

THESE DE DOCTORAT D'ETAT

présentée

À L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

- PARIS 6 -

ET AU CENTRE UNIVERSITAIRE DE VALENCIENNES

ET DU HAINAUT CAMBRÉSIS

par

YVES DIERS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES MATHÉMATIQUES

SUJET DE LA 1^{ÈRE} THÈSE :

CATEGORIES LOCALISABLES .

SUJET DE LA 2^{ÈME} THÈSE :

ASPECTS GEOMETRIQUES DE LA PROPRIETE DE RADON-NIKODYM DANS
LES ESPACES DE BANACH .

SOUTENUE LE 22 AVRIL 1977 DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

MM. G. CHOQUET } PRÉSIDENT

J. BENABOU

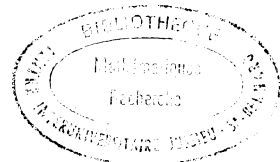
F. ULMER

G. COQUET

R. BARRE

S. FAKIR

EXAMINATEURS



à *Eric*,

Nous tenons à exprimer notre gratitude à Monsieur le Professeur Jean BÉNABOU pour l'intérêt constant qu'il a porté à notre travail et dont les encouragements nous ont été un stimulant très précieux.

Qu'il nous soit permis d'exprimer notre respectueuse reconnaissance à Monsieur le Professeur Gustave CHOQUET pour l'honneur qu'il nous a fait de présider notre jury et nous donner un sujet de seconde thèse.

Nous exprimons notre reconnaissance à Monsieur le Professeur Friedrich ULMER d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Nous adressons nos remerciements à Messieurs Raymond BARRE et Gérard COQUET, Maîtres de Conférences au Centre Universitaire de Valenciennes, et à Monsieur Sabah FAKIR, Maître de Conférences à l'Université de Lille I, d'avoir accepté de faire partie du jury.

Nous remercions Mmes Raymonde BÉRAT et Arlette LENGAINNE du secrétariat scientifique de l'U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées de l'Université de Lille I, pour le grand soin qu'elles ont apporté à la réalisation matérielle de cet ouvrage.

0 - INTRODUCTION.

Certaines catégories sont suffisamment riches en constructions universelles pour que celles-ci permettent de décrire entièrement leurs structures. C'est le cas des catégories algébriques étudiées par F. W. Lawvere, des catégories variétales étudiées par F.E.J. Linton, des catégories localement présentables étudiées par P. Gabriel et F. Ulmer, et des topos de A. Grothendieck. Les objets de ces catégories sont essentiellement décrits comme des ensembles munis de structures.

Nous mettons en évidence une classe C de catégories comprenant pour le moins une cinquantaine de catégories dont l'étude ne relève pas des études précédentes et parmi lesquelles figurent, par exemple, la catégorie des corps et homomorphismes d'anneaux, la catégorie des anneaux locaux et homomorphismes locaux, la catégorie des ensembles totalement ordonnés et applications strictement croissantes, la catégorie des espaces métriques et isométries, la catégorie des espaces euclidiens et applications orthogonales, la catégorie des espaces de Banach et applications linéaires préservant la norme.

Nous discernons une construction essentielle relative à ces catégories : la localisation. Il n'existe pas de meilleur corps, ni de meilleur anneau local associé à un anneau commutatif. De même, il n'existe pas de meilleur ensemble totalement ordonné associé à un ensemble ordonné, ni de meilleur espace euclidien associé à un espace vectoriel réel. En fait, il y a une famille de meilleurs objets dont chacun d'eux vérifie une propriété universelle locale, la famille vérifiant une propriété universelle globale. Dans de nombreux cas ces objets ont reçu le nom de localisés. Nous donnons une définition générale de la localisation qui semble bien recouvrir la plupart des notions baptisées de ce nom et qui fait apparaître comme localisations d'autres notions qui n'apparaissaient pas comme telles et qui permet de découvrir de nouvelles localisations.

Un bilan sommaire des propriétés universelles des catégories de C fait apparaître l'existence de noyaux et même de limites projectives connexes, de limites inductives \mathcal{N}_0 -filtrantes ou \mathcal{N}_1 -filtrantes et d'un ensemble générateur propre, mais aussi l'absence de produits même finis, de sommes même finies et bien souvent de conoyaux, et l'absence d'adjoint à gauche pour les foncteurs oubli de structure. Ce bilan montre que la classe C diffère des classes de catégories précédemment étudiées par manque de constructions universelles. Il nous a semblé que les propriétés universelles classiques n'étaient pas très bien adaptées à l'étude de ces catégories. C'est pour cette raison que nous avons introduit les propriétés universelles locales suivantes.

Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'objets d'une catégorie est dite initiale si pour tout objet A , il existe un unique couple (i, f) tel que $i \in I$ et $f : A_i \rightarrow A$. Les objets A_i sont alors initiaux dans leurs composantes connexes ; ils sont dits localement initiaux. Si D est un diagramme d'une catégorie, une localisation inductive de D est un cône inductif de base D localement initial dans la catégorie des cônes inductifs de base D , une couronne inductive de base D est une famille de cônes inductifs de base D , et une limite inductive locale de D est une couronne inductive initiale de base D . On constate alors que les catégories de la classe C sont localement cocomplètes en ce sens que tout petit diagramme possède une limite inductive locale.

La notion générale de localisation est introduite de la façon suivante. Soit $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ un foncteur. Une localisation d'un objet B de \mathbb{B} vers le foncteur U est un couple (A_0, g_0) formé d'un objet A_0 de \mathbb{A} et d'un morphisme $g_0 : B \rightarrow U A_0$ tels que, pour toute paire d'objets A, X de \mathbb{A} , toute paire de morphismes $h : A_0 \rightarrow X$, $\ell : A \rightarrow X$ de \mathbb{A} et tout morphisme $g : B \rightarrow U A$ de \mathbb{B} , vérifiant $U h \cdot g_0 = U \ell \cdot g$, il existe un morphisme $f : A_0 \rightarrow A$ et un seul vérifiant $U f \cdot g_0 = g$. L'objet A_0 est alors un localisé de l'objet

B vers U . Le foncteur U est dit localisant si pour tout objet B de \mathcal{B} , les localisations de B vers U forment, à isomorphismes près, un ensemble et si, pour tout couple (A, g) d'un objet A de \mathcal{A} et d'un morphisme $g : B \rightarrow UA$, il existe une localisation (A_0, g_0) de B vers U et un morphisme $f : A_0 \rightarrow A$ vérifiant $Uf \cdot g_0 = g$. Par exemple, le foncteur d'inclusion de la catégorie des corps (resp. des anneaux locaux) dans la catégorie des anneaux commutatifs est localisant, les localisés d'un anneau commutatif A étant les corps de fractions des anneaux quotients de A par des idéaux premiers (resp. les localisés de A pour les idéaux premiers). De même les quotients d'anneaux commutatifs par des idéaux, les anneaux commutatifs de fractions, les catégories de fractions, les quotients de catégories abéliennes par des sous-catégories épaisses, les quotients et localisés de treillis distributifs, apparaissent comme des localisés vers un foncteur.

On démontre un théorème d'existence de localisations analogue au théorème d'existence d'adjoints de P. Freyd. On en déduit que pour les anneaux non commutatifs les localisations existent, de même que pour les treillis non distributifs et les ensembles strictement ordonnés.

Les propriétés universelles locales étant introduites, on se propose d'axiomatiser la classe C de catégories. On définit ainsi la notion de catégorie α -localisable, où α désigne un cardinal régulier. Cette notion généralise la notion de catégorie localement α -présentable de Gabriel-Ulmer. Une catégorie est α -localisable si elle est à limites inductives α -filtrantes, à limites inductives locales α -petites et si elle possède un ensemble générateur propre formé d'objets α -présentables.

L'étude des catégories α -localisables repose sur l'étude de ses objets α -présentables. Ces objets peuvent être présentés à partir d'un ensemble générateur propre à l'aide des limites inductives locales α -petites. Ils forment, à

isomorphismes près, un ensemble qui est dense dans la catégorie; ils sont stables pour les limites inductives locales α -petites, et tout objet de la catégorie est une limite inductive α -filtrante d'objets α -présentables. On montre qu'une catégorie α -localisable est équivalente à la catégorie des pré-faisceaux localement α -continus sur la petite catégorie de ses objets α -présentables, un préfaisceau $F : \mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$ étant dit localement α -continu si pour toute limite inductive locale $(\gamma_{ji} : X_i \rightarrow Y_j)_{(i,j) \in \mathbb{I} \times \mathbb{J}}$ telle que $\text{Card } \mathbb{I} < \alpha$, l'application $\langle (F\gamma_{ji}) \rangle : \coprod_{j \in \mathbb{J}} FY_j \rightarrow \varprojlim_{i \in \mathbb{I}} FX_i$ est bijective.

On en déduit que les catégories α -localisables sont localement cocomplètes, à limites projectives connexes, à peu de sous-objets, à peu de quotients forts et à factorisations fortes. Notons encore que les limites projectives connexes α -petites commutent aux limites inductives α -filtrantes. Le fait que l'étude des catégories α -localisables se ramène à l'étude de leurs objets α -présentables peut s'exprimer de façon précise : la 2-catégorie des catégories α -localisables est 2-équivalente à la duale de la 2-catégorie des petites catégories à limites inductives locales α -petites.

On donne des procédés de constructions de catégories α -localisables. Les sommes et les produits de catégories α -localisables, les catégories de foncteurs d'une petite catégorie à valeurs dans une catégorie α -localisable, les catégories d'objets au-dessous d'un objet d'une catégorie α -localisable, sont α -localisables. Une sous-catégorie \mathbb{X} d'une catégorie est dite localement pleine si tout morphisme dont le composé à gauche par un morphisme de \mathbb{X} appartient à \mathbb{X} , appartient lui-même à \mathbb{X} . Une telle sous-catégorie d'une catégorie α -localisable qui est localisante et fermée pour les limites inductives α -filtrantes, est α -localisable. On en déduit que la catégorie ayant les mêmes objets qu'une catégorie α -localisable et ayant pour morphismes les monomorphismes de cette catégorie est α -localisable. La construction suivante est essentielle. Elle permet, en particulier, de prouver que de nombreuses catégories sont α -localisables

On considère une catégorie α -localisable \mathbb{A} munie d'un ensemble de couronnes inductives

$$\Gamma = \{(\gamma_{ji}^k : A_i^k \rightarrow B_j^k)_{(i,j) \in \mathbb{I}_k \times J_k}\}_{k \in K}$$

tel que, pour chaque $k \in K$, le diagramme $(A_i^k)_{i \in \mathbb{I}_k}$ est α -petit et les objets A_i^k, B_j^k sont α -présentables. Un objet A de \mathbb{A} est dit Γ -local si pour tout $k \in K$ et tout $j \in J_k$, l'application :

$$(\text{Hom}_{\mathbb{A}}(\gamma_{ji}^k, A)) : \text{Hom}_{\mathbb{A}}(B_j^k, A) \rightarrow \varprojlim_{i \in \mathbb{I}_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i^k, A)$$

est injective et l'application :

$$\langle (\text{Hom}_{\mathbb{A}}(\gamma_{ji}^k, A)) \rangle : \coprod_{j \in J_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(B_j^k, A) \rightarrow \varprojlim_{i \in \mathbb{I}_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i^k, A)$$

est surjective. Si A, B sont deux objets Γ -locaux, un morphisme $f : A \rightarrow B$ est dit Γ -local si pour tout $k \in K$, tout $j \in J_k$, tout cône inductif

$(\varepsilon_i : A_i^k \rightarrow A)_{i \in \mathbb{I}_k}$ et tout morphisme $\ell : B_j^k \rightarrow B$ vérifiant : $\forall i \in \mathbb{I}_k, \ell \cdot \gamma_{ji}^k = f \cdot \varepsilon_i$, il existe un morphisme $m : B_j^k \rightarrow A$ vérifiant : $\forall i \in \mathbb{I}_k, m \cdot \gamma_{ji}^k = \varepsilon_i$.

Les objets et morphismes Γ -locaux constituent une sous-catégorie de \mathbb{A} notée \mathbb{A}_{Γ} . On montre que \mathbb{A}_{Γ} est une sous-catégorie localement pleine localisante de \mathbb{A} fermée pour les limites inductives α -filtrantes et, par suite, qu'elle est α -localisable. Comme cas particuliers, on obtient les catégories de préfaisceaux localement α -continus et des catégories de modèles d'une théorie logique du premier ordre.

On illustre les résultats en donnant une présentation détaillée sous la forme d'une catégorie de préfaisceaux localement continus, des catégories suivantes : ensembles totalement ordonnés, espaces métriques, domaines d'intégrité, anneaux commutatifs locaux.

Dans une catégorie possédant un objet final, les propriétés universelles locales sont identiques aux propriétés universelles classiques. Ainsi une catégorie est localement α -présentable si et seulement si elle est α -localisable et elle possède un objet final. On obtient alors la plupart des résultats essentiels sur les catégories localement α -présentables comme corollaires immédiats des résultats analogues sur les catégories α -localisables.

Ajoutons enfin que l'étude des catégories localement présentables faite par P. Gabriel et F. Ulmer nous a servi de modèle.

1 - MISE EN EVIDENCE D'UNE CLASSE DE CATEGORIES.

1.0. - Notations.

Fixons les notations de quelques catégories.

- Ens : catégorie des ensembles.
- An : catégorie des anneaux unitaires.
- Anc : catégorie des anneaux unitaires commutatifs.
- Dif : catégorie des anneaux différentiels.
- Ord : catégorie des ensembles ordonnés et applications croissantes.
- Dtr : catégorie des demi-treillis (notés : $E, \wedge, 1$).
- Tr : catégorie des treillis.
- Trd : catégorie des treillis distributifs.
- He : catégorie des algèbres de Heyting.
- Bool : catégorie des algèbres de Boole.
- Top sep : catégorie des espaces topologiques séparés.
- Comp : catégorie des espaces compacts.
- Ev(K) : catégorie des K-espaces vectoriels.
- Alg(K) : catégorie des K-algèbres.
- Inv(K) : catégorie des K-algèbres involutives.
- Evt(K) : catégorie des K-espaces vectoriels topologiques.
- Cat : catégorie des petites catégories.
- Und f : catégorie des petites catégories à limites inductives finies et foncteurs préservant les limites inductives finies.
- Abex : catégorie des petites catégories exactes et foncteurs exacts.

1.1. - Une classe C de catégories.

On se propose d'étudier les propriétés universelles et la structure des catégories suivantes.

Les catégories numérotées de (0) à (10) ont pour morphismes les homo-

morphismes unitaires injectifs d'anneaux.

- 0 - $\mathbb{A}n^{\#}$ a pour objets les anneaux (unitaires) non triviaux.
- 1 - $\mathbb{I}nt$, catégorie des anneaux intègres, a pour objets les anneaux intègres (non nécessairement commutatifs).
- 2 - \mathbb{K} , catégorie des corps, a pour objets les corps.
- 3 - $\mathbb{K}p$, catégorie des corps de caractéristiques p .
- 4 - $\mathbb{A}nc^{\#}$, a pour objets les anneaux commutatifs non triviaux (unitaires).
- 5 - $\mathbb{D}om$, catégorie des domaines d'intégrité, a pour objets les anneaux commutatifs intègres.
- 6 - $\mathbb{R}ed$, catégorie des anneaux réduits, a pour objets les anneaux réduits i.e. tels que tout élément nilpotent est nul.
- 7 - $\mathbb{P}rim$, catégorie des anneaux primaires, a pour objets les anneaux primaires i.e. tels que tout diviseur de zéro est nilpotent.
- 8 - $\mathbb{Q}Prim$, catégorie des anneaux quasi-primaires, a pour objets les anneaux quasi-primaires i.e. qui vérifient l'axiome :
 $\forall x, \forall y (xy = 0 \implies x \text{ est nilpotent ou } y \text{ est nilpotent})$.
- 9 - $\mathbb{K}c$, catégorie des corps commutatifs, a pour objets les corps commutatifs.
- 10 - $\mathbb{K}cp$, catégorie des corps commutatifs de caractéristique p .

Les catégories suivantes numérotées de (11) à (16) ont pour morphismes les homomorphismes unitaires injectifs d'anneaux différentiels.

- 11 - $\mathbb{D}if^{\#}$ a pour objets les anneaux différentiels non triviaux.
- 12 - $\mathbb{D}omdif$, catégorie des anneaux différentiels intègres, a pour objets les anneaux différentiels intègres.

- 13 - $\mathbb{R}d\text{dif}$, catégorie des anneaux différentiels réduits.
- 14 - $\mathbb{P}r\text{imdif}$, catégorie des anneaux différentiels primaires.
- 15 - $\mathbb{Q}P\text{rimdif}$, catégorie des anneaux différentiels quasi-primaires.
- 16 - $\mathbb{K}d\text{if}$, catégorie des corps différentiels.

Les catégories suivantes numérotées de (17) à (20) ont pour morphismes les homomorphismes unitaires d'anneaux qui reflètent les éléments inversibles i.e. les homomorphismes f qui vérifient :

$$\forall x. (f(x) \text{ inversible} \implies x \text{ inversible}).$$

- 17 - $\mathbb{A}n^{\times}$ a pour objets les anneaux non triviaux.
- 18 - $\mathbb{A}nc^{\times}$ a pour objets les anneaux commutatifs non triviaux.
- 19 - $\mathbb{L}oc$, catégorie des anneaux locaux, a pour objets les anneaux locaux non nécessairement commutatifs.
- 20 - $\mathbb{L}oc\text{c}$, catégorie des anneaux locaux commutatifs.
- 21 - $\mathbb{D}if^{\times}$ a pour objets les anneaux différentiels et pour morphismes les homomorphismes différentiels qui reflètent les éléments inversibles.
- 22 - $\mathbb{L}oc\text{dif}$, catégorie des anneaux différentiels locaux, a pour objets les anneaux différentiels locaux et pour morphismes les homomorphismes différentiels qui reflètent les éléments inversibles.
- 23 - $\mathbb{D}tr^{\times}$, a pour objets les demi-treillis $(\Lambda, 1)$ et pour morphismes, les homomorphismes de demi-treillis qui reflètent l'élément 1 i.e. les homomorphismes f qui vérifient $\forall x, (f(x) = 1 \implies x = 1)$.

Les catégories suivantes numérotées de (24) à (27) ont pour morphismes les homomorphismes de treillis qui reflètent l'élément 1.

- 24 - $\mathbb{T}r^{\mathcal{X}}$ a pour objets les treillis.
- 25 - $\mathbb{T}rloc$, catégorie des treillis locaux, a pour objets les treillis locaux
i.e. les treillis qui vérifient l'axiome :
 $\forall x, \forall y (x \vee y = 1 \implies x = 1 \text{ ou } y = 1)$.
- 26 - $\mathbb{T}rd^{\mathcal{X}}$, a pour objets les treillis distributifs.
- 27 - $\mathbb{T}rloc$, catégorie des treillis locaux distributifs.
- 28 - $\mathbb{H}e^{\mathcal{X}}$, a pour objets les objets les algèbres de Heyting et pour morphismes
les homomorphismes d'algèbres de Heyting qui reflètent l'élément 1.
- 29 - $\mathbb{B}ool^{\mathcal{X}}$, a pour objets les algèbres de Boole et pour morphismes les homomor-
phismes d'algèbres de Boole qui reflètent l'élément 1.
- 30 - $\mathbb{O}rds$, catégorie des ensembles strictement ordonnés, a pour objets les
ensembles strictement ordonnés i.e. les ensembles munis d'une relation
transitive $<$ qui vérifie l'axiome : $\forall x, \forall y (x < y \implies \text{non } y < x)$,
et pour morphismes les applications strictement croissantes.
- 31 - $\mathbb{O}rdt$, catégorie des ensembles totalement ordonnés, a pour objets les
ensembles totalement ordonnés et pour morphismes les applications strictement
croissantes.
- 32 - $\mathbb{A}ncordt$, catégorie des anneaux totalement ordonnés, a pour objets les
anneaux commutatifs totalement ordonnés et pour morphismes, les homomorphismes
d'anneaux strictement croissants.
- 33 - $\mathbb{K}cord$, catégorie des corps ordonnés, a pour objets les corps commutatifs
totalement ordonnés et pour morphismes les homomorphismes d'anneaux stricte-
ment croissants.
- 34 - $\mathbb{M}et$, catégorie des espaces métriques, a pour objets les espaces métriques
et pour morphismes les isométries i.e. les applications qui préservent la
distance.

- 35 - $\mathbb{K}v$, catégorie des corps valués, a pour objets les corps valués et pour morphismes les homomorphismes d'anneaux unitaires qui préservent la valeur absolue.
- 36 - $\text{Nor}(K)$, catégorie des K -espaces normés, a pour objets les K -espaces normés sur un corps commutatif valué K et pour morphismes les applications K -linéaires qui préservent la norme.
- 37 - $\text{Algnor}(K)$, catégorie des K -algèbres normées a pour objets les K -algèbres normées et pour morphismes les homomorphismes de K -algèbres qui préservent la norme.
- 38 - Invnor , catégorie des \mathbb{C} -algèbres normées involutives, a pour objets les \mathbb{C} -algèbres involutives normées et pour morphismes les homomorphismes de \mathbb{C} -algèbres involutives qui préserve la norme.
- 39 - Stell , catégorie des algèbres stellaires ou \mathbb{C}^* -algèbres, est une sous-catégorie pleine de Invnor .
- 40 - Euc , catégorie des espaces vectoriels euclidiens, a pour objets les espaces vectoriels euclidiens et pour morphismes les applications linéaires orthogonales i.e. qui préservent le produit scalaire.
- 41 - Cat^{\times} , a pour objets les petites catégories et pour morphismes les foncteurs qui reflètent les isomorphismes.

Les catégories numérotées de (0) à (41) constituent une classe notée C_0 . On y adjoint les catégories suivantes numérotées de (42) à (49) qui constituent une classe notée C_1 .

- 42 - Metcompl , catégorie des espaces métriques complets, sous-catégorie pleine de Met .
- 43 - Metcomp , catégorie des espaces métriques compacts, sous-catégorie pleine de Met .

- 44 - $\mathbb{K}v\text{compl}$, catégorie des corps valués complets, sous-catégorie pleine de $\mathbb{K}v$.
- 45 - $\mathbb{B}an(K)$, catégorie des espaces de Banach sur K , sous-catégorie pleine de $\mathbb{N}or(K)$.
- 46 - $\mathbb{A}lgban(K)$, catégorie des algèbres de Banach sur K , sous-catégorie pleine de $\mathbb{A}lgnor(K)$.
- 47 - $\mathbb{I}nvban$, catégorie des algèbres normées involutives complètes, sous-catégorie pleine de $\mathbb{I}vnnor$.
- 48 - $\mathbb{S}tell\text{compl}$, catégorie des algèbres stellaires complètes, sous-catégorie pleine de $\mathbb{S}tell$.
- 49 - $\mathbb{H}ilb$, catégorie des espaces de Hilbert, sous-catégorie pleine de $\mathbb{E}uc$.

La réunion des classes C_0 et C_1 est notée C .

On considère encore les deux catégories suivantes constituant une classe C_2 dont l'étude relève plutôt de celle des 2-catégories.

- 50 - $\mathbb{I}ndf^{\mathcal{X}}$, a pour objets les petites catégories à limites inductives finies et pour morphismes les foncteurs qui préservent les limites inductives finies et reflètent les isomorphismes.
- 51 - $\mathbb{A}bex^{\mathcal{X}}$, a pour objets les petites catégories abéliennes et pour morphismes les foncteurs additifs exacts à gauche qui reflètent les objets nuls.

1.2. - Passif de la classe C .

On peut mettre au passif de la classe C les faits suivants :

1.2.0. - Les catégories de C n'ont pas nécessairement de produits. Elles sont même, pour la plupart, sans aucun produit. C'est le cas, par exemple, des catégories $\mathbb{K}c$, $\mathbb{R}ed$, $\mathbb{L}occ$, $\mathbb{M}et$, $\mathbb{E}uc$. Les catégories de C ne sont donc ni

algébriques [11], ni variétales, [12], ni localement présentables [7].

1.2.1. - Les catégories de C n'ont pas nécessairement de sommes, même finies. C'est le cas par exemple des catégories $\mathbb{K}c$, $\mathbb{L}occ$, $\mathbb{M}et$, $\mathbb{O}rdt$.

1.2.2. - Les catégories de C n'ont pas nécessairement de conoyaux. C'est le cas, par exemple, des catégories, $\mathbb{K}c$, $\mathbb{R}ed$, $\mathbb{M}et$, $\mathbb{E}uc$, $\mathbb{O}rdt$.

1.2.3. - Les foncteurs oubli de structure à valeurs dans les ensembles, ne possèdent pas nécessairement un adjoint à gauche. C'est le cas, par exemple, des catégories $\mathbb{D}om$, $\mathbb{K}c$, $\mathbb{L}occ$, $\mathbb{M}et$, $\mathbb{O}rdt$, $\mathbb{E}uc$.

1.3. - Actif de la classe C .

On peut mettre à l'actif de la classe C les faits suivants :

Propriété 1.3.0. - Les catégories de C sont à limites projectives connexes.

On appelle limite projective connexe, une limite d'un diagramme $\Phi : \mathbb{I} \rightarrow A$ où \mathbb{I} est une petite catégorie connexe non vide. Montrons, par exemple, que la catégorie \mathbb{K} est à limites projectives connexes. Soit $(K_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un diagramme connexe de \mathbb{K} . Montrons que l'anneau $A = \varprojlim_{i \in \mathbb{I}} K_i$ est un corps. Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un élément non nul de A . Il existe un objet i_0 de \mathbb{I} tel que $x_{i_0} \neq 0$. Or, si $\alpha : i \rightarrow j$ est un morphisme de \mathbb{I} , on a $x_j = K_\alpha(x_i)$ et, par suite, on a : $x_i \neq 0 \iff x_j \neq 0$. Donc, puisque $x_{i_0} \neq 0$ et que \mathbb{I} est connexe, on a $x_i \neq 0$, pour tout $i \in \mathbb{I}$. L'élément $(x_i^{-1})_{i \in \mathbb{I}}$ est alors un élément de A qui est inverse de $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$. Par ailleurs A est un anneau non trivial. Il est alors immédiat que le corps A est la limite projective de $(K_i)_{i \in \mathbb{I}}$ dans la catégorie \mathbb{K} .

Propriété 1.3.1. -

1) Les catégories de C_0 sont à limites inductives filtrantes.

2) Les catégories de C_1 sont à limites inductives \mathcal{N}'_1 -filtrantes.

On appelle limite inductive filtrante (resp. \mathcal{N}'_1 -filtrante) une limite inductive d'un diagramme $\phi : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{A}$ où \mathbb{I} est une petite catégorie non vide filtrante (resp. \mathcal{N}'_1 -filtrante).

Montrons, par exemple, que la catégorie Met est à limites inductives filtrantes. Soit $(E_i, d)_{i \in \mathbb{I}}$ un diagramme filtrant de Met . Notons $(E, (\lambda_i)_{i \in \mathbb{I}})$ une limite inductive des ensembles $(E_i)_{i \in \mathbb{I}}$. Soit x, y deux éléments de E . Il existe un objet i de \mathbb{I} et deux éléments x_i, y_i de E_i tels que l'on ait : $\lambda_i(x_i) = x$ et $\lambda_i(y_i) = y$. Si i' est un autre objet de \mathbb{I} et $x_{i'}, y_{i'}$ sont deux objets de $E_{i'}$, vérifiant $\lambda_{i'}(x_{i'}) = x$ et $\lambda_{i'}(y_{i'}) = y$, alors il existe un objet i'' de \mathbb{I} et deux morphismes de \mathbb{I} : $\alpha : i \rightarrow i''$, $\alpha' : i' \rightarrow i''$ vérifiant $E_\alpha(x_i) = E_{\alpha'}(x_{i'})$ et $E_\alpha(y_i) = E_{\alpha'}(y_{i'})$. On a alors : $d(x_i, y_i) = d(E_\alpha(x_i), E_\alpha(y_i)) = d(E_{\alpha'}(x_{i'}), E_{\alpha'}(y_{i'})) = d(x_{i'}, y_{i'})$. Il est alors immédiat que l'on définit une distance sur E , en posant $d(x, y) = d(x_i, y_i)$ et que l'espace métrique (E, d) ainsi obtenu est la limite inductive de $(E_i, d)_{i \in \mathbb{I}}$ dans la catégorie Met .

Montrons encore que la catégorie Metcompl est à limites inductives \mathcal{N}'_1 -filtrantes. Soit $(E_j)_{j \in \mathbb{J}}$ un diagramme \mathcal{N}'_1 -filtrant de Metcompl . Ce diagramme est filtrant. Il a donc une limite inductive dans Met que l'on note $(E, (\mu_j)_{j \in \mathbb{J}})$. Soit (y_n) une suite de Cauchy de E . Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $j_n \in \mathbb{J}$ et $x_n \in E_{j_n}$ tels que $\mu_{j_n}(x_n) = y_n$. Il existe alors un objet j_0 de \mathbb{J} et des morphismes $\alpha_n : j_n \rightarrow j_0$ de \mathbb{J} . La suite $(E_{\alpha_n}(x_n))$ de l'espace métrique E_{j_0} est de Cauchy. Elle est donc convergente. Soit x sa limite. Il est immédiat que l'élément $y = \mu_{j_0}(x)$ est la limite de la suite (y_n) . Cela montre que E est complet et par suite que c'est la limite inductive de $(E_j)_{j \in \mathbb{J}}$ dans Metcompl .

Propriété 1.3.2. -

1) Dans les catégories de C_0 les limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives connexes finies.

2) Dans les catégories de C_1 les limites inductives \aleph_1 -filtrantes commutent aux limites projectives connexes dénombrables.

Pour la catégorie \mathbb{K} , par exemple, les limites inductives filtrantes et les limites projectives connexes sont créées par le foncteur oubli de structure : $\mathbb{K} \rightarrow \text{Ens}$. La propriété se déduit alors de la propriété analogue dans la catégorie Ens . Pour la catégorie Metcompl , par exemple, les limites inductives \aleph_1 -filtrantes et les limites projectives connexes sont créées par le foncteur ensemble sous-jacent : $\text{Metcompl} \rightarrow \text{Ens}$. La propriété se déduit aussi de la propriété analogue dans la catégorie Ens .

Propriété 1.3.3. -

1) Les catégories de C_0 possèdent un ensemble générateur propre formé d'objets \aleph_0 -présentables.

2) Les catégories de C_1 possèdent un ensemble générateur propre formé d'objets \aleph_1 -présentables.

Les notions d'ensemble générateur propre et d'objets \aleph_0 -présentables ou \aleph_1 -présentables sont prises au sens de Gabriel-Ulmer [7]. L'espace métrique réduit à un point est générateur propre \aleph_0 -présentable dans la catégorie Met . Il est générateur propre \aleph_1 -présentable dans la catégorie Metcompl . Les ordinaux 1 et 2 forment un ensemble générateur propre \aleph_0 -présentable dans la catégorie Ordt . Montrons que les corps de fractions $\mathbb{Z}[\overline{X}]/I$ des domaines d'intégrité $\mathbb{Z}[\overline{X}]/I$ où I est un idéal premier de $\mathbb{Z}[\overline{X}]$, constituent un ensemble générateur propre formés d'objets \aleph_0 -présentables de \mathbb{Kc} . Si x est un élément d'un corps commutatif K , on note I_x l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[\overline{X}]$ ayant x pour zéro dans K et on définit l'homomorphisme $f_x : \mathbb{Z}[\overline{X}]/I_x \rightarrow K$ par $f_x(\overline{P}) = P(x)$, puis l'homomorphisme $g_x : \mathbb{Z}[\overline{X}]/I_x \rightarrow K$ par $g_x\left(\frac{\overline{P}}{Q}\right) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Il en est, en outre, immédiat que tout homomorphisme $g : \mathbb{Z}[\overline{X}]/I \rightarrow K$ est de la forme précédente pour un élément x et un seul de K . Le résultat se montre alors facilement.

2 - NOTIONS UNIVERSELLES LOCALES.

Dans le but d'améliorer le bilan universel des catégories de \mathcal{C} , on introduit de nouvelles propriétés universelles. Ce sont les propriétés universelles locales suivantes.

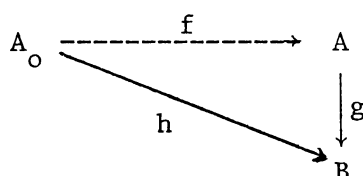
2.0. - Familles initiales d'objets - Objets localement initiaux.

Toutes les familles considérées sont indexées par un ensemble.

On considère une catégorie \mathcal{A} .

Définition 2.0.0. - Une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathcal{A} est initiale dans \mathcal{A} si, pour tout objet A de \mathcal{A} , il existe un et un seul couple (i, f) tel que $i \in I$ et $f : A_i \rightarrow A$.

Définition 2.0.1. - Un objet A_0 est localement initial dans \mathcal{A} si pour toute paire d'objets A, B de \mathcal{A} et toute paire de morphismes $g : A \rightarrow B$ et $h : A_0 \rightarrow B$, il existe un morphisme f et un seul de source A_0 et but A .



Notons que l'on a alors : $h = gf$.

Proposition 2.0.2. - Un objet est localement initial si et seulement si il est initial dans sa composante connexe.

Démonstration. - Il est immédiat que la condition est suffisante.

Soit A_0 un objet localement initial dans \mathcal{A} . Pour tout morphisme $g : A \rightarrow B$ de \mathcal{A} , on a : $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_0, A) \neq \emptyset \iff \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_0, B) \neq \emptyset$. On en déduit que pour tout objet A de la composante connexe de A_0 , on a $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_0, A) \neq \emptyset$, et par suite on a un unique morphisme : $A_0 \rightarrow A$. Ainsi A_0 est un objet initial de sa composante connexe.

Corollaire 2.0.3. - Deux objets localement initiaux dans la même composante connexe sont isomorphes.

Proposition 2.0.4. - Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille initiale d'objets de \mathbb{A} , tout objet A_i est localement initial et tout objet localement initial est isomorphe à un objet A_i .

Démonstration : Soit $i \in I$ et $g : A \rightarrow B$, $h : A_i \rightarrow B$ deux morphismes de \mathbb{A} . Il existe un couple (j, f) où $j \in I$ et $f : A_j \rightarrow A$. On en déduit l'existence d'un morphisme $gf : A_j \rightarrow B$. Par suite, on a $i = j$. On obtient ainsi un morphisme $h : A_i \rightarrow B$, qui est nécessairement unique. Ainsi A_i est localement initial. Soit A_0 un objet localement initial de \mathbb{A} . Il existe un couple (i, f) où $i \in I$ et $f : A_i \rightarrow A_0$. On en déduit l'existence d'un morphisme $g : A_0 \rightarrow A_i$. Ces deux morphismes sont inverses l'un de l'autre et, par suite, A_0 est isomorphe à A_i .

Définition 2.0.5. - Une catégorie \mathbb{A} est à objets localement initiaux s'il existe un ensemble L d'objets localement initiaux dans \mathbb{A} tel que, pour tout objet A de \mathbb{A} , il existe un objet A_0 de L et un morphisme $f : A_0 \rightarrow A$.

Proposition 2.0.6. - Les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) \mathbb{A} est à objets localement initiaux ;
- (ii) \mathbb{A} a un ensemble de composantes connexes ayant chacune un objet initial ;
- (iii) \mathbb{A} possède une famille initiale d'objets.

Démonstration : L'équivalence de i) et ii) est une conséquence de la proposition 2.0.2. Si on suppose ii), on note I l'ensemble des composantes connexes de \mathbb{A} et pour chaque $X \in I$, on note A_X un élément initial de X ; la famille $(A_X)_{X \in I}$ est alors initiale dans \mathbb{A} . La proposition 2.0.4. montre, en outre, l'implication : iii) \Rightarrow i).

Propriété 2.0.7. - Les catégories de \mathbb{C} possèdent une famille initiale d'objets.

L'anneau \mathbb{Z} et les corps d'entiers modulo les nombres premiers constituent une famille initiale dans les catégories $\mathbb{Int}, \mathbb{Dom}$. En effet, soit A un objet de \mathbb{Int} ou de \mathbb{Dom} . Soit p_0 la caractéristique de A . Il existe alors un homomorphisme unique $f : \mathbb{Z}/(p_0) \rightarrow A$ qui est injectif. Réciproquement, si p est un nombre premier ou nul et si $f : \mathbb{Z}/(p) \rightarrow A$ est l'unique homomorphisme injectif, alors $p \cdot 1$ est nul dans A , donc p est un multiple de p_0 et par suite $p = p_0$.

Le corps \mathbb{Q} et les corps d'entiers modulo les nombres premiers constituent une famille initiale dans les catégories \mathbb{K}, \mathbb{Kc} .

Pour tout nombre p premier ou nul, on note \mathbb{Z}_p le localisé de \mathbb{Z} en p i.e. l'anneau des fractions rationnelles $\frac{n}{q}$ où q n'est pas multiple de p . L'anneau \mathbb{Z}_p est local. La famille (\mathbb{Z}_p) , pour les nombres p premiers ou nuls est initiale dans les catégories $\mathbb{Loc}, \mathbb{Locc}$. En effet, soit A un objet de \mathbb{Loc} . L'entier $p_0 = \min\{n : n \cdot 1 \text{ est non inversible dans } A\}$ est premier ou nul. Il existe alors un unique homomorphisme $f_0 : \mathbb{Z}_{p_0} \rightarrow A$ et cet homomorphisme est local. On montre en outre qu'un tel couple (p_0, f_0) est unique.

2.1. - Foncteurs localement représentables.

Notations 2.1.0. - On considère une catégorie \mathbb{A} et un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Ens}$. Un élément de U est un couple (A, a) formé d'un objet A

de \mathbb{A} et d'un élément a de UA . La catégorie de représentation \mathbb{R}_U de U a pour objets les éléments de U et pour morphismes de (A,a) dans (B,b) les morphismes $f : A \rightarrow B$ tels que $Uf(a) = b$. Un élément localement initial de U est un objet localement initial de \mathbb{R}_U . C'est donc un couple (A_0, a_0) formé d'un objet A_0 de \mathbb{A} et d'un élément a_0 de UA_0 tel que, pour toute paire d'objets A, B de \mathbb{A} , toute paire de morphismes $g : A \rightarrow B$, $h : A_0 \rightarrow B$, et tout élément a de UA , vérifiant $Ug(a) = Uh(a_0)$, il existe un morphisme $f : A_0 \rightarrow A$ et un seul vérifiant $Uf(a_0) = a$. Une famille initiale d'éléments de U est une famille initiale de \mathbb{R}_U .

Définition 2.1.1. - Un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \text{Ens}$ est localement représentable s'il possède une famille initiale d'éléments.

Proposition 2.1.2. - Un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \text{Ens}$ est localement représentable si et seulement si il est somme de foncteurs représentables.

Démonstration. - Considérons une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathbb{A} et un isomorphisme $\alpha : \coprod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, -) \rightarrow U$. Posons $\alpha_{A_i}(1_{A_i}) = a_i$. Soit (A, a) un élément de U . Posons $\alpha_A^{-1}(a) = (i_0, f)$. Alors $\alpha_A(i_0, f) = a$ et la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \coprod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, A_{i_0}) & \xrightarrow{\alpha_{A_{i_0}}} & UA_{i_0} \\
 \downarrow & & \downarrow Uf \\
 \coprod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, f) & & \\
 \downarrow & & \\
 \coprod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, A) & \xrightarrow{\alpha_A} & UA
 \end{array}$$

montre que $Uf(a_{i_0}) = Uf(\alpha_{A_{i_0}}(1_{A_{i_0}})) = \alpha_A(i_0, f) = a$. Par suite, on obtient un morphisme $f : (A_{i_0}, a_{i_0}) \rightarrow (A, a)$. En outre, si $g : (A_i, a_i) \rightarrow (A, a)$ est un morphisme de \mathbb{R}_U , on a $\alpha_A(i, g) = Uf(\alpha_{A_{i_0}}(1_{A_{i_0}})) = Uf(a_{i_0}) = a = \alpha_A(i_0, f)$.

Par suite, on a $(i, g) = (i_0, f)$, donc $(A_i, a_i) = (A_{i_0}, a_{i_0})$ et $g = f$. On en déduit que la famille d'éléments $(A_i, a_i)_{i \in I}$ est initiale.

Soit, réciproquement, $(A_i, a_i)_{i \in I}$ une famille initiale d'éléments de U . On définit une transformation naturelle $\alpha : \coprod_{i \in I} \text{Hom}(A_i, -) \rightarrow U$ en posant $\alpha_A(i, f) = Uf(a_i)$. On montre facilement qu'elle est un isomorphisme.

Propriété 2.1.3. - Les foncteurs ensembles sous-jacents des catégories de C vers les ensembles sont localement représentables.

Considérons, par exemple, la catégorie Dom et le foncteur ensemble sous-jacent $U : \text{Dom} \rightarrow \text{Ens}$. Soit A un objet de Dom . Si x est un élément de A , l'ensemble $I_x = \{p \in \mathbb{Z}[X] : p(x) = 0\}$ est un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$ et il existe un unique homomorphisme $f_x : \mathbb{Z}[X]/I_x \rightarrow A$ qui vérifie $f_x(\bar{x}) = x$. Réciproquement, soit I est un idéal premier de $\mathbb{Z}[X]$ et $f : \mathbb{Z}[X]/I \rightarrow A$ un homomorphisme injectif. On pose $x = f(\bar{x})$. Pour tout polynôme p de $\mathbb{Z}[X]$, on a : $p \in I \iff p(\bar{x}) = 0 \iff p(x) = 0$. Par suite, on a $I = I_x$ et $f = f_x$. Cela montre que l'on a une bijection : $UA \approx \coprod_{I \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X]} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{Z}[X]/I, A)$. On montre alors facilement, qu'en fait, on a : $U \approx \coprod_{I \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X]} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{Z}[X]/I, -)$, c'est-à-dire que le foncteur U est localement représentable.

Pour le foncteur ensemble sous-jacent $U : \text{Locc} \rightarrow \text{Ens}$, il suffit de substituer dans ce qui précède les anneaux localisés $\mathbb{Z}[X]_I$ de $\mathbb{Z}[X]$ en I aux quotients $\mathbb{Z}[X]/I$.

