Bull. Soc. Math. Grèce
Tome 15 (1974), 144 - 151

QUELQUES REMARQUES SUR LES COSMOS ELEMENTAIRES

Par SYMÉON BOZAPALIDBS

On Caracterise dans un cosmos, d' une part les flièches de Yoneda $Y_X : X \to PX$, X petit, comme des cocompletions absolues universelles des X, et d' autre part les «sous-objets réflectifs» des PX, c' est à dire les objets B qui figurent dans une situation

$$PX \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$$

où f est adjoint à gauche de g, et g est pleinement fidèle.

On a adopté les notations de Street [1], [2], [3]. Soit $\underline{\underline{B}}$ un cosmos et $f: A \to B$ une flèche de $\underline{\underline{B}}$, avec A petit et B legitime.

Définition 1. *On dit que f est pleinement fidèle si*

$$\underline{\underline{B}}(X, f) : \underline{\underline{B}}(X, A) \to \underline{\underline{B}}(X, B)$$

est un foncteur pleinement fidèle, $\forall\, X \in Ob(\underline{\underline{B}})$.

Proposition 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *$f : A \to B$ est pleinement fidèle ;*

b) *$hom_A \simeq f/f$;*

c) *le triangle*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "\hom(f,1)"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "Y_A"'] & & PA \end{tikzcd}$$

est isocommutatif, i.e. $hom(f, 1) \cdot f \simeq Y_A$.

Preuve. a) $\Leftrightarrow$ b) voir [2], p. 128—129.

c) $\Leftrightarrow$ b) Les deux flèches $\hom(f, 1) \cdot f = \hom(f, f)$ et Y_A sont isomorphes si et seulement si les produits fibrés suivantes

$$\begin{tikzcd} & \in_A \arrow[dl, "d_0"'] \arrow[dr, "d_1"] & & \hom_A \arrow[ll] \arrow[dr] \arrow[dl, phantom, "p.f."] & \\ A & & PA & & A \arrow[ll, "Y_A"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \in_A \arrow[dl, "d_0"'] \arrow[dr, "d_1"] & & f/f \arrow[ll] \arrow[dr] \arrow[dl, phantom, "p.f."] & \\ A & & PA & & A \arrow[ll, "\hom(f,f)"] \end{tikzcd}$$

sont isomorphes, où

$$\begin{tikzcd} & \in_A \arrow[dl, "d_0"'] \arrow[dr, "d_1"] & \\ A & & PA \end{tikzcd}$$

est la cofibration scindée «appartient à» (v. [3], p. 138). ▮

Définition 2. *On dit que la flèche $f: A \to B$ est dense si*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "1_B"] \arrow[dl, phantom, "1_f"] \\ & B \end{tikzcd} \tag{I}$$

1_f exhibe 1_B comme une terme à terme extension à gauche de f le long de f.

On a le critère suivant de densité:

Théorème 2. *f est dense ssi $\hom(f, 1): B \to PA$ est pleinement fidèle.*

Preuve. Puisque f est admissible, alors en vertu de [3], th. 3b), (I) est une terme à terme extension à gauche (en abregé tteg) ssi $\hom_B \simeq \hom(f, 1)/\hom(f, 1)$, d' où le resultat (prop. 1b). ▮

Exemples. i) $1_A : A \to A$ est dense car $\hom(1, 1) = Y_A$ est pleinement fidèle.

ii) $Y_A : A \to PA$ est dense car $\hom(Y_A, 1) \simeq 1$ est pleinement fidèle.

Proposition 3. *Soient $f: A \to B$ (A petit, B legitime) une flèche et $g, g' : B \to C$ deux flèches qui preservent les tteg, alors*

$$g \cdot f \simeq g' \cdot f \Rightarrow g \simeq g'$$

Preuve. Par hypothèse

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "1_B"] \arrow[dl, phantom, "1_f"] & \\ & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & C \end{tikzcd}$$

g et g' sont les tteg de $gf \simeq g'f$ le long de f, d' où $g \simeq g'$. ▮

Théorème 4. *Soit* $A \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} B$ *une situation d' adjonction* $(f \dashv g)$ *avec* A, B *legitimes; alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) g *est pleinement fidèle*

b) f *est dense*

c) *pour toute flèche dense* $k : C \to A$, C *legitime, le composé* $f \cdot k$ *est dense.*

Preuve. a) $\Rightarrow$ b) de $f \dashv g$ on a

$$\hom(f, 1) \simeq \hom(1, g) \simeq \hom(1, 1)\, g \simeq Y_A \cdot g$$

donc $\hom(f, 1)$ est pleinement fidèle, d' où f dense (th. 2).

b) $\Rightarrow$ a) on a $\hom(f, 1) \simeq Y_A \cdot g$ et comme $\hom(f, 1)$ et Y_A sont pleinement fidèles, g l' est aussi.

a) $\Rightarrow$ c) Des isomorphismes

$$\hom(f \cdot k, 1) \simeq Pk \cdot \hom(f, 1) \simeq Pk \cdot \hom(1, g) \simeq \hom(k, 1) \cdot g$$

on tire que $\hom(f \cdot k, 1)$ est pleinement fidèle et par consequent $f \cdot k$ dense (th. 2).

c) $\Rightarrow$ b) On prend $k = 1_A$. ∎

On a besoin maintenant d' une notion de cocompletude rencontrée dans [3] p. 54. Plus précisement:

Definition 3. *Un objet legitime* A *est dit absolument cocmplet si la flèche* $Y_A : A \to PA$ *admet un adjoint à gauche, noté* lex_A.

