

## QUELQUES REMARQUES SUR LES COSMOS ELEMENTAIRES

Par SYMÉON BOZAPALIDIS

On caractérise dans un cosmos, d'une part les flèches de Yoneda  $Y_X: X \rightarrow PX$ ,  $X$  petit, comme des cocomplétions absolues universelles des  $X$ , et d'autre part les «sous-objets réfléchis» des  $PX$ , c'est à dire les objets  $B$  qui figurent dans une situation

$$PX \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} B$$

où  $f$  est adjoint à gauche de  $g$ , et  $g$  est pleinement fidèle.

On a adopté les notations de Street [1], [4], [3]. Soit  $\underline{B}$  un cosmos et  $f: A \rightarrow B$  une flèche de  $\underline{B}$ , avec  $A$  petit et  $B$  légitime.

**Définition 1.** On dit que  $f$  est pleinement fidèle si

$$\underline{B}(X, f): \underline{B}(X, A) \rightarrow \underline{B}(X, B)$$

est un foncteur pleinement fidèle,  $\forall X \in \text{Ob}(\underline{B})$ .

**Proposition 1.** Les conditions suivantes sont équivalentes :

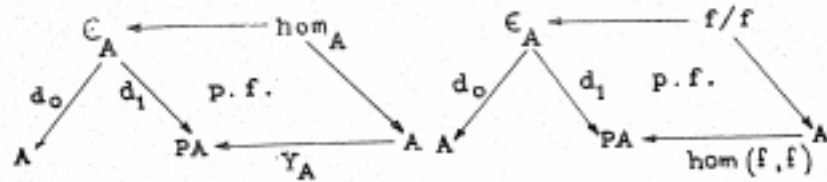
- a)  $f: A \rightarrow B$  est pleinement fidèle ;
- b)  $\text{hom}_A \simeq f/f$  ;
- c) le triangle

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ f \nearrow & & \searrow \text{hom}(f, 1) \\ A & \xrightarrow{Y_A} & PA \end{array}$$

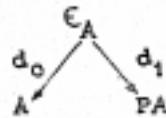
est isocommutatif, i.e.  $\text{hom}(f, 1) \cdot f \simeq Y_A$ .

*Preuve.* a)  $\Leftrightarrow$  b) voir [2], p. 128-129.

c)  $\Leftrightarrow$  b) Les deux flèches  $\text{hom}(f, 1) \cdot f = \text{hom}(f, f)$  et  $Y_A$  sont isomorphes si et seulement si les produits fibrés suivantes

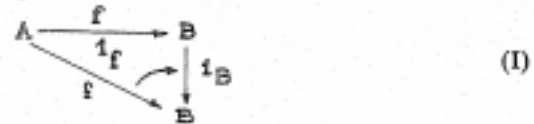


sont isomorphes, où



est la cofibration scindée «appartient à» (v. [3], p. 138). ■

**Définition 2.** On dit que la flèche  $f: A \rightarrow B$  est dense si



$1_f$  exhibe  $1_B$  comme une terme à terme extension à gauche de  $f$  le long de  $f$ .

On a le critère suivant de densité :

**Théorème 2.**  $f$  est dense ssi  $\text{hom}(f, 1): B \rightarrow PA$  est pleinement fidèle.

*Preuve.* Puisque  $f$  est admissible, alors en vertu de [3], th. 3b), (I) est une terme à terme extension à gauche (en abrégé tteg) ssi  $\text{hom}_B \simeq \text{hom}(f, 1) / \text{hom}(f, 1)$ , d'où le résultat (prop. 1b). ■

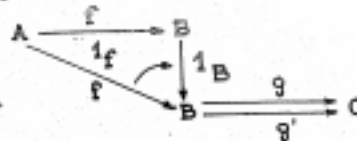
**Exemples.** i)  $1_A: A \rightarrow A$  est dense car  $\text{hom}(1, 1) = Y_A$  est pleinement fidèle.

ii)  $Y_A: A \rightarrow PA$  est dense car  $\text{hom}(Y_A, 1) \simeq 1$  est pleinement fidèle.