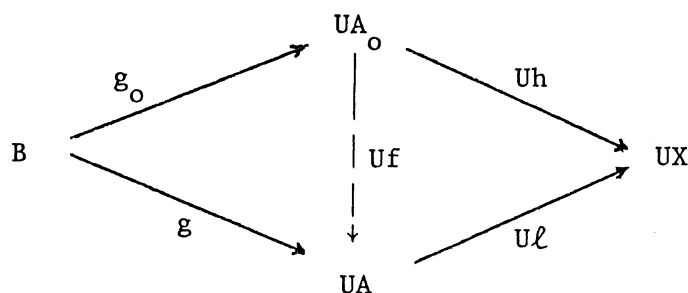
Considérons le foncteur ensemble sous-jacent : $U : \text{Euc} \rightarrow \text{Ens}$. On note 0 l'espace euclidien réduit à un point et \mathbb{R} l'espace euclidien \mathbb{R} muni du produit scalaire canonique. Montrons que l'on a un isomorphisme : $U \approx \text{Hom}_{\text{Euc}}(0, -) \coprod_{\rho \in \mathbb{R}_+^*} (\coprod_{\rho \in \mathbb{R}_+^*} \text{Hom}_{\text{Euc}}(\mathbb{R}_\rho, -))$ où \mathbb{R}_+^* désigne l'ensemble des nombres réels positifs et où \mathbb{R}_ρ est l'espace euclidien \mathbb{R} . Soit E un objet de Euc .

A l'élément nul de E , on associe l'unique morphisme : $0 \rightarrow E$ et réciproquement. Soit x un élément non nul de E . Posons $\rho = \|x\|$ et définissons l'application $f_x : \mathbb{R} \rightarrow E$ par $f_x(\lambda) = \frac{\lambda}{\rho} x$. L'application f_x est linéaire et orthogonale, puisque l'on a : $f_x(\lambda) \cdot f_x(\mu) = \frac{\lambda}{\rho} x \cdot \frac{\mu}{\rho} x = \frac{\lambda\mu}{\rho^2} (x \cdot x) = \lambda\mu$. Réciproquement, si (ρ, f) est un couple formé d'un nombre réel positif ρ et d'une application linéaire orthogonale $f : \mathbb{R} \rightarrow E$, on définit un objet x de E par $x = \rho \cdot f(1)$. On a alors : $f_x(t) = \frac{x}{\rho} = f(1)$ et, par suite $f_x = f$.

2.2. - Foncteurs localisants.

On considère un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$. Soit B un objet de \mathbb{B} . Un morphisme de B vers U est un couple (A, g) formé d'un objet A de \mathbb{A} et d'un morphisme $g : B \rightarrow UA$. La catégorie (B, U) a pour objets les morphismes de B vers U et pour morphismes de (A, g) vers (A', g') les morphismes $f : A \rightarrow A'$ vérifiant $Uf \cdot g = g'$.

Définition 2.2.0. - Une localisation de B vers U est un morphisme de B vers U localement initial dans (B, U) . C'est donc un couple (A_0, g_0) formé d'un objet A_0 de \mathbb{A} et d'un morphisme $g_0 : B \rightarrow UA_0$ tel que, pour toute paire d'objets A, X de \mathbb{A} , toute paire de morphismes $h : A_0 \rightarrow X$, $\ell : A \rightarrow X$ de \mathbb{A} , et tout morphisme $g : B \rightarrow UA$ vérifiant $Uh \cdot g_0 = U\ell \cdot g$, il existe un morphisme $f : A_0 \rightarrow A$ et un seul vérifiant $Uf \cdot g_0 = g$.



Notons qu'alors le diagramme ci-dessus est commutatif. On dit que A_0 est un

objet de \mathbb{A} localisé de l'objet B vers U .

Définition 2.2.1. - Un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ est localisant si, pour tout objet B de \mathbb{B} , le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(B, U) : \mathbb{A} \rightarrow \text{Ens}$ est localement représentable.

Il revient au même de dire que pour tout objet B de \mathbb{B} , la catégorie (B, U) possède une famille initiale.

Remarque.- Dans [10], J.J. Kaput a défini la notion de foncteur possédant un adjoint à gauche local. Cette notion est plus générale que celle de foncteur localisant et en diffère par l'absence d'unicité stricte et d'une condition de petitesse. Tout récemment, dans [1], R. Börger et W. Tholen définissent la notion de foncteur possédant un adjoint à gauche local fort en adjoignant à la définition de J.J. Kaput la condition d'unicité, mais non celle de petitesse. Or celle-ci est satisfaite dans la plupart des exemples et elle nous est indispensable pour l'étude de la structure des catégories localisables.

Proposition 2.2.2. - Le composé de deux foncteurs localisants est localisant.

Démonstration.- Soit $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ et $V : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ deux foncteurs localisants. Soit C un objet de \mathbb{C} . Considérons une famille initiale $(h_i : C \rightarrow VB_i)_{i \in I}$ de morphismes de C vers V , puis, pour chaque $i \in I$, une famille initiale $(g_j : B_i \rightarrow UA_j)_{j \in J_i}$ de morphismes de B_i vers U . On montre facilement que la famille de morphismes de C vers VU $(Vg_j \cdot h_i : C \rightarrow VUA_j)$ où i varie dans I et J varie dans J_i , est initiale.

Proposition 2.2.3. - Si $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ est un foncteur localisant et \mathbb{C} est une petite catégorie, le foncteur $U^{\mathbb{C}} : \mathbb{A}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{B}^{\mathbb{C}}$ est localisant.

Démonstration.- Soit $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}$ un foncteur. Pour chaque objet X

de \mathbb{C} , choisissons une famille initiale L_X de morphismes de G_X vers U . Notons L l'ensemble des couples (F, β) formés d'un foncteur $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}$ et d'une transformation naturelle $\beta : G \rightarrow UF$ tels que pour tout objet X de \mathbb{C} le couple (FX, β_X) appartient à L_X . Montrons que L est une famille initiale de morphismes de G vers $U^{\mathbb{C}}$. Soit $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}$ un foncteur et $\gamma : G \rightarrow UL$ une transformation naturelle. Pour chaque objet X de \mathbb{C} , il existe un unique élément (A, g) de L_X et un unique morphisme $f : A \rightarrow LX$ tels que $\gamma_X = Uf \cdot g$. Posons alors $A = FX$, $g = \beta_X$, $f = \alpha_X$. Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de \mathbb{C} , la relation $ULf \cdot U\alpha_X \cdot \beta_X = ULf \cdot \gamma_X = \gamma_Y \cdot Gf = U\alpha_Y \cdot \beta_Y \cdot Gf$ implique l'existence d'un unique morphisme $h : FX \rightarrow FY$ vérifiant : $UFh \cdot \beta_X = \beta_Y \cdot Gf$ et donc aussi : $Lf \cdot \alpha_X = \alpha_Y \cdot Fh$. Il est alors immédiat que l'on définit un foncteur F en posant $Ff = h$, que $\beta_X : GX \rightarrow UFX$ définit une transformation naturelle $\beta : G \rightarrow UF$ et que $\alpha_X : FX \rightarrow LX$ définit une transformation naturelle $\alpha : F \rightarrow L$. On a $U\alpha \cdot \beta = \gamma$. En outre si $(F, \beta), (F', \beta')$ appartiennent à L et si $\gamma : F \rightarrow L, \gamma' : F' \rightarrow L$ sont deux transformations naturelles vérifiant $U\gamma \cdot \beta = U\gamma' \cdot \beta'$, alors, pour tout objet X de \mathbb{C} , on a $U\gamma_X \cdot \beta_X = U\gamma'_X \cdot \beta'_X$ où β_X, β'_X appartiennent à L_X , et par suite, on a : $\beta_X = \beta'_X$ et $\gamma_X = \gamma'_X$ et donc : $\beta = \beta'$ et $\gamma = \gamma'$.

Proposition 2.2.4. - Tout foncteur localisant à valeurs dans $\mathbb{E}ns$ est localement représentable.

Démonstration. - Un foncteur localisant $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}ns$ est isomorphe au foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(1, U)$ qui est localement représentable.

Exemples 2.2.5. - Quotients d'anneaux.

Propriétés 2.2.5.0. - Les foncteurs : $\mathbb{A}n^{\#} \rightarrow \mathbb{A}n, \mathbb{A}nc^{\#} \rightarrow \mathbb{A}nc$ sont localisants.

Démonstration.- Soit A un objet de $\mathcal{A}n$. Notons I l'ensemble des idéaux bilatères propres de A . Pour $I \in I$, considérons l'anneau quotient A/I et la projection canonique $p_I : A \rightarrow A/I$. Montrons que $(p_I : A \rightarrow A/I)_{I \in I}$ est une famille initiale de morphismes de A vers le foncteur $:\mathcal{A}n^{\#} \rightarrow \mathcal{A}n$. Tout homomorphisme $f : A \rightarrow B$ se factorise sous la forme $f = \bar{f} \cdot p_I$ où I est le noyau de f et $\bar{f} : A/I \rightarrow B$ est un homomorphisme injectif. Si $I, I' \in I$ et $f : A/I \rightarrow B$, $f' : A/I' \rightarrow B$ sont deux homomorphismes injectifs vérifiant $f \cdot p_I = f' \cdot p_{I'}$, on a, pour un élément x de A : $x \in I \iff p_I(x) = 0 \iff f(p_I(x)) = 0 \iff f'(p_{I'}(x)) = 0 \iff p_{I'}(x) = 0 \iff x \in I'$. On en déduit que $I = I'$, puis que $f = f'$.

Corollaire 2.2.5.1. - Les foncteurs ensemble sous-jacent
 $\mathcal{A}n^{\#} \rightarrow \mathcal{E}ns$, $\mathcal{A}nc^{\#} \rightarrow \mathcal{E}ns$ sont localement représentables localisants.

Exemples 2.2.6. - Quotients premiers, réduits, primaires, quasi-primaires, d'anneaux.

Propriétés 2.2.6.0. - Les foncteurs $:\mathcal{I}nt \rightarrow \mathcal{A}n$, $\mathcal{D}om \rightarrow \mathcal{A}nc$, $\mathcal{R}ed \rightarrow \mathcal{A}nc$, $\mathcal{P}rim \rightarrow \mathcal{A}nc$, $\mathcal{Q}\text{-}\mathcal{P}rim \rightarrow \mathcal{A}nc$ sont localisants.

Démonstration.- Soit A un anneau. Notons S l'ensemble des idéaux bilatères premiers de A . Pour $I \in S$, considérons l'anneau intègre A/I et la projection canonique $p_I : A \rightarrow A/I$. On montre comme au 2.2.5., que $(p_I : A \rightarrow A/I)_{I \in S}$ est une famille initiale de morphismes de A vers le foncteur $:\mathcal{I}nt \rightarrow \mathcal{A}n$. Le résultat reste valable pour le foncteur $:\mathcal{D}om \rightarrow \mathcal{A}nc$. Pour les foncteurs $:\mathcal{R}ed \rightarrow \mathcal{A}nc$, $\mathcal{P}rim \rightarrow \mathcal{A}nc$, $\mathcal{Q}\text{-}\mathcal{P}rim \rightarrow \mathcal{A}nc$, on remplace l'ensemble S respectivement par les ensembles, S_1, S_2, S_3 suivants. S_1 est l'ensemble des idéaux semi-premiers de A i.e. des idéaux I de A qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A (x^n \in I \implies x \in I)$. S_2 est l'ensemble des idéaux primaires de A i.e. des idéaux I de A qui vérifient :

$$\forall x, y \in A \quad (x.y \in I \implies (\exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I) \text{ ou } y \in I).$$

S_3 est l'ensemble des idéaux quasi-primaires de A i.e. des idéaux I de A qui vérifient

$$\forall x, y \in A \quad (x.y \in I \implies (\exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I) \text{ ou } (\exists n \in \mathbb{N}, y^n \in I))$$

Corollaire 2.2.6.1. - Les foncteurs ensemble sous-jacent

$\text{Ent} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Dom} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Red} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Prim} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Q-Prim} \rightarrow \text{Ens}$ sont localement représentables localisants.

Corollaire 2.2.6.2. - $\mathbb{K}c$ est une sous-catégorie pleine localisante de Anc .

Démonstration.- Il suffit d'observer que $\mathbb{K}c$ est une sous-catégorie pleine réflexive de Dom .

Exemples 2.2.7. - Quotients, quotients réduits, primaires, quasi-primaires, corps de fractions, d'anneaux différentiels.

Propriétés 2.2.7. -

1) Les foncteurs : $\text{Dif}^\# \rightarrow \text{Dif}$, $\text{Domdif} \rightarrow \text{Dif}$, $\text{Reddif} \rightarrow \text{Dif}$, $\text{Primdif} \rightarrow \text{Dif}$, $\text{QPrimdif} \rightarrow \text{Dif}$, $\mathbb{K}\text{dif} \rightarrow \text{Dif}$ sont localisants.

2) Les foncteurs oubli de structure : $\text{Dif}^\# \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Domdif} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Reddif} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Primdif} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{QPrimdif} \rightarrow \text{Ens}$, $\mathbb{K}\text{dif} \rightarrow \text{Ens}$ sont localement représentables localisants.

Démonstration.- On substitue la notion d'idéal différentiel à la notion d'idéal dans ce qui précède.

Exemples 2.2.8.- Anneaux de fractions.

Propriétés 2.2.8.0. - Les foncteurs : $\text{Anc}^{\times} \rightarrow \text{Anc}$, $\text{Dif}^{\times} \rightarrow \text{Dif}$ sont localisants.

Démonstration.- Soit A un objet de $\mathcal{A}nc$. Notons M l'ensemble des parties multiplicatives saturées de A ne contenant pas 0 . Pour $\Sigma \in M$, considérons l'anneau des fractions $A[\Sigma^{-1}]$ et l'homomorphisme canonique $f_{\Sigma} : A \rightarrow A[\Sigma^{-1}]$. Montrons que $(f_{\Sigma} : A \rightarrow A[\Sigma^{-1}])_{\Sigma \in M}$ est une famille initiale de morphismes de A vers le foncteur $\mathcal{A}nc^{\times} \rightarrow \mathcal{A}nc$. Un homomorphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ se factorise sous la forme $f = \bar{f} \cdot f_{\Sigma}$ où $\Sigma = \{x \in A : f(x) \text{ inversible}\}$ et \bar{f} est défini par $\bar{f}(f_{\Sigma}(a) \cdot f_{\Sigma}(s)^{-1}) = f(a) \cdot f(s)^{-1}$. En outre, si $y \in A[\Sigma^{-1}]$ est tel que $\bar{f}(y)$ est inversible, on a $y = f_{\Sigma}(a) \cdot f_{\Sigma}(s)^{-1}$ où $s \in \Sigma$, donc $\bar{f}(y) = f(a) \cdot f(s)^{-1}$ et, par suite, $f(a)$ est inversible ; on en déduit que $a \in \Sigma$, donc que $f_{\Sigma}(a)$, puis $y = f_{\Sigma}(a) \cdot f_{\Sigma}(s)^{-1}$ sont inversibles. Ainsi \bar{f} est un morphisme de $\mathcal{A}nc^{\times}$.

Si Σ, Π sont deux éléments de M et $g : A[\Sigma^{-1}] \rightarrow B$, $h : A[\Pi^{-1}] \rightarrow B$ sont deux morphismes de $\mathcal{A}nc^{\times}$ qui vérifient $g \cdot f_{\Sigma} = h \cdot f_{\Pi}$, on a, pour un élément x de A : $x \in \Sigma \iff f_{\Sigma}(x)$ inversible $\iff g(f_{\Sigma}(x))$ inversible $\iff h(f_{\Pi}(x))$ inversible $\iff f_{\Pi}(x)$ inversible $\iff x \in \Pi$. Par suite, on a $\Sigma = \Pi$ et $g = h$.

Pour le foncteur $\mathcal{D}if^{\times} \rightarrow \mathcal{D}if$, on considère l'ensemble M' des parties multiplicatives différentielles saturées i.e. des parties multiplicatives qui sont telles que :

$$\forall x \in A, \quad (d(x) \in M \implies x \in M).$$

Corollaire 2.2.8.1. - Les foncteurs ensemble sous-jacent, $\mathcal{A}nc^{\times} \rightarrow \mathcal{E}ns$, $\mathcal{D}if^{\times} \rightarrow \mathcal{E}ns$ sont localement représentables localisants.

Exemples 2.2.9. - Localisations d'anneaux.

Propriétés 2.2.9.0. - Les foncteurs $\mathcal{L}oc \rightarrow \mathcal{A}nc$, $\mathcal{L}oc\mathcal{D}if \rightarrow \mathcal{D}if$, sont localisants.

Démonstration.- Soit A un objet de \mathbf{Anc} . Notons S l'ensemble des idéaux premiers de A . Pour $I \in S$, notons A_I l'anneau localisé de A en I . i.e. l'anneau des fractions $A[(A-I)^{-1}]$ et $f_I : A \rightarrow A_I$ le morphisme canonique. On sait que l'anneau A_I est local. Montrons que $(f_I : A \rightarrow A_I)_{I \in S}$ est une famille initiale de morphismes de A vers le foncteur : $\mathbf{Locc} \rightarrow \mathbf{Anc}$.
 Considérons un homomorphisme $f : A \rightarrow B$ où B est un anneau local. Notons U l'ensemble des éléments inversibles de B . L'ensemble $B-U$ est un idéal maximal de B et, par suite, l'ensemble $f^{-1}(B-U)$ est un idéal premier de A noté I . L'homomorphisme f est alors de la forme $f : \bar{f}.f_I$ où $\bar{f} : A_I \rightarrow B$ est un homomorphisme qui reflète les éléments inversibles. On achève la démonstration comme au 2.2.8. Pour les anneaux différentiels on considère les idéaux premiers différentiels.

Corollaire 2.2.9.1. - Les foncteurs : $\mathbf{Locc} \rightarrow \mathbf{Ens}$, $\mathbf{Locdif} \rightarrow \mathbf{Ens}$ sont localement représentables localisants.

Exemples 2.2.10. - Quotients et localisés de treillis.

Propriétés 2.2.10.0. - Les foncteurs : $\mathbf{Dtr}^X \rightarrow \mathbf{Dtr}$, $\mathbf{Trd}^X \rightarrow \mathbf{Trd}$, $\mathbf{He}^X \rightarrow \mathbf{He}$, $\mathbf{Bool}^X \rightarrow \mathbf{Bool}$, $\mathbf{Trdloc}^X \rightarrow \mathbf{Trd}$ sont localisants.

Démonstration.- Etudions d'abord le foncteur : $\mathbf{Dtr}^X \rightarrow \mathbf{Dtr}$.

Soit E un demi-treillis unitaire. Notons F l'ensemble des filtres de E . Pour un filtre $\phi \in F$, on note E/ϕ le demi-treillis unitaire quotient de E par l'équivalence : $x \sim y$ ssi $\exists a \in \phi, x \wedge a = y \wedge a$, et on note $f_\phi : E \rightarrow E/\phi$ la projection canonique. Montrons que $(f_\phi : E \rightarrow E/\phi)_{\phi \in F}$ est une famille initiale de morphismes de E vers le foncteur $\mathbf{Dtr}^X \rightarrow \mathbf{Dtr}$. Soit $f : E \rightarrow F$ un homomorphisme de treillis. La partie $\phi = f^{-1}(1)$ de E est un filtre. Si $x, y \in E$ sont tels que $f_\phi(x) = f_\phi(y)$, il existe un élément a de ϕ tel que $x \wedge a = y \wedge a$, on a donc $f(x) \wedge f(a) = f(y) \wedge f(a)$ et par

suite $f(x) = f(y)$. Il existe donc une application $g : E/\phi \rightarrow F$ telle que $g.f_\phi = f$. Il est immédiat que g est un morphisme de $\mathbb{D}tr^X$. En outre, si ϕ, ψ sont deux filtres de E et $f : E/\phi \rightarrow F$, $g : E/\psi \rightarrow F$ deux morphismes de $\mathbb{D}tr^X$ vérifiant $f.f_\phi = g.f_\psi$, on a : $x \in \phi \iff f_\phi(x) = 1 \iff f \circ f_\phi(x) = 1 \iff g \circ f_\psi(x) = 1 \iff f_\psi(x) = 1 \iff x \in \psi$; par suite, on a $\phi = \psi$ et $f = g$.

Le raisonnement reste valable pour les foncteurs :

$\mathbb{T}rd^X \rightarrow \mathbb{T}rd$, $\mathbb{H}e^X \rightarrow \mathbb{H}e$, $\mathbb{B}ool^X \rightarrow \mathbb{B}ool$. Pour le foncteur $\mathbb{T}rdloc \rightarrow \mathbb{T}rd$, on considère l'ensemble des filtres premiers de E i.e. des filtres ϕ de E qui vérifient $\forall x, y \in E (x \vee y \in \phi \Rightarrow (x \in \phi \text{ ou } y \in \phi))$ (cf. Anders Kock).

Corollaire 2.2.10.1. - Les foncteurs ensemble sous-jacent,

$\mathbb{D}tr^X \rightarrow \mathbb{E}ns$, $\mathbb{T}rd^X \rightarrow \mathbb{E}ns$, $\mathbb{H}e^X \rightarrow \mathbb{E}ns$, $\mathbb{B}ool^X \rightarrow \mathbb{E}ns$, $\mathbb{T}rdloc \rightarrow \mathbb{E}ns$, sont localement représentables localisants.

Exemple 2.2.11. - Ordres totaux sur les ensembles ordonnés.

Propriété 2.2.11. - Le foncteur $\mathbb{O}rdt \rightarrow \mathbb{O}rd$ est localisant.

Démonstration.- Soit E un ensemble ordonné. Notons T l'ensemble des préordres totaux sur E moins fins que l'ordre donné sur E . Pour un élément R de T , on note E_R l'ensemble totalement ordonné quotient de E par l'équivalence associée à R et $f_R : E \rightarrow E_R$ la projection canonique qui est croissante. Pour $x, y \in E$, on a : $xRy \iff f_R(x) \leq f_R(y)$. Montrons que $(f_R : E \rightarrow E_R)_{R \in T}$ est une famille initiale de morphismes de E vers le foncteur $\mathbb{O}rdt \rightarrow \mathbb{O}rd$. Considérons une application croissante $f : E \rightarrow F$ où F est un ensemble totalement ordonné. Notons R le préordre initial sur E défini par l'application f et l'ordre sur F . Le préordre R appartient à T . Si $x, y \in E$ vérifient $f_R(x) = f_R(y)$, on a : xRy et yRx , par suite : $f(x) \leq f(y)$ et $f(y) \leq f(x)$, et donc : $f(x) = f(y)$. On en déduit que f se

factorise par f_R en une application $\bar{f} : E_R \rightarrow F$. Il est immédiat que \bar{f} est uniquement déterminée et strictement croissante. Considérons, en outre deux éléments R, S de T , un ensemble totalement ordonné F et deux applications strictement croissantes $f : E_R \rightarrow F, g : E_S \rightarrow F$ vérifiant $f \cdot f_R = g \cdot f_S$. Pour $x, y \in E$, on a : $xRy \iff f_R(x) \leq f_R(y) \iff f(f_R(x)) \leq f(f_R(y)) \iff g(f_S(x)) \leq g(f_S(y)) \iff f_S(x) \leq f_S(y) \iff xSy$. Par suite, R et S sont égaux.

Corollaire. - Le foncteur $\text{Ordt} \rightarrow \text{Ens}$ est localisant.

Exemples 2.2.12. - Ordres totaux sur les anneaux et les corps.

Propriétés 2.2.12. - Les foncteurs $\mathbb{A}\text{ncordt} \rightarrow \mathbb{A}\text{nc}, \mathbb{K}\text{ord} \rightarrow \mathbb{K}\text{c}$ sont localisants.

Démonstration. - On montre facilement que l'on obtient une famille initiale de morphismes d'un objet A de $\mathbb{A}\text{nc}$ vers le foncteur : $\mathbb{A}\text{ncordt} \rightarrow \mathbb{A}\text{nc}$ en considérant l'ensemble des ordres totaux sur l'anneau A . Le raisonnement est le même pour le foncteur : $\mathbb{K}\text{ord} \rightarrow \mathbb{K}\text{c}$.

Exemples 2.2.13. - Métriques sur un espace topologique.

Propriété 2.2.13.0. - Les foncteurs $\text{Met} \rightarrow \text{Topsep}, \text{Metcomp} \rightarrow \text{Comp}$ sont localisants.

Démonstration. - Soit E un espace topologique séparé. Notons P l'ensemble des pseudo-métriques continues sur E . Pour $d \in P$, notons E_d l'ensemble quotient de E par l'équivalence \sim définie par : $x \sim y$ ssi $d(x,y) = 0$, muni de la métrique \bar{d} définie $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = d(x,y)$, et par $f_d : E \rightarrow E_d$ la projection canonique, qui est continue. Montrons que $(f_d : E \rightarrow E_d)_{d \in P}$ est une famille initiale de morphismes de E vers le foncteur : $\text{Met} \rightarrow \text{Topsep}$. Considérons une application continue : $f : E \rightarrow (F, \delta)$ où (F, δ) est un espace métrique. Notons d la pseudo-métrique continue

sur E définie par $d(x,y) = \delta(f(x),f(y))$. Si x,y sont deux éléments de E vérifiant $d(x,y) = 0$, on a $d(f(x),f(y)) = 0$ et par suite $f(x) = f(y)$. On en déduit que f se factorise par f_d en une application $\bar{f} : E_d \rightarrow F$ qui est une isométrie. En outre si d,d' sont deux pseudo-métriques sur E , si (F,δ) est un espace métrique et $f : E_d \rightarrow F$, $g : E_{d'} \rightarrow F$ sont deux isométries vérifiant $f \cdot f_d = g \cdot f_{d'}$, on a, pour deux éléments x,y de E :

$$d(x,y) = \bar{d}(\bar{x},\bar{y}) = \delta(f(\bar{x}),f(\bar{y})) = \delta(g(\bar{x}),g(\bar{y})) = \bar{d}'(\bar{x},\bar{y}) = d'(x,y).$$

On en déduit que $d = d'$. Cela montre que le foncteur $\text{Met} \rightarrow \text{Topsep}$ est localisant. Pour le foncteur $\text{Metcomp} \rightarrow \text{Comp}$, il suffit de remarquer que si E est compact et $d \in P$, alors E_d est compact.

Corollaire 2.2.13.1. - Les foncteurs $\text{Metcompl} \rightarrow \text{Top}$, $\text{Metcompl} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Met} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Metcomp} \rightarrow \text{Top}$, $\text{Metcomp} \rightarrow \text{Ens}$ sont localisants.

Exemples 2.2.14. - Valeurs absolues sur un corps.

Propriété 2.2.14.0. - Le foncteur $\mathbb{K}v \rightarrow \mathbb{K}$ est localisant.

Démonstration.- On montre facilement que l'on obtient une famille initiale de morphismes d'un objet K de \mathbb{K} vers le foncteur $\mathbb{K}v \rightarrow \mathbb{K}$ en considérant l'ensemble des valeurs absolues sur K .

Corollaire 2.2.14.1. - Le foncteur $\mathbb{K}v \rightarrow \text{Ens}$ est localisant.

Exemples 2.2.15. - Normes sur un espace vectoriel.

Propriété 2.2.15.0. - Le foncteur $\text{Nor}(K) \rightarrow \text{Evt}(K)$ est localisant

Démonstration.- Soit E un objet de $\text{Ev}(K)$. Notons N l'ensemble des semi-normes continues sur E . Pour $n \in N$, posons $X_n = \{x \in E : n(x) = 0\}$.

Alors X_n est un sous-espace vectoriel de E et l'espace vectoriel quotient $E_n = E/X_n$ est normé par la norme quotient \bar{n} . On note $f_n : E \rightarrow E_n$ la projection canonique. Montrons que $(f_n : E \rightarrow E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille initiale de morphismes de E vers le foncteur $\text{Nor}(K) \rightarrow \text{Evt}(K)$. Considérons une application linéaire continue $f : E \rightarrow F$ où F est un espace vectoriel normé par m . Notons n la semi-norme continue sur E définie par $n(x) = m(f(x))$. Si $x \in X_n$, on a $m(f(x)) = 0$ et par suite $f(x) = 0$. On en déduit que f est de la forme $f = \bar{f} \cdot f_n$ où $\bar{f} : E_n \rightarrow F$ est une application linéaire qui préserve la norme. En outre si, n, n' sont deux semi-normes sur E , si (F, m) est un espace métrique et $f : E_n \rightarrow F, g : E_{n'} \rightarrow F$ sont des morphismes de $\text{Nor}(K)$ vérifiant $g \cdot f_{n'} = f \cdot f_n$, on a, pour un élément x de E :

$$n(x) = \bar{n}(\bar{x}) = m(f(\bar{x})) = m(g(\bar{x})) = \bar{n}'(\bar{x}) = n'(x).$$

On en déduit que $n = n'$ et par suite que $f = g$.

Corollaire 2.2.15.1. - Les foncteurs : $\text{Nor}(K) \rightarrow \text{Ev}(K)$, $\text{Nor}(K) \rightarrow \text{Ens}$ sont localisants.

On démontre de façon analogue les propriétés suivantes :

Propriétés 2.2.15.2. - Les foncteurs : $\text{Algnor}(K) \rightarrow \text{Alg}(K)$, $\text{Algnor}(K) \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Invnor}(K) \rightarrow \text{Inv}(K)$, $\text{Invnor}(K) \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Stell} \rightarrow \text{Inv}(C)$, $\text{Stell} \rightarrow \text{Ens}$ sont localisants.

Corollaire 2.2.15.3. - Les foncteurs : $\text{Metcomp} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Kvcomp} \rightarrow \text{K}$, $\text{Ban}(K) \rightarrow \text{Ev}(K)$, $\text{Algban}(K) \rightarrow \text{Alg}(K)$, $\text{Invban} \rightarrow \text{Alg}(C)$, $\text{Stellcompl} \rightarrow \text{Alg}(C)$ sont localisants.

Exemples 2.2.16. - Produits scalaires sur un espace vectoriel.

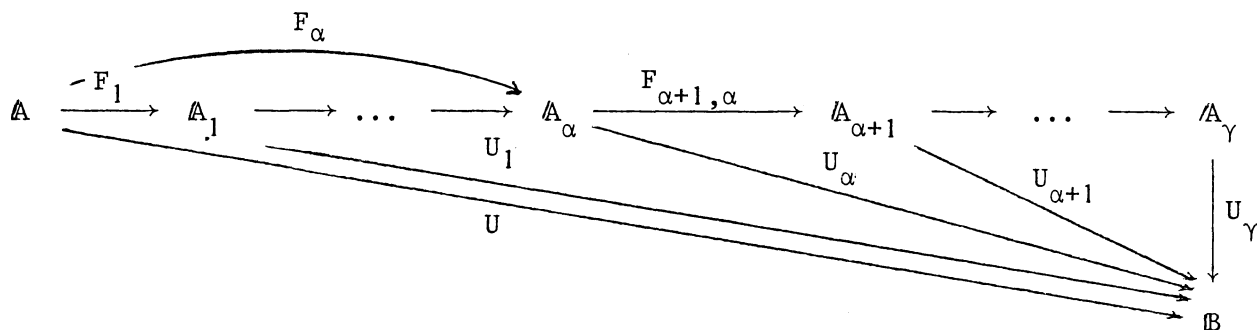
Propriété 2.2.16. - Les foncteurs $\text{Euc} \rightarrow \text{Evt}(\mathbb{R})$, $\text{Euc} \rightarrow \text{Ev}(\mathbb{R})$, $\text{Euc} \rightarrow \text{Ens}$ sont localisants.

Démonstration.- D'une façon analogue à celle du 2.2.15.0., pour un objet E de $\mathbb{E}vt(\mathbb{R})$, on obtient une famille initiale de morphismes de E vers le foncteur $:\mathbb{E}uc \rightarrow \mathbb{E}vt(\mathbb{R})$ en considérant l'ensemble des formes bilinéaires symétriques positives continues sur E .

Exemple 2.2.17.- Catégories de fractions d'une catégorie.

Propriété 2.2.17.- Le foncteur $\text{Cat}_\perp^X \rightarrow \text{Cat}$ est localisant.

Démonstration.- On utilise les résultats de Gabriel-Zisman sur le calcul de fractions [8]. Soient \mathbb{A}, \mathbb{B} deux petites catégories et $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ un foncteur.



On définit, pour tout ordinal α , une petite catégorie \mathbb{A}_α et deux foncteurs $F_\alpha : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}_\alpha$, $U_\alpha : \mathbb{A}_\alpha \rightarrow \mathbb{B}$ vérifiant $U_\alpha \cdot F_\alpha = U$, et pour tout couple d'ordinaux α, β tels que $\alpha < \beta$, un foncteur $F_{\beta\alpha} : \mathbb{A}_\alpha \rightarrow \mathbb{A}_\beta$ vérifiant $F_{\beta\alpha} \cdot F_\alpha = F_\beta$ et $F_{\gamma\beta} \cdot F_{\beta\alpha} = F_{\gamma\alpha}$ pour $\alpha < \beta < \gamma$, par récurrence transfinie, de la façon suivante :

1) $\mathbb{A}_0 = \mathbb{A}$, $F_0 = 1_{\mathbb{A}}$, $U_0 = U$,

2) $\mathbb{A}_{\alpha+1} = \mathbb{A}_\alpha [\Sigma_\alpha^{-1}]$ où Σ_α est l'ensemble des morphismes de \mathbb{A}_α rendus inversibles par U_α , $F_{\alpha+1, \alpha} : \mathbb{A}_\alpha \rightarrow \mathbb{A}_{\alpha+1}$ est le foncteur canonique, $F_{\alpha+1, \beta} = F_{\alpha+1, \alpha} \cdot F_{\alpha, \beta}$ pour $\beta < \alpha$, et $U_{\alpha+1} : \mathbb{A}_{\alpha+1} \rightarrow \mathbb{B}$ est l'unique foncteur vérifiant $U_{\alpha+1} \cdot F_{\alpha+1, \alpha} = U_\alpha$.

3) Pour un ordinal limite γ ,

$\mathbb{A}_\gamma = \lim_{\alpha < \gamma} \mathbb{A}_\alpha$, $F_{\gamma, \alpha} : \mathbb{A}_\alpha \rightarrow \mathbb{A}_\gamma$ est l'induction canonique et

$U_\gamma : \mathbb{A}_\gamma \rightarrow \mathbb{B}$ est le foncteur défini par $U_\gamma \cdot F_{\gamma\alpha} = U_\alpha$.

Pour tout ordinal α , le foncteur $F_{\alpha+1, \alpha}$ est un épimorphisme de Cat [8]. Puisque tout composé et toute limite inductive d'épimorphismes est un épimorphisme, on en déduit que les morphismes F_α sont des épimorphismes de Cat . La catégorie Cat étant à peu d'objets quotients, il existe un ordinal γ tel que $F_{\gamma+1, \gamma}$ soit un isomorphisme. Le foncteur U_γ reflète alors les isomorphismes. En outre, si \mathbb{C} , \mathbb{D} sont deux petites catégories, $G : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ un foncteur $V : \mathbb{A}_\gamma \rightarrow \mathbb{D}$ et $W : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ sont deux foncteurs reflétant les isomorphismes et vérifiant $W \cdot G = V \cdot F_\alpha$, il est immédiat par récurrence transfinie, qu'il existe un unique foncteur $T : \mathbb{A}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $T \cdot F_\alpha = G$. Le foncteur $: \text{Cat}^X \rightarrow \text{Cat}$ est alors localisant par suite de la proposition 2.0.6. et du fait que Cat est à peu d'objets quotients.

Exemple 2.2.18. - Calculs de fractions à gauche dans les catégories.

Propriété 2.2.18. - Le foncteur $\text{Indf}^X \rightarrow \text{Ind}$ est localisant.

Démonstration.- Soit $\mathbb{A} \in \text{Indf}$. Notons S' l'ensemble des parties saturées de $\text{fl}(\mathbb{A})$ qui admettent un calcul de fractions à gauche [8]. Pour $\Sigma \in S'$, considérons la catégorie de fractions $\mathbb{A}[\Sigma^{-1}]$. Le foncteur canonique $F_\Sigma : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}[\Sigma^{-1}]$ préserve les limites inductives finies [8]. En outre un foncteur $U : \mathbb{A}[\Sigma^{-1}] \rightarrow \mathbb{B}$ préserve les limites inductives finies si et seulement si $U \cdot F_\Sigma$ les préserve. On montre alors, comme au 2.2.17., que $(F_\Sigma : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}[\Sigma^{-1}])_{\Sigma \in S'}$ est une famille initiale de morphismes de \mathbb{A} vers le foncteur $: \text{Indf}^X \rightarrow \text{Ind}$.

Exemple 2.2.19. - Localisation de catégories abéliennes.

Propriété 2.2.19. - Le foncteur $\text{Abex}^X \rightarrow \text{Abex}$ est localisant.

Démonstration.- On utilise ici des résultats de [15] .

Soit \mathbb{A} une petite catégorie abélienne. Notons E l'ensemble des sous-caté-

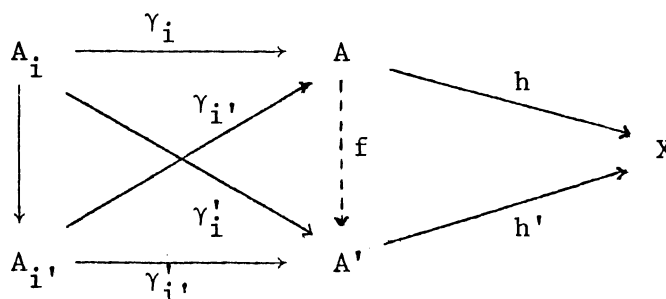
gories épaisses de \mathbb{A} . Pour $\mathbb{K} \in \mathcal{E}$, considérons la catégorie quotient \mathbb{A}/\mathbb{K} et le foncteur canonique $F_{\mathbb{K}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}/\mathbb{K}$. Le foncteur $F_{\mathbb{K}}$ est additif et exact. En plus un foncteur additif exact à gauche $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ se factorise sous la forme $U = \bar{U} \cdot F_{\mathbb{K}}$ où \mathbb{K} est la sous-catégorie épaisse de \mathbb{A} ayant pour objets ceux dont l'image par U est un objet nul et où \bar{U} est un foncteur additif exact. On montre alors facilement que $(F_{\mathbb{K}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}/\mathbb{K})_{\mathbb{K} \in \mathcal{E}}$ est une famille initiale de morphismes de \mathbb{A} vers le foncteur $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}bex^X \rightarrow \mathbb{A}bex$.

2.3. - Localisations inductives et limites inductives locales.

On considère une catégorie \mathbb{A} . Soient \mathbb{I} une petite catégorie et $F : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{A}$ un diagramme de \mathbb{A} , encore noté $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$.

Définition 2.3.0. - Une localisation inductive du diagramme F est un cône inductif de base F , localement initial dans la catégorie des cônes inductifs de base F .

C'est donc un cône inductif $\gamma : F \rightarrow A$ de base F tel que pour tout cône inductif $\gamma' : F \rightarrow A'$ de base F et toute paire de morphismes $h : A \rightarrow X$, $h' : A' \rightarrow X$ vérifiant $h \cdot \gamma_i = h' \cdot \gamma'_i$ pour tout $i \in \mathbb{I}$, il existe un morphisme $f : A \rightarrow A'$ et un seul vérifiant $f \cdot \gamma_i = \gamma'_i$ pour tout $i \in \mathbb{I}$



Définition 2.3.1. - Une couronne inductive de \mathbb{A} de base F est une famille de cônes inductifs de \mathbb{A} de base F .

Elle peut être notée $(\gamma_j : F \rightarrow B_j)_{j \in J}$ ou $(\gamma_{ji} : A_i \rightarrow B_j)_{(i,j) \in \mathbb{I} \times J}$.

Définition 2.3.2. - Une limite inductive locale du diagramme

$F : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{A}$ est une couronne inductive initiale dans la catégorie des cônes inductifs de \mathbb{A} de base F .

C'est donc une couronne inductive $(\gamma_j : F \rightarrow B_j)_{j \in J}$ de base F telle que pour tout cône inductif $\gamma : F \rightarrow B$ de base F , il existe un unique couple (j, f) formé d'un élément j de J et d'un morphisme $f : B_j \rightarrow B$ vérifiant $f \cdot \gamma_{ji} = \gamma_i$ pour tout $i \in \mathbb{I}$.

Définition 2.3.3. - Une catégorie \mathbb{A} est localement cocomplète

si tout petit diagramme de \mathbb{A} admet une limite inductive locale.

On considère le foncteur diagonal $\Delta : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^{\mathbb{I}}$ et on note

$\Gamma_F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}ns$ le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(F, \Delta -)$. Alors $\Gamma_F(A)$ est l'ensemble des cônes inductifs de \mathbb{A} de base F et de sommet A .

Proposition 2.3.4. - Le diagramme $F : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{A}$ admet une limite

inductive locale si et seulement si le foncteur $\Gamma_F : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}ns$ est localement
représentable.

Proposition 2.3.5. - Une catégorie \mathbb{A} est localement cocomplète

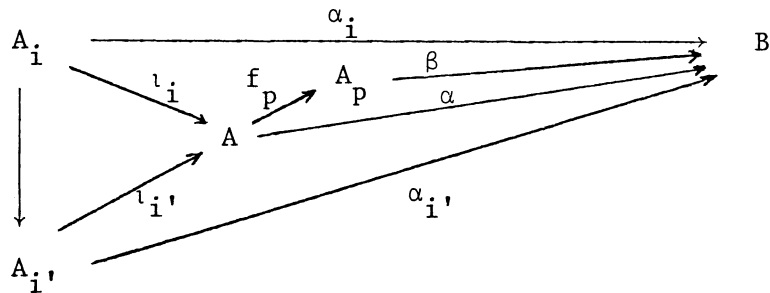
si et seulement si pour toute petite catégorie \mathbb{I} , le foncteur diagonal
 $\Delta : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^{\mathbb{I}}$ est localisant.

Démonstration. - C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.3.4.

Propriété 2.3.6. - Les catégories de \mathbb{C} sont localement cocomplètes.

Démonstration. - Montrons le pour la catégorie $\mathbb{L}occ$, par exemple.

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un diagramme de $\mathbb{L}occ$. Notons (A, ι) la limite inductive du diagramme d'anneaux commutatifs unitaires $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$. Notons S l'ensemble des idéaux premiers p de A tels que : $\forall i \in \mathbb{I}, \forall x \in A_i, (x \text{ non inversible dans } A_i \implies \iota_i(x) \in p)$. Pour $p \in S$, on note A_p le localisé de A en p et $f_p : A \rightarrow A_p$ l'homomorphisme canonique. L'anneau A_p est local et les homomorphismes $f_p \cdot \iota_i : A_i \rightarrow A_p$ reflètent les éléments inversibles. Montrons que $(f_p \cdot \iota_i : A_i \rightarrow A_p)_{(i,p) \in \mathbb{I} \times S}$ est une limite inductive locale de $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ dans $\mathbb{L}occ$.



Soit $(\alpha_i : A_i \rightarrow B)_{i \in \mathbb{I}}$ un cône inductif de \mathbb{A} de base $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$. Il existe un unique homomorphisme d'anneaux $\alpha : A \rightarrow B$ vérifiant $\alpha \cdot \iota_i = \alpha_i$ pour chaque $i \in \mathbb{I}$. Notons U l'ensemble des éléments non inversibles de B . U est un idéal maximal de B , donc $\alpha^{-1}(U)$ est un idéal premier p de A et même un élément de S . L'homomorphisme $\alpha : A \rightarrow B$ s'écrit alors d'une seule façon sous la forme $\alpha = \beta \cdot f_p$ où $\beta : A_p \rightarrow B$ reflète les éléments inversibles. On montre facilement qu'un tel couple (p, β) est unique.