Exemple. Si A est petit, PA est absolument cocomplet car Y_{PA} admet P_{Y_A} comme adjoint à gauche (v. [3], th. 2).

L' interêt de la proposition qui suit est central dans ce papier.

Proposition 5. *Dans un cosmos* $\underline{\underline{B}}$, *pour toute flèche* $f : X \to A$ *où* X *petit et* A *absolument cocomplet,* $\overline{\text{la}}$ *tteg le long de* Y_X *existe et se donne par* $\mathrm{lex}_A \cdot f$. *On la note alors* lex_f.

Preuve. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Y_X"] \arrow[d, "f"'] & PX \arrow[d, shift right, "\exists f"'] \\ A \arrow[r, shift right, "Y_A"'] & PA \arrow[l, shift right, "\mathrm{lex}_A"'] \arrow[u, shift right, "Pf"'] \end{tikzcd}$$

où $lex_A \dashv Y_A$ par hypothèse, $\exists f \dashv Pf$ (axiome 4 de la définition d' un cosmos, v. [1], p. 21) et $Pf \cdot Y_A \simeq \hom(f, 1)$, donc [3], prop. 7 nous donne le resultat. ▮

Les lemmes suivants sont indispensables pour la suite.

Lemme 6. *L' objet comma*

$$\begin{tikzcd}
 & f.k/g \arrow[dl, "d_0"'] \arrow[ddr, "d_1"] & \\
Y \arrow[d, "k"'] & & \\
A \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\
 & C &
\end{tikzcd}
\quad \text{est isomorphe à} \quad
\begin{tikzcd}
 & & \cdot \arrow[dll] \arrow[dr] & & \\
Y \arrow[drr, "k"'] & & \text{p.f.} & f/g \arrow[dl, "d_0"'] \arrow[dr, "d_1"] & \\
 & & A \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\
 & & & C &
\end{tikzcd}$$

Preuve. Il suffit de prouver ça dans *Cat*. ▮

Lemme 7. *Dans la situation d' adjonction*

$$A \underset{g}{\overset{f}{\leftrightarrows}} B \qquad (f \dashv g),\ A,\ B \text{ legitimes}$$

la flèche f préserve les terme à terme extensions à gauche.

Preuve. Soit

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "m"] \arrow[dr, "n"'] & Y \arrow[d, "k"] \arrow[dl, phantom, "\alpha"] \\
 & A
\end{tikzcd} \tag{II}$$

une telle extension ; alors f la preserve ssi on a l' isomorphisme

$$\hom(m, 1) / \hom(f \cdot n, 1) \simeq f \cdot k / B \tag{1}$$

(v. [3], th. 3b). Mais

$$\hom(m, 1)/\hom(f \cdot n, 1) \simeq \hom(m, 1)/\hom(n, g) \simeq \hom(m, 1)/\hom(n, 1) \cdot g$$

et

$$f \cdot k / B \simeq k / g$$

donc (1) devient

$$\hom(m, 1) / \hom(n, 1) \cdot g \simeq k / g \tag{2}$$

(2) est une consequence de [3], th. 3b) appliqué à (II) et du lemme 6. ▮

Proposition 8. *Soient X un objet petit et A absolument cocomplet ; alors*

a) *le foncteur*

$$\underline{\underline{B}}(Y_X, A) : \underline{\underline{B}}(PX, A) \to \underline{\underline{B}}(X, A)$$

admet un adjoint à gauche ;

b) *pour tout $f : X \to A$, $lex_f : PX \to A$ est adjoint à gauche de* $\hom(f, 1)$ *et $lex_f \cdot Y_X \simeq f$;*

c) *une flèche $g : PX \to A$ admet un adjoint à droite $g' : A \to PX$ ssi g preserve les tteg. Dans ce cas $g' \simeq$* $\hom(g \cdot Y_X, 1)$.

Preuve. a) resulte de la prop. 5.

b) c' est [3], prop. 7.

c)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Y_X"] \arrow[dr, bend right, "g \cdot Y_X"'] & PX \arrow[d, "g"] \arrow[d, bend right=50, "lex_{g \cdot Y_X}"'] \\
& A \arrow[u, bend right=50, "\hom(g \cdot Y_X, 1)"']
\end{tikzcd}$$

La flèche $lex_{g \cdot Y_X}$ préserve les tteg,

car $lex_{g \cdot Y_X} \dashv \hom(g \cdot Y_X, 1)$ (lemme 7).

D' autre part de l' isomorphisme

$$lex_{g \cdot Y_X} \cdot Y_X \simeq g \cdot Y_X$$

on tire

$$lex_{g \cdot Y_X} \simeq g \qquad \text{(prop. 3)}$$

d' où le resultat. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de donner les deux théorémes de caracterisation, annoncés à l' introduction.