**Proposition 3.** Soient  $f: A \rightarrow B$  ( $A$  petit,  $B$  légitime) une flèche et  $g, g': B \rightarrow C$  deux flèches qui préservent les tteg, alors

$$g \cdot f \simeq g' \cdot f \Rightarrow g \simeq g'$$

*Preuve.* Par hypothèse



$g$  et  $g'$  sont les tteg de  $gf \simeq g'f$  le long de  $f$ , d'où  $g \simeq g'$ . ■

**Théorème 4.** Soit  $A \xrightleftharpoons[f]{g} B$  une situation d'adjonction  $(f \dashv g)$  avec  $A, B$  légitimes; alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- $g$  est pleinement fidèle
- $f$  est dense
- pour toute flèche dense  $k: C \rightarrow A$ ,  $C$  légitime, le composé  $f \cdot k$  est dense.

*Preuve.* a)  $\Rightarrow$  b) de  $f \dashv g$  on a

$$\text{hom}(f, 1) \simeq \text{hom}(1, g) \simeq \text{hom}(1, 1)g \simeq Y_A \cdot g$$

donc  $\text{hom}(f, 1)$  est pleinement fidèle, d'où  $f$  dense (th. 2).

b)  $\Rightarrow$  a) on a  $\text{hom}(f, 1) \simeq Y_A \cdot g$  et comme  $\text{hom}(f, 1)$  et  $Y_A$  sont pleinement fidèles,  $g$  l'est aussi.

a)  $\Rightarrow$  c) Des isomorphismes

$$\text{hom}(f \cdot k, 1) \simeq Pk \cdot \text{hom}(f, 1) \simeq Pk \cdot \text{hom}(1, g) \simeq \text{hom}(k, 1) \cdot g$$

on tire que  $\text{hom}(f \cdot k, 1)$  est pleinement fidèle et par conséquent  $f \cdot k$  dense (th. 2).

c)  $\Rightarrow$  b) On prend  $k = 1_A$ . ■

On a besoin maintenant d'une notion de cocomplétude rencontrée dans [3] p. 54. Plus précisément:

**Définition 3.** Un objet légitime  $A$  est dit absolument cocomplet si la flèche  $Y_A: A \rightarrow PA$  admet un adjoint à gauche, noté  $\text{lex}_A$ .

**Exemple.** Si  $A$  est petit,  $PA$  est absolument cocomplet car  $Y_{PA}$  admet  $PY_A$  comme adjoint à gauche (v. [3], th. 2).

L'intérêt de la proposition qui suit est central dans ce papier.

**Proposition 5.** Dans un cosmos  $\underline{B}$ , pour toute flèche  $f: X \rightarrow A$  où  $X$  petit et  $A$  absolument cocomplet, la iteg le long de  $Y_X$  existe et se donne par  $\text{lex}_A \cdot f$ . On la note alors  $\text{lex}_t$ .

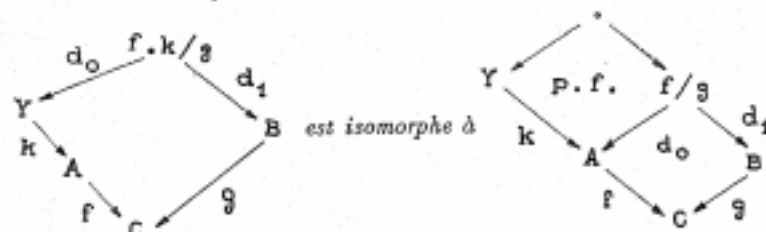
*Preuve.* On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{Y_X} & PX \\
 \downarrow f & & \uparrow Pf \\
 A & \xrightarrow{Y_A} & PA \\
 & \xleftarrow{\text{lex}_A} & 
 \end{array}$$

où  $lex_A \dashv Y_A$  par hypothèse,  $\exists f \dashv Pf$  (axiome 4 de la définition d'un cosmos, v. [1], p. 21) et  $Pf \cdot Y_A \simeq \text{hom}(f, 1)$ , donc [3], prop. 7 nous donne le resultat. ■

Les lemmes suivants sont indispensables pour la suite.

**Lemme 6.** *L'objet comma*



*Preuve.* Il suffit de prouver ça dans *Cat*. ■

**Lemme 7.** *Dans la situation d'adjonction*

$$A \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{matrix} B \quad (f \dashv g), \quad A, B \text{ legitimes}$$

la flèche  $f$  préserve les terme à terme extensions à gauche.