Proposition 2.3.7. - Si \mathbb{A} est une catégorie localement cocomplète et \mathbb{C} est une petite catégorie, la catégorie $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ est localement cocomplète.

Démonstration. - Soit \mathbb{I} une petite catégorie. Le foncteur diagonal $\Delta_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^{\mathbb{I}}$ est localisant (prop. 2.3.5.) et, par suite, le foncteur $\Delta_{\mathbb{A}}^{\mathbb{C}} : \mathbb{A}^{\mathbb{C}} \rightarrow (\mathbb{A}^{\mathbb{I}})^{\mathbb{C}}$ l'est aussi (prop. 2.2.3.). Le foncteur diagonal $\Delta_{\mathbb{A}^{\mathbb{C}}} : \mathbb{A}^{\mathbb{C}} \rightarrow (\mathbb{A}^{\mathbb{C}})^{\mathbb{I}}$ composé de $\Delta_{\mathbb{A}}^{\mathbb{C}}$ avec l'isomorphisme canonique $(\mathbb{A}^{\mathbb{I}})^{\mathbb{C}} \rightarrow (\mathbb{A}^{\mathbb{C}})^{\mathbb{I}}$ est alors localisant. Cela montre que $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ est localement cocomplète (prop. 2.3.5.)

2.4. - Foncteurs localement pleinement fidèles.

La notion suivante de foncteur localement pleinement fidèle semble mieux adaptée à l'étude des propriétés universelles locales que la notion de foncteur pleinement fidèle.

Définition 2.4.0. - Un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ est localement pleinement fidèle si pour tout couple de morphismes $h : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow C$ de \mathbb{A} de mêmes buts et tout morphisme $\ell : UA \rightarrow UB$ de \mathbb{B} vérifiant $Ug.\ell = Uh$, il existe un unique morphisme $f : A \rightarrow B$ de \mathbb{A} vérifiant $g.f = h$ et $Uf = \ell$.

Il revient au même de dire que, pour tout objet C de \mathbb{A} , le foncteur $U_C : (\mathbb{A}, C) \rightarrow (\mathbb{B}, UC)$ induit par U entre les catégories comma (\mathbb{A}, C) et (\mathbb{B}, UC) est pleinement fidèle.

Une sous-catégorie est localement pleine si le foncteur d'inclusion est localement pleinement fidèle.

Exemples 2.4.1. - La plupart des foncteurs cités au 2.2. sont localement pleinement fidèles. Seuls les suivants ne le sont pas :
 $\text{Anc}^{\mathbb{X}} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Dif}^{\mathbb{X}} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Locc} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Locdif} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Dtr}^{\mathbb{X}} \rightarrow \text{Ens}$,
 $\text{Tr}^{\mathbb{X}} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Trd} \rightarrow \text{Ens}$, $\text{Ords} \rightarrow \text{Ens}$.

Proposition 2.4.2. -

- 1) Le composé de deux foncteurs localement pleinement fidèles l'est aussi.
- 2) Un foncteur est localement pleinement fidèle si son composé par un

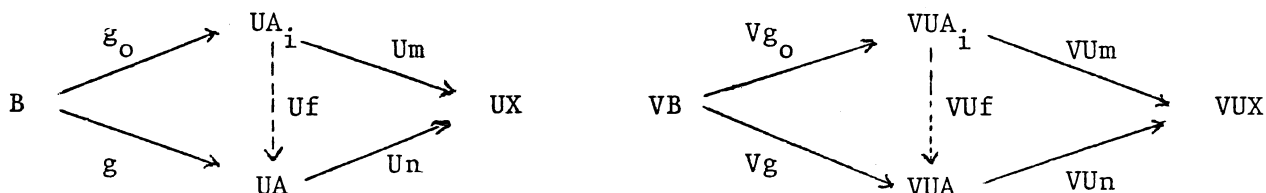
foncteur fidèle l'est.

3) Si $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ est un foncteur localement pleinement fidèle et \mathbb{C} est une petite catégorie, le foncteur $U^{\mathbb{C}} : \mathbb{A}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{B}^{\mathbb{C}}$ est localement pleinement fidèle.

Démonstration.- Immédiate.

Proposition 2.4.3. - Un foncteur est localisant si son composé par un foncteur localement pleinement fidèle l'est.

Démonstration.- Soient $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ un foncteur et $V : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ un foncteur localement pleinement fidèle tel que VU soit localisant. Soit B un objet de \mathbb{B} . Notons $(h_i : VB \rightarrow VUA_i)_{i \in I}$ une famille initiale de morphismes de VB vers VU . Considérons l'ensemble M des morphismes de la forme $g_o : B \rightarrow UA_i$ où $i \in I$ et $Vg_o = h_i$. Montrons qu'un tel morphisme g_o est une localisation de B vers U .



Soient $m : A_i \rightarrow X$, $n : A \rightarrow X$ deux morphismes de \mathbb{A} et $g : B \rightarrow UA$ un morphisme de \mathbb{B} vérifiant $Um.g_o = Un.g$. Il existe un unique morphisme $f : A_i \rightarrow A$ vérifiant $VUf.Vg_o = Vg$. Les deux morphismes $Uf.g_o, g : B \xrightarrow{\quad} UA$ vérifient alors les relations $Un(Uf.g_o) = U(nf).g_o = Um.g_o = Un.g$ et $V(Uf.g_o) = VUf.Vg_o = Vg$. Le foncteur V étant localement pleinement fidèle, on en déduit l'égalité $Uf.g_o = g$. En outre, il existe au plus un morphisme $f : A_i \rightarrow A$ vérifiant $Uf.g_o = g$ puisqu'il vérifie alors : $VUf.Vg_o = Vg$.

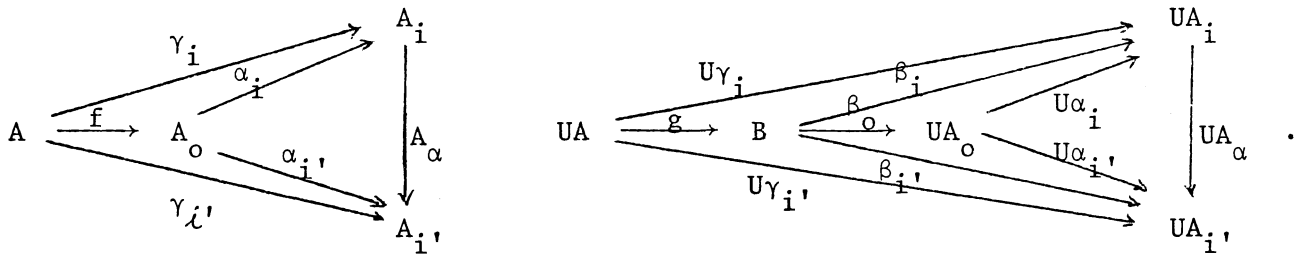
Soit $g : B \rightarrow UA$ un morphisme de \mathcal{B} . Il existe $i \in I$ et $f : A_i \rightarrow A$ vérifiant $Vg = VUf.h_i$. Le foncteur V étant localement pleinement fidèle, il existe un morphisme $g_0 : B \rightarrow UA_i$ tel que $Uf.g_0 = g$ et $Vg_0 = h_i$, d'où $g_0 \in M$.

Cela montre que la catégorie (B, V) des morphismes de B vers V possède une famille initiale (prop. 2.0.6).

Proposition 2.4.4. - Soit $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur localement pleinement fidèle localisant. Si la catégorie \mathcal{B} est à limites projectives connexes, la catégorie \mathcal{A} aussi.

Démonstration. - Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un diagramme connexe de \mathcal{A} .

Posons $(B, \beta) = \varprojlim_{i \in \mathbb{I}} UA_i$



Pour tout objet i de \mathbb{I} , le morphisme $\beta_i : B \rightarrow UA_i$ est de la forme $\beta_i = U\alpha_i.\beta_i'$ où (A_i', β_i') est une localisation de B vers U et $\alpha_i : A_i' \rightarrow A_i$ est un morphisme de \mathcal{A} . Puisque le diagramme $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est connexe, toutes les localisations (A_i', β_i') peuvent, en fait, être choisies égales ; on note (A_0, β_0) leur valeur commune. On obtient alors un cône projectif $(\alpha_i : A_0 \rightarrow A_i)_{i \in \mathbb{I}}$. Montrons que c'est une limite projective. Soit $(\gamma_i : A \rightarrow A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un cône projectif de base $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$. Il existe un unique morphisme $g : UA \rightarrow B$ vérifiant $\beta_i.g = U\gamma_i$ pour chaque $i \in \mathbb{I}$. Le foncteur U étant localement pleinement fidèle il existe, pour chaque $i \in \mathbb{I}$, un unique morphisme $f_i : A \rightarrow A_0$ vérifiant $\alpha_i.f_i = \gamma_i$ et $Uf_i = \beta_0.g$. Or si $\alpha : i \rightarrow i'$ est un morphisme de \mathbb{I} , on a : $\alpha_{i'} . f_i = A_\alpha . \alpha_i . f_i = A_\alpha . \gamma_i = \gamma_{i'}$

et donc $f_{i'} = f_i$. Puisque le diagramme $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est connexe, on en infère l'égalité $f_i = f_{i'}$, pour tout $i, i' \in \mathbb{I}$. En notant f la valeur commune des f_i , on obtient un morphisme $f : A \rightarrow A_0$ vérifiant $\alpha_i \cdot f = \gamma_i$ pour chaque $i \in \mathbb{I}$, un tel morphisme étant, en outre, unique.

Exemple 2.4.4.0. - Le foncteur $\text{Metcomp} \rightarrow \text{Met}$ est localisant puisque son composé par le foncteur localement pleinement fidèle $\text{Met} \rightarrow \text{Top}$ égale le composé des foncteurs $\text{Metcomp} \rightarrow \text{Comp}$ et $\text{Comp} \rightarrow \text{Top}$ qui sont localisants.

Proposition 2.4.5. - Soit $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ un foncteur localement pleinement fidèle localisant. Si la catégorie \mathbb{B} est localement cocomplète, la catégorie \mathbb{A} l'est aussi.

Démonstration. - Soit \mathbb{I} une petite catégorie. Les foncteurs diagonaux $\Delta_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}^{\mathbb{I}}$, $\Delta_{\mathbb{B}} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}^{\mathbb{I}}$, le foncteur U et le foncteur $U^{\mathbb{I}} : \mathbb{A}^{\mathbb{I}} \rightarrow \mathbb{B}^{\mathbb{I}}$ vérifient la relation $U^{\mathbb{I}} \cdot \Delta_{\mathbb{A}} = \Delta_{\mathbb{B}} \cdot U$. Puisque la catégorie \mathbb{B} est localement cocomplète, le foncteur $\Delta_{\mathbb{B}}$ est localisant (prop. 2.3.5.) et par suite le foncteur $U^{\mathbb{I}} \cdot \Delta_{\mathbb{A}} = \Delta_{\mathbb{B}} \cdot U$ l'est aussi. Le foncteur $U^{\mathbb{I}}$ étant localement pleinement fidèle (prop. 2.4.2.), le foncteur $\Delta_{\mathbb{A}}$ est localisant (prop. 2.4.3). Cela montre que la catégorie \mathbb{A} est localement cocomplète (prop. 2.3.5.).

3 - UN THEOREME D'EXISTENCE DE LOCALISATIONS.

Les foncteurs $\mathbb{A}n^{\mathbb{X}} \rightarrow \mathbb{A}n$, $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{A}n$, $\mathbb{L}oc \rightarrow \mathbb{A}n$, $\mathbb{T}r^{\mathbb{X}} \rightarrow \mathbb{T}r$, $\mathbb{T}rloc \rightarrow \mathbb{T}r$, $\mathbb{O}rds \rightarrow \mathbb{O}rd$ sont-ils localisants ? Le calcul de fractions et la localisation ne se font classiquement que pour les anneaux commutatifs et le quotient d'un treillis non distributif par un filtre n'est pas, en général, un treillis. Les résultats du 2.2. ne s'appliquent donc pas ici. Le théorème d'existence de localisations suivant, analogue au théorème d'existence d'adjoint de P. Freyd, montre que ces foncteurs sont localisants.

3.0. - Le théorème d'existence.

Lemme 3.0.0. - Dans la catégorie des ensembles les limites projectives connexes commutent aux sommes.

Démonstration.- Soient I un ensemble, \mathbb{J} une petite catégorie connexe non vide et $X : I \times \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{A}$ un diagramme de \mathbb{A} , encore noté :

$(X_{ij})_{(i,j) \in I \times \mathbb{J}}$. Posons $Y_j = \coprod_{i \in I} X_{ij}$ pour $j \in \mathbb{J}$, $Y_\alpha = \coprod_{i \in I} X_{i\alpha}$ pour $\alpha : j \rightarrow j'$, et $Y = \varprojlim_{j \in \mathbb{J}} Y_j$. On a :

$$(y_j)_{j \in \mathbb{J}} \in Y \iff (\forall j \in \mathbb{J}, y_j \in Y_j) \text{ et } (\forall \alpha : j \rightarrow j', Y_\alpha(y_j) = y_{j'}) .$$

Soient $(y_j)_{j \in \mathbb{J}}$ un tel élément et $j, j' \in \mathbb{J}$. Alors ,
 $y_j = (i, x_j)$ et $y_{j'} = (i', x_{j'})$. Si $\alpha : j' \rightarrow j$, on a
 $(i, x_j) = y_j = Y_\alpha(y_{j'}) = (i', X_{i', \alpha}(x_{j'}))$. Par suite, on a $i = i'$ et

$x_j = X_{i', \alpha}(x_{j'})$. On en déduit : $(y_j)_{j \in \mathbb{J}} \in Y \iff \exists i \in I, (\forall j \in \mathbb{J}, x_j \in X_{ij})$
 et $(\forall \alpha : j \rightarrow j', X_{i\alpha}(x_j) = x_{j'}) \iff \exists i \in I, (x_j) \in \varprojlim_{j \in \mathbb{J}} X_{ij} \iff$
 $(y_i)_{i \in I} \in \coprod_{i \in I} (\varprojlim_{j \in \mathbb{J}} X_{ij})$.

Proposition 3.0.1.- Tout foncteur localement représentable préserve les limites projectives connexes.

Démonstration.- Soit $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}ns$ un foncteur localement représentable. Il existe une famille d'objets $(A_i)_{i \in I}$ de \mathbb{A} telle que $U \simeq \coprod_{i \in I} Hom_{\mathbb{A}}(A_i, -)$. Si $X = \varprojlim_{j \in J} X_j$ est une limite projective connexe de \mathbb{A} , on a :

$$U(\varprojlim_{j \in J} X_j) \simeq \coprod_{i \in I} Hom_{\mathbb{A}}(A_i, \varprojlim_{j \in J} X_j) \simeq \coprod_{i \in I} \varprojlim_{j \in J} Hom_{\mathbb{A}}(A_i, X_j) \simeq \varprojlim_{j \in J} \coprod_{i \in I} Hom_{\mathbb{A}}(A_i, X_j) \simeq \varprojlim_{j \in J} U X_j .$$

Proposition 3.0.2.- Tout foncteur localisant préserve les limites projectives connexes.

Démonstration.- Soit $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ un foncteur localisant. Pour tout objet B de \mathbb{B} , le foncteur $Hom_{\mathbb{B}}(B, U)$ est localement représentable. Si $X = \varprojlim_{j \in J} X_j$ est une limite projective connexe, on a :

$$Hom_{\mathbb{B}}(B, U X) \simeq \varprojlim_{j \in J} Hom_{\mathbb{B}}(B, U X_j) \simeq Hom_{\mathbb{B}}(B, \varprojlim_{j \in J} U X_j)$$

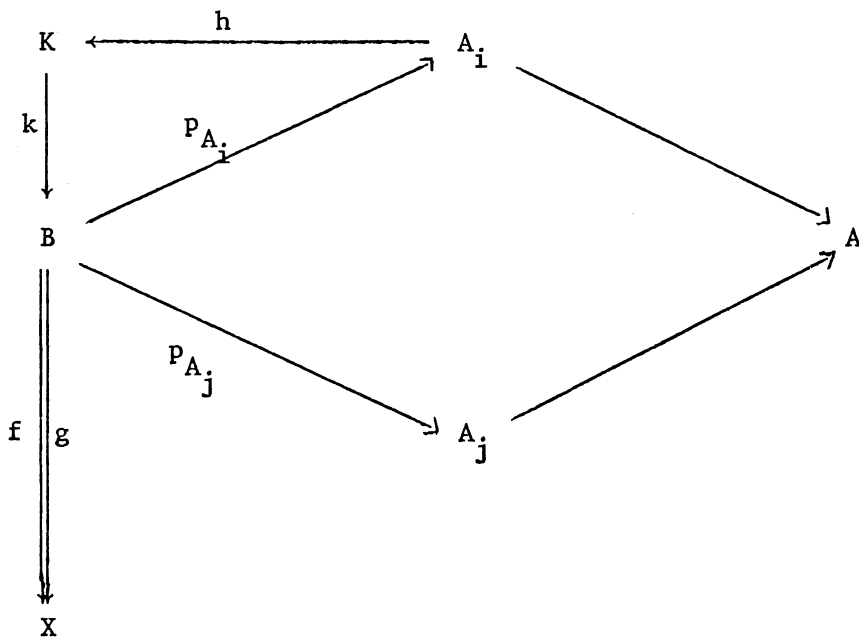
Ce qui prouve que : $U X \simeq \varprojlim_{j \in J} U X_j$.

Une catégorie \mathbb{A} qui possède une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'objets telle que, pour tout objet X , il existe un $i \in I$ et un morphisme $f : A_i \rightarrow X$ est dite bornée (c.f. solution set condition dans [13]). Un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{E}ns$ est borné si sa catégorie de représentation \mathbb{R}_U est bornée. Un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ est borné si, pour tout objet B de \mathbb{B} , le foncteur $Hom_{\mathbb{A}}(B, U)$ est borné.

Théorème 3.0.3.- Une catégorie à limites projectives connexes possède une famille initiale d'objets si et seulement si elle est bornée.

Démonstration.- La condition est, évidemment, nécessaire.

Soit \mathbb{A} une catégorie à limites projectives connexes possédant une famille bornante $(A_i)_{i \in I}$. Soit A un objet de \mathbb{A} . Notons $\mathbb{A}(A)$ la sous-catégorie pleine de \mathbb{A} ayant pour objets les X tels que $\text{Hom}(X, A) \neq \emptyset$ et \mathbb{J} la sous-catégorie pleine de $\mathbb{A}(A)$ dont les objets sont A et ceux de la forme A_i , pour $i \in I$. La catégorie \mathbb{J} est petite, connexe et non vide. Notons $p : B \rightarrow \emptyset$ la limite projective du foncteur d'inclusion $\phi : \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{A}$. Montrons que B est un objet initial de $\mathbb{A}(A)$. Si X est un objet de $\mathbb{A}(A)$, il existe un morphisme $f : X \rightarrow A$ et un morphisme $g : A_i \rightarrow X$. Par suite A_i est un objet de $\mathbb{A}(A)$ et on obtient un morphisme $g \cdot p_{A_i} : B \rightarrow X$. Soient $f, g : B \rightarrow X$ deux morphismes. Notons (K, k) le noyau de (f, g) .



Il existe un morphisme $h : A_i \rightarrow K$; par suite A_i est un objet de $\mathbb{A}(A)$.
 Pour tout objet A_j de \mathbb{J} , on a

$$p_{A_j} \cdot k \cdot h \cdot p_{A_i} = p_{A_j} \quad . \quad \text{On en déduit } k \cdot h \cdot p_{A_i} = 1_B \quad .$$

Le morphisme k est alors un épimorphisme, ce qui montre que $f = g$.

Considérons maintenant deux objets A, A' de \mathbb{A} et un morphisme $f : A \rightarrow A'$.

Notons B (resp. B') un objet initial de $\mathbb{A}(A)$ (resp. $\mathbb{A}(A')$) et f_A (resp. $f_{A'}$) l'unique morphisme $B \rightarrow A$ (resp. $B' \rightarrow A'$). Puisque $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(B, A') \neq \emptyset$, il existe un morphisme $g : B' \rightarrow B$ et par suite un morphisme $h : B \rightarrow B'$. Il est alors immédiat que g et h sont inverses l'un de l'autre. On a donc $B \simeq B'$. Cela prouve que chaque composante connexe a un objet initial. Par ailleurs \mathbb{A} a un ensemble de composantes connexes.

Théorème 3.0.4.- Soit \mathbb{A} une catégorie à limites projectives connexes. Un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \text{Ens}$ est localement représentable si et seulement si il est borné et préserve les limites projectives connexes.

Démonstration.- Il est immédiat que les conditions sont nécessaires. Si U préserve les limites projectives connexes, le foncteur $Q : \mathbb{R}_U \rightarrow \mathbb{A}$ défini par $Q(A, a) = A$ et $Q(f) = f$ crée les limites projectives connexes (lemme du th. 2, p. 117, [13]). La catégorie \mathbb{R}_U est alors à limites projectives connexes et a un ensemble de composantes connexes. Du théorème 3.0.3., on infère que \mathbb{R}_U possède une famille initiale et, par suite, que U est localement représentable.

Théorème 3.0.5.- Soit \mathbb{A} une catégorie à limites projectives connexes. Un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ est localisant si et seulement si il est borné et préserve les limites projectives connexes.

Démonstration.- Il est immédiat que les conditions sont nécessaires. Si le foncteur U les vérifie, il en est de même de chaque foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{B}}(B, U)$. Du théorème 3.0.4. on infère que chaque foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{B}}(B, U)$ est localement représentable et, par suite, que U est localisant.

3.1. - Localisations non standards.

3.1.0. - Localisations des anneaux non commutatifs.

Propriété 3.1.0. - Les foncteurs $\mathcal{A}n^{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{A}n$, $\mathcal{L}oc \rightarrow \mathcal{A}n$, $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{A}n$ sont localisants.

Preuve : Nous allons utiliser le théorème 3.0.5.

a) Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un diagramme connexe de $\mathcal{A}n^{\mathcal{X}}$. Notons (A, p) la limite projective de $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ dans $\mathcal{A}n$. Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un élément de A tel que x_{i_0} soit inversible, pour un objet i_0 de \mathbb{I} . Pour tout morphisme $\alpha : i \rightarrow i'$ de \mathbb{I} , on a : x_i inversible $\iff x_{i'}$ inversible. Puisque \mathbb{I} est connexe, on en déduit que x_i est inversible pour tout $i \in \mathbb{I}$ et par suite que $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est inversible dans A . Cela montre que les projections canoniques $p_i : A \rightarrow A_i$ sont des morphismes de $\mathcal{A}n^{\mathcal{X}}$. La catégorie $\mathcal{A}n^{\mathcal{X}}$ étant une sous-catégorie localement pleine de $\mathcal{A}n$, le cône (A, p) est la limite projective de $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ dans $\mathcal{A}n^{\mathcal{X}}$. Il est immédiat que si les A_i sont des anneaux locaux (resp. corps), A est un anneau local (resp. corps) et par suite (A, p) est la limite projective de $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ dans $\mathcal{L}oc$ (resp. \mathcal{K}).

b) Soit $g : A \rightarrow B$ un morphisme de $\mathcal{A}n$. Posons $C = \{y \in B : \exists n \in \mathbb{N}, \exists R \in \mathbb{Z}(X_1, \dots, X_n), \exists x_1, \dots, x_n \in A, y = R(g(x_1), \dots, g(x_n))\}$. C est un sous-anneau unitaire de B contenant l'inverse de ses éléments inversibles dans B et contenant l'image de g . Le morphisme g se factorise alors sous la forme $g = f.p$ où $f : C \rightarrow B$ est un morphisme de $\mathcal{A}n^{\mathcal{X}}$ et où le cardinal de C est borné par $\chi_0 + \text{card } A$. En outre, si B est un anneau local (resp. corps), C en est un aussi. Cela montre que les trois foncteurs sont bornés.

3.1.1. - Localisations des treillis non distributifs.

Propriété 3.1.1. - Les foncteurs $\mathcal{T}r^{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{T}r$, $\mathcal{T}rloc \rightarrow \mathcal{T}r$ sont localisants.

Preuve. - Nous utilisons le théorème 3.0.5.

a) Soit $(E_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un diagramme connexe de Tr^X .

Notons (E, p) la limite projective de $(E_i)_{i \in \mathbb{I}}$ dans Tr .

Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un élément de E tel que $x_{i_0} = 1$ pour un objet i_0 de \mathbb{I} . Si $\alpha : i \rightarrow i'$ est un morphisme de \mathbb{I} , on a : $x_i = 1 \iff x_{i'} = 1$. Puisque \mathbb{I} est connexe, on en déduit que $x_i = 1$ pour tout $i \in \mathbb{I}$ et, par suite, que $(x_i)_{i \in \mathbb{I}} = 1$. Ainsi p_i est un morphisme de Tr^X , et, puisque Tr^X est une sous-catégorie localement pleine de Tr , (E, p) est la limite projective de $(E_i)_{i \in \mathbb{I}}$ dans Tr^X . Il est immédiat que si les E_i sont locaux, E est local et qu'alors (E, p) est la limite projective de $(E_i)_{i \in \mathbb{I}}$ dans Trloc .

b) Tout morphisme $g : E \rightarrow F$ de Tr se factorise sous la forme $g = f.p$ où $p : E \rightarrow g(E)$ est induite par g et $f : g(E) \rightarrow F$ est le morphisme d'inclusion. Or f est un morphisme de Tr^X et le cardinal de $g(E)$ est borné par celui de E . Cela montre que le foncteur : $\text{Tr}^X \rightarrow \text{Tr}$ est borné. En outre, si F est local, $g(E)$ l'est aussi ; ce qui montre que le foncteur : $\text{Trloc} \rightarrow \text{Tr}$ est borné.

3.1.2. - Ensembles strictement ordonnés.

On note $V : \text{Ords} \rightarrow \text{Ord}$ le foncteur défini sur les objets par $V(E, <) = (E, \leq)$ où $x \leq y$ ssi $(x = y \text{ ou } x < y)$ et par l'identité sur les morphismes. Le foncteur V est un plongement bijectif sur les objets qui induit un isomorphisme entre la catégorie Ords et la catégorie ayant pour objets les ensembles ordonnés et pour morphismes les applications strictement croissantes.

Propriété 3.1.2. - Le foncteur $V : \text{Ords} \rightarrow \text{Ord}$ est localisant.

Preuve : On utilise le théorème 3.0.5.

a) Soit $(E_i, <)_{i \in \mathbb{I}}$ un diagramme connexe de Ords . Posons

$(E, \leq) = \varinjlim_{i \in I} (E_i, \leq)$. Soit $(x_i), (y_i)$ deux éléments de E tels que $(x_i) < (y_i)$. Il existe un objet i_0 de I tel que $x_{i_0} < y_{i_0}$. Pour tout morphisme $\alpha : i \rightarrow j$ de I , on a $x_i < y_i \iff x_j < y_j$. Puisque I est connexe, on en déduit que, pour tout $i \in I$, on a $x_i < y_i$. Cela prouve que chaque projection $p_i : (E, \leq) \rightarrow (E_i, \leq)$ est strictement croissante et que par suite on a $(E, <) = \varinjlim_{i \in I} (E_i, <)$ dans Ords .

b) Montrons que V est borné. Soit $f : (E, \leq) \rightarrow (F, <)$ une application croissante. Munissons l'image $f(E)$ de l'ordre strict induit par celui de F . Alors f est de la forme $f = V(g).h$ où $h : (E, \leq) \rightarrow (f(E), <)$ est une application croissante et $g : (f(E), <) \rightarrow (F, <)$ est une application strictement croissante. Or on a $\text{card } f(E) \leq \text{card } E$.

3.2. - Un cas particulier de localisation.

On étudie le cas particulier d'un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ où \mathbb{A} est une catégorie dont les morphismes sont monomorphiques.

Notations 3.2.0. - Un morphisme $g : B \rightarrow UA$ de \mathbb{B} engendre l'objet A de \mathbb{A} si tout monomorphisme $f : A' \rightarrow A$ de \mathbb{A} tel que Uf factorise g , est un isomorphisme. On dit alors que A est engendré par g ou par B . Si $g : B \rightarrow UA$ est un morphisme de \mathbb{B} , un sous-objet $f : A' \rightarrow A$ de \mathbb{A} est dit engendré par g s'il existe un morphisme $g' : B \rightarrow UA'$ qui engendre A' et vérifie $Uf.g' = g$.

Proposition 3.2.1. - Soit \mathbb{A} une catégorie à morphismes monomorphiques possédant des produits fibrés et des noyaux et $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ un foncteur qui préserve les produits fibrés et les noyaux.

1) Un morphisme $g : B \rightarrow UA$ est une localisation de B vers U si et seulement si g engendre A .

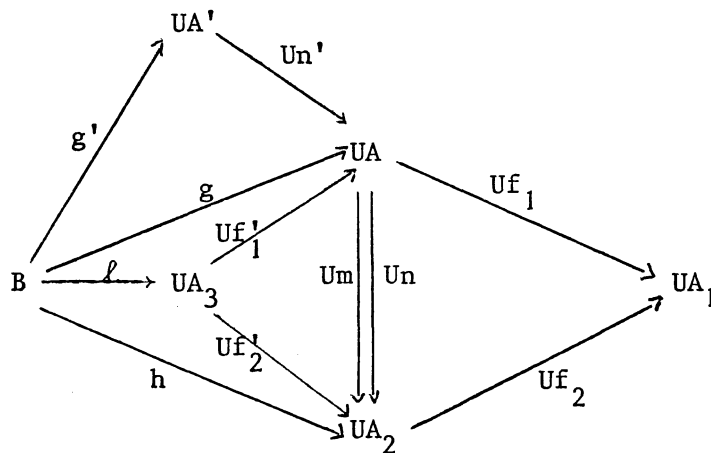
2) Le foncteur U est localisant si et seulement si

a) pour chaque morphisme $g : B \rightarrow UA$, un sous-objet de A engendré par B existe,

b) pour chaque objet B de \mathbb{B} , les objets de \mathbb{A} engendrés par B , pris à isomorphisme près, forment un ensemble.

Démonstration.- Soit $g : B \rightarrow UA$ une localisation de B vers U . Si $f : A' \rightarrow A$ est un morphisme de \mathbb{A} et $g' : B \rightarrow UA'$ un morphisme de \mathbb{B} vérifiant $Uf.g' = g$, il existe un unique morphisme $h : A \rightarrow A'$ vérifiant $Uh.g = g'$ et $f.h = 1_A$; ce qui implique de f est un isomorphisme. Ainsi g engendre A .

Considérons, réciproquement, un morphisme $g : B \rightarrow UA$ qui engendre A . Soit $f_1 : A \rightarrow A_1$, $f_2 : A_2 \rightarrow A_1$ deux morphismes de \mathbb{A} et $h : B \rightarrow UA_2$ un morphisme de \mathbb{B} vérifiant : $Uf_1.g = Uf_2.h$



Notons $(A_3; f'_1, f'_2)$ un produit fibré de (f_1, f_2) . Alors $(UA_3; Uf'_1, Uf'_2)$ est un produit fibré de (Uf_1, Uf_2) et, par suite, il existe un morphisme $l : B \rightarrow UA_3$ vérifiant $Uf'_1.l = g$ et $Uf'_2.l = h$. Puisque g engendre A , f'_1 est un isomorphisme. Alors le morphisme $m = f'_1.(f'_1)^{-1}$ est tel que $Um.g = h$. Supposons que $n : A \rightarrow A_2$ soit un autre morphisme vérifiant

$Un.g = h$. Notons (A',n') le noyau de (m,n) alors (UA',Un') est le noyau de (Um,Un) , et par suite, il existe un unique morphisme $g' : B \rightarrow UA'$ vérifiant $Un'.g' = g$. On en déduit que n' est un isomorphisme et par suite, que $m = n$.

La partie (2) est une conséquence immédiate de la partie (1).

4 - INTERPRETATION DES PROPRIETES UNIVERSELLES LOCALES DANS LA CATEGORIE DES FAMILLES D'OBJETS.

4.0. - La catégorie $\mathbb{F}\mathbb{A}$ des familles d'objets de \mathbb{A} .

On considère une catégorie \mathbb{A} . La catégorie $\mathbb{F}\mathbb{A}$ des familles d'objets de \mathbb{A} a pour objets les familles $(A_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathbb{A} et pour morphismes $(A_i)_{i \in I} \rightarrow (B_j)_{j \in J}$ les couples $(\alpha, (f_j)_{j \in J})$ formés d'une application $\alpha : J \rightarrow I$ et d'une famille $(f_j : A_{\alpha(j)} \rightarrow B_j)_{j \in J}$ de morphismes de \mathbb{A} . Le foncteur $J_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{A}$ est défini par $J_{\mathbb{A}}A = A$ et $J_{\mathbb{A}}f = f$. C'est un plongement plein. On identifie \mathbb{A} à une sous-catégorie pleine de $\mathbb{F}\mathbb{A}$ par le foncteur $J_{\mathbb{A}}$.

Proposition 4.0.0.- Une famille d'objets de \mathbb{A} est initiale dans \mathbb{A} si et seulement si elle est un objet initial de $\mathbb{F}\mathbb{A}$.

Démonstration.- Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille initiale dans \mathbb{A} . Si $(B_j)_{j \in J}$ est un objet de $\mathbb{F}\mathbb{A}$, on note, pour tout $j \in J$, $(\alpha(j), f_j)$ l'unique couple tel que $\alpha(j) \in I$ et $f_j : A_{\alpha(j)} \rightarrow B_j$. On définit ainsi un morphisme $(\alpha, f_j) : (A_i)_{i \in I} \rightarrow (B_j)_{j \in J}$. Un tel morphisme est en outre unique. Par suite $(A_i)_{i \in I}$ est initial dans $\mathbb{F}\mathbb{A}$. Réciproquement, si $(A_i)_{i \in I}$ est un objet initial dans $\mathbb{F}\mathbb{A}$, alors pour tout objet A de \mathbb{A} , il existe un unique morphisme $(A_i)_{i \in I} \rightarrow A$ i.e. un unique couple (i, f) où $i \in I$ et $f : A_i \rightarrow A$, la famille $(A_i)_{i \in I}$ est, par suite, initiale dans \mathbb{A} .

Proposition 4.0.1.-

1) Une couronne inductive de \mathbb{A} est une limite inductive locale si et seulement si elle est une limite inductive dans $\mathbb{F}\mathbb{A}$.

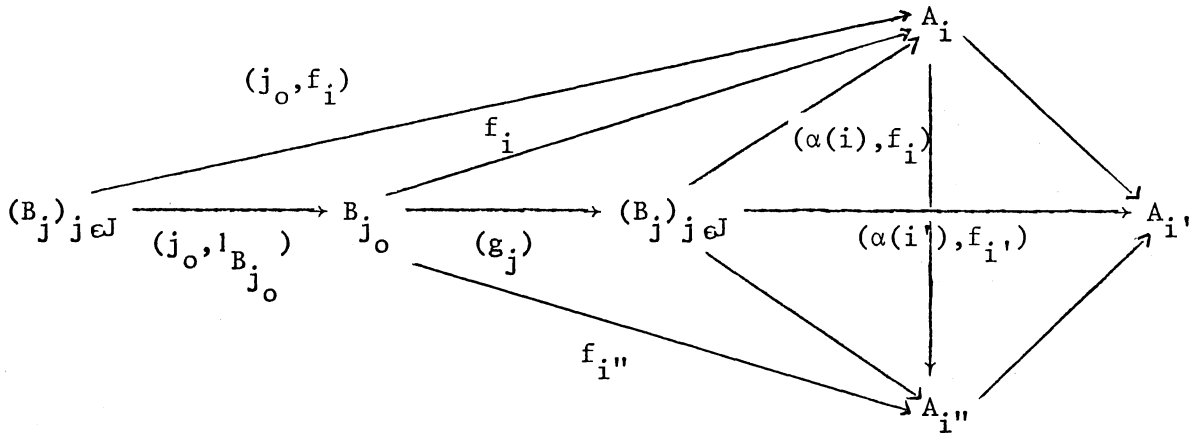
2) La catégorie \mathbb{A} est localement cocomplète si et seulement si la catégorie $\mathbb{F}\mathbb{A}$ est cocomplète.

Démonstration.- Soit $(A_i)_{i \in I}$ un diagramme de \mathbb{A} . Il est immédiat qu'une couronne inductive $(\gamma_{ji} : A_i \rightarrow B_j)_{(i,j) \in I \times J}$ de \mathbb{A} de base $(A_i)_{i \in I}$ est une limite inductive locale si et seulement si le cône $((\gamma_{ji}) : A_i \rightarrow (B_j)_{j \in J})_{i \in I}$ est une limite inductive de $(A_i)_{i \in I}$ dans \mathbb{FA} . On en déduit que si \mathbb{FA} est cocomplète, la catégorie \mathbb{A} est localement cocomplète. Supposons, réciproquement, que \mathbb{A} soit localement cocomplète. Soit $((A_i)_{i \in I_k})_{k \in K}$ un diagramme de \mathbb{FA} . Posons $I = \varprojlim_{k \in K} I_k$. Pour tout élément $i = (i_k)_{k \in K}$ de I , on a un diagramme $(A_{i_k})_{k \in K}$ de \mathbb{A} . Notons $(\gamma_{jk} : A_{i_k} \rightarrow B_j)_{(k,j) \in K \times J_i}$ une limite inductive locale de $(A_{i_k})_{k \in K}$. Posons $J = \bigcup_{i \in I} J_i$ (on suppose les ensembles J_i disjoints deux à deux). Pour $k \in K$, on définit $\alpha_k : J \rightarrow I_k$ par $\alpha_k(j) = i_k$ si $j \in J_i$. On obtient alors un morphisme $(\alpha_k, (\gamma_{jk})_{j \in J}) : (A_{i_k})_{i \in I_k} \rightarrow (B_j)_{j \in J}$, puis un cône inductif de \mathbb{FA} de base $((A_{i_k})_{i \in I_k})_{k \in K}$ et de sommet $(B_j)_{j \in J}$, que l'on montre facilement être une limite inductive.

La proposition suivante peut expliquer le rôle des limites projectives connexes.

Proposition 4.0.2.- La catégorie \mathbb{A} est à limites projectives connexes si et seulement si la catégorie \mathbb{FA} est complète.

Démonstration.- La catégorie \mathbb{FA} est à produits, le produit de la famille $((A_i)_{i \in I_k})_{k \in K}$ d'objets de \mathbb{FA} étant l'objet $(A_i)_{i \in \prod_{k \in K} I_k}$. Supposons \mathbb{FA} complète. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un diagramme connexe de \mathbb{A} . Notons $(B_j)_{j \in J}$ sa \varprojlim dans \mathbb{FA} , et, pour tout $i \in I$, par $(\alpha(i), f_i) : (B_j)_{j \in J} \rightarrow A_i$ la projection canonique.



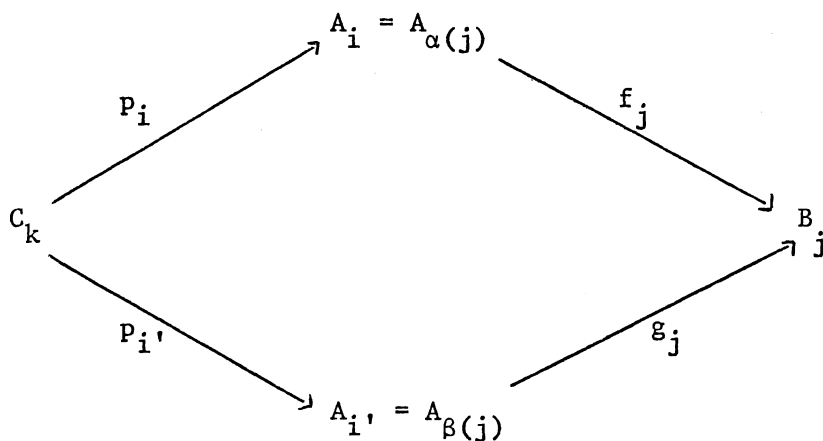
Le diagramme $(A_i)_{i \in I}$ étant connexe, on a $\alpha(i) = \alpha(i')$ pour tout $i, i' \in I$. Notons j_0 leur valeur commune. Le cône projectif $(f_i : B_{j_0} \rightarrow A_i)_{i \in I}$ de sommet B_{j_0} et de base $(A_i)_{i \in I}$ définit un morphisme $(g_j)_{j \in J} : B_{j_0} \rightarrow (B_j)_{j \in J}$ vérifiant $g_j \cdot f_i = f_i$ pour tout $i \in I$. Le morphisme $(g_j) (j_0, l_{B_{j_0}}) : (B_j)_{j \in J} \rightarrow (B_j)_{j \in J}$ composé avec le morphisme $(\alpha(i), f_i)$ est le morphisme (j_0, f_i) . C'est donc l'identité. On en déduit que l'application $J \rightarrow \{j_0\} \rightarrow J$ est l'identité et que, par suite $J = \{j_0\}$. Ce qui montre que $B_{j_0} = \varprojlim_{i \in I} A_i$.

Supposons \mathbb{A} à \varprojlim connexes. Considérons deux morphismes $(\alpha, (f_j)), (\beta, (g_j)) : (A_i)_{i \in I} \rightrightarrows (B_j)_{j \in J}$ de \mathbb{A} . Notons $\gamma : I \rightarrow K$ le conoyau de (α, β) .