Théoreme 9. (Caracterisation des flèches Y_A). *Soit $f : X \to A$ une flèche avec X petit et A absolument cocomplet. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Il existe une équivalence $g : A \to PX$, telle que $g\, f \simeq Y_X$;*

b) *f est la cocompletion absolue universelle de X, i.e. pour toute* *flèche* $k : X \to B$ *avec* B *absolument cocomplet, il existe une seule (à isomorphisme près) flèche* $m : A \to B$ *qui commute aux tteg et telle que* $m \cdot f \simeq k$ *;*

c) $\hom(f, 1)$ *est une équivalence.*

Preuve. a) $\Rightarrow$ b) Soit $k : X \to B$ une flèche avec B absolument cocomplet

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, bend right, "Y_X"'] \arrow[ddrr, bend right=60, "k"'] & A \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[ddr, bend left, "m'"] & \\
& PX \arrow[u, shift right, "g'"'] \arrow[dr, "m"] & \\
& & B
\end{tikzcd}$$

D' après la prop. 5 il existe $m : PX \to B$ telle que $m \cdot Y_X \simeq k$, donc la flèche $m\,g$ repond à la question ; $(m \cdot g) \cdot f \simeq m \cdot Y_X \simeq k$.

D' autre part si $m' : A \to B$ est telle que $m' \cdot f \simeq k$, alors de

$$m' \cdot g' \cdot Y_X \simeq m' \cdot g' \cdot g \cdot f \simeq m' \cdot f \simeq k \simeq m \cdot Y_X$$

on tire, en vertu de la prop. 3, que $m' \cdot g' \simeq m$

b) $\Rightarrow$ c)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Y_X"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & PX \arrow[d, shift left, "lex_f"] \\
& A \arrow[u, shift left, "p"]
\end{tikzcd}$$

lex_f et p resultent de la prop. 3 et l' hypothèse b) respectivement. Comme

$$p \cdot lex_f \cdot Y_X \simeq p \cdot f \simeq Y_X$$

et les $p \cdot lex_f$, 1_{PX} preservent les tteg, on a d' après la prop. 3

$$p \cdot lex_f \simeq 1_{PX}$$

De même l' isomorphisme

$$lex_t \cdot p \cdot f \simeq lex_t \cdot Y_X \simeq f$$

et l' unicité dans l' hypothèse b) nous donne

$$lex_t \cdot p \simeq 1_A$$

d' où finalement $\hom(f, 1) \simeq p$ est une équivalence.

c) $\Rightarrow$ a) On prend $g = \hom(f, 1)$. ∎

Le théorème suivant caracterise les «objets reflectifs» d' un objet de la forme PX. Plus precisement :

Théorème 10. *Pour un objet A de $\underline{\underline{B}}$ on a les conditions équivalentes :*

a) *Il existe un objet petit X de $\underline{\underline{B}}$ et une situation d' adjonction*

$$PX \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} A$$

avec $f \dashv g$ et g pleinemment fidèle ;

b) *A est absolument cocomplet et il existe une flèche dense $k : X' \to A$, avec X' petit.*

Preuve. a) $\Rightarrow$ b)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "Y_X"] \arrow[dr, bend right, "f \cdot Y_X"'] & PX \arrow[r, shift left, "Y_{PX}"] \arrow[d, shift right, "f"'] & P^2X \arrow[l, shift left, "P_{Y_X}"] \arrow[d, shift right, "Pg"'] \\
& A \arrow[u, shift right, "g"'] \arrow[r, "Y_A"'] & PA \arrow[u, shift right, "Pf"']
\end{tikzcd}$$

Puisque g est pleinement fidèle on a $f \cdot Y_X$ dense (th. 4c). Pour demontrer que A est absolument cocomplet il suffit de montrer que

$$Y_A \simeq Pg \cdot Y_{PX} \cdot g \tag{1}$$

car on a $f \dashv g$, $P_{Y_X} \dashv Y_{PX}$ et $Pf \dashv Pg$ (P renverse les flèches et les 2-cellules). Mais

$$Pg \cdot Y_{PX} \cdot g \simeq \hom(g, g)$$

et on a $Y_A \simeq \hom(g, g)$ dès que g est pleinement fidèle (prop. 1c).

b) $\Rightarrow$ c)

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "k"] \arrow[dr, bend right, "Y_{X'}"'] & A \arrow[d, shift left, "\hom(k,1)"] \\ & PX' \arrow[u, shift left, "\mathrm{lex}_k"] \end{tikzcd}$$

On a k dence donc $\hom(k, 1)$ pleinement fidèle. ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] Kelly. G. M. and Street, R. : *Abstracts of the Sydney category theory seminar 1972* (multigraphié)

[2] Street, R. : *Fibrations and Yoneda's Lemma in a 2-category*. Springer Lecture Notes vol. **420** (1974). 104—133.

[3] ——— : *Elementary cosmoi I*. Springer Lecture Notes vol. **420** (1974), 134—180.

Départment des Mathématiques
Université de Ioannina
Ioannina, Grèce

(Reçu le 23 Février, 1975)