*Preuve.* Soit

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{m} & Y \\ & \searrow n & \downarrow k \\ & & A \end{array} \quad \text{avec } \alpha \text{ entre } m \text{ et } n \quad \text{(II)}$$

une telle extension; alors  $f$  la préserve ssi on a l'isomorphisme

$$\text{hom}(m, 1) / \text{hom}(f \cdot n, 1) \simeq f \cdot k / B \quad \text{(1)}$$

(v. [3], th. 3b). Mais

$$\text{hom}(m, 1) / \text{hom}(f \cdot n, 1) \simeq \text{hom}(m, 1) / \text{hom}(n, g) \simeq \text{hom}(m, 1) / \text{hom}(n, 1) \cdot g$$

et

$$f \cdot k / B \simeq k / g$$

donc (1) devient

$$\text{hom}(m, 1) / \text{hom}(n, 1) \cdot g \simeq k / g \quad \text{(2)}$$

(2) est une conséquence de [3], th. 3b) appliqué à (II) et du lemme 6. ■

**Proposition 8.** Soient  $X$  un objet petit et  $A$  absolument cocomplet; alors

a) le foncteur

$$\underline{B}(Y_X, A) : \underline{B}(PX, A) \rightarrow \underline{B}(X, A)$$

admet un adjoint à gauche;

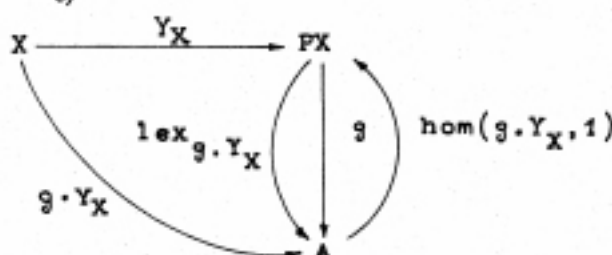
b) pour tout  $f: X \rightarrow A$ ,  $\text{lex}_f: PX \rightarrow A$  est adjoint à gauche de  $\text{hom}(f, 1)$  et  $\text{lex}_f Y_X \simeq f$ ;

c) une flèche  $g: PX \rightarrow A$  admet un adjoint à droite  $g': A \rightarrow PX$  si  $g$  preserve les tteg. Dans ce cas  $g' \simeq \text{hom}(g \cdot Y_X, 1)$ .

*Preuve.* a) résulte de la prop. 5.

b) c' est [3], prop. 7.

c)



La flèche  $\text{lex}_{g \cdot Y_X}$  préserve les tteg,

car  $\text{lex}_{g \cdot Y_X} \dashv \text{hom}(g \cdot Y_X, 1)$  (lemme 7).

D' autre part de l' isomorphisme

$$\text{lex}_{g \cdot Y_X} \cdot Y_X \simeq g \cdot Y_X$$

on tire

$$\text{lex}_{g \cdot Y_X} \simeq g \quad (\text{prop. 3})$$

d' où le resultat. ■

Nous sommes maintenant en mesure de donner les deux théorèmes de caractérisation, annoncés à l' introduction.

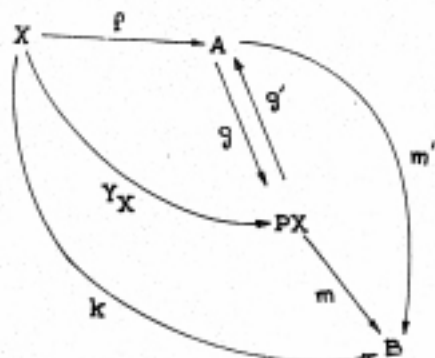
**Théorème 9.** (Caractérisation des flèches  $Y_A$ ). Soit  $f: X \rightarrow A$  une flèche avec  $X$  petit et  $A$  absolument cocomplet. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- Il existe une équivalence  $g: A \rightarrow PX$ , telle que  $gf \simeq Y_X$ ;
- $f$  est la cocomplémentation absolue universelle de  $X$ , i.e. pour toute

flèche  $k: X \rightarrow B$  avec  $B$  absolument cocomplet, il existe une seule (à isomorphisme près) flèche  $m: A \rightarrow B$  qui commute aux tteg et telle que  $m \cdot f \simeq k$ ;

c)  $\text{hom}(f, 1)$  est une équivalence.