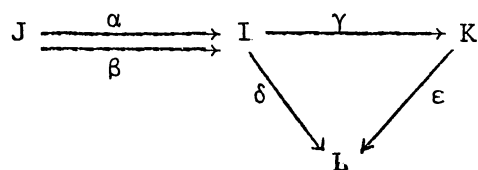
$$J \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} I \xrightarrow{\gamma} K .$$

Soit k un élément de K . Posons $\Lambda = k \cup \alpha^{-1}(k)$ (on suppose $k \cap \alpha^{-1}(k) = \emptyset$) et notons Λ le type de diagramme ayant Λ pour ensemble d'objets et ayant un morphisme $\alpha(j) \rightarrow j$ et un morphisme $\beta(j) \rightarrow j$ pour chaque $j \in \alpha^{-1}(k)$, pour seuls morphismes non unités. Ce type de diagramme est connexe, puisque si i, i' , sont deux éléments distincts de k , il existe une suite $(i_n)_{n \in [0, N]}$ d'éléments de k telle que $i_0 = i, i_N = i'$ et, pour tout $n \in [0, N]$, il existe $j \in J$

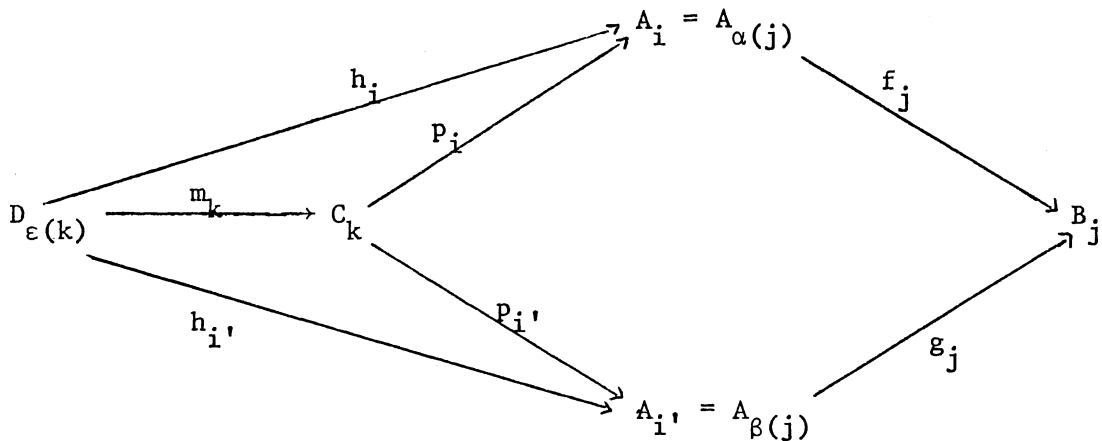
vérifiant $(\alpha(j) = i_{n-1} \text{ et } \beta(j) = i_n)$ ou $(\beta(j) = i_{n-1} \text{ et } \alpha(j) = i_n)$,
 et, par suite, il existe un couple de morphismes: $i_{n-1} \rightarrow j$, $i_n \rightarrow j$. On
 définit le diagramme $\Phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ par $\Phi(i) = A_i$ pour $i \in k$, $\Phi(j) = B_j$
 pour $j \in \alpha^{-1}(k)$, $\Phi(\alpha(j) \rightarrow j) = f_j$ et $\Phi(\beta(j) \rightarrow j) = g_j$. On pose
 $C_k = \varprojlim \Phi$ et on note $p_i : C_k \rightarrow A_i$ la projection canonique d'indice
 $i \in k$.



On définit ainsi un morphisme $(\gamma, (p_i)_{i \in I}) : (C_k)_{k \in K} \rightarrow (A_i)_{i \in I}$
 vérifiant $(\alpha, (f_j)) \cdot (\gamma, (p_i)) = (\beta, (g_j)) \cdot (\gamma, (p_i))$. Montrons que c'est
 le noyau de $(\alpha, (f_j)), (\beta, (g_j))$. Soit $(\delta, (h_i)) : (D_\ell)_{\ell \in L} \rightarrow (A_i)_{i \in I}$
 un morphisme vérifiant $(\alpha, (f_j)) \cdot (\delta, (h_i)) = (\beta, (g_j)) \cdot (\delta, (h_i))$. On a alors
 $\delta \alpha = \delta \beta$ et, pour tout $j \in J$, $f_j \cdot h_{\alpha(j)} = g_j \cdot h_{\beta(j)}$. On en déduit un
 morphisme $\epsilon : K \rightarrow L$ rendant commutatif le diagramme



et pour tout $k \in K$, un morphisme $m_k : D_{\epsilon(k)} \rightarrow C_k$ rendant commutatif
 le diagramme :



pour tout $j \in \alpha^{-1}(k)$. Cela définit un morphisme $(\epsilon, (m_k)) : (D_l)_{l \in L} \longrightarrow (C_k)_{k \in K}$ vérifiant $(\gamma, (p_i)) \cdot (\epsilon, (m_k)) = (\delta, (h_i))$. L'unicité d'un tel morphisme est immédiate.

4.1. - Le foncteur extension $\overline{U} : \mathbb{F}\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ d'un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$.

Proposition 4.1.0.-

- 1) Le foncteur $J_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{A}$ est codense.
- 2) Un foncteur $V : \mathbb{F}\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ est une extension de Kan à droite par $J_{\mathbb{A}}$ si et seulement si il préserve les produits.
- 3) Si \mathbb{B} est une catégorie à produits, tout foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ admet une extension de Kan à droite par $J_{\mathbb{A}}$.

Démonstration.- Nous allons montrer que $J_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{A}$ est codense par produits [5]. Il suffira alors d'appliquer le théorème 2.1 de [5]. Tout objet $(A_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{F}\mathbb{A}$ est le produit $\prod_{i \in I} A_i$ d'objets de \mathbb{A} . Soit $((A_i)_{i \in I_k})_{k \in K}$ une famille d'objets de $\mathbb{F}\mathbb{A}$. Elle a pour produits l'objet $(A_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{F}\mathbb{A}$ où $I = \coprod_{k \in K} I_k$. Pour tout objet A de \mathbb{A} , on a :

$$\text{Hom}_{\mathbb{F}\mathbb{A}}((A_i)_{i \in I}, A) \simeq \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, A) \simeq \prod_{k \in K} \prod_{i \in I_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, A) \simeq \prod_{k \in K} \text{Hom}_{\mathbb{F}\mathbb{A}}((A_i)_{i \in I_k}, A).$$

Ce qui prouve que les produits sont $J_{\mathbb{A}}$ -absolus dans \mathbb{FA} [5].

On note $\bar{U} : \mathbb{FA} \rightarrow \mathbb{B}$ une extension de Kan à droite de U par $J_{\mathbb{A}}$. Puisque $J_{\mathbb{A}}$ est pleinement fidèle, on a $\bar{U} \cdot J_{\mathbb{A}} \simeq U$.

Proposition 4.1.1.-

1) Un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Ens}$ est localement représentable si et seulement si son extension $\bar{U} : \mathbb{FA} \rightarrow \mathbb{Ens}$ est représentable.

2) Si \mathbb{B} est à produits, un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ est localisant si et seulement si son extension $\bar{U} : \mathbb{FA} \rightarrow \mathbb{B}$ admet un adjoint à gauche.

Démonstration.-

1) Supposons $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Ens}$ localement représentable et soit $(A_i, a_i)_{i \in I}$ une famille initiale d'éléments de U . Pour tout objet $(B_j)_{j \in J}$ de \mathbb{FA} , on a :

$$\bar{U}((B_j)_{j \in J}) \simeq \prod_{j \in J} U(B_j) \simeq \prod_{j \in J} (\prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, B_j)) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{FA}}((A_i)_{i \in I}, (B_j)_{j \in J})$$

de façon naturelle par rapport à $(B_j)_{j \in J}$. Le foncteur \bar{U} est, par suite, représentable. Supposons, réciproquement, que \bar{U} soit représentable et soit $((A_i)_{i \in I}, a_o)$ un élément initial de $\mathbb{R}_{\bar{U}}$. Pour tout objet B de \mathbb{A} , on a :

$$U(B) \simeq \bar{U}(B) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{FA}}((A_i)_{i \in I}, B) \simeq \prod_{i \in I} \text{Hom}(A_i, B)$$

de façon naturelle par rapport à B . Le foncteur U est par suite localement représentable.

2) Pour tout objet B de \mathbb{B} , l'extension de Kan à droite $\overline{\text{Hom}_{\mathbb{B}}(B, U)}$ du foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{B}}(B, U) : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Ens}$ est isomorphe au foncteur $\text{Hom}(B, \bar{U})$. On en déduit que le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{B}}(B, U)$ est localement représentable.

ssi le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{B}}(B, \bar{U})$ est représentable et par suite que le foncteur U est localisant ssi le foncteur \bar{U} admet un adjoint à gauche.

Remarque 4.1.2.- Modulo la proposition 4.0.2. et la proposition 4.1.1, le théorème 3.0.5. équivaut au théorème d'existence d'un adjoint à gauche de P. Freyd [13].

5 - CATEGORIES LOCALISABLES.

Notations 5.0. - On considère un cardinal α . Un ensemble est α -petit s'il est de cardinal inférieur à α . Une famille est α -petite si son ensemble d'indices est α -petit. Le cardinal α est régulier si la somme d'une famille α -petite de cardinaux inférieurs à α , est inférieure à α . On considère, dans toute la suite, un cardinal régulier infini α .

Une catégorie est petite si elle est équivalente à une catégorie dont la classe des morphismes est un ensemble. Elle est α -petite si la classe de ses morphismes est un ensemble α -petit. Un diagramme $(A_i)_{i \in I}$ d'une catégorie est α -petit si la catégorie I est α -petite. Une limite ou une limite locale d'un diagramme α -petit est α -petite. Une catégorie est localement α -cocomplète si tout diagramme α -petit admet une limite inductive locale.

Les notions d'ensemble générateur propre, de limites inductives α -filtrantes (non vides), d'objets α -présentables et d'objets α -engendrés sont prises au sens de Gabriel-Ulmer [7].

Définition 5.1. - Une catégorie est α -localisable si

- 1) elle est à limites inductives α -filtrantes ;
- 2) elle est localement α -cocomplète ;
- 3) elle possède un ensemble générateur propre formé d'objets α -présentables.

Une catégorie est localisable s'il existe un cardinal régulier α tel qu'elle soit α -localisable.

Propriétés 5.2. -

- 1) Les catégories de la classe C_0 sont \aleph_0 -localisables.
- 2) Les catégories de la classe C_1 sont \aleph_1 -localisables.

Preuve : On utilise la définition 5.1. ou les résultats du 8.

Proposition 5.3. - Si \mathbb{A} est une catégorie α -localisable et A_0 est un objet de \mathbb{A} , la catégorie \mathbb{A}/A_0 des objets de \mathbb{A} au-dessus de A_0 est localement α -présentable.

Démonstration.- La catégorie \mathbb{A}/A_0 est à limites inductives α -filtrantes puisque la catégorie \mathbb{A} l'est. Montrons qu'elle est α -cocomplète. Si $(A_i, x_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est un diagramme α -petit de \mathbb{A}/A_0 , on note $(a_i : A_i \rightarrow A)_{i \in \mathbb{I}}$ une localisation inductive du diagramme $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de \mathbb{A} , qui factorise le cône inductif $(x_i : A_i \rightarrow A_0)_{i \in \mathbb{I}}$ et on note $x : A \rightarrow A_0$ le morphisme défini par $x.a_i = x_i$ pour tout $i \in \mathbb{I}$. Le cône inductif $(a_i : (A_i, x_i) \rightarrow (A, x))_{i \in \mathbb{I}}$ est alors une limite inductive de $(A_i, x_i)_{i \in \mathbb{I}}$. On en infère que la catégorie \mathbb{A}/A_0 est cocomplète. En outre si G est un ensemble générateur propre de \mathbb{A} formé d'objets α -présentables, l'ensemble des objets de \mathbb{A}/A_0 de la forme (A, x) avec $A \in G$ est un ensemble générateur propre formé d'objets α -présentables.

Proposition 5.4. - Dans une catégorie α -localisable les limites inductives α -filtrantes commutent aux limites projectives α -petites.

Démonstration.- Soit \mathbb{A} une catégorie α -localisable ayant G pour ensemble générateur propre formé d'objets α -présentables. Soient \mathbb{I} une petite catégorie α -filtrante, \mathbb{J} une catégorie de cardinal inférieur à α et $(A_{ji})_{(i,j) \in \mathbb{I} \times \mathbb{J}}$ un diagramme de \mathbb{A} pour lequel on suppose l'existence des limites considérées ci-dessous. Soit

$\psi : \lim_{i \in \mathbb{I}} \lim_{j \in \mathbb{J}} A_{ji} \rightarrow \lim_{j \in \mathbb{J}} \lim_{i \in \mathbb{I}} A_{ji}$ le morphisme canonique. Pour tout

objet A_0 de G , l'application $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, \psi)$ est la composée des bijections suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, \lim_{i \in \mathbb{I}} \lim_{j \in \mathbb{J}} A_{ji}) &\simeq \lim_{i \in \mathbb{I}} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, \lim_{j \in \mathbb{J}} A_{ji}) \simeq \lim_{i \in \mathbb{I}} \lim_{j \in \mathbb{J}} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, A_{ji}) \\ &\simeq \lim_{j \in \mathbb{J}} \lim_{i \in \mathbb{I}} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, A_{ji}) \simeq \lim_{j \in \mathbb{J}} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, \lim_{i \in \mathbb{I}} A_{ji}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, \lim_{j \in \mathbb{J}} \lim_{i \in \mathbb{I}} A_{ji}) . \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_o, \psi)$ est une bijection et par suite que ψ est un isomorphisme.

Corollaire 5.5. - Dans une catégorie α -localisable, une limite inductive α -filtrante de monomorphismes est un monomorphisme.

6 - OBJETS α -PRESENTABLES DANS LES CATEGORIES α -LOCALISABLES.

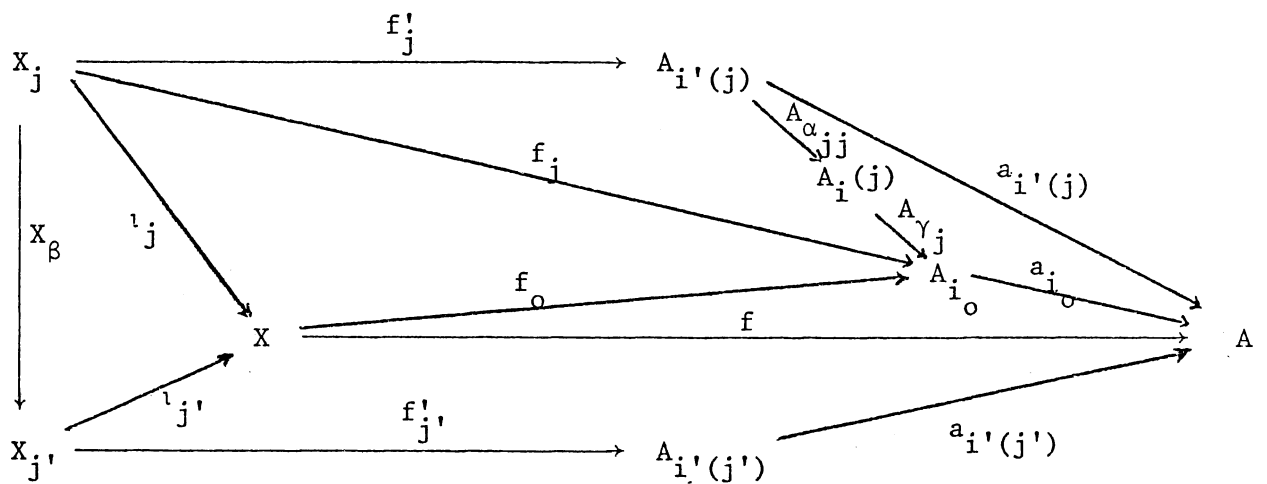
On considère une catégorie α -localisable \mathbb{A} .

Proposition 6.0. - Les objets α -présentables de \mathbb{A} sont stables pour les localisations inductives α -petites.

Démonstration.-

a) Notons d'abord que si $(E_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est un diagramme α -filtrant de $\mathbb{E}ns$ de limite inductive $(E, (e_i))$, pour tout ensemble α -petit I_0 d'objets de \mathbb{I} et toute famille $(x_i)_{i \in I_0}$ telle que $x_i \in E_i$ et $e_i(x_i) = e_{i'}(x_{i'})$ pour tout $i, i' \in I_0$, il existe un objet i_0 de \mathbb{I} et un morphisme $\alpha_i : i \rightarrow i_0$ de \mathbb{I} pour chaque $i \in I_0$ vérifiant $E_{\alpha_i}(x_i) = E_{\alpha_{i'}}(x_{i'})$ pour tout $i, i' \in I_0$.

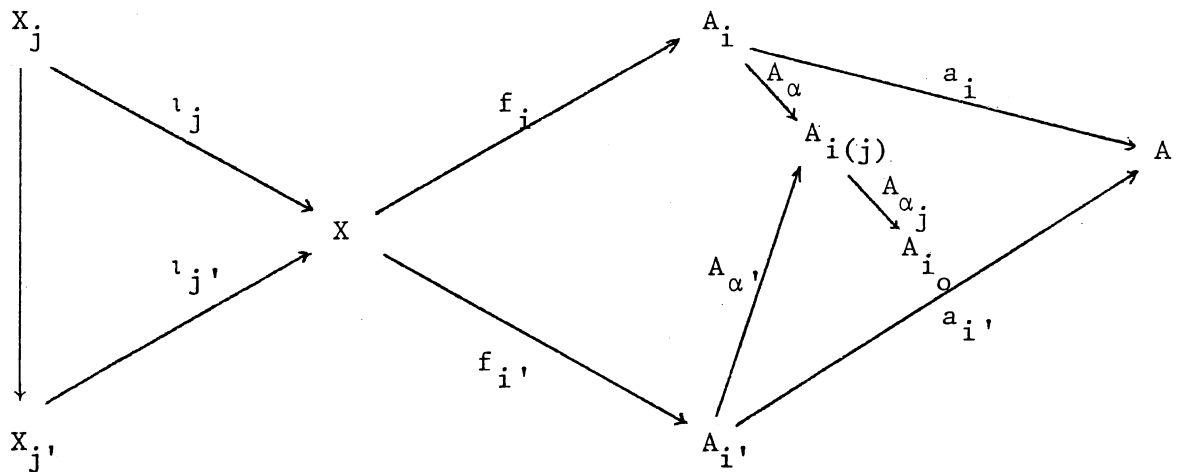
b) Soient $(X_j)_{j \in \mathbb{J}}$ un diagramme α -petit d'objets α -présentables de \mathbb{A} et $(\iota_j : X_j \rightarrow X)_{j \in \mathbb{J}}$ une localisation inductive de $(X_j)_{j \in \mathbb{J}}$. Montrons que l'objet X est α -présentable. Soit $(a_i : A_i \rightarrow A)_{i \in \mathbb{I}}$ une limite inductive α -filtrante dans \mathbb{A} .



Soit $f : X \rightarrow A$. Pour tout objet j de \mathbb{J} , il existe un objet $i'(j)$ de \mathbb{I} et un morphisme $f'_j : X_j \rightarrow A_{i'(j)}$ vérifiant $a_{i'(j)} \circ f'_j = f \circ \iota_j$. Fixons l'objet j . Pour tout morphisme $\beta : j \rightarrow j'$ de \mathbb{J} , on a la relation :

$a_{i'(j)} \cdot f'_j = f \cdot \iota_j = f \cdot \iota'_j \cdot X_\beta = a_{i'(j')} \cdot f'_{j'} \cdot X_\beta$. Puisque l'objet X_j est α -présentable et que la catégorie \mathbb{J} est α -petite, il existe, d'après le a), un objet $i(j)$ de \mathbb{I} et un morphisme $\alpha_{j',j} : i'(j') \rightarrow i(j)$ pour chaque $j' \in \mathbb{J}$, vérifiant $A_{\alpha_{j',j}} \cdot f'_{j'} \cdot X_\beta = A_{\alpha_{j,j}} \cdot f'_j$ pour tout $\beta : j \rightarrow j'$. Il existe alors un objet i_0 de \mathbb{I} et un morphisme $\gamma_j : i(j) \rightarrow i_0$ pour chaque objet j de \mathbb{J} . Posons $f_j = A_{\gamma_j} \cdot A_{\alpha_{j,j}} \cdot f'_j$. On obtient ainsi un cône inductif $(f_j : X_j \rightarrow A_{i_0})_{j \in \mathbb{J}}$ vérifiant $a_{i_0} \cdot f_j = f \cdot \iota_j$ pour tout objet j de \mathbb{J} . Puisque $(\iota_j : X_j \rightarrow X)_{j \in \mathbb{J}}$ est une localisante inductive, il existe un unique morphisme $f_0 : X \rightarrow A_{i_0}$ vérifiant $a_{i_0} \cdot f_0 = f$ et $f_0 \cdot \iota_j = f_j$ pour tout $j \in \mathbb{J}$.

Considérons maintenant deux morphismes $f_i : X \rightarrow A_i$, $f_{i'} : X \rightarrow A_{i'}$, vérifiant $a_i \cdot f_i = a_{i'} \cdot f_{i'}$.



Pour chaque objet j de \mathbb{J} , on a : $a_i \cdot f_i \cdot \iota_j = a_{i'} \cdot f_{i'} \cdot \iota_j$. Il existe, par suite, un objet $i(j)$ de \mathbb{I} et deux morphismes $\alpha : i \rightarrow i(j)$, $\alpha' : i' \rightarrow i(j)$ vérifiant $A_\alpha \cdot f_i \cdot \iota_j = A_{\alpha'} \cdot f_{i'} \cdot \iota_j$. Il existe alors un objet i_0 de \mathbb{I} et un morphisme $\alpha_j : i(j) \rightarrow i_0$ pour chaque objet j de \mathbb{J} . On a alors

$$A_{\alpha_j} \cdot A_\alpha \cdot f_i \cdot \iota_j = A_{\alpha_j} \cdot A_{\alpha'} \cdot f_{i'} \cdot \iota_j \text{ pour chaque objet } j \text{ de } \mathbb{J} \text{ et par suite on a :}$$

$$A_{\alpha_j} \cdot \alpha \cdot f_i = A_{\alpha_j} \cdot \alpha' \cdot f_{i'}$$

Soit G un ensemble générateur propre constitué d'objets α -présentables de \mathbb{A} . Pour tout ordinal β , on définit la sous-catégorie pleine \mathbb{C}_β de \mathbb{A} par récurrence transfinie de la façon suivante :

- 1) \mathbb{C}_0 a pour objets les objets appartenant à G ;
- 2) $\mathbb{C}_{\beta+1}$ a pour objets les localisations inductives α -petites d'objets de \mathbb{C}_β ;
- 3) $\mathbb{C}_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} \mathbb{C}_\beta$, pour un ordinal limite γ .

Définition 6.1. - La sous-catégorie pleine \mathbb{C}_α est la clôture de G par localisations inductives α -petites.

Lemme 6.2. - La sous-catégorie pleine \mathbb{C}_α est petite, fermée pour les localisations inductives α -petites et ses objets sont α -présentables.

Démonstration.-

a) Montrons par récurrence transfinie sur β que \mathbb{C}_β est petite. La catégorie \mathbb{C}_0 est petite. Si \mathbb{C}_β est petite, $\mathbb{C}_{\beta+1}$ l'est aussi. Si γ est un ordinal limite et si pour $\beta < \gamma$ la catégorie \mathbb{C}_β est petite, la catégorie \mathbb{C}_γ réunion d'un ensemble de petites catégories, est petite.

b) Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un diagramme α -petit d'objets de \mathbb{C}_α et $(\alpha_i : X_i \rightarrow X)_{i \in \mathbb{I}}$ une localisation inductive de $(X_i)_{i \in \mathbb{I}}$. Pour chaque $i \in \mathbb{I}$, il existe un ordinal $\beta_i < \alpha$ tel que X_i est un objet de \mathbb{C}_{β_i} . Puisque $\text{card } \mathbb{I} < \alpha$, il existe un ordinal β vérifiant : $\forall i \in \mathbb{I}, \beta_i \leq \beta$ et $\beta < \alpha$. Alors $(X_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est un diagramme α -petit de \mathbb{C}_β . Par suite X est un objet de $\mathbb{C}_{\beta+1}$, donc un objet de \mathbb{C}_α .

c) Les objets de \mathbb{C}_0 sont α -présentables. Si les objets de \mathbb{C}_β sont α -présentables, ceux de $\mathbb{C}_{\beta+1}$ le sont aussi (prop. 6.0.). Si γ est un ordinal limite et si les objets de \mathbb{C}_β sont α -présentables pour tout $\beta < \gamma$,

tout objet de \mathbb{G}_γ étant un objet d'un \mathbb{G}_β pour $\beta < \gamma$, est α -présentable. On déduit ainsi, par récurrence transfinie sur β , que les objets de \mathbb{G}_β sont α -présentables pour tout ordinal β .

Corollaire 6.3. - La catégorie \mathbb{G}_α est localement α -cocomplète.

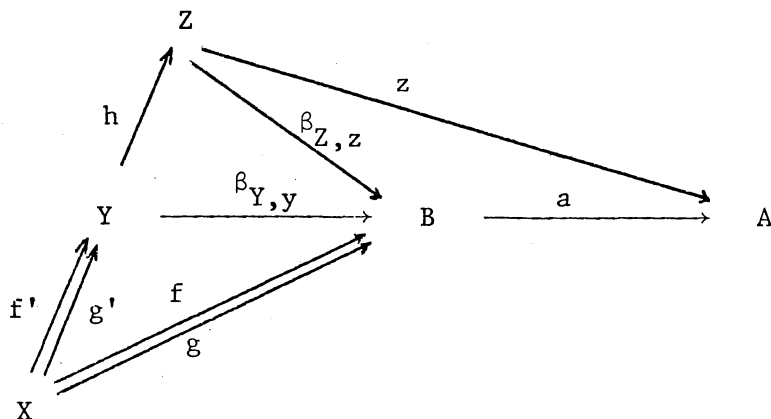
Lemme 6.4. - Pour tout objet A de \mathbb{A} , la catégorie comma (\mathbb{G}_α, A) est petite, non vide et α -filtrante.

Démonstration. - Puisque la catégorie \mathbb{G}_α est petite, la catégorie comma (\mathbb{G}_α, A) l'est aussi. La catégorie \mathbb{A} étant à limites inductives locales α -petites possède une famille initiale. Il existe alors un objet localement initial A_0 de \mathbb{A} et un morphisme $f : A_0 \rightarrow A$. Or A_0 est un objet de \mathbb{G}_1 , donc de \mathbb{G}_α . Par suite (A_0, f) est un objet de (\mathbb{G}_α, A) . Soit $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un diagramme α -petit de (\mathbb{G}_α, A) . Il existe une localisation inductive $(\beta_i : A_i \rightarrow B)_{i \in \mathbb{I}}$ du diagramme α -petit $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de \mathbb{A} et un morphisme $f : B \rightarrow A$ vérifiant $f \cdot \beta_i = \alpha_i$, pour chaque $i \in \mathbb{I}$. Alors B est un objet de \mathbb{G}_α et on obtient ainsi un cône inductif $(\beta_i : (A_i, \alpha_i) \rightarrow (B, f))_{i \in \mathbb{I}}$ de (\mathbb{G}_α, A) , de base $(A_i, \alpha_i)_{i \in \mathbb{I}}$. Cela montre que la catégorie comma (\mathbb{G}_α, A) est α -filtrante.

Lemme 6.5. - La sous-catégorie \mathbb{G}_α est dense dans \mathbb{A} .

Démonstration. - Soit A un objet de \mathbb{A} . Notons $\phi : (\mathbb{G}_\alpha, A) \rightarrow \mathbb{A}$ le diagramme de \mathbb{A} défini par $\phi(X, x) = X$ et $\phi(f) = f$. Le diagramme ϕ étant petit, non vide et α -filtrant, la limite inductive de ϕ existe. Notons la $\beta : \phi \rightarrow B$. Il existe un unique morphisme $a : B \rightarrow A$

vérifiant $a \cdot \beta_{X,x} = x$ pour tout objet (X,x) de $(\mathbb{C}_\alpha, \mathbb{A})$. Soit X un objet de \mathbb{G} . L'application $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(X,a) : \text{Hom}_{\mathbb{A}}(X,B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{A}}(X,A)$ est surjective. Montrons qu'elle est injective.



Soit $f, g : X \rightrightarrows B$ deux morphismes vérifiant $a \cdot f = a \cdot g$. L'objet X étant α -présentable, il existe un objet (Y,y) de $(\mathbb{C}_\alpha, \mathbb{A})$ et deux morphismes $f', g' : X \rightrightarrows Y$ vérifiant $\beta_{Y,y} \cdot f' = f$ et

$\beta_{Y,y} \cdot g' = g$. La relation :

$a \cdot \beta_{Y,y} \cdot f' = a \cdot f = a \cdot g = a \cdot \beta_{Y,y} \cdot g'$, implique l'existence d'une localisation

inductive $h : Y \rightarrow Z$ de (f', g') et d'un morphisme $z : Z \rightarrow A$ vérifiant :

$a \cdot \beta_{Y,y} = z \cdot h$. Or l'objet Z est dans \mathbb{C}_α , on obtient, par suite, un

morphisme $h : (Y,y) \rightarrow (Z,z)$ de $(\mathbb{C}_\alpha, \mathbb{A})$. On en déduit la relation :

$\beta_{Z,z} \cdot h = \beta_{Y,y}$, puis la relation : $g = \beta_{Y,y} \cdot g' = \beta_{Z,z} \cdot h \cdot g' = \beta_{Z,z} \cdot h \cdot f' =$

$= \beta_{Y,y} \cdot f' = f$. Ainsi $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(X,a)$ est une injection. L'ensemble \mathbb{G} étant

générateur propre, on en déduit que a est un isomorphisme, donc que

$\mathbb{A} = \varinjlim \Phi$ et par suite que \mathbb{C}_α est dense dans \mathbb{A} .

Lemme 6.6. - Les objets de \mathbb{C}_α sont exactement les objets α -présentables de \mathbb{A} .

Démonstration. - On sait déjà que les objets de \mathcal{C}_α sont α -présentables (lemme 6.2.). Soit A un objet α -présentable de \mathcal{A} . Avec les notations précédentes, on a $A = \varinjlim \Phi$. Il existe alors un objet (X, x) de $(\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{A})$ et un morphisme $f : A \rightarrow X$ vérifiant $\beta_{X, x} \cdot f = 1_A$. Alors $(A, \beta_{X, x})$ est le conoyau de la paire de morphismes $(f, \beta_{X, x}) : X \rightrightarrows X$ de \mathcal{C}_α . Par suite, A est une localisation inductive α -petite d'objets de \mathcal{C}_α . A appartient donc à \mathcal{C}_α .

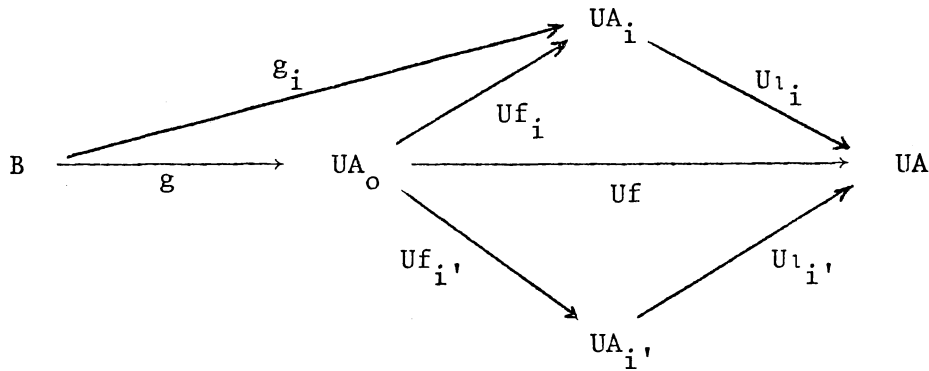
Théorème 6.7. - La sous-catégorie pleine de \mathcal{A} ayant pour objets, les objets α -présentables de \mathcal{A} est petite, dense dans \mathcal{A} , et est la clôture par localisations inductives α -petites, d'un ensemble générateur propre de \mathcal{A} formé d'objets α -présentables.

Démonstration. - C'est une conséquence de résultats précédents.

On se propose de rechercher les objets \mathcal{K}_0 -présentables dans les catégories de la classe \mathcal{C} . On utilise, pour cela les lemmes suivants.

Lemme 6.8. - Si $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est un foncteur préservant les limites inductives α -filtrantes, les objets de \mathcal{A} localisés vers U d'objets α -présentables de \mathcal{B} sont α -présentables.

Démonstration. - Soient B un objet α -présentable de \mathcal{B} et $g : B \rightarrow UA_0$ une localisation de B vers U . Montrons que l'objet A_0 est α -présentable dans \mathcal{A} . Soit $(A, \iota) = \varinjlim_{i \in I} A_i$ une limite inductive α -filtrante de \mathcal{A} .

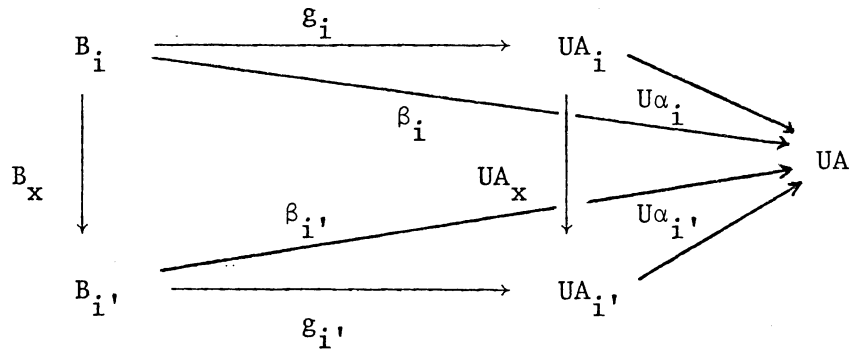


Si $f : A_0 \rightarrow A$ est un morphisme de \mathcal{A} , il existe un objet i de \mathbb{I} et un morphisme $g_i : B \rightarrow UA_i$ de \mathcal{B} vérifiant $U\iota_i \cdot g_i = Uf \cdot g$ et, par suite, il existe un morphisme $f_i : A_0 \rightarrow A_i$ vérifiant $Uf_i \cdot g = g_i$ et $f = \iota_i \cdot f_i$. Si $f_i : A_0 \rightarrow A_i$, $f_{i'} : A_0 \rightarrow A_{i'}$ sont deux morphismes de \mathcal{A} vérifiant : $\iota_i \cdot f_i = \iota_{i'} \cdot f_{i'}$, il existe un objet i'' de \mathbb{I} et deux morphismes $x : i \rightarrow i''$, $x' : i' \rightarrow i''$ de \mathbb{I} vérifiant : $UA_x \cdot Uf_i \cdot g = UA_{x'} \cdot Uf_{i'} \cdot g$ et, par suite, on a : $A_x \cdot f_i = A_{x'} \cdot f_{i'}$.

Lemme 6.9. - Soit \mathcal{A} une catégorie à limites inductives α -filtrantes, \mathcal{B} une catégorie α -localisable et $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur localisant qui préserve les limites inductives α -filtrantes et reflète les isomorphismes, alors les objets α -présentables de \mathcal{A} sont les rétracts des localisés vers U des objets α -présentables de \mathcal{B} .

Démonstration. - Les localisés vers U d'objets α -présentables de \mathcal{B} sont α -présentables (lemme 6.8.). Soient A un objet α -présentable de \mathcal{A} et A' un rétract de A . Il existe alors un morphisme $q : A \rightarrow A'$ et un morphisme $s : A' \rightarrow A$ vérifiant $q \cdot s = 1_{A'}$. Le morphisme $q : A \rightarrow A'$ est alors conoyau du couple $(sq, 1_A) : A \rightrightarrows A$. Les objets α -présentables étant stables par conoyaux, on en déduit que A' est un objet α -présentable de \mathcal{A} . Cela montre que les rétracts des localisés vers U des objets α -présentables

de \mathcal{B} sont α -présentables. Considérons, réciproquement, un objet α -présentable A de \mathcal{A} . L'objet UA est une limite inductive α -filtrante d'objets α -présentables de \mathcal{B} (th. 6.7.) : soit $(UA, \beta) = \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} B_i$



Pour chaque $i \in \mathbb{I}$, le morphisme β_i est de la forme $\beta_i = U\alpha_i \cdot g_i$ où $g_i : B_i \rightarrow UA_i$ est une localisation de B_i vers U . Pour chaque morphisme $x : i \rightarrow i'$, il existe un unique morphisme $A_x : A_i \rightarrow A_{i'}$, vérifiant : $UA_x \cdot g_i = g_{i'} \cdot B_x$. On obtient ainsi un diagramme α -filtrant $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de \mathcal{A} et un cône inductif $(\alpha_i : A_i \rightarrow A)_{i \in \mathbb{I}}$ de base $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$. Ce cône est une limite inductive, car, si l'on note $A_0 = \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} A_i$ et $f : A_0 \rightarrow A$ le morphisme défini par le cône $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{I}}$, le morphisme Uf est un isomorphisme et par suite f aussi. Dans la catégorie \mathcal{A} , le morphisme $l_A : A \rightarrow A$ est alors de la forme $l_A = \alpha_i \cdot \gamma_i$ où $\gamma_i : A \rightarrow A_i$. On en déduit que A est un rétract de l'objet A_i localisé de l'objet α -présentable B_i .

Corollaire 6.10. - Soit \mathcal{A} une catégorie à morphismes monomorphiques, à limites inductives α -filtrantes et à produits fibrés, \mathcal{B} une catégorie α -localisable et $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur localisant qui préserve les limites inductives α -filtrantes et reflète les isomorphismes. Alors les objets α -présentables de \mathcal{A} sont exactement les objets engendrés par les objets α -présentables de \mathcal{B} .

Démonstration.- Les objets de \mathcal{A} localisés vers U d'un objet de \mathcal{B} de \mathcal{B} sont exactement les objets engendrés par B (prop. 3.2.1.)

Propriétés 6.11. -

(1) Les objets \mathcal{N}_0 -présentables des catégories $\mathcal{A}n^\#, \mathcal{A}nc^\#, \mathcal{D}om, \mathcal{R}ed, \mathcal{P}rim, \mathcal{Q}\text{-}\mathcal{P}rim$, sont les objets dont l'anneau sous-jacent est engendré par un ensemble fini.

(2) Les objets \mathcal{X}_0 -présentables des catégories $\mathcal{D}if^\#, \mathcal{D}om\mathcal{d}if, \mathcal{R}ed\mathcal{d}if, \mathcal{P}rim\mathcal{d}if, \mathcal{Q}\text{-}\mathcal{P}rim\mathcal{d}if$, sont les objets dont l'anneau différentiel sous-jacent est engendré par un ensemble fini.

(3) Les objets \mathcal{N}_0 -présentables des catégories $\mathcal{K}, \mathcal{K}c, \mathcal{K}ord$ sont les objets dont le corps sous-jacent est engendré par un ensemble fini.

(4) Les objets \mathcal{N}_0 -présentables de $\mathcal{K}dif$ sont les corps différentiels engendrés par un ensemble fini.

(5) Les objets \mathcal{X}_0 -présentables des catégories : $\mathcal{D}tr^\mathcal{X}, \mathcal{T}r^\mathcal{X}, \mathcal{T}rd^\mathcal{X}, \mathcal{H}e^\mathcal{X}, \mathcal{B}ool^\mathcal{X}, \mathcal{T}rloc, \mathcal{T}rdloc, \mathcal{O}rdt, \mathcal{M}et$, sont les objets dont l'ensemble sous-jacent est fini.

(6) Les objets \mathcal{N}_0 -présentables de $\mathcal{A}nc^\mathcal{X}, \mathcal{L}occ$ sont les objets qui sont les rétracts des objets dont l'anneau sous-jacent A contient un ensemble fini d'éléments x_1, \dots, x_n qui sont algébriquement indépendants et tels que tout élément de A est la valeur en x_1, \dots, x_n d'une fraction rationnelle à coefficients dans \mathbb{Z} des variables X_1, \dots, X_n .

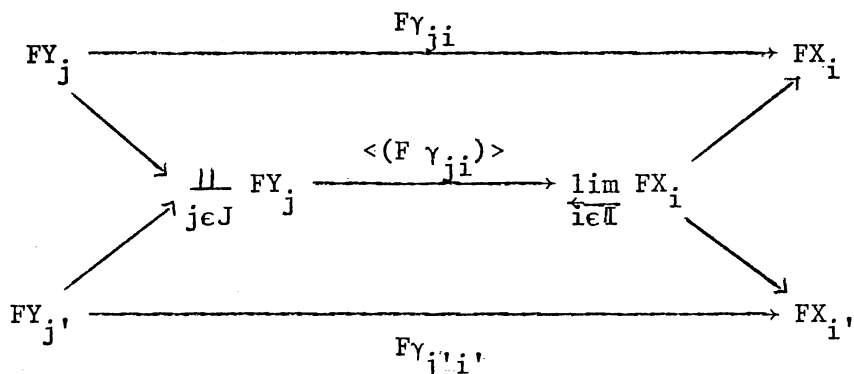
(7) Les objets \mathcal{N}_0 -présentables de $\mathcal{N}or(K), \mathcal{E}uc$ sont les objets dont l'espace vectoriel réel sous-jacent est de dimension finie.

7 - STRUCTURES DES CATEGORIES LOCALISABLES.

7.0. - Foncteurs localement α -continus.

On considère une petite catégorie localement α -cocomplète \mathcal{C} .

Définition 7.0.0.- Un foncteur $F : \mathcal{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$ est localement α -continu si pour toute limite inductive locale α -petite de \mathcal{C}
 $(\gamma_{ji} : X_i \rightarrow Y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ l'application $\langle (F \gamma_{ji}) \rangle : \coprod_{j \in J} F Y_j \rightarrow \lim_{i \in I} F X_i$
 est bijective.



On note $\tilde{\mathcal{C}}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\text{Ens}^{\mathcal{C}^0}$ des foncteurs de \mathcal{C}^0 dans Ens , ayant pour objets les foncteurs localement α -continus.

Lemme 7.0.1.- Un foncteur $\mathcal{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$, limite inductive α -filtrante de foncteurs localement α -continus est localement α -continu.

Démonstration.- Soit $(F_k)_{k \in K}$ un diagramme α -filtrant de $\tilde{\mathcal{C}}$
 et $(\gamma_{ji} : X_i \rightarrow Y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ une limite inductive locale α -petite de \mathcal{C} .
 Si $F = \lim_{k \in K} F_k$, on a :

$$\begin{aligned}
 \coprod_{j \in J} F Y_j &\approx \coprod_{j \in J} \lim_{k \in K} F_k Y_j \approx \lim_{k \in K} \coprod_{j \in J} F_k Y_j \approx \lim_{k \in K} \lim_{i \in I} F_k X_i \approx \\
 &\approx \lim_{i \in I} \lim_{k \in K} F_k X_i \approx \lim_{i \in I} F X_i .
 \end{aligned}$$

On en déduit que F est un objet de $\tilde{\mathcal{C}}$.

Lemme 7.0.2.- Les foncteurs représentables : $\mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$ sont localement α -continus et le plongement canonique : $\mathbb{C} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ préserve les limites inductives locales α -petites.

