten und derivierte funktoren ; Math. Zeit. 91 ; (1966) ; 216-266.

[83] - Properties of dense and relative adjoint functors J. Alg., 8 ; (1968) ; 77-95.

[84] H. WIESLER and G.J. CALUGAREANU - Remarks on triples in enriched categories ; Bull. Austral. Math. Soc. ; 3 ; (1970) ; 375-383.