Preuve. a)  $\Rightarrow$  b) Soit  $k: X \rightarrow B$  une flèche avec  $B$  absolument cocomplet



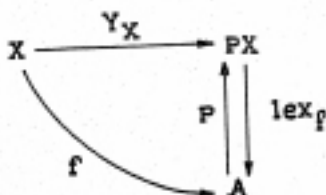
D'après la prop. 5 il existe  $m: PX \rightarrow B$  telle que  $m \cdot Y_X \simeq k$ , donc la flèche  $m \circ g$  répond à la question;  $(m \circ g) \cdot f \simeq m \cdot Y_X \simeq k$ .

D'autre part si  $m': A \rightarrow B$  est telle que  $m' \cdot f \simeq k$ , alors de

$$m' \cdot g' \cdot Y_X \simeq m' \cdot g' \cdot g \cdot f \simeq m' \cdot f \simeq k \simeq m \cdot Y_X$$

on tire, en vertu de la prop. 3, que  $m' \simeq m$

b)  $\simeq$  c)



$\text{lex}_p$  et  $p$  résultent de la prop. 3 et l'hypothèse b) respectivement. Comme

$$p \cdot \text{lex}_p \cdot Y_X \simeq p \cdot f \simeq Y_X$$

et les  $p \cdot \text{lex}_p, 1_{PX}$  préservent les tteg, on a d'après la prop. 3

$$p \cdot \text{lex}_p \simeq 1_{PX}$$

De même l' isomorphisme

$$\text{lex}_1 p \cdot f \simeq \text{lex}_1 Y_X \simeq f$$

et l'unicité dans l'hypothèse b) nous donne

$$\text{lex}_1 p \simeq 1_A$$

d'où finalement  $\text{hom}(f, 1) \simeq p$  est une équivalence.

c)  $\Rightarrow$  a) On prend  $g = \text{hom}(f, 1)$ . ■

Le théorème suivant caractérise les «objets reflectifs» d'un objet de la forme  $PX$ . Plus précisément :

**Théorème 10.** Pour un objet  $A$  de  $\underline{B}$  on a les conditions équivalentes :

a) Il existe un objet petit  $X$  de  $\underline{B}$  et une situation d'adjonction

$$PX \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} A$$

avec  $f \dashv g$  et  $g$  pleinement fidèle ;

b)  $A$  est absolument cocomplet et il existe une flèche dense  $k: X' \rightarrow A$ , avec  $X'$  petit.

Preuve. a)  $\Rightarrow$  b)

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{Y_X} & PX & \xrightarrow{Y_{PX}} & P^2X \\
 & \searrow^{f \cdot Y_X} & \downarrow f & \nearrow^{P_{Y_X}} & \downarrow P_f \\
 & & A & \xrightarrow{Y_A} & PA \\
 & & \uparrow g & & \uparrow P_g \\
 & & & & P^2X
 \end{array}$$

Puisque  $g$  est pleinement fidèle on a  $f \cdot Y_X$  dense (th. 4c). Pour démontrer que  $A$  est absolument cocomplet il suffit de montrer que

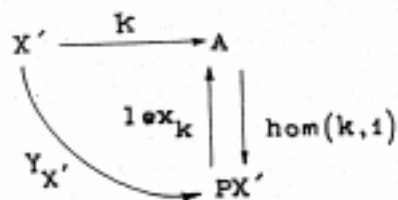
$$Y_A \simeq P_g \cdot Y_{PX} \cdot g \quad (1)$$

car on a  $f \dashv g$ ,  $P_{Y_X} \dashv Y_{PX}$  et  $Pf \dashv P_g$  ( $P$  renverse les flèches et les 2-cellules). Mais

$$P_g \cdot Y_{PX} \cdot g \simeq \text{hom}(g, g)$$

et on a  $Y_A \simeq \text{hom}(g, g)$  dès que  $g$  est pleinement fidèle (prop. 1c).

b)  $\Rightarrow$  c)



On a  $k$  donc  $\text{hom}(k, 1)$  pleinement fidèle. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Kelly, G. M. and Street, R. : *Abstracts of the Sydney category theory seminar 1972* (multigraphié)
- [2] Street, R. : *Fibrations and Yoneda's Lemma in a 2-category*. Springer Lecture Notes vol. 420 (1974). 104—133.
- [3] ——— : *Elementary cosmoi I*. Springer Lecture Notes vol. 420 (1974), 134—180.

Département des Mathématiques  
 Université de Ioannina  
 Ioannina, Grèce

(Reçu le 23 Février, 1975)