Démonstration.- Soit $(\gamma_{ji} : X_i \rightarrow Y_j)_{(i,j) \in \mathbb{I} \times \mathbb{J}}$ une limite inductive locale α -petite de \mathbb{C} . Pour tout objet X de \mathbb{C} , l'application : $\langle \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\gamma_{ji}, X) \rangle : \coprod_{j \in \mathbb{J}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(Y_j, X) \longrightarrow \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X_i, X)$ est bijective. Cela exprime que le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, X) : \mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$ est localement α -continu. Si $F : \mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$ est un foncteur localement α -continu, l'application :

$\langle \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, \gamma_{ji}), F) \rangle : \coprod_{j \in \mathbb{J}} \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, Y_j), F) \longrightarrow \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, X_i), F)$ est isomorphe à l'application bijective :

$$\langle F \gamma_{ji} \rangle : \coprod_{j \in \mathbb{J}} F Y_j \longrightarrow \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} F X_i .$$

Elle est donc bijective. Ce qui signifie que la couronne inductive :

$$(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, \gamma_{ji}) : \text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, Y_j) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, X_i))_{(i,j) \in \mathbb{I} \times \mathbb{J}}$$

est une limite inductive locale dans $\tilde{\mathbb{C}}$.

Théorème 7.0.3.- La catégorie $\tilde{\mathbb{C}}$ est une sous-catégorie pleine localisante de la catégorie $\text{Ens}^{\mathbb{C}^0}$ et elle est α -localisable.

Démonstration.- C'est un cas particulier du théorème 8.9.

Proposition 7.0.4.- Les objets α -présentables de $\tilde{\mathbb{C}}$ sont les foncteurs représentables.

Démonstration.- Soit $(\iota_i : F_i \rightarrow F)_{i \in \mathbb{I}}$ une limite inductive α -filtrante dans $\tilde{\mathbb{C}}$. La catégorie $\tilde{\mathbb{C}}$ étant fermée dans $\text{Ens}^{\mathbb{C}^0}$ pour les limites inductives α -filtrantes, le cône $(\iota_i : F_i \rightarrow F)_{i \in \mathbb{I}}$ est une limite inductive dans $\text{Ens}^{\mathbb{C}^0}$. Par suite, pour tout objet X de \mathbb{C} , le cône $(\iota_{iX} : F_i X \rightarrow FX)_{i \in \mathbb{I}}$ est une limite inductive dans Ens , ainsi que le cône $\text{Hom}_{\mathbb{C}}^{\wedge}(\text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, X), (\iota_i))_{i \in \mathbb{I}}$ qui lui est isomorphe. Par suite,

les foncteurs représentables sont α -présentables dans $\tilde{\mathbb{C}}$. La sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathbb{C}}$ ayant pour objets les foncteurs représentables est dense dans $\tilde{\mathbb{C}}$ et est fermée pour les localisations inductives α -petites. Du théorème 6.7., on infère qu'elle est la catégorie des objets α -présentables de \mathbb{C} .

7.1. - Théorème de structure.

Théorème 7.1. - Toute catégorie α -localisable est équivalente à une catégorie $\tilde{\mathbb{C}}$ de foncteurs localement α -continus sur une petite catégorie \mathbb{C} localement α -cocomplète.

Démonstration.- Soit \mathbb{A} une catégorie α -localisable. La sous-catégorie pleine \mathbb{A}_α de \mathbb{A} ayant pour objets les objets α -présentables de \mathbb{A} est petite et localement α -cocomplète. Le foncteur d'inclusion $J : \mathbb{A}_\alpha \rightarrow \mathbb{A}$ est dense par limites inductives α -filtrantes ([5]). Pour tout objet A de \mathbb{A} , le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(J, A)$ est localement α -continu. On définit alors un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}_\alpha$ par $U(.) = \text{Hom}_{\mathbb{A}}(J(-), .)$. Ce foncteur est une équivalence d'après le théorème 4.1. de [5], par exemple.

7.2. - Conséquences du théorème de structure.

Proposition 7.2.0. - Les catégories localisables sont localement cocomplètes et à limites projectives connexes.

Démonstration.- Soit \mathbb{C} une petite catégorie localement α -cocomplète. La catégorie $\text{Ens}^{\mathbb{C}^0}$ est complète et cocomplète. Par suite, la sous-catégorie pleine localisante $\tilde{\mathbb{C}}$ de $\text{Ens}^{\mathbb{C}^0}$ est localement cocomplète (prop. 2.4.5.) et à limites projectives connexes (prop. 2.4.4.). Il en est de même pour les catégories localisables d'après le théorème 7.1.

Proposition 7.2.1. - Une catégorie localisable est à peu de sous-objets.

Démonstration.- Une catégorie localisable \mathbb{A} est une sous-catégorie localisante d'une catégorie de foncteurs $\text{Ens}^{\mathbb{C}^0}$, où \mathbb{C} est une petite

catégorie [th.7.0.3]. La catégorie $\text{Ens}^{\mathbb{C}^0}$ est à peu de sous-objets et le foncteur d'inclusion de \mathbb{A} dans $\text{Ens}^{\mathbb{C}^0}$ préserve les limites projectives connexes, donc aussi les monomorphismes. Par suite \mathbb{A} est à peu de sous-objets. Le raisonnement montre aussi bien que pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathbb{A} , les cônes projectifs monomorphiques de \mathbb{A} de base $(A_i)_{i \in I}$ forment, à isomorphismes près, un ensemble. Cette dernière propriété paraît plus adaptée au cas des catégories sans produit.

Corollaire 7.2.2. - Une catégorie localisable est à factorisations fortes.

Démonstration. - C'est une conséquence du fait qu'elle est à limites projectives connexes et à peu de sous-objets ([17], prop. 21.6.2. (g), page 351).

Proposition 7.2.3. - Une catégorie localisable est à peu d'objets quotients forts.

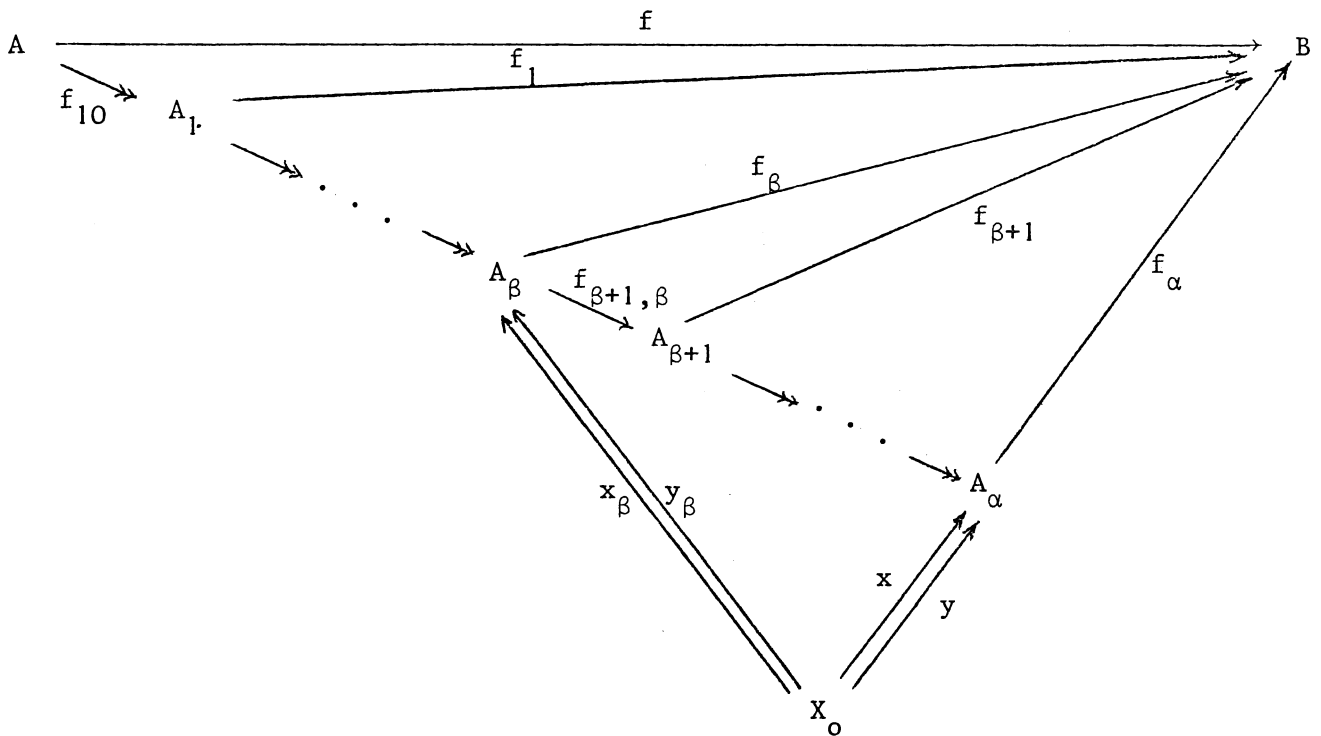
Démonstration. - Soit \mathbb{A} une catégorie α -localisable et A un objet de \mathbb{A} .

a) Soit $(h_i : A \rightarrow B_i)_{i \in I}$ un conoyau local d'un couple de morphismes parallèles de but A . Si (m, n) est le couple noyau de $(h_i)_{i \in I}$, $(h_i)_{i \in I}$ est un conoyau local de (m, n) . Or le cône projectif (m, n) de base (A, A) est monomorphique et, d'après la proposition 7.2.1., ces cônes forment, à isomorphismes près, un ensemble. On en déduit que les conoyaux locaux de couples de morphismes parallèles de buts A forment, à isomorphismes près, un ensemble.

b) Les localisations inductives de couples de morphismes parallèles de but A forment à isomorphismes près, un ensemble, puisque chacune d'elle est isomorphe à une localisation inductive appartenant à un conoyau local (prop. 2.0.4.) et que chaque conoyau local est constitué d'un ensemble de localisations inductives.

c) Tout morphisme $z : X \rightarrow Z$ de \mathcal{A} peut être factorisé de la façon suivante. Soit (m,n) le couple noyau de z et $x : X \rightarrow Y$ une localisation inductive de (m,n) qui factorise z . Il existe alors un unique morphisme $y : Y \rightarrow Z$ vérifiant $y \cdot x = z$. Notons que x égalise les couples de morphismes égalisés par z .

d) Soit $f : A \rightarrow B$ un épimorphisme fort de \mathcal{A} . Pour tout ordinal β on définit un objet A_β et un morphisme $f_\beta : A_\beta \rightarrow B$ et pour tout couple d'ordinaux β, β' vérifiant $\beta' < \beta$, on définit un morphisme $f_{\beta\beta'} : A_{\beta'} \rightarrow A_\beta$, par récurrence transfinie sur β , de la façon suivante :



1) $A_0 = A, f_0 = f.$

2) Le morphisme $f_\beta : A_\beta \rightarrow B$ admet une factorisation décrite au c) que l'on note $f_\beta = f_{\beta+1} \cdot f_{\beta+1, \beta}$ où $f_{\beta+1, \beta} : A_\beta \rightarrow A_{\beta+1}$ et $f_{\beta+1} : A_{\beta+1} \rightarrow B$.

3) Si γ est un ordinal limite, A_γ est une localisation inductive du diagramme $(A_\beta)_{\beta < \gamma}$, qui factorise le cône inductif $(f_\beta)_{\beta < \alpha}$;

pour $\beta < \gamma$, $f_{\gamma\beta} : A_\beta \rightarrow A_\gamma$ est l'induction canonique et le morphisme $f_\gamma : A_\gamma \rightarrow B$ est l'unique morphisme vérifiant $f_\gamma \cdot f_{\gamma\beta} = f_\beta$ pour tout $\beta < \gamma$.

Notons que A_α est une limite inductive α -filtrante du diagramme $(A_\beta)_{\beta < \alpha}$ puisque la catégorie \mathbb{A} est à limites inductives α -filtrantes. Montrons que f_α est un monomorphisme. Soit X_0 un objet α -présentable de \mathbb{A} et $x, y : X_0 \rightrightarrows A_\alpha$ deux morphismes vérifiant $f_\alpha \cdot x = f_\alpha \cdot y$. Il existe $\beta < \alpha$ et deux morphismes $x_\beta, y_\beta : X_0 \rightrightarrows A_\beta$ vérifiant $x = f_{\alpha\beta} \cdot x_\beta$ et $y = f_{\alpha\beta} \cdot y_\beta$. On a : $f_\beta \cdot x_\beta = f_\alpha \cdot f_{\alpha\beta} \cdot x_\beta = f_\alpha \cdot x = f_\alpha \cdot y = f_\alpha \cdot f_{\alpha\beta} \cdot y_\beta = f_\beta \cdot y_\beta$. Par suite, on a $f_{\beta+1, \beta} \cdot x_\beta = f_{\beta+1, \beta} \cdot y_\beta$ et donc $x = f_{\alpha\beta} \cdot x_\beta = f_{\alpha, \beta+1} \cdot f_{\beta+1, \beta} \cdot x_\beta = f_{\alpha, \beta+1} \cdot f_{\beta+1, \beta} \cdot y_\beta = f_{\alpha\beta} \cdot y_\beta = y$.

Puisque f est un épimorphisme fort, f_α est un isomorphisme et par suite f est isomorphe à $f_{\alpha 0}$.

e) A partir du b), il est immédiat, par récurrence transfinie sur β , que les objets de la forme A_β forment, à isomorphismes près, un ensemble. Cela est en particulier vrai pour α et par suite aussi pour les épimorphismes forts de sources A .

7.3. - Théorème de dualité.

La 2-catégorie \mathbb{Loc}_α a pour objets les catégories α -localisables, pour morphismes les foncteurs qui admettent un adjoint à gauche et préservent les limites inductives α -filtrantes et pour 2-cellules les transformations naturelles.

La 2-catégorie \mathbb{Indloc}_α a pour objets les petites catégories localement α -cocomplètes pour morphismes les foncteurs qui préservent les limites inductives locales α -petites et pour 2 cellules les transformations naturelles.

Théorème 7.3.0. - La 2-catégorie \mathbb{Loc}_α des catégories α -localisables est 2-équivalente à la duale de la 2-catégorie \mathbb{Indloc}_α des petites catégories localement α -cocomplètes.

Démonstration. - Soit $G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme de $\mathbb{I}ndloc_\alpha$. Notons G_* le foncteur $\mathbb{E}ns^{\mathbb{C}^0} : \mathbb{E}ns^{\mathbb{D}^0} \rightarrow \mathbb{E}ns^{\mathbb{C}^0}$, et $\tilde{G}_* : \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{D}}$ le foncteur induit par G_* .

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{C} & \xrightarrow{h_{\mathbb{C}}} & \tilde{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbb{E}ns^{\mathbb{C}^0} \\
 \uparrow G & & \uparrow \tilde{G}_* & & \uparrow G_* \\
 \mathbb{D} & \xrightarrow{h_{\mathbb{D}}} & \tilde{\mathbb{D}} & \longrightarrow & \mathbb{E}ns^{\mathbb{D}^0} \\
 & & \downarrow G_* & & \downarrow G_*
 \end{array}$$

Le foncteur \tilde{G}_* préserve les limites inductives α -filtrantes puisque $\tilde{\mathbb{C}}, \tilde{\mathbb{D}}$ sont fermées dans $\mathbb{E}ns^{\mathbb{C}^0}, \mathbb{E}ns^{\mathbb{D}^0}$ pour les limites inductives α -filtrantes. Le foncteur $h_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \rightarrow \tilde{\mathbb{D}}$ étant dense par limites inductives α -filtrantes et la catégorie $\tilde{\mathbb{C}}$ étant à limites inductives α -filtrantes l'extension de Kan \tilde{G}_* de $h_{\mathbb{C}} \cdot G$ par $h_{\mathbb{D}}$ existe et elle est adjointe à gauche du foncteur \tilde{G}_* (proposition 3.1. [5]). On en déduit que \tilde{G}_* est un morphisme de $\mathbb{L}oc_\alpha$.

On définit alors un 2-foncteur $\Phi : \mathbb{I}ndloc_\alpha^0 \rightarrow \mathbb{L}oc_\alpha$ en posant $\Phi \mathbb{C} = \tilde{\mathbb{C}}$ pour un objet \mathbb{C} de $\mathbb{I}ndloc_\alpha$, $\Phi G = \tilde{G}_*$ pour un morphisme $G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ de $\mathbb{I}ndloc_\alpha$, et $(\Phi\alpha)_F = F\alpha$ pour une 2-cellule α de $\mathbb{I}ndloc_\alpha$. Il est immédiat que le 2-foncteur Φ est un plongement. Montrons qu'il est une 2-équivalence.

Soit \mathbb{C}, \mathbb{D} deux objets de $\mathbb{I}ndloc_\alpha$ et $U : \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{D}}$ un morphisme de $\mathbb{L}oc_\alpha$. Notons $U^* : \tilde{\mathbb{D}} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ un adjoint à gauche de U . Le foncteur U^* préserve les limites inductives locales. Il préserve les objets α -présentables, d'après le lemme 6.8.

Le foncteur U^* induit alors un foncteur $U_\alpha^* : \tilde{\mathbb{D}}_\alpha \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}_\alpha$ qui préserve les limites inductives locales α -petites. Puisque l'on a les équivalences $\tilde{\mathbb{D}} \sim \tilde{\mathbb{D}}_\alpha$ et $\tilde{\mathbb{C}} \sim \tilde{\mathbb{C}}_\alpha$, le foncteur U_α^* induit un foncteur $H : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ qui préserve les limites inductives locales et est donc un morphisme de $\mathbb{I}ndloc_\alpha$. Les deux foncteurs $\tilde{H}_*, U : \tilde{\mathbb{C}} \rightarrow \tilde{\mathbb{D}}$ ont alors pour adjoints à gauche deux extensions de Kan de

$h_{\mathbb{D}}.H$ relativement à $h_{\mathbb{C}}$. Ils sont, par suite, isomorphes.

En outre, tout objet A de $\mathbb{L}oc_{\alpha}$ est équivalent à un objet de la forme ΦC d'après le théorème 7.1.

Corollaire 7.3.1. - Si \mathbb{C} et \mathbb{D} sont deux petites catégories localement α -cocomplètes telles que les catégories $\tilde{\mathbb{C}}, \tilde{\mathbb{D}}$ associées sont équivalentes, alors les catégories \mathbb{C} et \mathbb{D} sont équivalentes.

8 - CONSTRUCTIONS DE CATEGORIES LOCALISABLES.

8.0. - Les catégories localement présentables.

Il est immédiat que les catégories localement α -présentables au sens de Gabriel-Ulmer [7] sont α -localisables.

8.1. - Les sommes et produits de catégories localisables.

Proposition 8.1. - La somme et le produit d'une famille de catégories α -localisables sont α -localisables.

Démonstration.- Soit $(\mathbb{A}_\ell)_{\ell \in L}$ une famille de catégories α -localisables. Pour chaque $\ell \in L$, soit G_ℓ un ensemble générateur propre de \mathbb{A}_ℓ formé d'objets α -présentables.

a) Posons $\mathbb{A} = \coprod_{\ell \in L} \mathbb{A}_\ell$. Si L est vide, \mathbb{A} est la catégorie vide, qui est α -localisable. Supposons L non vide. On peut supposer que les \mathbb{A}_ℓ sont des sous-catégories pleines de \mathbb{A} . Un diagramme α -filtrant de \mathbb{A} est nécessairement contenu dans une catégorie \mathbb{A}_ℓ ; sa limite inductive dans \mathbb{A}_ℓ est alors aussi sa limite inductive dans \mathbb{A} . Si un diagramme α -petit de \mathbb{A} est contenu dans une catégorie \mathbb{A}_ℓ , sa limite inductive locale dans \mathbb{A}_ℓ est aussi limite inductive locale dans \mathbb{A} , sinon sa limite inductive locale dans \mathbb{A} est la couronne vide. La réunion des ensembles G_ℓ pour $\ell \in L$ est un ensemble générateur propre de \mathbb{A} formé d'objets α -présentables.

b) Posons $\mathbb{B} = \prod_{\ell \in L} \mathbb{A}_\ell$. Si L est vide, \mathbb{B} est la catégorie $\mathbb{1}$ qui est α -localisable. Supposons L non vide. Chaque catégorie \mathbb{A}_ℓ étant à limites inductives α -filtrantes, la catégorie \mathbb{B} l'est aussi. Soit $((A_{li})_{\ell \in L})_{i \in I}$ un diagramme α -petit de \mathbb{B} . Pour chaque $\ell \in L$, soit $(\iota_{ij} : A_{li} \rightarrow B_j)_{(i,j) \in I \times J_\ell}$ une limite inductive locale du diagramme $(A_{li})_{i \in I}$

de \mathbb{A}_ℓ . Posons $K = \prod_{\ell \in L} J_\ell$ et, pour $k = (j_\ell)_{\ell \in L} \in K$, posons $B_k = (B_{j_\ell})_{\ell \in L}$ et $\iota_{ki} = (\iota_{ij_\ell})_{\ell \in L} : (A_{\ell i})_{\ell \in L} \rightarrow B_k$. Il est immédiat que la couronne inductive $(\iota_{ki} : (A_{\ell i})_{\ell \in L} \rightarrow B_k)_{(i,k) \in \mathbb{I} \times K}$ est une limite inductive locale du diagramme $((A_{\ell i})_{\ell \in L})_{i \in \mathbb{I}}$. En outre, l'ensemble $G = \{(A_\ell)_{\ell \in L} : \forall \ell \in L, (A_\ell \in G_\ell) \text{ ou } (A_\ell \text{ est localement initial dans } \mathbb{A}_\ell)\}$ est un ensemble générateur propre de \mathbb{B} formé d'objets α -présentables.

8.2. - Les catégories de foncteurs.

Proposition 8.2. - Si \mathbb{A} est une catégorie α -localisable et \mathbb{C} est une petite catégorie, la catégorie $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ est α -localisable.

Démonstration.-

a) La catégorie $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ est à limites inductives α -filtrantes et elle est localement cocomplète (prop. 2.3.7.)

b) Soit X_0 un objet de \mathbb{C} et A_0 un objet de \mathbb{A} . Pour tout objet X de \mathbb{C} , on note $(\gamma_{jx} : A_0 \rightarrow B_j)_{(x,j) \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X_0, X) \times J_X}$ une somme locale de l'objet A_0 pris $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X_0, X)$ fois. On note Γ_{X_0, A_0} l'ensemble des couples $(H, (\iota_X)_{X \in \mathbb{C}})$ formé d'un foncteur $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}$ et, pour tout $X \in \mathbb{C}$, d'un cône inductif discret $(\iota_{Xx} : A_0 \rightarrow HX)_{x \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X_0, X)}$ appartenant à la somme locale précédente i.e. tel que : $\exists j \in J_X, \forall x : X_0 \rightarrow X, \iota_{Xx} = \gamma_{xj}$. On pose $\iota_0 = (\iota_{X_0}, \iota_{X_0}) : A_0 \rightarrow HX_0$. Soit $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{A}$ un foncteur et $(H, (\iota_X))$ un élément de Γ_{X_0, A_0} . A toute transformation naturelle $\alpha : H \rightarrow F$, on associe le morphisme $\psi(\alpha) = \alpha_{X_0} \cdot \iota_0 : A_0 \rightarrow FX_0$. Montrons que ψ établit une bijection entre les ensembles $\bigsqcup_{(H, (\iota_X)) \in \Gamma_{X_0, A_0}} \text{Nat}(H, F)$ et $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, FX_0)$, en construisant l'application réciproque. Soit $f : A_0 \rightarrow FX_0$ un morphisme de \mathbb{A} . Pour tout objet X de \mathbb{C} , le cône inductif $(\alpha_{Xx} : A_0 \rightarrow FX)_{x \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X_0, X)}$ défini par

$\alpha_{Xx} = (Fx)f$, détermine de façon unique une localisation inductive de l'objet A_0 pris $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(X_0, X)$ fois, que l'on note $(\iota_{Xx} : A_0 \rightarrow Hx)_{x \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(X_0, X)}$, ainsi qu'un morphisme $\beta_X : Hx \rightarrow Fx$. Il est alors immédiat que Hx est défini fonctoriellement et que β_X définit une transformation naturelle $\beta : H \rightarrow F$.

c) Soit G un ensemble générateur propre formé d'objets α -présentables de \mathbb{A} . Notons $[\mathbb{C}, \mathbb{A}]_0$ l'ensemble des foncteurs :

$$\{H : \exists X_0 \in \mathbb{C} \exists A_0 \in G, \exists (\iota_X)_{X \in \mathbb{C}}, (H, (\iota_X)_{X \in \mathbb{C}}) \in \Gamma_{X_0, A_0}\}.$$

Montrons que $[\mathbb{C}, \mathbb{A}]_0$ est un ensemble générateur propre formé d'objets α -présentables de $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$. Soit $\alpha, \beta : F \rightrightarrows G$ deux morphismes de $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ tels que $\text{Nat}(H, \alpha) = \text{Nat}(H, \beta)$ pour tout $H \in [\mathbb{C}, \mathbb{A}]_0$. Pour tout objet A_0 de G et tout objet X_0 de \mathbb{C} , on a, d'après le b) :

$$\text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, \alpha_{X_0}) \simeq \bigsqcup_{(H, (\iota_X)) \in \Gamma_{X_0, A_0}} \text{Nat}(H, \alpha) \simeq \bigsqcup_{(H, (\iota_X)) \in \Gamma_{X_0, A_0}} \text{Nat}(H, \beta)$$

$\simeq \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, \beta_{X_0})$. On en déduit que $\alpha_{X_0} = \beta_{X_0}$ et par suite que $\alpha = \beta$.

Soit $\alpha : F \rightarrow G$ un morphisme de $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ tel que l'application $\text{Nat}(H, \alpha)$ soit bijective pour tout $H \in [\mathbb{C}, \mathbb{A}]_0$. Alors, pour tout $X_0 \in \mathbb{C}$ et tout $A_0 \in G$,

$$\text{l'application : } \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, \alpha_{X_0}) \simeq \bigsqcup_{(H, (\iota_X)) \in \Gamma_{X_0, A_0}} \text{Nat}(H, \alpha) \text{ est bijective ;}$$

par suite, α_{X_0} est un isomorphisme, donc α aussi. Soit $(F_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un diagramme α -filtrant de $\mathbb{A}^{\mathbb{C}}$ et H un objet de $[\mathbb{C}, \mathbb{A}]_0$. On a :

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{(H, (\iota_X)) \in \Gamma_{X_0, A_0}} \text{Nat}(H, \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} F_i) &\simeq \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} F_i X_0) \simeq \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, F_i X_0) \simeq \\ &\simeq \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} \bigsqcup_{(H, (\iota_X)) \in \Gamma_{X_0, A_0}} \text{Nat}(H, F_i) \simeq \bigsqcup_{(H, (\iota_X)) \in \Gamma_{X_0, A_0}} \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} \text{Nat}(H, F_i). \end{aligned}$$

déduit : $\text{Nat}(H, \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} F_i) \simeq \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} \text{Nat}(H, F_i)$, ce qui prouve que H est α -présentable.

8.3. - Les sous-catégories localement pleines.

Lemme 8.3.0. - Soit $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ un foncteur fidèle localisant qui préserve les limites inductives α -filtrantes et reflète les isomorphismes.
Si la catégorie \mathbb{B} possède un ensemble générateur propre formé d'objets α -présentables, la catégorie \mathbb{A} en possède un.

Démonstration.- Soit H un ensemble générateur propre de \mathbb{B} formé d'objets α -présentables. Pour chaque objet B_0 de H , soit $(g_i : B_0 \rightarrow UA_i)_{i \in I_{B_0}}$ une famille initiale de morphismes de B_0 vers U .
 Montrons que $G = \bigcup_{B_0 \in H} \{A_i : i \in I_{B_0}\}$ est un ensemble générateur propre de \mathbb{A} formé d'objets α -présentables.

a) Soient $f, f' : A \rightrightarrows A'$ deux morphismes de \mathbb{A} tels que, pour tout $A_0 \in G$, on ait $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, f) = \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, f')$. Pour tout objet $B_0 \in H$, on a : $\text{Hom}_{\mathbb{B}}(B_0, Uf) \simeq \prod_{i \in I_{B_0}} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, f) \simeq \prod_{i \in I_{B_0}} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, f') \simeq \text{Hom}_{\mathbb{B}}(B_0, Uf')$.
 On en déduit que $Uf = Uf'$ et, par suite, que $f = f'$.

b) Soit $f : A \rightarrow A'$ un morphisme de \mathbb{A} tel que pour tout objet A_0 de G , $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_0, f)$ est une bijection. Pour tout objet B_0 de H , l'application : $\text{Hom}_{\mathbb{B}}(B_0, Uf) \simeq \prod_{i \in I_{B_0}} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, f)$ est bijective. On en déduit que Uf est un isomorphisme et par suite que f en est un aussi.

c) Soit $(A_k)_{k \in K}$ un diagramme α -filtrant de \mathbb{A} ayant une \varinjlim .
 Pour $B_0 \in H$ et $i \in I_{B_0}$, on note $f_i : \varinjlim_{k \in K} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, A_k) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, \varinjlim_{k \in K} A_k)$, l'application canonique. L'application $\prod_{i \in I_{B_0}} f_i$ est alors composée des bijections suivantes : $\prod_{i \in I_{B_0}} \varinjlim_{k \in K} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, A_k) \simeq \varinjlim_{k \in K} \prod_{i \in I_{B_0}} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, A_k) \simeq \varinjlim_{k \in K} \text{Hom}_{\mathbb{B}}(B_0, UA_k) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{B}}(B_0, U(\varinjlim_{k \in K} A_k)) \simeq \prod_{i \in I_{B_0}} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i, \varinjlim_{k \in K} A_k)$. C'est

donc une bijection, et, par suite, chaque f_i est une bijection ; cela prouve que les éléments de G sont α -présentables.

Théorème 8.3.1. - Soit $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ un foncteur localement pleinement fidèle localisant qui relève les limites inductives α -filtrantes. Si la catégorie \mathbb{B} est α -localisable, la catégorie \mathbb{A} l'est aussi.

Démonstration.-

a) U relève les limites inductives α -filtrantes signifie : tout diagramme α -filtrant de \mathbb{A} dont l'image par U a une limite inductive possède une limite inductive préservée par U . La catégorie \mathbb{A} est donc à limites inductives α -filtrantes préservées par U .

b) La catégorie \mathbb{B} étant localement cocomplète et à limites projectives connexes, il en est de même de la catégorie \mathbb{A} (prop. 2.4.4 et prop. 2.4.5.).

c) Montrons que U est fidèle. Soit $f, f' : A \rightrightarrows A'$ deux morphismes de \mathbb{A} tels que $Uf = Uf'$. L'image par U du noyau $k : K \rightarrow A$ de (f, f') est le noyau de (Uf, Uf') ; c'est donc un isomorphisme. Le foncteur U étant localement pleinement fidèle, il existe un unique morphisme $h : A \rightarrow K$ vérifiant $Uh = (Uk)^{-1}$ et $k.h = 1_A$. Cela implique que k est un isomorphisme et, par suite, que $f = f'$.

d) Montrons que U reflète les isomorphismes. Soit $f : A \rightarrow A'$ un morphisme de \mathbb{A} tel que Uf est un isomorphisme. Puisque U est fidèle, f est un monomorphisme. Puisque U est localement pleinement fidèle, il existe un morphisme $h : A' \rightarrow A$ tel que $Uh = (Uf)^{-1}$ et $f.h = 1_{A'}$. Par suite, f est un isomorphisme.

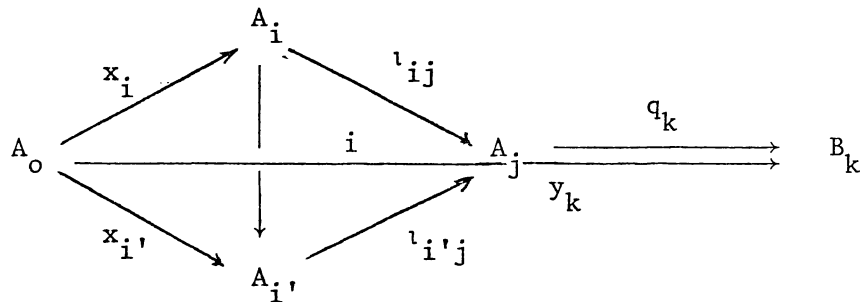
Le théorème est alors une conséquence du lemme précédant.

8.4. - Les catégories d'objets en-dessous d'un objet.

Proposition 8.4. - Si \mathbb{A} est une catégorie α -localisable et A_0 est un objet de \mathbb{A} , la catégorie A_0/\mathbb{A} des objets de \mathbb{A} en-dessous de A_0 est α -localisable.

Démonstration. - Montrons que A_0/\mathbb{A} est localement cocomplète.

Soit $(A_i, x_i)_{i \in I}$ un diagramme de (A_0/\mathbb{A}) .



Notons $(l_{ij} : A_i \rightarrow A_j)_{(i,j) \in I \times J}$ une limite inductive locale du diagramme $(A_i)_{i \in I}$. Pour tout $j \in J$, notons $(q_k : A_j \rightarrow B_k)_{k \in K_j}$ le multiconoyau local de la famille de morphismes parallèles $(l_{ij} \cdot x_i : A_0 \rightarrow A_j)_{i \in I}$. Notons $y_k : A_0 \rightarrow B_k$ la valeur commune des morphismes $q_k \cdot l_{ij} \cdot x_i$ pour tout $i \in I$. On obtient ainsi une famille (B_k, y_k) d'objets de A_0/\mathbb{A} et une couronne inductive $(q_k \cdot l_{ij} : (A_i, x_i) \rightarrow (B_k, y_k))_{(i,k) \in I \times \coprod_{j \in J} K_j}$ de base $(A_i, x_i)_{i \in I}$, que l'on montre facilement être une limite inductive locale dans A_0/\mathbb{A} .

Notons $U : A_0/\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ le foncteur défini par $U(A, x) = A$ et $Uf = f$. Ce foncteur crée les limites inductives α -filtrantes et par suite A_0/\mathbb{A} est à limites inductives α -filtrantes. Pour montrer que A_0/\mathbb{A} possède un ensemble générateur propre formé d'objets α -présentables il suffit de montrer que U est localisant (lemme 8.3.0.). Soit A un objet de \mathbb{A} . Notons $(A_j)_{j \in J}$ une somme locale des deux objets A et A_0 , et notons

$\iota_{0j} : A_0 \rightarrow A_j$, $\iota_j : A \rightarrow A_j$ les injections canoniques. On obtient alors une famille $(A_j, \iota_{0j})_{j \in J}$ d'objets de A_0/A et une famille $(\iota_j : A \rightarrow U(A_j, \iota_{0j}))_{j \in J}$ de morphismes de A vers U que l'on montre facilement être initiale.

Exemples. - La catégorie des extensions d'un corps k est \mathcal{N}_0 -localisable. La catégorie des anneaux (ou des corps) ayant une caractéristique donnée est \mathcal{N}_0 -localisable.

8.5. - Les catégories $\mathbb{A}^\#$.

Si \mathbb{A} est une catégorie, on note $\mathbb{A}^\#$ la catégorie ayant les mêmes objets que \mathbb{A} et ayant pour morphismes les monomorphismes de \mathbb{A} .

Proposition 8.5.0. - Si la catégorie \mathbb{A} est α -localisable, la catégorie $\mathbb{A}^\#$ l'est aussi.

Démonstration. - $\mathbb{A}^\#$ est une sous-catégorie localement pleine de \mathbb{A} . Elle est localisante puisque si A est un objet de \mathbb{A} et si $(B_i, g_i)_{i \in I}$ est une famille représentative des quotients forts de A (prop. 7.2.3.), tout morphisme $g : A \rightarrow B$ de \mathbb{A} se factorise d'une unique façon sous la forme $g = f.g_i$ où $i \in I$ et $f : B_i \rightarrow B$ est un morphisme de $\mathbb{A}^\#$ (corollaire 7.2.2.). En outre, soit $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ un diagramme α -filtrant de $\mathbb{A}^\#$ de limite inductive (A, ι) dans \mathbb{A} . Si A_0 un objet α -présentable de \mathbb{A} et si $x, y : A_0 \xrightarrow{\quad} A_i$ sont deux morphismes de \mathbb{A} vérifiant $\iota_i.x = \iota_i.y$, il existe un morphisme $\alpha : i \rightarrow i'$ de \mathbb{I} vérifiant $A_\alpha.x = A_\alpha.y$ et puisque A_α est monomorphique, on en déduit $x = y$. Les objets α -présentables engendrant \mathbb{A} , on en infère que les ι_i sont monomorphiques et par suite que (A, ι) est un cône de $\mathbb{A}^\#$. Ce cône est une limite inductive dans $\mathbb{A}^\#$ puisque si $(\mu_i : A_i \rightarrow B)_{i \in \mathbb{I}}$ est un cône inductif de $\mathbb{A}^\#$ de base $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$, il est immédiat que le morphisme $f : A \rightarrow B$ défini par $f.\iota_i = \mu_i$ pour tout $i \in \mathbb{I}$, est monomorphique (corollaire 5.5.). La catégorie $\mathbb{A}^\#$ est alors α -localisable d'après le théorème 8.3.1.

Remarque 8.5.1. - Les objets α -présentables de $\mathbb{A}^\#$ sont exactement les objets α -engendrés de \mathbb{A} .

Démonstration.- La notion d'objets α -engendrés est prise au sens de Gabriel-Ulmer [7]. Les objets α -présentables de $\mathbb{A}^\#$ sont les localisés des objets α -présentables de \mathbb{A} (corollaire 6.10.). Ce sont donc les quotients forts des objets α -présentables de \mathbb{A} . Or ceux-ci sont exactement les objets α -engendrés de \mathbb{A} (cf. démonstration de Gabriel-Ulmer [7]).

Exemples 8.5.2. - Les catégories $\mathbb{A}n^\#, \mathbb{A}nc^\#, \mathbb{D}if^\#, \mathbb{H}e^\times, \mathbb{B}ool^\times$.

Corollaire 8.5.3. - Soit \mathbb{A} une sous-catégorie pleine d'une catégorie \mathbb{B} , fermée pour les limites inductives α -filtrantes et les sous-objets. Si la catégorie \mathbb{B} est α -localisable, la catégorie $\mathbb{A}^\#$ l'est aussi.

Démonstration.- $\mathbb{A}^\#$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbb{B}^\#$ fermée pour les limites inductives α -filtrantes. Elle est localisante puisque l'on obtient une famille initiale de morphismes d'un objet B de $\mathbb{B}^\#$ vers le foncteur $\mathbb{A}^\# \rightarrow \mathbb{B}^\#$ en prenant la famille réduite au morphisme 1_B si B est un objet de \mathbb{A} et la famille vide sinon.

Exemples 8.5.4. - Les catégories $\mathbb{I}nt, \mathbb{D}om, \mathbb{R}ed, \mathbb{P}rim, \mathbb{Q}$ -Prim, $\mathbb{D}omdif, \mathbb{R}eddif, \mathbb{P}rimdif, \mathbb{Q}$ -Primdif.

8.6. - Les catégories \mathbb{A}_Γ d'objets Γ -locaux.

On considère une catégorie α -localisable \mathbb{A} , munie d'un ensemble de couronnes inductives :

$$\Gamma = \{ (\gamma_{ji}^k : A_i^k \rightarrow B_j^k)_{(i,j) \in \mathbb{I}_k \times \mathbb{J}_k} \}_{k \in K} ,$$

telles que pour chaque $k \in K$, le diagramme $(A_i^k)_{i \in \mathbb{I}_k}$ est α -petit et les objets A_i^k, B_j^k sont α -présentables.

Un objet A de \mathbb{A} est dit Γ -local si pour tout $k \in K$ et tout $j \in J_k$, l'application

$$(\text{Hom}_{\mathbb{A}}(\gamma_{ji}^k, A)) : \text{Hom}_{\mathbb{A}}(B_j^k, A) \rightarrow \varprojlim_{i \in I_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i^k, A)$$

est injective et l'application

$$\langle (\text{Hom}_{\mathbb{A}}(\gamma_{ji}^k, A)) \rangle : \coprod_{j \in J_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(B_j^k, A) \rightarrow \varprojlim_{i \in I_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i^k, A)$$

est surjective.

Si A, B sont deux objets Γ -locaux, un morphisme $f : A \rightarrow B$ de \mathbb{A} est dit Γ -local si pour tout $k \in K$, tout $j \in J_k$, tout cône inductif $(\varepsilon_i : A_i^k \rightarrow A)_{i \in I_k}$ et tout morphisme $\ell : B_j^k \rightarrow B$ vérifiant $\forall i \in I_k$, $\ell \cdot \gamma_{ji}^k = f \cdot \varepsilon_i$, il existe un morphisme $m : B_j^k \rightarrow A$ vérifiant : $\forall i \in I_k$, $m \cdot \gamma_{ji}^k = \varepsilon_i$.

$$\begin{array}{ccc}
 A_i^k & \xrightarrow{\gamma_{ji}^k} & B_j^k \\
 \varepsilon_i \downarrow & \swarrow m & \downarrow \ell \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

Les objets et morphismes Γ -locaux constituent une sous-catégorie de \mathbb{A} notée \mathbb{A}_{Γ} .

Théorème 8.6.0. - La sous-catégorie \mathbb{A}_{Γ} est localisante.

Démonstration. -

a) Plaçons-nous dans la catégorie $\mathbb{F}\mathbb{A}$ des familles d'objets de \mathbb{A} (cf. 4). Puisque \mathbb{A} est localement cocomplète, la catégorie $\mathbb{F}\mathbb{A}$ est cocomplète (prop. 4.0.1.). Pour $k \in K$, posons $X^k = \varinjlim_{i \in I_k} A_i^k$ et

$\gamma_j^k = \langle \gamma_{ji}^k \rangle : X^k \rightarrow B_j^k$. Les objets Γ -locaux sont alors les objets A tels que, pour tout $k \in K$, et tout $j \in J_k$, l'application $\text{Hom}_{\mathbb{F}\mathbb{A}}(\gamma_j^k, A) : \text{Hom}_{\mathbb{F}\mathbb{A}}(B_j^k, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}\mathbb{A}}(X^k, A)$ est injective et l'application $\langle \text{Hom}_{\mathbb{F}\mathbb{A}}(\gamma_j^k, A) \rangle : \prod_{j \in J_k} \text{Hom}_{\mathbb{F}\mathbb{A}}(B_j^k, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{F}\mathbb{A}}(X^k, A)$ est surjective. Les morphismes

Γ -locaux sont les morphismes $f : A \rightarrow B$ tels que, pour tout $k \in K$, tout $j \in J_k$, tout $\varepsilon : X^k \rightarrow A$ et tout $\ell : B_j^k \rightarrow B$ vérifiant $\ell \cdot \gamma_j^k = f \cdot \varepsilon$, il existe un morphisme $m : B_j^k \rightarrow A$ vérifiant $m \cdot \gamma_j^k = \varepsilon$. Les objets X^k ne sont pas nécessairement α -présentables dans $\mathbb{F}\mathbb{A}$. Cependant, pour tout diagramme α -filtrant $(A_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de \mathbb{A} , on a une bijection :

$\lim_{i \in \mathbb{I}} \text{Hom}_{\mathbb{F}\mathbb{A}}(X^k, A_i) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{F}\mathbb{A}}(X^k, \lim_{i \in \mathbb{I}} A_i)$, puisque X^k est une limite inductive α -petite d'objets de \mathbb{A} vérifiant cette propriété.

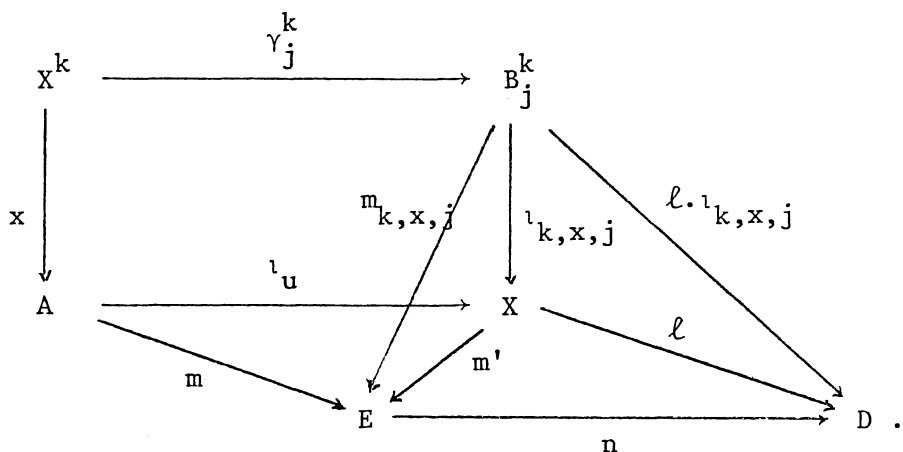
b) Soit A un objet de \mathbb{A} , C un objet Γ -local de \mathbb{A} et $h : A \rightarrow C$ un morphisme de \mathbb{A} . Nous cherchons une factorisation universelle $h = g \cdot f$ où $f : A \rightarrow B$ est un morphisme, B est un objet Γ -local et $g : B \rightarrow C$ est un morphisme Γ -local.

Notons Λ l'ensemble des triples (k, x, j) formés d'un élément k de K , d'un morphisme $x : X^k \rightarrow A$ et d'un élément j de J_k , pour lesquels il existe un morphisme $z : B_j^k \rightarrow C$ vérifiant $z \cdot \gamma_j^k = h \cdot x$. Un tel morphisme, nécessairement unique, est noté $z_{k, x, j}$. Notons \mathbb{M} le type de diagramme dont les objets sont constitués par un objet U et par les objets $V_{k, x, j}, W_{k, x, j}$ pour chaque triple (k, x, j) de Λ , et ayant un seul morphisme $V_{k, x, j} \rightarrow U$ et un seul morphisme $V_{k, x, j} \rightarrow W_{k, x, j}$. Notons $\phi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{A}$ le diagramme de $\mathbb{F}\mathbb{A}$ défini par $\phi(U) = A$, $\phi(V_{k, x, j}) = X^k$, $\phi(W_{k, x, j}) = B_j^k$, $\phi(V_{k, x, j} \rightarrow U) = x$ et $\phi(V_{k, x, j} \rightarrow W_{k, x, j}) = \gamma_j^k$.

Posons $(X, \iota) = \varinjlim \phi$. Notons $\iota_{k, x, j} : B_j^k \rightarrow X$ l'induction canonique. Il existe un unique morphisme $h'' : X \rightarrow C$ vérifiant :

$h''_1 \cdot \iota_u = h$ et $h''_1 \cdot \iota_{k,x,j} = z_{k,x,j}$ pour chaque $(k,x,j) \in \Lambda$.

c) Etudions une propriété de ι_u . Soit D, E deux objets Γ -locaux, $n : E \rightarrow D$ un morphisme Γ -local et $m : A \rightarrow E$, $\ell : X \rightarrow D$ deux morphismes de $\mathbb{F}A$ vérifiant $n \cdot m = \ell \cdot \iota_u$. Montrons l'existence et l'unicité d'un morphisme $m' : X \rightarrow E$ vérifiant $m' \cdot \iota_u = m$. Ce morphisme vérifie alors la relation : $n \cdot m' = \ell$



Pour tout $(k,x,j) \in \Lambda$, le morphisme $\ell \cdot \iota_{k,x,j} : B_j^k \rightarrow D$ vérifie : $\ell \cdot \iota_{k,x,j} \cdot \gamma_j^k = \ell \cdot \iota_u \cdot x = n \cdot m \cdot x$. Le morphisme n étant Γ -local, il existe un morphisme $m_{k,x,j} : B_j^k \rightarrow E$ vérifiant $m_{k,x,j} \cdot \gamma_j^k = m \cdot x$. On en déduit l'existence d'un unique morphisme $m' : X \rightarrow E$ vérifiant $m' \cdot \iota_u = m$ et $m' \cdot \iota_{k,x,j} = m_{k,x,j}$ pour tout $(k,x,j) \in \Lambda$.

Soit $m'' : X \rightarrow E$ un morphisme vérifiant $m'' \cdot \iota_u = m$. Pour tout $(k,x,j) \in \Lambda$, on a l'égalité : $m'' \cdot \iota_{k,x,j} \cdot \gamma_j^k = m'' \cdot \iota_u \cdot x = m \cdot x = m' \cdot \iota_u \cdot x = m' \cdot \iota_{k,x,j} \cdot \gamma_j^k$. L'objet E étant Γ -local, on en déduit l'égalité : $m'' \cdot \iota_{k,x,j} = m' \cdot \iota_{k,x,j}$, et par suite, l'égalité $m'' = m'$.

d) Notons $q : X \rightarrow Y$ le multiconoyau de l'ensemble de couples de morphismes

$C = \{(\iota_u \cdot y, \iota_u \cdot z) / k \in K, j \in J_k, (y, z) : B_j^k \rightrightarrows A \text{ vérifie } y \cdot \gamma_j^k = z \cdot \gamma_j^k\}$.

Pour tout $(y, z) \in C$, on a $h_1'' \cdot \iota_u \cdot y \cdot \gamma_j^k = h_1'' \cdot \iota_u \cdot z \cdot \gamma_j^k$. Puisque l'objet

C est Γ -local, on a $h_1'' \cdot \iota_u \cdot y = h_1'' \cdot \iota_u \cdot z$. On en déduit que $h_1'' : X \rightarrow C$

se factorise de façon unique sous la forme $h_1'' = h_1' \cdot q$ où $h_1' : Y \rightarrow C$.

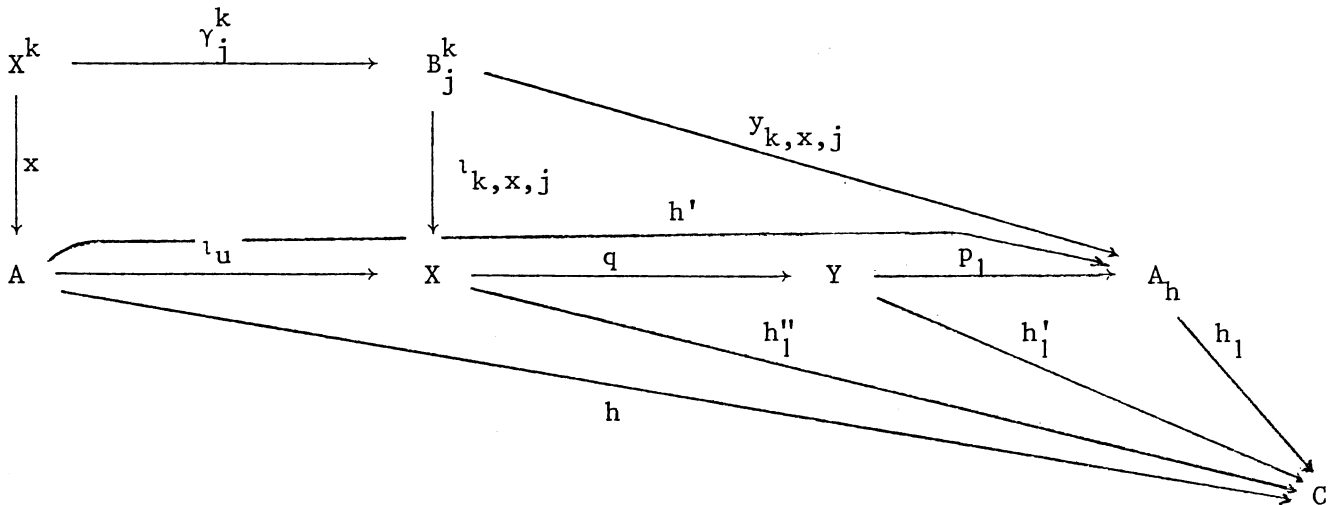
L'objet Y de $\mathbb{F}\mathbb{A}$ étant une famille d'objets de \mathbb{A} , il existe un unique

objet A_h de cette famille et un unique morphisme $h_1 : A_h \rightarrow C$ tel que

$h_1' = h_1 \cdot p_1$ où $p_1 : Y \rightarrow A_h$ est la projection canonique. Posons $h' = p_1 \cdot q \cdot \iota_u$

et $y_{k,x,j} = p_1 \cdot q \cdot \iota_{k,x,j}$. On a $h = h_1 \cdot h'$ et $h' \cdot x = y_{k,x,j} \cdot \gamma_j^k$ pour tout

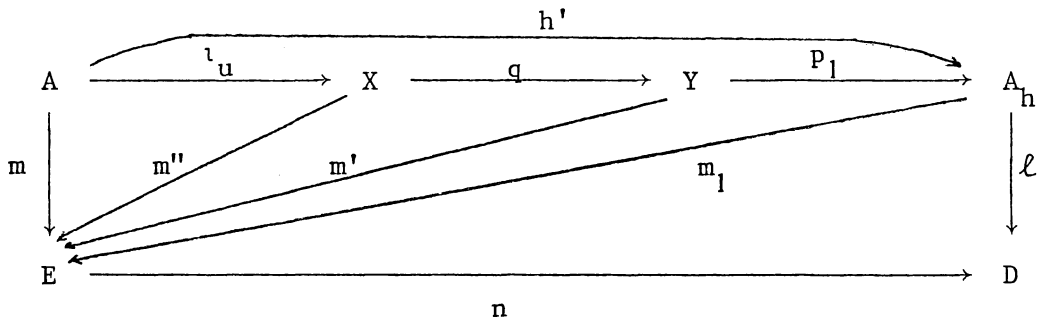
$(k, x, j) \in \Lambda$.



e) Etudions une propriété de h' . Soit D, E deux objets Γ -locaux, $n : E \rightarrow D$ un morphisme Γ -local et $m : A \rightarrow E$, $\ell : A_h \rightarrow D$ deux morphismes de \mathbb{A} vérifiant : $n \cdot m = \ell \cdot h'$. Le morphisme $\ell \cdot p_1 \cdot q : X \rightarrow D$ vérifie $\ell \cdot p_1 \cdot q \cdot \iota_u = \ell \cdot h' = n \cdot m$. D'après le c), il existe un unique morphisme $m'' : X \rightarrow E$ vérifiant : $m'' \cdot \iota_u = m$, $\ell \cdot p_1 \cdot q = n \cdot m''$.

Pour tout $(\iota_u \cdot y, \iota_u \cdot z) \in C$, on a $m'' \cdot \iota_u \cdot y \cdot \gamma_j^k = m'' \cdot \iota_u \cdot z \cdot \gamma_j^k$. L'objet E étant Γ -local, on en déduit $m'' \cdot \iota_u \cdot y = m'' \cdot \iota_u \cdot z$. Par suite, le morphisme m'' s'écrit d'une unique façon sous la forme $m'' = m' \cdot q$ où $m' : Y \rightarrow E$.

La relation $\ell \cdot p_1 = n \cdot m'$ montre alors qu'il existe un unique morphisme $m_1 : A_h \rightarrow E$ vérifiant $m' = m_1 \cdot p_1$ et $n \cdot m_1 = \ell$, et par suite $m_1 \cdot h' = m$. En outre, soit $m'_1 : A_h \rightarrow E$ un morphisme vérifiant $m'_1 \cdot h' = m$. On a : $m'_1 \cdot p_1 \cdot q \cdot \iota_u = m'_1 \cdot h' = m = m'' \cdot \iota_u$. D'après c), on en déduit : $m'_1 \cdot p_1 \cdot q = m'' = m_1 \cdot p_1 \cdot q$ et par suite $m'_1 = m_1$.

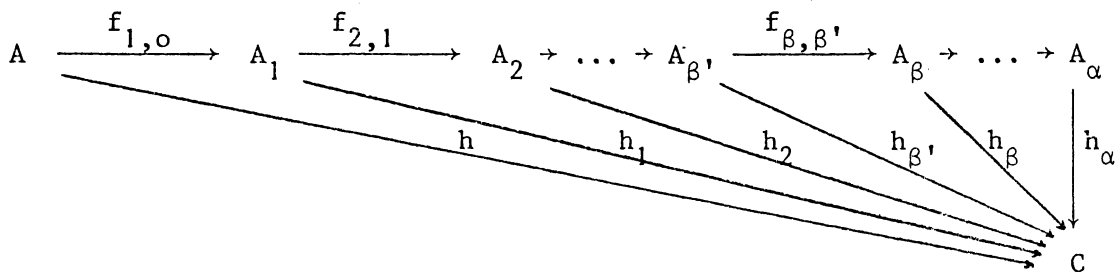


f) Pour tout ordinal β , on définit un objet A_β de \mathcal{A} et un morphisme $h_\beta : A_\beta \rightarrow C$ et, pour tout couple d'ordinaux β, β' tels que $\beta' < \beta$, on définit un morphisme $f_{\beta, \beta'} : A_{\beta'} \rightarrow A_\beta$ de \mathcal{A} , par induction transfinie, de la façon suivante :

1) $A_0 = A, h_0 = h$.

2) $A_{\beta+1} = A_{h_\beta}, h_{\beta+1} = (h_\beta)_1, f_{\beta+1, \beta'} = (h_\beta)' \cdot f_{\beta, \beta'}$.

3) Si γ est un ordinal limite, $(A_\gamma, (f_{\gamma\beta})_{\beta < \gamma})$ est une localisante inductive du diagramme $(A_\beta)_{\beta < \gamma}$, qui factorise le cône inductif $(h_\beta : A_\beta \rightarrow C)_{\beta < \gamma}$, par un morphisme que l'on note $h_\gamma : A_\gamma \rightarrow C$.



Notons que, pour $\gamma = \alpha$, on a $A_\alpha = \varinjlim_{\beta < \alpha} A_\beta$ car le diagramme $(A_\beta)_{\beta < \alpha}$ est α -filtrant.

g) Montrons que A_α est un objet Γ -local.

Soit $k \in K$ et $\bar{x} : X^k \rightarrow A_\alpha$ un morphisme. Il existe d'après le (a) un ordinal $\beta < \alpha$ et un morphisme $x_\beta : X^k \rightarrow A_\beta$ tel que $\bar{x} = f_{\alpha, \beta} \cdot x_\beta$.

Puisque l'objet C est Γ -local, le morphisme $h_\beta \cdot x_\beta : X^k \rightarrow C$ est de la forme $h_\beta \cdot x_\beta = z \cdot \gamma_j^k$ où $z : B_j^k \rightarrow C$. Par suite le morphisme $y_{k, x_\beta, j} : B_j^k \rightarrow A_{\beta+1}$ vérifie $y_{k, x_\beta, j} \cdot \gamma_j^k = f_{\beta+1, \beta} \cdot x_\beta$.

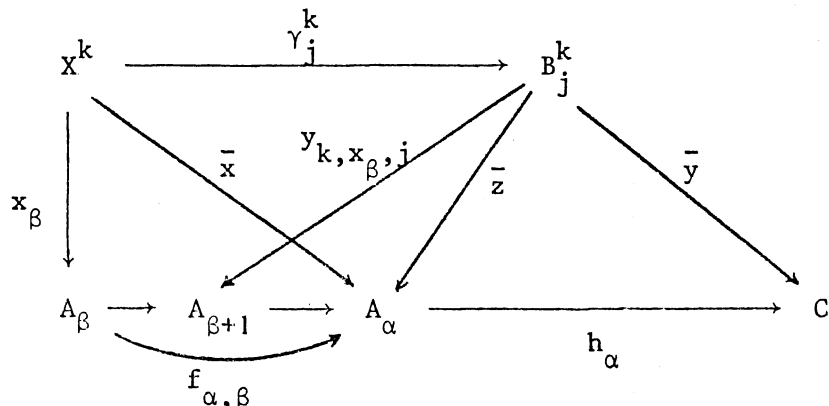
Le morphisme $\bar{y} = f_{\alpha, \beta+1} \cdot y_{k, x_\beta, j} : B_j^k \rightarrow A_\alpha$ vérifie alors :
 $\bar{y} \cdot \gamma_j^k = f_{\alpha, \beta+1} \cdot y_{k, x_\beta, j} \cdot \gamma_j^k = f_{\alpha, \beta+1} \cdot f_{\beta+1, \beta} \cdot x_\beta = f_{\alpha, \beta} \cdot x_\beta = \bar{x}$.

Soit $\bar{y}, \bar{z} : B_j^k \rightarrow A_\alpha$ deux morphismes vérifiant $\bar{y} \cdot \gamma_j^k = \bar{z} \cdot \gamma_j^k$.

L'objet B_j^k étant α -présentable dans \mathcal{A} , il existe un ordinal $\beta < \alpha$ et deux morphismes $y_\beta, z_\beta : B_j^k \rightarrow A_\beta$ vérifiant $\bar{y} = f_{\alpha, \beta} \cdot y_\beta$ et $\bar{z} = f_{\alpha, \beta} \cdot z_\beta$. On a alors $f_{\alpha, \beta} \cdot y_\beta \cdot \gamma_j^k = f_{\alpha, \beta} \cdot z_\beta \cdot \gamma_j^k$. D'après le (a), il existe un ordinal $\beta' > \beta$ tel que l'on ait : $f_{\beta', \beta} \cdot y_\beta \cdot \gamma_j^k = f_{\beta', \beta} \cdot z_\beta \cdot \gamma_j^k$. Par construction de $A_{\beta'+1}$, on en déduit la relation : $f_{\beta'+1, \beta'} \cdot f_{\beta', \beta} \cdot y_\beta = f_{\beta'+1, \beta'} \cdot f_{\beta', \beta} \cdot z_\beta$, soit : $f_{\beta'+1, \beta} \cdot y_\beta = f_{\beta'+1, \beta} \cdot z_\beta$. On en infère : $\bar{y} = f_{\alpha, \beta} \cdot y_\beta = f_{\alpha, \beta'+1} \cdot f_{\beta'+1, \beta} \cdot y_\beta = f_{\alpha, \beta'+1} \cdot f_{\beta'+1, \beta} \cdot z_\beta = f_{\alpha, \beta} \cdot z_\beta = \bar{z}$.

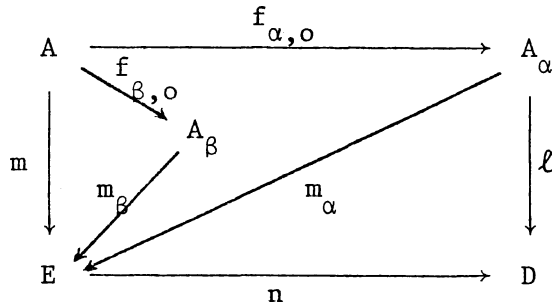
h) Montrons que le morphisme $h_\alpha : A_\alpha \rightarrow C$ est Γ -local.

Soit $\bar{x} : X^k \rightarrow A_\alpha$ et $\bar{y} : B_j^k \rightarrow C$ deux morphismes de $\mathcal{E}\mathcal{A}$ vérifiant :
 $h_\alpha \cdot \bar{x} = \bar{y} \cdot \gamma_j^k$.



Le morphisme \bar{x} est de la forme $\bar{x} = f_{\alpha,\beta} \cdot x_\beta$. Par construction de $A_{\beta+1}$, le morphisme $y_{k,x_\beta,j} = B_j^k \rightarrow A_{\beta+1}$ vérifie : $y_{k,x_\beta,j} \cdot \gamma_j^k = f_{\beta+1,\beta} \cdot x_\beta$. Le morphisme $\bar{z} = f_{\alpha,\beta+1} \cdot y_{k,x_\beta,j}$ vérifie alors : $\bar{z} \cdot \gamma_j^k = f_{\alpha,\beta+1} \cdot f_{\beta+1,\beta} \cdot x_\beta = f_{\alpha,\beta} \cdot x_\beta = \bar{x}$.

i) Le morphisme h est de la forme $h = h_\alpha \cdot f_{\alpha,o}$. Soit D, E deux objets Γ -locaux, $n : E \rightarrow D$ un morphisme Γ -local et $m : A \rightarrow E$, $\ell : A_\alpha \rightarrow D$ deux morphismes de \mathbb{A} vérifiant $\ell \cdot f_{\alpha,o} = n \cdot m$



Il est immédiat à l'aide de e) et par récurrence transfinie, que, pour tout ordinal $\beta \leq \alpha$, il existe un unique morphisme $m_\beta : A_\beta \rightarrow E$ vérifiant : $m_\beta \cdot f_{\beta,o} = m$. Le morphisme $m_\alpha : A_\alpha \rightarrow E$ vérifie alors $m_\alpha \cdot f_{\alpha,o} = m$. Pour des raisons analogues, un tel morphisme m_α est unique.

j) Il reste à montrer que les objets de la forme A_α quand A est fixé et que le morphisme $h : A \rightarrow C$ varie, forment (à isomorphisme près) un ensemble. Or, en reprenant les notations du b), les objets de la forme X forment un ensemble puisque les diagrammes de la forme Λ forment un ensemble. Avec les notations du d), les objets de la forme Y forment un ensemble et, par suite aussi, ceux de la forme A_h . Ainsi, avec les notations du f), les objets de la forme A_1 forment un ensemble. Par récurrence transfinie, il est alors immédiat que les objets de la forme A_β forment un ensemble. Cela est en particulier vrai pour α .

Théorème 8.6.1. - La catégorie \mathbb{A}_Γ est α -localisable.

Démonstration.

a) Montrons que la sous-catégorie \mathbb{A}_Γ de \mathbb{A} est fermée pour les limites inductives α -filtrantes. Soit $(C_\ell)_{\ell \in \mathbb{L}}$ un diagramme α -filtrant de \mathbb{A}_Γ et (C, ι) sa limite inductive dans \mathbb{A} . Pour tout $k \in K$, l'application :

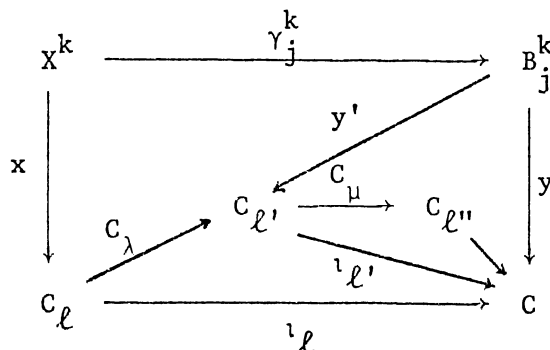
$$\lim_{\ell \in \mathbb{L}} \langle \text{Hom}_{\mathbb{A}}(\gamma_{ji}^k, C_\ell) \rangle : \lim_{\ell \in \mathbb{L}} \coprod_{j \in J_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(B_j^k, C_\ell) \rightarrow \lim_{\ell \in \mathbb{L}} \lim_{i \in \mathbb{I}_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i^k, C_\ell)$$

étant une limite inductive d'applications surjectives est surjective. Par suite, l'application composée :

$$\begin{aligned} \langle \text{Hom}_{\mathbb{A}}(\gamma_{ji}^k, C) \rangle &: \coprod_{j \in J_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(B_j^k, C) \simeq \coprod_{j \in J_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(B_j^k, \lim_{\ell \in \mathbb{L}} C_\ell) \simeq \\ &\simeq \coprod_{j \in J_k} \lim_{\ell \in \mathbb{L}} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(B_j^k, C_\ell) \simeq \lim_{\ell \in \mathbb{L}} \coprod_{j \in J_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(B_j^k, C_\ell) \rightarrow \lim_{\ell \in \mathbb{L}} \lim_{i \in \mathbb{I}_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i^k, C_\ell) \simeq \\ &\simeq \lim_{i \in \mathbb{I}_k} \lim_{\ell \in \mathbb{L}} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i^k, C_\ell) \simeq \lim_{i \in \mathbb{I}_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i^k, C) \end{aligned}$$

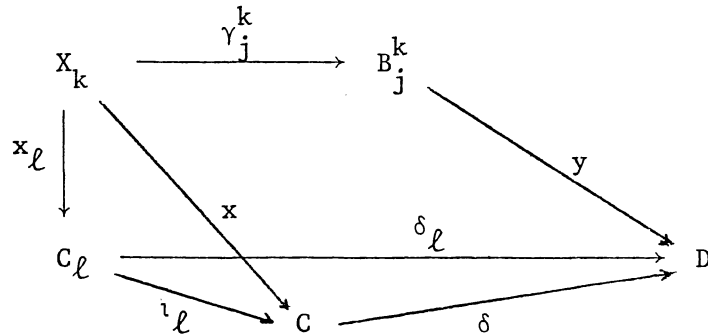
est surjective. De la même façon, on montre que, pour tout $j \in J_k$, l'application $(\text{Hom}_{\mathbb{A}}(\gamma_{ji}^k, C)) : \text{Hom}_{\mathbb{A}}(B_j^k, C) \rightarrow \lim_{i \in \mathbb{I}_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i^k, C)$ est injective. Ce qui montre que l'objet C est Γ -local.

b) Montrons que les inductions canoniques $\iota_\ell : C_\ell \rightarrow C$ sont Γ -locales. Soit $k \in K$, $j \in J_k$, $x : X^k \rightarrow C_\ell$ et $y : B_j^k \rightarrow C$ vérifiant $\iota_\ell \cdot x = y \cdot \gamma_j^k$.



Puisque l'objet B_j^k est α -présentable, il existe un morphisme $\lambda : \ell \rightarrow \ell'$ de \mathbb{L} et un morphisme $y' : B_j^k \rightarrow C_{\ell'}$, vérifiant $y = \iota_{\ell'} \cdot y'$. La relation $\iota_{\ell'} \cdot y' \cdot \gamma_j^k = y \cdot \gamma_j^k = \iota_{\ell} \cdot x = \iota_{\ell'} \cdot C_{\lambda} \cdot x$ implique l'existence d'un morphisme $\mu : \ell' \rightarrow \ell''$ de \mathbb{L} vérifiant : $C_{\mu} \cdot y' \cdot \gamma_j^k = C_{\mu} \cdot C_{\lambda} \cdot x = C_{\mu\lambda} \cdot x$. Le morphisme $C_{\mu\lambda}$ étant Γ -local, il existe un morphisme $z : B_j^k \rightarrow C_{\ell}$ vérifiant $z \cdot \gamma_j^k = x$. Cela implique que ι_{ℓ} est Γ -local.

c) Montrons que (C, ι) est la limite inductive de $(C_{\ell})_{\ell \in \mathbb{L}}$ dans la catégorie \mathbb{A}_{Γ} . Soit (D, δ) un cône inductif de \mathbb{A}_{Γ} de base $(C_{\ell})_{\ell \in \mathbb{L}}$



Soit $\delta : C \rightarrow D$ l'unique morphisme de \mathbb{A} vérifiant $\delta \cdot \iota_{\ell} = \delta_{\ell}$ pour tout $\ell \in \mathbb{L}$. Le morphisme δ est Γ -local. En effet, si $x : X_k \rightarrow C$, $y : B_j^k \rightarrow D$ vérifient $y \cdot \gamma_j^k = \delta \cdot x$, le morphisme x est de la forme $x = \iota_{\ell} \cdot x_{\ell}$ où $x_{\ell} : X_k \rightarrow C_{\ell}$; on a alors $y \cdot \gamma_j^k = \delta \cdot x = \delta \cdot \iota_{\ell} \cdot x_{\ell} = \delta_{\ell} \cdot x_{\ell}$. Le morphisme δ_{ℓ} étant Γ -local, il existe un morphisme $z' : B_j^k \rightarrow C_{\ell}$ vérifiant : $z' \cdot \gamma_j^k = x_{\ell}$. Le morphisme $z = \iota_{\ell} \cdot z' : B_j^k \rightarrow C$ vérifie alors la relation $z \cdot \gamma_j^k = x$.

d) \mathbb{A}_{Γ} est une sous-catégorie localement pleine de \mathbb{A} puisque si $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ sont deux morphismes de \mathbb{A} tels que $g \cdot f$ est Γ -local et si $x : X^k \rightarrow A$, $y : B_j^k \rightarrow B$ sont deux morphismes vérifiant : $y \cdot \gamma_j^k = f \cdot x$, le morphisme $g \cdot y : B_j^k \rightarrow C$ vérifie $g \cdot y \cdot \gamma_j^k = g \cdot f \cdot x$ et par suite, il existe un morphisme $z : B_j^k \rightarrow A$ vérifiant $z \cdot \gamma_j^k = x$.

e) Le théorème est une conséquence du théorème précédent et du théorème 8.3.1.

Cas particulier 8.6.2. - Les couronnes vides.

Supposons que les couronnes inductives de Γ soient toutes vides i.e. les ensembles J_k sont vides. Un objet A est Γ -local si et seulement si, pour tout $k \in K$, l'application : $\emptyset \rightarrow \varprojlim_{i \in \mathbb{I}_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i^k, A)$ est surjective c'est-à-dire si et seulement si l'ensemble $\varprojlim_{i \in \mathbb{I}_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i^k, A)$ est vide. Si A, B sont Γ -locaux, tout morphisme $f : A \rightarrow B$ est Γ -local.

La catégorie \mathbb{A}_Γ est alors la sous-catégorie pleine de \mathbb{A} ayant pour objets les objets A tels qu'il n'existe aucun cône inductif de base $(A_i)_{i \in \mathbb{I}_k}$, de sommet A .

Cas particulier 8.6.3. - Les étoiles inductives.

Une étoile inductive est une couronne inductive dont la base est réduite à un objet. Dans le cas où la catégorie \mathbb{A} est α -cocomplète, les couronnes inductives peuvent être remplacées par des étoiles inductives. En effet si $\gamma = (\gamma_{ji} : A_i \rightarrow B_j)_{(i,j) \in \mathbb{I} \times J}$ est une couronne inductive telle que $\text{card } \mathbb{I} < \alpha$, on pose $A = \varinjlim_{i \in \mathbb{I}} A_i$, $\gamma_j = \langle \gamma_{ji} \rangle_{i \in \mathbb{I}} : A \rightarrow B_j$ et on note ε l'étoile inductive $(\gamma_j : A \rightarrow B_j)_{j \in J}$ de base A . Les objets et morphismes γ -locaux sont alors exactement les objets et morphismes ε -locaux.

8.7. - Les catégories \mathbb{A}^χ .

On considère une catégorie α -localisable \mathbb{A} et un ensemble Σ d'épimorphismes de \mathbb{A} de sources et buts α -présentables. Un morphisme $f : A \rightarrow B$ de \mathbb{A} est Σ -local si pour tout morphisme $\sigma : A_0 \rightarrow B_0$ de Σ , tout morphisme $g : A_0 \rightarrow A$ et tout morphisme $h : B_0 \rightarrow B$ vérifiant $h \cdot \sigma = f \cdot g$, il existe un morphisme $\ell : B_0 \rightarrow A$ vérifiant $\ell \cdot \sigma = g$. On

note \mathbb{A}_Σ^χ , ou plus simplement \mathbb{A}^χ , la catégorie ayant les mêmes objets que \mathbb{A} et ayant pour morphismes les morphismes Σ -locaux de \mathbb{A} .

Proposition 8.7.0. - La sous-catégorie \mathbb{A}^χ est localisante et α -localisable.

Démonstration.- Pour chaque morphisme $\sigma : A_0 \rightarrow B_0$ de Σ , on note $(1_{A_0}, \sigma)$ l'étoile inductive dont la base est l'objet A_0 et qui est constituée par les deux morphismes 1_{A_0} et σ . Si on note Γ l'ensemble des étoiles inductives $(1_{A_0}, \sigma)$ pour $\sigma \in \Sigma$, il est immédiat que les sous-catégories \mathbb{A}^χ et \mathbb{A}_Γ sont égales.

La proposition résulte alors des théorèmes 8.6.0. et 8.6.1.

Exemples 8.7.1. -

La catégorie $\mathbb{A}n^\chi$ est la catégorie $\mathbb{A}n_\sigma^\chi$ où $\sigma : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}[X, Y] / (XY-1)$ est l'homomorphisme d'anneaux défini par $\sigma(P(X)) = \overline{P(X)}$.

La catégorie $\mathbb{T}r^\chi$ est la catégorie $\mathbb{T}r_\sigma^\chi$ où $\sigma : 3 \rightarrow 2$ est l'homomorphisme de treillis de l'ordinal $3 = \{0, 1, 2\}$ vers l'ordinal $2 = \{0, 1\}$ défini par $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(1) = \sigma(2) = 1$.

La catégorie $\mathbb{C}at^\chi$ est la catégorie $\mathbb{C}at_\sigma^\chi$ où $\sigma : \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{1}$ est le foncteur de la catégorie $\mathbb{1}$ à deux objets $0, 1$ et un morphisme non unité : $0 \rightarrow 1$, vers la catégorie $\mathbb{1}$ à deux objets $0, 1$ et deux morphismes non unités : $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$, inverses l'un de l'autre, et qui est défini par $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$ et $\sigma(0 \rightarrow 1) = (0 \rightarrow 1)$.

La catégorie $\mathbb{O}rds$ est isomorphe à la catégorie $\mathbb{O}rd_\sigma^\chi$ où $\sigma : 2 \rightarrow 1$ est l'unique application de l'ordinal 2 vers l'ordinal 1 .

8.8. - Les catégories $\mathbb{A}_{(\Gamma)}$ d'objets Γ -locaux stricts.

On reprend les notations du 8.6.

Un objet A de \mathbb{A} est dit Γ -local strict si pour tout $k \in K$,

$$\langle (\text{Hom}_{\mathbb{A}}(\gamma_{ji}^k, A)) \rangle : \coprod_{j \in J_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(B_j^k, A) \rightarrow \varinjlim_{i \in \mathbb{I}_k} \text{Hom}_{\mathbb{A}}(A_i^k, A)$$

est bijective. On note $\mathbb{A}_{(\Gamma)}$ la sous-catégorie pleine de \mathbb{A} ayant pour objets les objets Γ -locaux stricts.

Théorème 8.8. - La sous-catégorie pleine $\mathbb{A}_{(\Gamma)}$ est localisante et est α -localisable.

Démonstration. - Pour tout couple (j_1, j_2) d'éléments distincts de J_k , on note $(\epsilon_{\ell}^1 : B_{j_1}^k \rightarrow C_{\ell}, \epsilon_{\ell}^2 : B_{j_2}^k \rightarrow C_{\ell})_{\ell \in L_{j_1, j_2}}$ une limite inductive locale du diagramme $(\gamma_{ji})_{(i, j) \in \mathbb{I}_k \times \{j_1, j_2\}}$ de \mathbb{A} . On note Γ_0 l'ensemble des couronnes inductives vides dont les bases, réduites à un objet, sont les objets C_{ℓ} , quand ℓ varie dans L_{j_1, j_2} , (j_1, j_2) étant un couple d'éléments distincts de J_k , k variant dans K . Un objet A est Γ_0 -local si et seulement si il n'y a aucun morphisme de la forme $C_{\ell} \rightarrow A$ ou encore si et seulement si il n'existe aucun couple de morphismes $(y_1 : B_{j_1}^k \rightarrow A, y_2 : B_{j_2}^k \rightarrow A)$ tel que $j_1 \neq j_2$ et : $\forall i \in \mathbb{I}_k, y_1 \cdot \gamma_{j_1 i} = y_2 \cdot \gamma_{j_2 i}$. On en déduit que les objets Γ -locaux stricts sont exactement les objets $\Gamma \cup \Gamma_0$ -locaux. Si A, B sont des objets Γ -locaux stricts, tout morphisme $f : A \rightarrow B$ est Γ -local et par suite $\Gamma \cup \Gamma_0$ -local. Ainsi la catégorie $\mathbb{A}_{(\Gamma)}$ des objets Γ -locaux stricts est exactement la catégorie $\mathbb{A}_{\Gamma \cup \Gamma_0}$ des objets $\Gamma \cup \Gamma_0$ -locaux.

8.9. - Les catégories de foncteurs localement Γ -continus.

On considère une petite catégorie \mathbb{C} munie d'un ensemble de couronnes inductives α -petites :

$$\Gamma = \{(\gamma_{ji}^k : A_i^k \rightarrow B_j^k)_{(i, j) \in \mathbb{I}_k \times J_k}\}_{k \in K} \cdot \text{Un foncteur } F : \mathbb{C}^0 \rightarrow \mathbb{E}ns \text{ est}$$

localement Γ -continu, si, pour tout $k \in K$, l'application

$$\langle (F\gamma_{ji}^k) \rangle : \coprod_{j \in J_k} FB_j^k \longrightarrow \varinjlim_{i \in \mathbb{I}_k} FA_i^k$$

est bijective. On note $\widetilde{\mathfrak{C}, \Gamma}$ la sous-catégorie pleine de $\text{Ens}^{\mathfrak{C}^0}$ ayant pour objets les foncteurs localement Γ -continus.

Théorème 8.9. - La catégorie $\widetilde{\mathfrak{C}, \Gamma}$ est α -localisable et est une sous-catégorie pleine localisante de la catégorie $\text{Ens}^{\mathfrak{C}^0}$.

Démonstration. - Notons encore Γ l'ensemble des couronnes inductives :

$\{(\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(-, \gamma_{ji}^k) : \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(-, A_i^k) \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(-, B_j^k))_{(i,j) \in \mathbb{I}_k \times \mathbb{J}_k}\}_{k \in K}$ de la catégorie $\text{Ens}^{\mathfrak{C}^0}$. Pour $F : \mathfrak{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$ et $k \in K$, l'application :

$$\langle (F\gamma_{ji}^k) \rangle : \coprod_{j \in \mathbb{J}_k} FB_j^k \longrightarrow \lim_{i \in \mathbb{I}_k} FA_i^k$$

est isomorphe à l'application :

$$\langle (\text{Nat}(\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(-, \gamma_{ji}^k), F)) \rangle : \coprod_{j \in \mathbb{J}_k} \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(-, B_j^k), F) \longrightarrow \lim_{i \in \mathbb{I}_k} \text{Nat}(\text{Hom}_{\mathfrak{C}}(-, A_i^k), F).$$

Par suite, les catégories $\widetilde{\mathfrak{C}, \Gamma}$ et $\text{Ens}_{(\Gamma)}^{\mathfrak{C}^0}$ sont identiques.

On applique alors les théorèmes 8.6.0. et 8.6.1.

8.10. - Les catégories de modèles.

Le théorème 8.6.1. permet de montrer que les catégories de modèles de théories logiques du premier ordre dont les axiomes sont d'une certaine forme, sont des catégories \mathfrak{R}'_0 -localisables. Nous nous bornerons à donner

quelques exemples et à noter que nous rejoignons ici des travaux de M. Coste sur les théories logiques définissables par limites projectives finies et sur les localisations dans les catégories de modèles.

La catégorie Dom est la catégorie Anc_{Γ_0} où Γ_0 est constitué de l'étoile inductive vide de base 0 et de l'étoile inductive (γ_0^0, γ_1^0) de base l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X, Y]/(XY)$ ayant pour branches les morphismes $\gamma_0^0 : \mathbb{Z}[X, Y]/(XY) \rightarrow \mathbb{Z}[X]$ et $\gamma_1^0 : \mathbb{Z}[X, Y]/(XY) \rightarrow \mathbb{Z}[Y]$ définis par $\gamma_0^0(\bar{P}(X, Y)) = P(X, 0)$ et $\gamma_1^0(\bar{P}(X, Y)) = P(0, Y)$.

La catégorie Kc est la catégorie Anc_{Γ_1} où Γ_1 est constitué de l'étoile inductive vide de base 0 et de l'étoile inductive (γ_0^1, γ_1^1) de base l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ ayant pour branches les morphismes $\gamma_0^1 : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}$, $\gamma_1^1 : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}[X, Y]/(XY-1)$ définis par $\gamma_0^1(P(X)) = P(0)$ et $\gamma_1^1(P(X)) = \overline{P(X)}$.

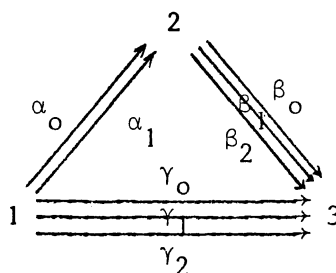
La catégorie Locc est la catégorie Anc_{Γ_2} où Γ_2 est constitué de l'étoile inductive vide de base 0 et de l'étoile inductive (γ_0^2, γ_1^2) de base l'anneau $\mathbb{Z}[X]$ ayant pour branches les morphismes : $\gamma_0^2 : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}[X, Y]/(XY-1)$, $\gamma_1^2 : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}[X, Y]/((X-1)Y-1)$ définis par $\gamma_0^2(P) = \bar{P}$ et $\gamma_1^2(P) = \bar{P}$.

La catégorie Ordt est la catégorie Ord_{Γ} où Γ est l'étoile inductive (γ_0, γ_1) ayant pour base l'ensemble discret $\{0, 1\}$ et pour branches les morphismes $\gamma_0 : \{0, 1\} \rightarrow 2$, $\gamma_1 : \{0, 1\} \rightarrow 2$ de but l'ordinal 2 définis par $\gamma_0(0) = 0$, $\gamma_0(1) = 1$, $\gamma_1(0) = 1$, $\gamma_1(1) = 0$.

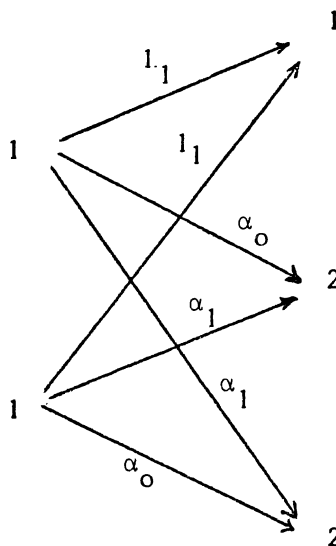
9 - QUELQUES EXEMPLES. -

9.0. - La catégorie des ensembles totalement ordonnés.

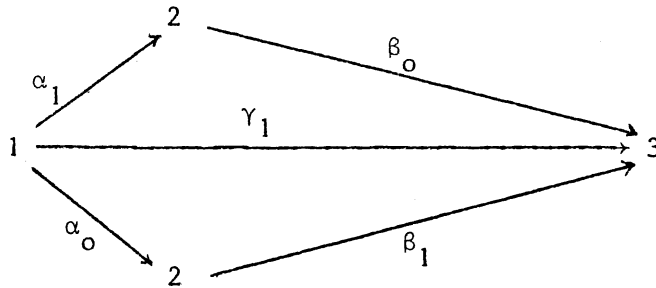
a) La catégorie \mathbb{C} a pour objets les nombres entiers 1,2,3 pour morphismes non unités, deux morphismes $\alpha_0, \alpha_1 : 1 \rightrightarrows 2$, trois morphismes $\beta_0, \beta_1, \beta_2 : 2 \rightrightarrows 3$ et trois morphismes $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 : 1 \rightrightarrows 3$, dont la composition est définie par : $\beta_0 \alpha_0 = \beta_2 \alpha_0 = \gamma_0$, $\beta_0 \alpha_1 = \beta_1 \alpha_0 = \gamma_1$, $\beta_1 \alpha_1 = \beta_2 \alpha_1 = \gamma_2$.



La couronne inductive Γ_0 de \mathbb{C} a pour base le diagramme discret : $\phi_0 : \{0,1\} \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\phi_0(0) = \phi_0(1) = 1$ et est constitué des trois cônes $(1_1, 1_1)$, (α_0, α_1) , (α_1, α_0)

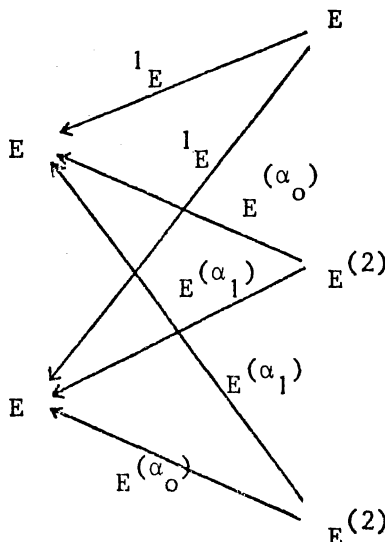


On note \mathbb{U}_1 la catégorie ayant pour objets les entiers 0,1,2 et pour morphismes non unités, un morphisme $0 \rightarrow 1$ et un morphisme $0 \rightarrow 2$. Le cône inductif Γ_1 de \mathbb{C} a pour base le diagramme $\phi_1 : \mathbb{U}_1 \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\phi_1(0) = 1$, $\phi_1(1) = \phi_1(2) = 2$, $\phi_1(0 \rightarrow 1) = \alpha_1$, $\phi_1(0 \rightarrow 2) = \alpha_0$, pour sommet l'objet 3 et est formé des morphismes : $\beta_0, \gamma_1, \beta_1$



On pose $\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1\}$.

b) Montrons qu'un ensemble totalement ordonné (E, \leq) définit un foncteur localement Γ -continu : $E^{(\)} : \mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$. Posons $E^{(1)} = E$, $E^{(2)} = \{(x,y) \in E^2 : x < y\}$, $E^{(3)} = \{(x,y,z) \in E^3 : x < y < z\}$, $E^{(\alpha_0)} : E^{(2)} \rightarrow E$ la première projection, $E^{(\alpha_1)} : E^{(2)} \rightarrow E$ la seconde projection, $E^{(\gamma_i)} : E^{(3)} \rightarrow E$ la projection d'indice $i+1$, $E^{(\beta_i)} : E^{(3)} \rightarrow E$ sont les applications définies par $E^{(\beta_0)}(x,y,z) = (x,y)$, $E^{(\beta_1)}(x,y,z) = (y,z)$, $E^{(\beta_2)}(x,y,z) = (x,z)$. L'image de la couronne inductive Γ_0 par le foncteur $E^{(\)}$ est la couronne projective :

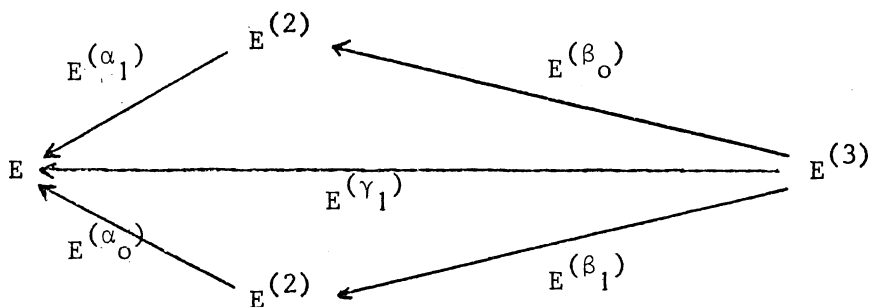


Elle détermine une application $f : E \amalg E_0^{(2)} \amalg E_1^{(2)} \rightarrow E \times E$ où $E_0^{(2)} = E_1^{(2)} = E^{(2)}$, qui est définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= (x,x) \text{ pour } x \in E, \\ f(x,y) &= (x,y) \text{ pour } (x,y) \in E_0^{(2)} \\ f(x,y) &= (y,x) \text{ pour } (x,y) \in E_1^{(2)} \end{aligned}$$

Or il est immédiat que f est bijective.

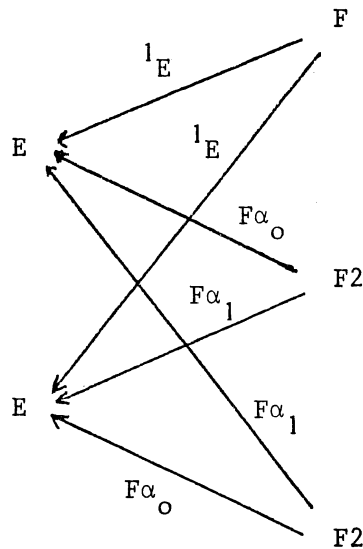
L'image du cône inductif Γ_1 par le foncteur $E^{(\)}$ est le cône projectif



Il détermine une application : $g : E^{(3)} \rightarrow E^{(2)} \times E^{(2)}$ définie par $g(x,y,z) = ((x,y), (y,z))$. Or il est immédiat que g est bijective.

c) Une application strictement croissante $f : (E, \leq) \rightarrow (E', \leq)$ définit une transformation naturelle $f^{(\)} : E^{(\)} \rightarrow E'^{(\)}$ par $f^{(1)} = f$, $f^{(2)}(x,y) = (f(x), f(y))$, $f^{(3)}(x,y,z) = (f(x), f(y), f(z))$.

d) Montrons qu'un foncteur localement Γ -continu $F : \mathbb{C}^0 \rightarrow \mathbb{E}ns$ détermine un ensemble totalement ordonné E . Posons $E = F1$. Si $(x,y) \in E^2$, posons : $x < y$, s'il existe $u \in F2$ tel que $F\alpha_0(u) = x$ et $F\alpha_1(u) = y$. La couronne projective



définit une bijection : $E \amalg F_0^2 \amalg F_1^2 \xrightarrow{\sim} E \times E$ où $F_0^2 = F_1^2 = F_2$.

Identifions les deux ensembles par cette bijection. On a : $(x,y) \in E \iff x = y$.

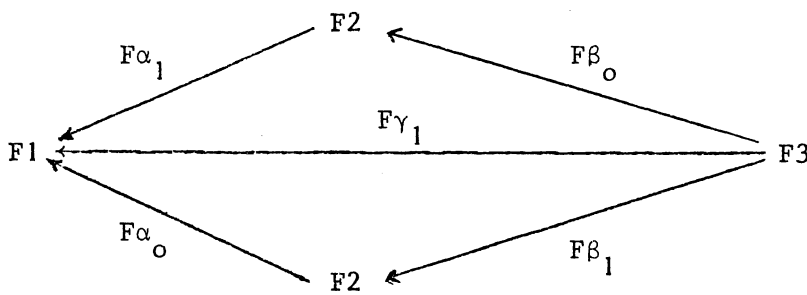
Si $x \neq y$ et si l'on a pas : $x < y$, alors $(x,y) \notin E$ et $(x,y) \notin F_0^2$;

donc $(x,y) \in F_1^2$ et par suite $(y,x) \notin E \amalg F_1^2$; donc $(y,x) \in F_0^2$

et par suite $y < x$. Si on a : $x < y$ et $y < x$, on a $(x,y) \in F_0^2$

et $(y,x) \in F_0^2$, donc $(x,y) \in F_0^2$ et $(x,y) \in F_1^2$, ce qui est absurde.

Soit $(x,y,z) \in E^3$ tel que $x < y$ et $y < z$. Le cône projectif



définit une bijection : $F_3 \rightarrow F_2 \times F_2$. Identifions les deux ensembles

par cette bijection. On a

$$F \alpha_0 \cdot F \beta_2(x,y,z) = F \gamma_0(x,y,z) = F \alpha_0(x,y) = x$$

et $F \alpha_1 \cdot F \beta_2(x,y,z) = F \gamma_2(x,y,z) = F \alpha_1(y,z) = z$

et par suite $x < z$. Cela achève de prouver que la relation : $x \leq y$ si et seulement si $x < y$ ou $x = y$, est une relation d'ordre total sur E .

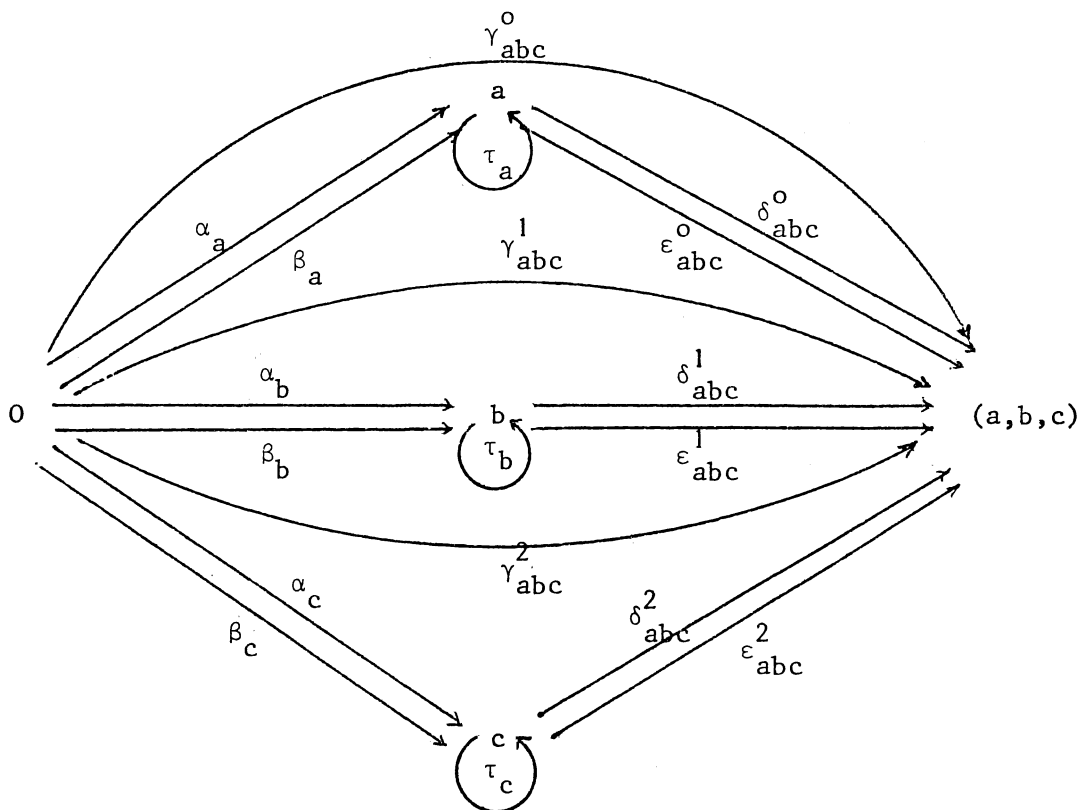
e) Une transformation naturelle $t : F \rightarrow F'$ détermine une application $t_1 : F1 \rightarrow F'1$ qui est strictement croissante.

f) On montre facilement que les correspondances définies ci-dessus établissent une équivalence entre la catégorie des ensembles totalement ordonnés et la catégorie des foncteurs localement Γ -continus : $\mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$.

9.1. - La catégorie des espaces métriques.

a) On construit une petite catégorie \mathbb{C} de la façon suivante. Les objets de \mathbb{C} sont constitués par le nombre réel 0, les nombres réels positifs et les triplets (a,b,c) de nombres réels positifs vérifiant : $a \leq b \leq c \leq a+b$.

Les morphismes de \mathbb{C} sont constitués par les morphismes unités, deux morphismes $\alpha_a, \beta_a : 0 \rightrightarrows a$ pour chaque nombre réel positif a , trois morphismes $\gamma_{abc}^0, \gamma_{abc}^1, \gamma_{abc}^2 : 0 \rightrightarrows (a,b,c)$ pour chaque objet de \mathbb{C} de la forme (a,b,c) , un morphisme $\tau_a : a \rightarrow a$ pour chaque nombre réel positif a , deux morphismes $\delta_{abc}^0, \epsilon_{abc}^0 : a \rightrightarrows (a,b,c)$, deux morphismes $\delta_{abc}^1, \epsilon_{abc}^1 : b \rightrightarrows (a,b,c)$, deux morphismes $\delta_{abc}^2, \epsilon_{abc}^2 : c \rightrightarrows (a,b,c)$, pour tout objet (a,b,c) de \mathbb{C} .



La composition des morphismes est définie par :

$$\tau_a \cdot \alpha_a = \beta_a, \quad \tau_a \cdot \beta_a = \alpha_a, \quad \text{pour chaque objet } a > 0,$$

$$\delta_{abc}^0 \cdot \tau_a = \epsilon_{abc}^0, \quad \epsilon_{abc}^0 \cdot \tau_a = \delta_{abc}^0,$$

$$\delta_{abc}^1 \cdot \tau_b = \epsilon_{abc}^1, \quad \epsilon_{abc}^1 \cdot \tau_b = \delta_{abc}^1,$$

$$\delta_{abc}^2 \cdot \tau_c = \epsilon_{abc}^2, \quad \epsilon_{abc}^2 \cdot \tau_c = \delta_{abc}^2,$$

$$\delta_{abc}^0 \cdot \alpha_a = \epsilon_{abc}^0 \cdot \beta_a = \delta_{abc}^2 \cdot \alpha_c = \epsilon_{abc}^2 \cdot \beta_c = \gamma_{abc}^0,$$

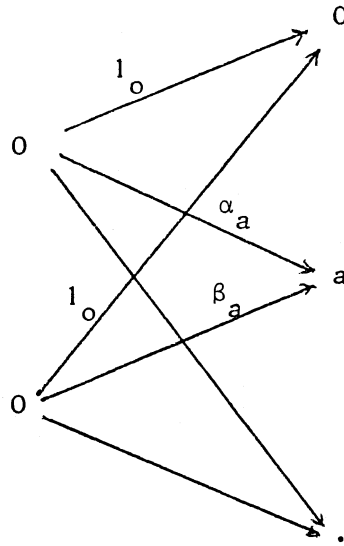
$$\delta_{abc}^0 \cdot \beta_a = \epsilon_{abc}^0 \cdot \alpha_a = \delta_{abc}^1 \cdot \alpha_b = \epsilon_{abc}^1 \cdot \beta_b = \gamma_{abc}^1,$$

$$\delta_{abc}^1 \cdot \beta_b = \epsilon_{abc}^1 \cdot \alpha_b = \delta_{abc}^2 \cdot \beta_c = \epsilon_{abc}^2 \cdot \alpha_c = \gamma_{abc}^2,$$

pour tout objet (a,b,c) de \mathbb{C} .

b) La couronne inductive Γ_0 de \mathbb{C} a pour base le diagramme discret $\phi_0 : \{0,1\} \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\phi_0 0 = \phi_0 1 = 0$ et est constitué par

le cône inductif (l_0, l_0) et les cônes inductifs (α_a, β_a) pour tous les nombres réels positifs a .



La couronne inductive Γ_1 de \mathbb{C} a pour base le diagramme discret $\Phi_1 : \{0,1,2\} \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\Phi_1 0 = \Phi_1 1 = \Phi_1 2 = 0$ et est constitué des cônes inductifs suivants :

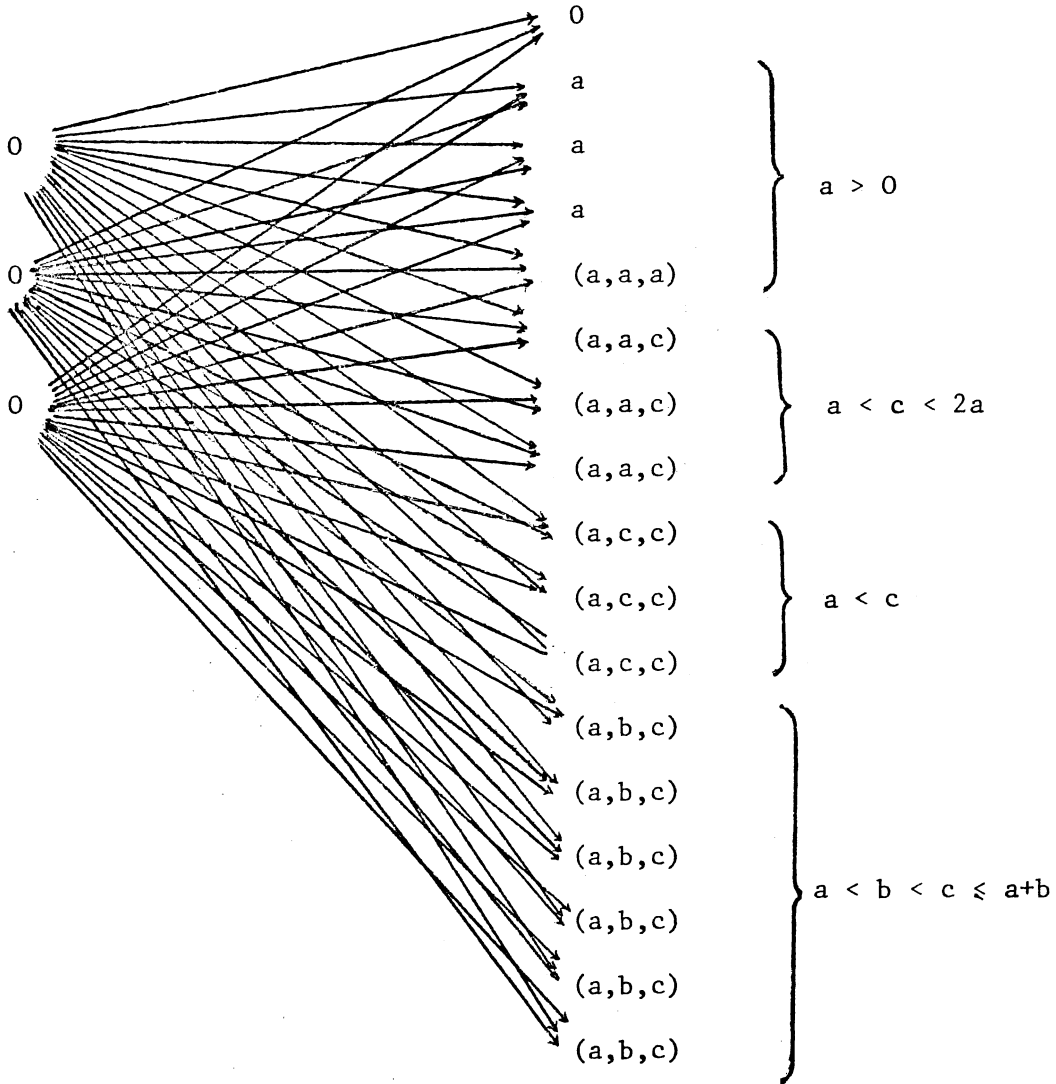
1) le cône inductif (l_0, l_0, l_0)

2) pour tout nombre réel positif a , les trois cônes de sommet a : $(\alpha_a, \alpha_a, \beta_a)$, $(\alpha_a, \beta_a, \beta_a)$, $(\alpha_a, \beta_a, \alpha_a)$ et le cône $(\gamma_{aaa}^0, \gamma_{aaa}^1, \gamma_{aaa}^2)$ de sommet (a, a, a)

3) pour tout couple de nombres réels positifs (a, c) tel que $a < c < 2a$, les trois cônes de sommet (a, a, c) : $(\gamma_{aac}^0, \gamma_{aac}^1, \gamma_{aac}^2)$, $(\gamma_{aac}^1, \gamma_{aac}^2, \gamma_{aac}^0)$, $(\gamma_{aac}^2, \gamma_{aac}^0, \gamma_{aac}^1)$

4) pour tout couple de nombres réels positifs (a, c) tel que $a < c$, les trois cônes de sommet (a, c, c) : $(\gamma_{acc}^0, \gamma_{acc}^1, \gamma_{acc}^2)$, $(\gamma_{acc}^1, \gamma_{acc}^2, \gamma_{acc}^0)$, $(\gamma_{acc}^2, \gamma_{acc}^0, \gamma_{acc}^1)$

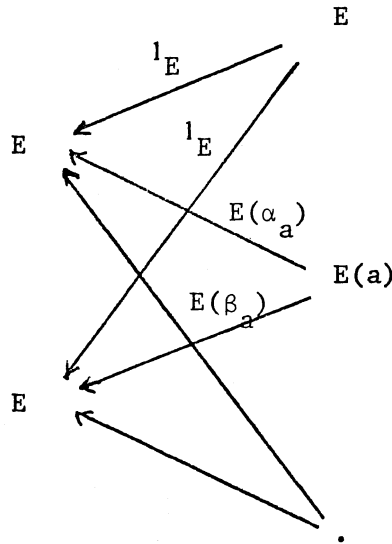
5) pour tout triple de nombres réels positifs (a,b,c) tels que $a < b < c \leq a + b$, les six cônes de sommets $(a,b,c) : (\gamma_{abc}^0, \gamma_{abc}^1, \gamma_{abc}^2), (\gamma_{abc}^1, \gamma_{abc}^2, \gamma_{abc}^0), (\gamma_{abc}^2, \gamma_{abc}^0, \gamma_{abc}^1), (\gamma_{abc}^0, \gamma_{abc}^2, \gamma_{abc}^1), (\gamma_{abc}^1, \gamma_{abc}^0, \gamma_{abc}^2), (\gamma_{abc}^2, \gamma_{abc}^1, \gamma_{abc}^0)$.



Posons $\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1\}$

c) Nous allons montrer qu'un espace métrique E détermine un foncteur Γ -continu: $\mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$ que nous noterons encore E . Posons $E(0) = E$, $E(a) = \{(x,y) \in E^2 : d(x,y) = a\}$, $E(a,b,c) = \{(x,y,z) \in E^3 : d(x,y) = a, d(y,z) = b, d(x,z) = c\}$, $E(\alpha_a) : E(a) \rightarrow E$ la première projection, $E(\beta_a) : E_a \rightarrow E$ la seconde projection, $E(\tau_a) : E_a \rightarrow E_a$ la transposition, $E(\delta_{abc}^0) : E(a,b,c) \rightarrow E(a)$ l'application définie par $E(\delta_{abc}^0)(x,y,z) = (x,y)$, $E(\delta_{abc}^1) : E(a,b,c) \rightarrow E(b)$ l'application définie par $E(\delta_{abc}^1)(x,y,z) = (y,z)$ et $E(\delta_{abc}^2) : E(a,b,c) \rightarrow E(c)$ l'application définie par $E(\delta_{abc}^2)(x,y,z) = (x,z)$, les valeurs du foncteur E pour les autres morphismes étant définies par composition.

L'image de la couronne inductive Γ_0 par le foncteur E est la couronne projective.



L'application associée $f : E \amalg \coprod_{a>0} E(a) \rightarrow E \times E$ est définie par $f(x) = (x,x)$ pour $x \in E$ et $f(x,y) = (x,y)$ pour $(x,y) \in E_a$. Il est immédiat que f est bijective. L'image de la couronne inductive Γ_1 par le foncteur E est une couronne projective qui détermine une application g dont l'ensemble de départ est :

$$E \coprod \coprod_{a>0} (E_0(a) \coprod E_1(a) \coprod E_2(a)) \coprod E(a,a,a)$$

$$\coprod_{0 < a < c < 2a} (E_0(a,a,c) \coprod E_1(a,a,c) \coprod E_2(a,a,c)) \coprod$$

$$\coprod_{0 < a < c} (E_0(a,c,c) \coprod E_1(a,c,c) \coprod E_2(a,c,c)) \coprod$$

$$\coprod_{0 < a < b < c \leq a+b} (E_0(a,b,c) \coprod E_1(a,b,c) \coprod E_2(a,b,c) \coprod E_3(a,b,c) \coprod E_4(a,b,c) \coprod E_5(a,b,c))$$

où $E_1(a) = E(a)$, $E_1(a,a,c) = E(a,a,c)$, $E_1(a,c,c) = E(a,c,c)$,
 $E_1(a,b,c) = E(a,b,c)$, dont l'ensemble d'arrivée est $E \times E \times E$, et
 qui est définie de la façon suivante :

$$g(x) = (x,x,x) \text{ pour } x \in E , g(x,y) = (x,x,y) \text{ pour } (x,y) \in E_0(a) ,$$

$$g(x,y) = (x,y,y) \text{ pour } (x,y) \in E_1(a) , g(x,y) = (x,y,x) \text{ pour}$$

$$(x,y) \in E_2(a) , g(x,y,z) = (x,y,z) \text{ pour } (x,y,z) \in E(a,a,a) ,$$

$$g(x,y,z) = (x,y,z) \text{ pour } (x,y,z) \in E_0(a,a,c) , g(x,y,z) = (y,z,x) \text{ pour}$$

$$(x,y,z) \in E_1(a,a,c) , g(x,y,z) = (z,x,y) \text{ pour } (x,y,z) \in E_2(a,a,c) ,$$

$$g(x,y,z) = (x,y,z) \text{ pour } (x,y,z) \in E_0(a,c,c) , g(x,y,z) = (y,z,x) \text{ pour}$$

$$(x,y,z) \in E_1(a,c,c) , g(x,y,z) = (z,x,y) \text{ pour } (x,y,z) \in E_2(a,c,c) ,$$

$$g(x,y,z) = (x,y,z) \text{ pour } (x,y,z) \in E_0(a,b,c) , g(x,y,z) = (y,z,x) \text{ pour}$$

$$(x,y,z) \in E_1(a,b,c) , g(x,y,z) = (z,x,y) \text{ pour } (x,y,z) \in E_2(a,b,c)$$

$$g(x,y,z) = (y,x,z) \text{ pour } (x,y,z) \in E_3(a,b,c) , g(x,y,z) = (x,z,y) \text{ pour}$$

$$(x,y,z) \in E_4(a,b,c) , g(x,y,z) = (z,y,x) \text{ pour } (x,y,z) \in E_5(a,b,c) .$$

On montre facilement que g est injective. Montrons que g est surjective. Soit $(x,y,z) \in E^3$.

* Si $x = y = z$ alors $g(x) = (x,y,z)$

* Si $x = y \neq z$ posons $d(x,z) = a$ alors $(x,z) \in E_0(a)$ et

$$g(x,z) = (x,x,z) = (x,y,z)$$

* Si $x = z \neq y$, posons $d(x,y) = a$, alors $(x,y) \in E_2(a)$ et

$$g(x,y) = (x,y,x) = (x,y,z)$$

* Si $y = z \neq x$, posons $d(x,y) = a$, alors $(x,y) \in E_1(a)$ et

$$g(x,y) = (x,y,x) = (x,y,z) .$$

On suppose désormais x, y, z distincts deux à deux, et on pose $d(x, y) = a$, $d(y, z) = b$, $d(x, z) = c$

- * Si $a = b = c$, alors $(x, y, z) \in E(a, a, a)$ et $g(x, y, z) = (x, y, z)$
- * Si $a = b < c$, alors $(x, y, z) \in E_0(a, a, c)$ et $g(x, y, z) = (x, y, z)$
- * Si $a = c < b$, alors $(z, x, y) \in E_1(a, a, c)$ et $g(z, x, y) = (x, y, z)$
- * Si $b = c < a$ alors $(y, z, x) \in E_2(c, c, a)$ et $g(y, z, x) = (x, y, z)$
- * Si $a < b = c$, alors $(x, y, z) \in E_0(a, b, b)$ et $g(x, y, z) = (x, y, z)$
- * Si $b < a = c$, alors $(y, z, x) \in E_2(b, a, a)$ et $g(y, z, x) = (x, y, z)$
- * Si $c < a = b$, alors $(z, x, y) \in E_1(c, a, a)$ et $g(z, x, y) = (x, y, z)$
- * Si $a < b < c$, alors $(x, y, z) \in E_0(a, b, c)$ et $g(x, y, z) = (x, y, z)$
- ⋮
- * Si $b < a < c$, alors $(z, y, x) \in E_5(a, b, c)$ et $g(z, y, x) = (x, y, z)$

Ainsi g est bijective

d) Une isométrie $f : E \rightarrow E'$ définit une transformation naturelle par : $f_0 = f$, $f_a : E(a) \rightarrow E'(a)$ définie par $f_a(x, y) = (f(x), f(y))$ et $f_{(a, b, c)} : E(a, b, c) \rightarrow E'(a, b, c)$ définie par $f_{(a, b, c)}(x, y, z) = (f(x), f(y), f(z))$.

e) Montrons qu'un foncteur localement Γ -continu $F : \mathcal{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$ détermine un espace métrique E . Posons $E = F_0$. L'image de la couronne Γ_0 par le foncteur F définit une bijection entre les deux ensembles $E \coprod_{a>0} \coprod_a F_a$ et E^2 , ensembles que l'on identifie. De même l'image de la couronne Γ_1 par le foncteur F définit une bijection entre deux ensembles que l'on identifiera.

Soit $(x,y) \in E^2$. Si $(x,y) \in E$, on a $x = y$ et on pose $d(x,y) = 0$. Si $(x,y) \in F(a)$, on pose $d(x,y) = a$. Alors $F \tau_a(x,y) = (y,x) \in F(a)$, donc $d(y,x) = a$. Si $d(x,y) = 0$ alors $(x,y) \in E$ donc $x = y$. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Soit $(x,y,z) \in E^3$. Supposons, par exemple, que $(x,y,z) \in F_2(a,b,c)$ avec $a < b < c$, alors $(y,z) \in F(a)$, $(x,z) \in F(b)$, $(x,y) \in F(c)$ et, par suite, on a $d(y,z) = a$, $d(x,z) = b$, $d(x,y) = c$. Or on a : $a < b < c \leq a+b$. On a donc l'inégalité triangulaire pour x,y,z . On étudie de la même façon les autres cas.

f) Une transformation naturelle $t : F \rightarrow F'$ définit une application $t_0 : F_0 \rightarrow F'_0$ qui est une isométrie.

g) On montre que les correspondances ci-dessus déterminent une équivalence entre la catégorie des espaces métriques et la catégorie des foncteurs localement Γ -continus : $\mathcal{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$.

9.2. - La catégorie des domaines d'intégrité.

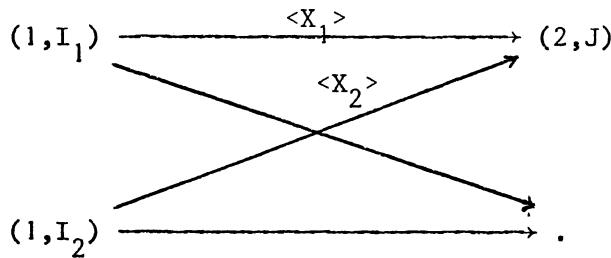
a) La catégorie \mathcal{C} a pour objets les couples (n,I) formés d'un entier $n \in [0,3]$ et d'un idéal premier I de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$. Les morphismes $(n,I) \rightarrow (m,J)$ sont les homomorphismes injectifs d'anneaux unitaires $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]/I \rightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]/J$. Ils sont tous de la forme $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$, où g_1, \dots, g_n sont des polynômes de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ vérifiant : $\forall f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ ($f \in I \iff f(g_1, \dots, g_n) \in J$), et où $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ désigne l'homomorphisme quotient de l'homomorphisme : $g_1, \dots, g_n : \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$. La composition des morphismes de \mathcal{C} est la composition des homomorphismes d'anneaux.

b) Γ_0 est la couronne inductive $((0,p))_{p \in \text{Spec } \mathbb{Z}}$ de base vide.

Pour tout couple (I_1, I_2) d'éléments de $\text{Spec } \mathbb{Z}[X]$, on pose :

$$S(I_1, I_2) = \{J \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X_1, X_2] : J \cap \mathbb{Z}[X_1] = I_1 \text{ et } J \cap \mathbb{Z}[X_2] = I_2\}$$

et on note Γ_{I_1, I_2} la couronne inductive de base discrète $\phi : \{0,1\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi_0 = (1, I_1)$, $\phi_1 = (1, I_2)$, constituée des cônes inductifs : $\langle X_1 \rangle : (1, I_1) \rightarrow (2, J)$, $\langle X_2 \rangle : (1, I_2) \rightarrow (2, J)$ pour tous les éléments J de $S(I_1, I_2)$.

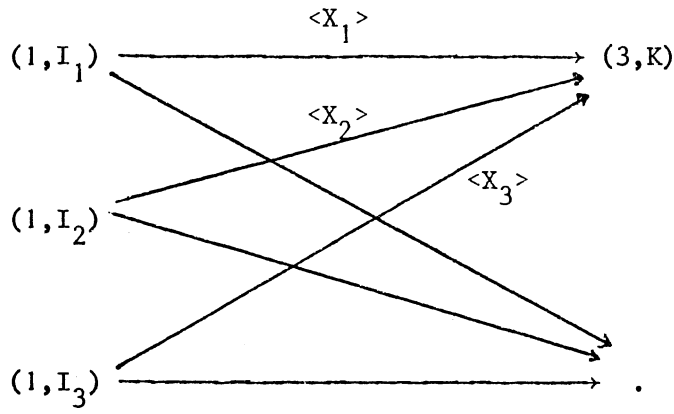


Pour tout triple I_1, I_2, I_3 d'éléments de $\text{Spec } \mathbb{Z}[X]$, on pose

$$S(I_1, I_2, I_3) = \{K \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3] : K \cap \mathbb{Z}[X_1] = I_1, K \cap \mathbb{Z}[X_2] = I_2$$

$$\text{et } K \cap \mathbb{Z}[X_3] = I_3\}$$

et on note Γ_{I_1, I_2, I_3} la couronne inductive de base discrète $\phi : \{0,1,2\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi_0 = (1, I_1)$, $\phi_1 = (1, I_2)$, $\phi_2 = (1, I_3)$, constituée par les cônes inductifs $\langle X_1 \rangle : (1, I_1) \rightarrow (3, K)$, $\langle X_2 \rangle : (1, I_2) \rightarrow (3, K)$, $\langle X_3 \rangle : (1, I_3) \rightarrow (3, K)$ pour tous les éléments K de $S(I_1, I_2, I_3)$.



On pose $\Gamma = \{\Gamma_0\} \cup \{\Gamma_{I_1, I_2} : I_1, I_2 \in \text{Spec } \mathbb{Z}[\bar{X}]\} \cup$

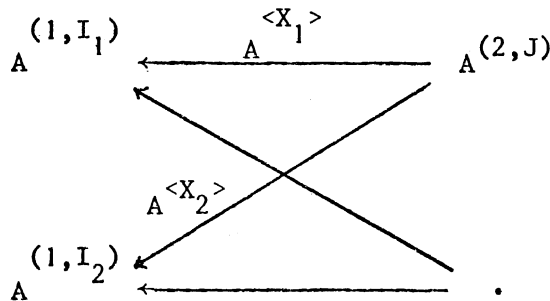
$$\{\Gamma_{I_1, I_2, I_3} : I_1, I_2, I_3 \in \text{Spec } \mathbb{Z}[\bar{X}]\}$$

c) Nous allons montrer qu'un domaine d'intégrité A détermine un foncteur localement Γ -continu : $A^{(\quad)} : \mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$. On pose $A^{(n, I)} = \{(x_1, \dots, x_n) \in A^n \mid \forall f \in \mathbb{Z}[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n], f(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff f \in I\}$.

Pour un morphisme $\langle g_1, \dots, g_n \rangle : (n, I) \rightarrow (m, J)$ on définit $\langle g_1, \dots, g_n \rangle_A : A^{(m, J)} \rightarrow A^{(n, I)}$ par $A^{\langle g_1, \dots, g_n \rangle} (x_1, \dots, x_m) = (g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_n(x_1, \dots, x_m))$.

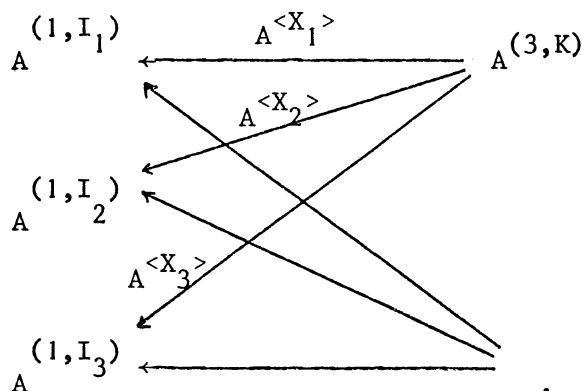
L'image de Γ_0 par le foncteur $A^{(\quad)}$ est la famille d'ensembles $(A^{(0, p)})_{p \in \text{Spec } \mathbb{Z}}$. Or on a : $A^{(0, p)} \simeq 1$ si p est la caractéristique de A et $A^{(0, p)} = \emptyset$ sinon. Par suite, on a $\prod_{p \in \text{Spec } \mathbb{Z}} A^{(0, p)} \simeq 1$.

L'image de la couronne inductive Γ_{I_1, I_2} par le foncteur $A^{(\quad)}$ est la couronne projective :



Elle induit une application $u : \prod_{J \in S(I_1, I_2)} A^{(2, J)} \longrightarrow A^{(1, I_1)} \times A^{(1, I_2)}$
 définie par $u(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Il est immédiat que u est bijective.

L'image de la couronne inductive Γ_{I_1, I_2, I_3} par le foncteur $A^{(\)}$ est la couronne projective :



Elle induit une application $v : \prod_{K \in S(I_1, I_2, I_3)} A^{(3, K)} \longrightarrow A^{(1, I_1)} \times A^{(1, I_2)} \times A^{(1, I_3)}$
 définie par $v(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$. Il est immédiat que v est bijective.

d) Si A, A' sont deux domaines d'intégrité, un morphisme $f : A \rightarrow A'$ détermine une transformation naturelle $A^f : A^{(\)} \rightarrow A'^{(\)}$
 par : $A_{(n, I)}^f(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$.

e) Soit $F : \mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$ un foncteur localement Γ -continu.
 Nous allons montrer que F détermine un domaine d'intégrité A . Etudions d'abord le foncteur F . Soit $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$. On note encore $(g_1, \dots, g_n) : \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m] \rightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ l'homomorphisme d'anneaux unitaires associé. Soit $J \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$. On note I l'idéal premier $(g_1, \dots, g_n)^{-1}(J)$ de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ et $\langle g_1, \dots, g_n \rangle : \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]/I \rightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]/J$ l'homomorphisme quotient de (g_1, \dots, g_n) . On note

$$F\langle g_1, \dots, g_n \rangle : \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} F(m, J) \longrightarrow \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} F(n, I)$$

$$J \in \text{Spec } \mathbb{Z}[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m] \qquad I \in \text{Spec } \mathbb{Z}[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n]$$

l'application définie par les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} F(m, J) & \xrightarrow{F\langle g_1, \dots, g_n \rangle} & F(n, I) \\ \downarrow \iota_J & & \downarrow \iota_I \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} F(m, J) & \xrightarrow{F\langle g_1, \dots, g_n \rangle} & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} F(n, I) \\ J \in \text{Spec } \mathbb{Z}[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m] & & I \in \text{Spec } \mathbb{Z}[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n] \end{array}$$

où ι_J, ι_I désignent les inductions canoniques.

Soit $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p]$. Si $K \in \text{Spec } \mathbb{Z}[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_p]$, on note $J = (h_1, \dots, h_m)^{-1}(K)$ et $I = (g_1, \dots, g_n)^{-1}(J)$. Les morphismes $\langle g_1, \dots, g_n \rangle : (n, I) \rightarrow (m, J)$ et $\langle h_1, \dots, h_m \rangle : (m, J) \rightarrow (p, K)$ ont alors pour composé le morphisme $\langle g_1(h_1, \dots, h_m), \dots, g_n(h_1, \dots, h_m) \rangle : (n, I) \rightarrow (p, K)$. On en déduit la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & F(m, J) & & \\ & \nearrow F\langle h_1, \dots, h_m \rangle & \downarrow & \searrow F\langle g_1, \dots, g_n \rangle & \\ F(p, K) & \xrightarrow{F\langle g_1(h_1, \dots, h_m), \dots, g_n(h_1, \dots, h_m) \rangle} & & & F(n, I) \\ & & \downarrow \iota_J & & \downarrow \iota_I \\ \downarrow \iota_K & & \coprod_J F(m, J) & & \downarrow \iota_I \\ \downarrow \iota_K & \nearrow F\langle h_1, \dots, h_m \rangle & \searrow F\langle g_1, \dots, g_n \rangle & & \downarrow \iota_I \\ \coprod_K F(p, K) & \xrightarrow{F\langle g_1(h_1, \dots, h_m), \dots, g_n(h_1, \dots, h_m) \rangle} & & & \coprod_I F(n, I) \\ & & & & \downarrow \iota_I \\ & & & & I \end{array}$$

où $\iota_K, \iota_J, \iota_I$ désignent les inductions canoniques. Cela étant vrai pour tout $K \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_p]$, on en déduit que l'on a :

$$F\langle g_1(h_1, \dots, h_m), \dots, g_n(h_1, \dots, h_m) \rangle = F\langle g_1, \dots, g_n \rangle \cdot F\langle h_1, \dots, h_m \rangle .$$

f) Posons $A = \coprod_{I \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X_1]} F(1, I) .$

L'image de la couronne inductive Γ_{I_1, I_2} par le foncteur F est la couronne projective

$$\begin{array}{ccc}
 & F(\langle X_1 \rangle) & \\
 F(1, I_1) & \xleftarrow{\quad} & F(2, J) \\
 & \swarrow F(\langle X_2 \rangle) & \searrow \\
 & & \\
 F(1, I_2) & \xleftarrow{\quad} & .
 \end{array}$$

où J varie dans $S(I_1, I_2)$. Elle induit une bijection

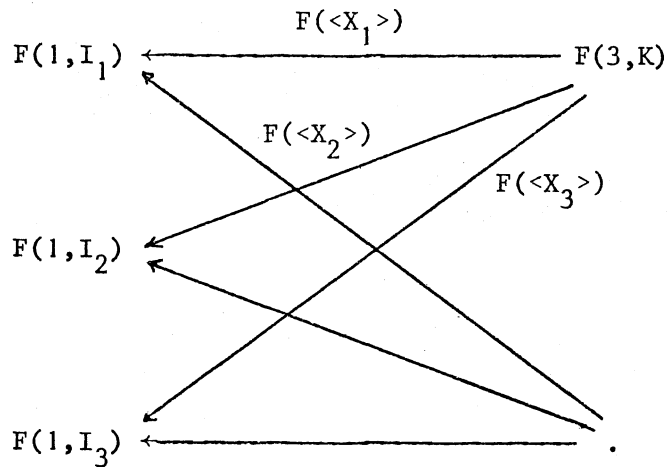
$$\coprod_{J \in S(I_1, I_2)} F(2, J) \xrightarrow{\sim} F(1, I_1) \times F(1, I_2) .$$

On a , par suite, une bijection :

$$\begin{aligned}
 A \times A &\simeq \coprod_{I_1} F(1, I_1) \times \coprod_{I_2} F(1, I_2) \simeq \coprod_{I_1, I_2} F(1, I_1) \times F(1, I_2) \simeq \coprod_{I_1, I_2} \coprod_{J \in S(I_1, I_2)} F(2, J) \\
 &\simeq \coprod_J F(2, J) .
 \end{aligned}$$

On identifiera les deux ensembles $A \times A$ et $\coprod_J F(2, J)$ par cette bijection.

L'image de la couronne inductive Γ_{I_1, I_2, I_3} par le foncteur F est la couronne projective



Elle induit une bijection : $\coprod_{K \in S(I_1, I_2, I_3)} F(3, K) \xrightarrow{\sim} F(1, I_1) \times F(1, I_2) \times F(1, I_3)$.

On a, par suite, une bijection :

$$A \times A \times A \approx \coprod_{I_1} F(1, I_1) \times \coprod_{I_2} F(1, I_2) \times \coprod_{I_3} F(1, I_3) \approx \coprod_{I_1, I_2, I_3} F(1, I_1) \times F(1, I_2) \times F(1, I_3)$$

$$\approx \coprod_{I_1, I_2, I_3} \coprod_{K \in S(I_1, I_2, I_3)} F(3, K) \approx \coprod_K F(3, K)$$

On identifiera les deux ensembles $A \times A \times A$ et $\coprod_K F(3, K)$ par cette bijection.

g) La structure d'anneau de A est définie de la façon suivante :

1) l'addition $+$: $A \times A \rightarrow A$ est l'application

$$F\langle X_1 + X_2 \rangle : \coprod_J F(2, J) \longrightarrow \coprod_I F(1, I)$$

2) l'élément nul 0 : $1 \rightarrow A$ est l'application

$$F\langle 0 \rangle : \coprod_p F(0, p) \longrightarrow \coprod_I F(1, I)$$

3) le produit \cdot : $A \times A \rightarrow A$ est l'application

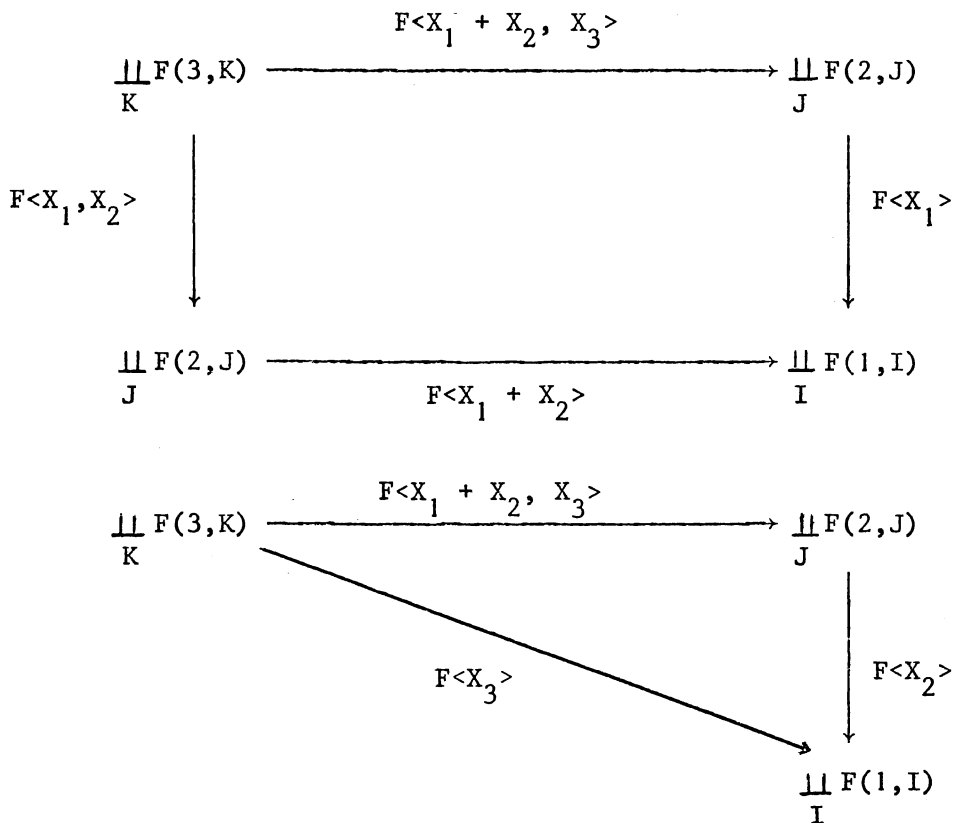
$$F\langle X_1 X_2 \rangle : \coprod_J F(2, J) \longrightarrow \coprod_I F(1, I)$$

4) l'élément unité 1 : $1 \rightarrow A$ est l'application

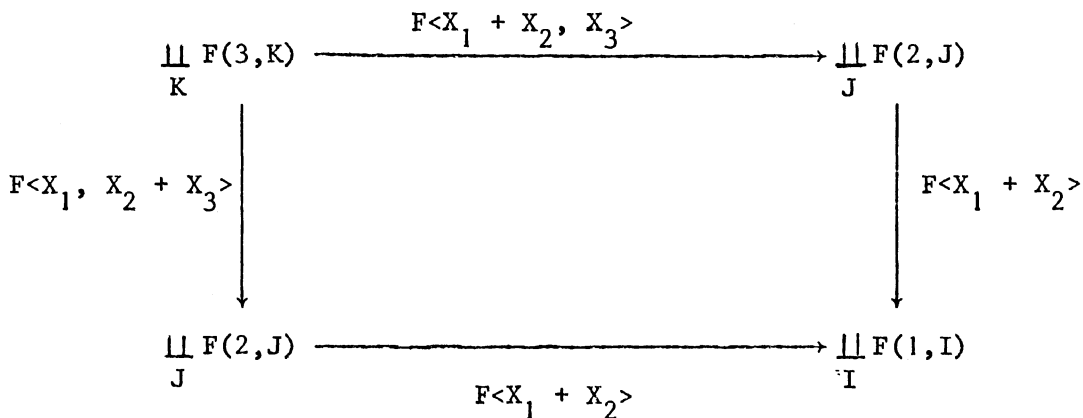
$$F\langle 1 \rangle : \coprod_p F(0, p) \longrightarrow \coprod_I F(1, I)$$

Notons que les projections canoniques $p_1, p_2 : A \times A \rightarrow A$ sont les applications $F\langle X_1 \rangle, F\langle X_2 \rangle : \coprod_J F(2, J) \rightarrow \coprod_I F(1, I)$ et que les projections canoniques $p_1, p_2, p_3 : A \times A \times A \rightarrow A$ sont les applications :

$F\langle X_1 \rangle, F\langle X_2 \rangle, F\langle X_3 \rangle : \coprod_K F(3, K) \rightarrow \coprod_I F(1, I)$. Démontrons, par exemple, l'associativité de l'addition. Les deux diagrammes commutatifs



montrent que l'application $(+) \times 1_A : A \times A \times A \rightarrow A \times A$ est l'application $F\langle X_1 + X_2, X_3 \rangle$. Le diagramme commutatif



montre alors la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A \times A \times A & \xrightarrow{(+)\times 1_A} & A \times A \\
 \downarrow 1_A \times (+) & & \downarrow + \\
 A \times A & \xrightarrow{+} & A
 \end{array}$$

ce qui implique l'associativité de l'addition.

Montrons que l'anneau A est non trivial. Soit p_0 l'unique élément de $\text{Spec } \mathbb{Z}$ tel que $F(0, p_0) = 1$. L'image réciproque de p_0 par l'homomorphisme $0 : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}$ est $I_0 = \{f \in \mathbb{Z}[X] : f(0) \in p_0\}$ et son image réciproque par l'homomorphisme $1 : \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{Z}$ est $I_1 = \{f \in \mathbb{Z}[X] : f(1) \in p_0\}$. On a : $0 \in F(1, I_0)$ et $1 \in F(1, I_1)$. Puisque : $I_0 \neq I_1$, on a : $0 \neq 1$.

Montrons que l'anneau A est intègre. Soit $(x, y) \in A^2$ vérifiant : $xy = 0$. Soit J_0 l'unique élément de $\mathbb{Z}[X_1, X_2]$ tel que $(x, y) \in F(2, J_0)$. L'image réciproque de J_0 par l'homomorphisme $(X_1, X_2) : \mathbb{Z}[X_1] \rightarrow \mathbb{Z}[X_1, X_2]$ est I_0 . Par suite, on a : $\forall f \in \mathbb{Z}[X_1], f(X_1, X_2) \in J_0 \iff f \in I_0$. Or $f = X_1$ appartient à I_0 , donc $X_1 X_2 \in J_0$. Puisque J_0 est un idéal premier, on a : $X_1 \in J_0$ ou $X_2 \in J_0$. Si $X_1 \in J_0$, par exemple, les deux morphismes $\langle X_1 \rangle, \langle 0 \rangle : (1, I_0) \rightrightarrows (2, J_0)$ sont égaux et on a donc : $x = F(\langle X_1 \rangle)(x, y) = F(\langle 0 \rangle)(x, y) = 0$.

h) Si $F, F' : \mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$ sont deux foncteurs localement Γ -continus, une transformation naturelle $t : F \rightarrow F'$ détermine une application

$$f = \coprod_I t_{(1, I)} : A = \coprod_I F(1, I) \rightarrow A' = \coprod_I F'(1, I).$$

On montre sans difficulté que f est un homomorphisme d'anneaux unitaires. Montrons que f est injective. Soit $x \in A$ vérifiant $f(x) = 0$.

L'élément $f(x)$ appartient à $F(1, I_0)$ où I_0 est l'idéal défini ci-dessus; par suite, l'élément x appartient à $F(1, I_0)$. Puisque $X_1 \in I_0$, on en déduit : $x = 0$.

i) On montre facilement que les correspondances ci-dessus établissent une équivalence entre la catégorie \mathcal{C}, Γ et la catégorie des domaines d'intégrité.

9.3. - La catégorie des anneaux locaux commutatifs.

a) La catégorie \mathcal{C} a pour objets les couples (n, I) formés d'un entier $n \in [0, 3]$ et d'un idéal premier I de $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$. Les morphismes : $(n, I) \rightarrow (m, J)$ sont les homomorphismes locaux d'anneaux locaux : $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]_I \rightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]_J$ où $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]_I, \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]_J$ sont les anneaux localisés des anneaux $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n], \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$, et où un morphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ est dit local s'il vérifie : $\forall x \in A, f(x)$ inversible $\implies x$ inversible. Soient (n, I) un objet de \mathcal{C} et A un anneau local, les homomorphismes locaux : $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]_I \rightarrow A$ sont tous de la forme : $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, où x_1, \dots, x_n sont des éléments de A vérifiant : $\forall p \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] (p \in I \iff p(x_1, \dots, x_n) \text{ non inversible})$ et où $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ désigne l'homomorphisme déterminé par l'homomorphisme $(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow A$. La composition des morphismes de \mathcal{C} est la composition des homomorphismes d'anneaux. On munit la catégorie \mathcal{C} de l'ensemble de couronnes inductives :

$$\Gamma = \{\Gamma_0\} \cup \{\Gamma_{I_1, I_2} \mid I_1, I_2 \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X]\} \cup \{\Gamma_{I_1, I_2, I_3} \mid I_1, I_2, I_3 \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X]\}$$

où les couronnes $\Gamma_0, \Gamma_{I_1, I_2}, \Gamma_{I_1, I_2, I_3}$ sont définies de la même façon qu'au 9.2 mais où les morphismes $\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \langle X_3 \rangle$ sont ceux définis ci-dessus.

b) Montrons qu'un anneau local A détermine un foncteur $A^{(\)} : \mathcal{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$. Posons $A^{(n, I)} = \{(x_1, \dots, x_n) : \in A^n \mid \forall f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n], f \in I \iff f(x_1, \dots, x_n) \text{ non inversible}\}$. Pour un morphisme

$\langle r_1, \dots, r_n \rangle : (n, I) \rightarrow (m, J)$, on définit $A^{\langle r_1, \dots, r_n \rangle} : A^{(m, J)} \rightarrow A^{(n, I)}$
 par $A^{\langle r_1, \dots, r_n \rangle}(x_1, \dots, x_m) = (r_1(x_1, \dots, x_m), \dots, r_n(x_1, \dots, x_m))$.

L'image de la couronne inductive Γ_0 par le foncteur $A^{(\)}$ est la famille $(A^{(0, p)})_{p \in \text{Spec } \mathbb{Z}}$. Or si $p_0 = \{n \in \mathbb{Z} : n.1 \text{ est non inversible dans } A\}$, on a $A^{(0, p_0)} = 1$ et $A^{(0, p)} = \emptyset$ si $p \neq p_0$. On a, par suite, $\coprod_p A^{(0, p)} = 1$.

De façon analogue à celle du 9.2, on montre que $A^{(\)}$ est un foncteur localement Γ -continu.

c) Si A, A' sont deux anneaux locaux, un homomorphisme local $f : A \rightarrow A'$ détermine une transformation naturelle $A^f : A^{(\)} \rightarrow A'^{(\)}$ définie par $A^f_{(n, I)}(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$.

d) Montrons qu'un foncteur localement Γ -continu $F : \mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$ détermine un anneau local A . Soit $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$. On note $(g_1, \dots, g_n) : \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m] \rightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ l'homomorphisme d'anneaux unitaires déterminé par g_1, \dots, g_n . Si $J \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$, on note I l'élément $(g_1, \dots, g_n)^{-1}(J)$ de $\text{Spec } \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ et $\langle g_1, \dots, g_n \rangle : \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]_I \rightarrow \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]_J$ l'homomorphisme localisé de l'homomorphisme (g_1, \dots, g_n) . On note $F\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ l'application définie par les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 F(m, J) & \xrightarrow{F\langle g_1, \dots, g_n \rangle} & F(n, I) \\
 \downarrow \iota_J & & \downarrow \iota_I \\
 \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} & \xrightarrow{F\langle g_1, \dots, g_n \rangle} & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 J \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m] & & I \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]
 \end{array}$$

où ι_I, ι_J désignent les inductions canoniques.

On définit alors une structure d'anneau sur $A = \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} F(1, I)$
 $\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---}$
 $I \in \text{Spec } \mathbb{Z}[X_1]$
 une structure d'anneau d'une façon tout à fait analogue à celle de 9.2.

Pour montrer que l'anneau A est local, nous allons d'abord montrer que l'on a :

$$F(1, I) = \{x \in A : \forall f \in \mathbb{Z}[X_1], f(x) \text{ non inversible} \iff f \in I\}.$$

Soit p_0 l'élément de $\text{Spec } \mathbb{Z}$ tel que : $F(1, p_0) = 1$ et I_0 l'image réciproque de p_0 par l'homomorphisme : $(1) : \mathbb{Z}[X_1] \rightarrow \mathbb{Z}$. L'élément 1 de A appartient à $F(1, I_0)$. Notons que $X_1 \notin I_0$ puisque $1 \notin p_0$. Soient x un élément de A , I l'élément de $\text{Spec } \mathbb{Z}[X_1]$ tel que $x \in F(1, I)$ et f un élément de I . Soient y un élément de A et J l'élément de $\text{Spec } \mathbb{Z}[X_1, X_2]$ tel que $(y, f(x)) \in F(2, J)$. On considère les homomorphismes $(X_1) : \mathbb{Z}[X_1] \rightarrow \mathbb{Z}[X_1, X_2]$, $(X_1 X_2) : \mathbb{Z}[X_1] \rightarrow \mathbb{Z}[X_1, X_2]$ et $(f) : \mathbb{Z}[X_1] \rightarrow \mathbb{Z}[X_1]$. On pose $I_1 = (X_1)^{-1}(J)$, $I_2 = (X_1 X_2)^{-1}(J)$. On a $y.f(x) \in F(2, I_2)$ et $f(x) \in F(1, I_1)$. Par suite, on a : $f^{-1}(I) = I_1$. On obtient ainsi le diagramme suivant de \mathcal{C} .

$$\begin{array}{ccc} (1, I) & \xleftarrow{\langle f \rangle} & (1, I_1) \\ & & \downarrow \langle X_1 \rangle \\ & & (2, J) \xleftarrow{\langle X_1 X_2 \rangle} (1, I_2) \end{array}$$

Puisque $f \in I$, on a : $X_1 \in I_1$. Par suite, on a $X_1 \in J$ donc aussi $X_1 X_2 \in J$. On en déduit : $X_1 \in I_2$. Ce qui prouve que I_2 est distinct de I_0 . L'élément $y.f(x) = F(\langle X_1 X_2 \rangle)(y, f(x))$ ne peut donc être 1 et l'élément $f(x)$ n'est pas inversible. Considérons maintenant un élément g de $\text{Spec } \mathbb{Z}[X_1]$ qui n'appartient pas I . On considère, ici, les homomorphismes $(\emptyset) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[X_1]$, $(g, 1/g) : \mathbb{Z}[X_1, X_2] \rightarrow \mathbb{Z}[X_1]_I$ et on pose $J = (g, 1/g)^{-1}(I)$ et $I_2 = (X_1 X_2)^{-1}(J)$. On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant de \mathcal{C} .

$$\begin{array}{ccc}
 (1, I_2) & \xrightarrow{\langle 1 \rangle} & (0, p_0) \\
 \downarrow \langle X_1 \ X_2 \rangle & & \downarrow \langle \emptyset \rangle \\
 (2, J) & \xrightarrow{\langle g, 1/g \rangle} & (1, I)
 \end{array}$$

On a alors $g(x) \cdot F(\langle 1/g \rangle)(x) = F(\langle X_1 \ X_2 \rangle)(g(x), F(\langle 1/g \rangle)(x)) = F(\langle X_1 \ X_2 \rangle)(F(\langle g \rangle)(x), F(\langle 1/g \rangle)(x)) = F(\langle g, 1/g \rangle \langle X_1 \ X_2 \rangle)(x) = F(\langle \emptyset \rangle \langle 1 \rangle)(x) = 1$. Ce qui prouve que $g(x)$ est inversible dans A .

e) Si $F, F' : \mathcal{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$ sont deux foncteurs localement Γ -continus, une transformation naturelle $t : F \rightarrow F'$ définit une application : $u = \coprod_I t_{(1, I)} : A = \coprod_I F(1, I) \longrightarrow A' = \coprod_I F'(1, I)$. On montre facilement que u est un homomorphisme d'anneaux unitaires. Il est local car si x est un élément de A appartenant à $F(1, I)$, $u(x)$ est un élément de A' appartenant à $F'(1, I)$ et par suite, si x est non inversible, x appartient à I , donc $u(x)$ est non inversible.

f) On montre facilement que les correspondances ci-dessus établissent une équivalence entre la catégorie \mathcal{C}, Γ et la catégorie des anneaux locaux commutatifs.

10 - LE CAS PARTICULIER DES CATEGORIES LOCALEMENT PRESENTABLES.

10.0. - Propriétés universelles locales dans les catégories à objet final.

Lemme 10.0.0. - Dans une catégorie à objet final,

- (1) toute famille initiale d'objets est réduite à un objet initial,
- (2) toute limite inductive locale est une limite inductive .

Démonstration.- La catégorie est connexe. Par suite, on a (1) (prop. 2.0.2.). La catégorie des cônes inductifs ayant une base donnée possède un objet final , par suite, toute limite inductive locale est réduite à une limite inductive.

Lemme 10.0.1. - Si \mathbb{A} est une catégorie à objet final et si $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ est un foncteur préservant l'objet final,

(1) U est localement pleinement fidèle si et seulement si U est pleinement fidèle.

(2) U est localement représentable si et seulement si U est représentable ($\mathbb{B} = \text{Ens}$).

(3) U est localisant si et seulement si U admet un adjoint à gauche.

Démonstration.

(1) La condition suffisante est immédiate. Supposons U localement pleinement fidèle. Si X, Y sont deux objets de \mathbb{A} , on note x, y les morphismes $x : X \rightarrow 1$, $y : Y \rightarrow 1$. Si $g : UX \rightarrow UY$ est un morphisme de \mathbb{B} , on a $Uy.g = Ux$; il existe donc un unique morphisme $f : X \rightarrow Y$ vérifiant $y.f = x$, et $Uf = g$ c'est-à-dire vérifiant $Uf = g$.

(2) La catégorie \mathbb{R}_U de représentation de U possède un objet final. Elle possède donc un objet initial si et seulement si elle possède une famille initiale d'objets (lemme 10.0.0).

(3) Si U est localisant, pour tout objet B de \mathbb{B} , le foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{B}}(B, U) : \mathbb{A} \rightarrow \text{Ens}$ préserve l'objet final et est localement représentable. Il est par suite représentable, ce qui implique que U admet un adjoint à gauche.

10.1. - Catégories localement présentables.

Lemme 10.1.0. - Une catégorie est localement α -présentable si et seulement si elle est α -localisable et à objet final.

Démonstration.- Une catégorie localement α -présentable est complète [7] et possède donc un objet final. Réciproquement, une catégorie α -localisable est localement cocomplète, par suite du lemme 10.0.0., elle est α cocomplète si elle possède un objet final ; elle est alors localement α -présentable.

Nous allons montrer que les résultats essentiels de Gabriel-Ulmer [7] sur les catégories localement présentables se déduisent immédiatement des résultats sur les catégories localisables. Soit \mathbb{A} une catégorie localement α -présentable. Le théorème 6.7 implique que la sous-catégorie pleine \mathbb{A}_{α} de \mathbb{A} dont les objets sont les objets α -présentables, est la clôture par limites inductives α -petites d'un ensemble générateur propre formé d'objets α -présentables et le théorème 7.1. que la catégorie \mathbb{A} est équivalente à la catégorie $\widetilde{\mathbb{A}}_{\alpha}$ des foncteurs α -continus : $\mathbb{A}_{\alpha}^{\circ} \rightarrow \text{Ens}$. La proposition 7.2.0. montre que \mathbb{A} est complète et cocomplète. Soit \sum un ensemble de morphismes de \mathbb{A} de sources et buts α -présentables. En considérant les morphismes de \sum comme des couronnes inductives dégénérées, le théorème 8.6.0.

implique que \mathbb{A}_Σ est une sous-catégorie localisante de \mathbb{A} . Mais, puisque \mathbb{A}_Σ contient l'objet final de \mathbb{A} , on en déduit que \mathbb{A}_Σ est une sous-catégorie réflexive de \mathbb{A} et qu'elle est localement α -présentable. Si \mathbb{C} est une petite catégorie munie d'un ensemble Σ de cônes inductifs α -petits, le théorème 8.9. montre que la catégorie $\tilde{\mathbb{C}}$ des foncteurs Σ -continus : $\mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}$ est localement α -présentable.

11 - TOPOS CLASSIFIANT POUR UNE CATEGORIE \mathcal{X}_0 -LOCALISABLE.

11.0. - Préfaisceaux plats.

On considère une petite catégorie \mathcal{C} et un topos de Grothendieck \mathbb{E} . Un préfaisceau défini sur \mathcal{C} à valeur dans \mathbb{E} est un foncteur $F : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathbb{E}$. Nous allons rappeler quelques notions sur les préfaisceaux internes à un topos [22].

Notons $\gamma : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}ns$ l'unique morphisme géométrique de topos et $\underline{\mathcal{C}}$ la catégorie interne à \mathbb{E} image réciproque par γ de la catégorie \mathcal{C} interne à $\mathbb{E}ns$. La catégorie $\mathbb{E}^{\mathcal{C}^0}$ des préfaisceaux sur \mathcal{C} à valeur dans \mathbb{E} est équivalente à la catégorie $\mathbb{E}^{\underline{\mathcal{C}}}$ des préfaisceaux internes sur $\underline{\mathcal{C}}$, la catégorie de représentation \underline{F} du préfaisceau $F : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathbb{E}$ étant définie de la façon suivante :

$$(1) \quad F_0 = \coprod_{X \in \text{Ob } \mathcal{C}} FX, \quad F_1 = \coprod_{\{(X,f) : X \in \text{Ob } \mathcal{C} \text{ et } f : \cdot \rightarrow X\}} FX$$

(2) $d_0, d_1 : F_1 \longrightarrow F_0$ sont déterminés par $d_0 \cdot \iota_{X,f} = \iota_Y \cdot Ff$ et $d_1 \cdot \iota_{X,f} = \iota_X$ pour $f : X \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} , (ι désigne une induction canonique).

(3) $i : F_0 \rightarrow F_1$ est déterminé par $i \cdot \iota_X = \iota_{X, \text{id}_X}$.

$$(4) \quad m : F_1 \times_{F_0} F_1 \simeq \coprod_{\{(X,Y,f,g) : X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}, f : Y \rightarrow X, g : \cdot \rightarrow Y\}} FX \longrightarrow F_1$$

est déterminé par $m \cdot \iota_{X,Y,f,g} = \iota_{X,fg}$.

Le préfaisceau $F : \mathcal{C}^0 \rightarrow \mathbb{E}$ est plat si sa catégorie de représentation \underline{F} est filtrante, ce qui équivaut à la satisfaction des trois conditions suivantes :

(i) le morphisme $\coprod_{X \in \text{Ob } \mathcal{C}} FX \rightarrow 1$ est épimorphique.

(ii) pour tout $X, Y \in \text{Ob } \mathbb{C}$, le morphisme

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \coprod & & \\ \downarrow & & \\ \{(Z, f, g) : f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow Z\} & \xrightarrow{\quad FZ \quad} & FX \times FY \end{array}$$

déterminé par $\alpha \cdot \iota_{Z, f, g} = (Ff, Fg)$, est épimorphique.

(iii) Pour tout couple de morphismes $f, g : X \rightrightarrows Y$ de \mathbb{C} , le morphisme

$$\gamma : \begin{array}{ccc} \coprod & & \\ \downarrow & & \\ \{(Z, h) : h : Y \rightarrow Z, hf = hg\} & \xrightarrow{\quad FZ \quad} & \text{Ker}(Ff, Fg) \end{array}$$

induit par le morphisme

$$\beta : \begin{array}{ccc} \coprod & & \\ \downarrow & & \\ \{(Z, h) : h : Y \rightarrow Z, hf = hg\} & \xrightarrow{\quad FZ \quad} & FY \end{array}$$

déterminé par $\beta \cdot \iota_{Z, h} = Fh$, est épi-

morphique.

11.1. - Préfaisceaux localement \mathcal{N}'_0 -continus à valeur dans un topos.

On suppose \mathbb{C} localement \mathcal{N}'_0 -cocomplète.

Définition 11.1.0. - Un préfaisceau $F : \mathbb{C}^0 \rightarrow \mathbb{E}$ est localement \mathcal{N}'_0 -continu si, pour toute limite inductive locale finie $(\gamma_{ji} : X_i \rightarrow Y_j)_{(i, j) \in I \times J}$, le morphisme $\langle (F\gamma_{ji}) \rangle : \prod_{j \in J} FY_j \rightarrow \lim_{i \in I} FX_i$ est un isomorphisme.

On note $[\mathbb{C}^0, \mathbb{E}]$ la sous-catégorie pleine de $\text{Ens}^{\mathbb{C}^0}$ ayant pour objets les foncteurs localement \mathcal{N}'_0 -continus.

Exemple 11.1.1. - Le préfaisceau canonique $h : \mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}^{\mathbb{C}}$ à valeur dans le topos $\text{Ens}^{\mathbb{C}}$ est localement \mathcal{N}'_0 -continu.

Proposition 11.1.2. - Sur une petite catégorie localement \mathcal{N}'_0 -cocomplète \mathbb{C} , un préfaisceau $F : \mathbb{C}^0 \rightarrow \mathbb{E}$ à valeur dans un topos est localement \mathcal{N}'_0 -continu si et seulement si il est plat.

Démonstration :

a) Soit $F : \mathbb{C}^0 \rightarrow \mathbb{E}$ localement \mathcal{N}'_0 -continu. La catégorie \mathbb{C} possède

une famille initiale $(X_i)_{i \in I}$ i.e. une limite inductive locale de la famille vide d'objets de \mathbb{C} . On a alors $\coprod_{i \in I} FX_i = 1$ et par suite le morphisme $\coprod_{X \in \text{Ob } \mathbb{C}} FX \rightarrow 1$ est épimorphique. Si X, Y sont deux objets de \mathbb{C} et

$(\gamma_{j_0} : X \rightarrow Y_j, \gamma_{j_1} : Y \rightarrow Y_j)_{j \in J}$ est une somme locale de X et Y , le morphisme

$\langle F\gamma_{j_0}, F\gamma_{j_1} \rangle : \coprod_{j \in J} FY_j \rightarrow FX \times FY$ est un isomorphisme et par suite le morphisme

$\alpha : \coprod_{\{(Z, f, g) : f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow Z\}} FZ \longrightarrow FX \times FY$, défini au 11.0. (ii) est épimor-

phique. Si $f, g : X \rightrightarrows Y$ sont deux morphismes de \mathbb{C} et $(\delta_k : Y \rightarrow Z_k)_{k \in K}$ est un conoyau local de (f, g) , le morphisme

$\langle F\delta_k \rangle : \coprod_{k \in K} FZ_k \rightarrow \ker(Ff, Fg)$ est un isomorphisme et par suite le morphisme

$\gamma : \coprod_{\{(Z, h) : h : Y \rightarrow Z, hf = hg\}} FZ \longrightarrow \text{Ker}(Ff, Fg)$ défini au 11.0. (iii) est épi-

morphique. Cela prouve que le préfaisceau $F : \mathbb{C}^0 \rightarrow \mathbb{E}$ est plat.

b) Supposons $F : \mathbb{C}^0 \rightarrow \mathbb{E}$ plat. L'extension de Kan $- \otimes F : \text{Ens}^{\mathbb{C}^0} \rightarrow \mathbb{E}$ de F par $h : \mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}^{\mathbb{C}}$ existe et préserve les limites inductives et les limites projectives finies [22]. Le préfaisceau h étant localement \mathcal{N}'_0 -continu, il en est de même du préfaisceau $(- \otimes F)h : \mathbb{C}^0 \rightarrow \mathbb{E}$. Or ce dernier est isomorphe à F .

Théorème 11.1.3. - Pour toute petite catégorie localement \mathcal{N}'_0 -cocomplète \mathbb{C} et tout topos \mathbb{E} , le foncteur qui, à un morphisme géométrique $f : \mathbb{E} \rightarrow \text{Ens}^{\mathbb{C}}$ associe le préfaisceau $f^*h : \mathbb{C}^0 \rightarrow \mathbb{E}$ image réciproque par f du préfaisceau $h : \mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}^{\mathbb{C}}$, induit une équivalence entre les catégories $\text{Top}(\mathbb{E}, \text{Ens}^{\mathbb{C}})^0$ et $[\mathbb{C}^0, \mathbb{E}]$.

Le topos $\text{Ens}^{\mathbb{C}}$ est donc classifiant pour les préfaisceaux localement \mathcal{N}'_0 -continus et le préfaisceau $h : \mathbb{C}^0 \rightarrow \text{Ens}^{\mathbb{C}}$ est le préfaisceau localement \mathcal{N}'_0 -continu générique.

Démonstration : C'est une conséquence de la proposition 11.1.2. et du théorème 4.8. de [22].

Corollaire 11.1.4. - Pour toute petite catégorie localement \mathcal{K}_0 -cocomplète \mathbb{C} , la catégorie $\tilde{\mathbb{C}}$ des préfaisceaux localement \mathcal{K}_0 -continus sur \mathbb{C} est équivalente à la catégorie $\text{Fib}(\text{Ens}^{\mathbb{C}})$ des fibres du topos $\text{Ens}^{\mathbb{C}}$.

Démonstration : On a $\text{Fib}(\text{Ens}^{\mathbb{C}}) \simeq \text{Top}(\text{Ens}, \text{Ens}^{\mathbb{C}})^{\circ}$.

Corollaire 11.1.5. - Une catégorie \mathcal{K}_0 localisable \mathbb{A} est équivalente à la catégorie $\text{Fib}(\text{Ens}^{\mathbb{A}_0})$ des fibres du topos $\text{Ens}^{\mathbb{A}_0}$ où \mathbb{A}_0 est la catégorie des objets \mathcal{K}_0 -présentables de \mathbb{A} .

Démonstration : C'est une conséquence du théorème 7.1.

BIBLIOGRAPHIE

=====

- [1] R. BORGER, W. THOLEN - *Abschwächungen des Adjunktionsbegriffs*,
Manuscripta math. 19, pp. 19-45 (1976).
- [2] COSTE M. - *Une approche logique des théories définissables
par limites projectives finies*,
Publication du Séminaire de Théories des Catégories,
dirigé par Jean Bénabou (1976).
- [3] COSTE M., COSTE M.F. - *Théories cohérentes et topos cohérents*,
publication du Séminaire de Théories des Catégories,
dirigé par Jean Bénabou (1975).
- [4] COLE J.C. - *The Bicategory of Topoi and Spectra*,
Preprint distribué au congrès sur la Théorie des
Catégories, The Isle of Thorns, Sussex, England
(1976).
- [5] DIERS Y. - *Type de densité d'une sous-catégorie pleine*,
Annales de la Société Scientifique de Bruxelles,
T,90,I, pp. 25-47 (1976).
- [6] FREYD P., G.M. KELLY - *Categories of continuous functors I*,
Journal of Pure and Applied Algebra 2, pp. 169-191
(1972).
- [7] GABRIEL P., ULMER F. - *Lokal Präsentierbare Kategorien*,
Lecture Notes in Mathematics 221, Springer-Verlag,
(1971).
- [8] GABRIEL F., ZISMAN M. - *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*,
Ergebnisse der Mathematik, Vol. 35, Springer (1967).

- [9] GROTHENDIECK A. - Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie, SGA 4, Lecture Notes in Mathematics 269 (1972).
- [10] KAPUT J.J. - *Locally adjunctionable functors*, Illinois Journal of Mathematics, 16, pp. 86-94 (1972).
- [11] LAWVERE F.W. - *Functorial semantics of algebraic theories*, Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A. 50, pp. 869-873 (1963).
- [12] LINTON F.E.J. - *Some aspects of equational categories*, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, pp. 84-95, Springer (1966).
- [13] MAC LANE S. - *Categories for the working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, (1971).
- [14] POPESCU D. - *Les faisceaux d'une théorie*, Note au Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris, série A, t. 269 (1969).
- [15] POPESCU N. - *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academic Press (1973).
- [16] REYES G.E. - *Sheaves and Concepts, A Model-Theoretic Interpretation of Grothendieck Topoï*, Preprint Series 1975/76 n° 2, Matematisk Institut, Aarhus Universitet (1975).
- [17] SCHUBERT H. - *Catégories*, Springer-Verlag (1972).

- [18] TIERNEY M. - *On the spectrum of a ringed topos*,
Preprint distribué au Congrès Kategorien,
Mathematisches Forschungsinstitut, Oberwolfach
(1975).
- [19] ULMER F. - *Locally α -presentable and locally α -generated
categories*,
Lecture Notes in Mathematics 195, pp. 230-247,
Springer-Verlag (1971).
- [20] ULMER F. - *Locally presentable categories II*,
Kategorien seminar, Fachbereich Mathematik,
Fernuniversität Nr 1 (1976).
- [21] WYLER O. - *Operational Categories*,
Proceedings of the Conference on Categorical
Algebra, La Jolla, pp. 295-316, Springer (1966).
- [22] JOHNSTONE P.T. - *Some aspects of internal category theory in an
elementary topos*,
Thesis - University of Cambridge.
- [23] COSTE M.F. - *Localisations dans les catégories de modèles*,
thèse.

TABLE DES MATIERES

0 - INTRODUCTION.

1 - MISE EN EVIDENCE D'UNE CLASSE DE CATEGORIES.

- 1.0. - Notations.
- 1.1. - Une classe C de catégories.
- 1.2. - Passif de la classe C .
- 1.3. - Actif de la classe C .

2 - NOTIONS UNIVERSELLES LOCALES.

- 2.0. - Familles initiales d'objets - Objets localement initiaux.
- 2.1. - Foncteurs localement représentables.
- 2.2. - Foncteurs localisants.
- 2.3. - Localisations inductives et limites inductives locales.
- 2.4. - Foncteurs localement pleinement fidèles.

3 - UN THEOREME D'EXISTENCE DE LOCALISATIONS.

- 3.0. - Le théorème d'existence.
- 3.1. - Localisations non standards.
- 3.2. - Un cas particulier de localisation.

4 - INTERPRETATION DES PROPRIETES UNIVERSELLES LOCALES DANS LA CATEGORIE DES FAMILLES D'OBJETS.

- 4.0. - La catégorie $\mathbb{F}\mathbb{A}$ des familles d'objets de \mathbb{A} .
- 4.1. - Le foncteur extension $\bar{U} : \mathbb{F}\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ d'un foncteur $U : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$.

5 - CATEGORIES LOCALISABLES.

6 - OBJETS α -PRESENTABLES DANS LES CATEGORIES α -LOCALISABLES.

7 - STRUCTURE DES CATEGORIES LOCALISABLES.

- 7.0. - Foncteurs localement α -continus.
- 7.1. - Théorème de structure.
- 7.2. - Conséquences du théorème de structure.
- 7.3. - Théorème de dualité.

8 - CONSTRUCTION DE CATEGORIES LOCALISABLES.

- 8.0. - Les catégories localement présentables.
- 8.1. - Les sommes et produits de catégories localisables.
- 8.2. - Les catégories de foncteurs.
- 8.3. - Les sous-catégories localement pleines.
- 8.4. - Les catégories d'objets en-dessous d'un objet.
- 8.5. - Les catégories $\mathbb{A}^\#$.
- 8.6. - Les catégories d'objets Γ -locaux.
- 8.7. - Les catégories \mathbb{A}^X .
- 8.8. - Les catégories d'objets Γ -locaux stricts.
- 8.9. - Les catégories de foncteurs localement Γ -continus.
- 8.10. - Les catégories de modèles.

9 - QUELQUES EXEMPLES.

- 9.0. - La catégorie des ensembles totalement ordonnés.
- 9.1. - La catégorie des espaces métriques.
- 9.2. - La catégorie des domaines d'intégrité.
- 9.3. - La catégorie des anneaux locaux.

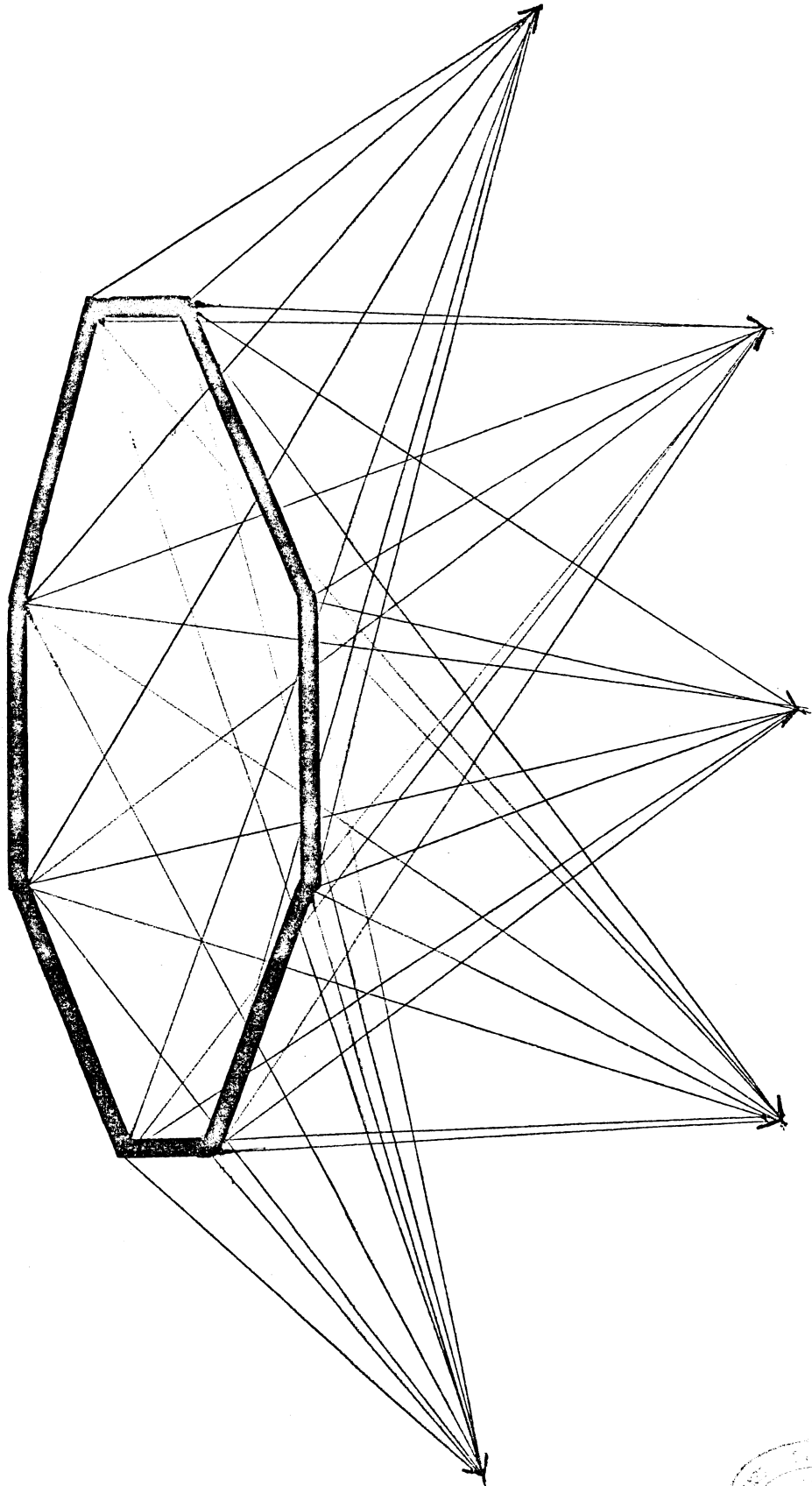
10 - LE CAS PARTICULIER DES CATEGORIES LOCALEMENT PRESENTABLES.

- 10.1. - Propriétés universelles locales dans les catégories à objet final.
- 10.2. - Catégories localement présentables.

11 - TOPOS CLASSIFIANT POUR UNE CATEGORIE \mathcal{K}_0 -LOCALISABLE.

- 11.0. - Préfaisceaux plats.
- 11.1. - Préfaisceaux localement \mathcal{K}_0 -continus à valeur dans un topos.

BIBLIOGRAPHIE.



COURONNE INDUCTIVE



