/50/

CATÉGORIES TOPOLOGIQUES ET CATÉGORIES DIFFÉRENTIABLES

PAR

Charles EHRESMANN (Paris)

Pour les définitions d'une catégorie, d'un groupoïde, d'un foncteur et d'une catégorie d'opérateurs, nous renvoyons à un article antérieur [1] dont nous utiliserons les notations.

REMARQUE PRÉLIMINAIRE :

La notion de structure de variété différentiable définie habituellement sur un *ensemble* peut être définie de la même manière sur une *classe* quelconque. Soit Λ^r le pseudo-groupe des automorphismes locaux de classe r de l'espace somme ΣR^n des espaces numériques R^n, n entier positif quelconque. Soit C une classe quelconque. Un atlas complet de ΣR^n compatible avec Λ^r définit une structure de variété différentiable de classe r. On définit de même la notion de structure de variété topologique ou de variété analytique sur C. Les variétés considérées ne sont pas nécessairement connexes ni séparées. Il convient de définir aussi la notion de structure topologique sur une classe quelconque C par la donnée d'une classe de sous-classes (appelées *ouverts*) vérifiant les mêmes axiomes que la famille des ouverts d'une topologie sur un ensemble. Dans les exemples que nous rencontrerons il existe une base d'ouverts formée par des ensembles.

LE GROUPOÏDE DES ÉLÉMENTS INVERSIBLES D'UNE CATÉGORIE DIFFÉRENTIABLE :

Définition 1. Une catégorie différentiable de classe r est une *catégorie Φ munie d'une structure de variété différentiable de classe r telle que les conditions suivantes soient vérifiées :*

1) *Les fonctions α et β qui associent à $f \in \Phi$ l'unité à droite $\alpha(f)$ et l'unité à gauche $\beta(f)$ sont différentiables de classe r et de rang localement constant.*

2) *La loi de composition $(g,f) \to gf$ est différentiable de classe r.*

De 1) il résulte que la classe Δ des unités de Φ est une sous-variété de classe r de Φ; c'est même une sous-variété propre; c'est-à-dire sa topologie est la topologie induite par Φ sur Δ. Les applications α et β définissent sur Φ deux structures de variétés feuilletées différentiables de classe r. Tout élément f_0 de Φ admet un voisinage ouvert U muni d'un système de coordonnées locales adapté au feuilletage correspondant à α de la forme $(x,y) \to f$, où $x = \alpha(f)$, $y \in U'$, $U' \subset R^n$, n étant la dimension des feuilles au voisinage de f. L'ensemble $\alpha(U)$ auquel appartient x est un voisinage ouvert de $\alpha(f_0)$ dans Δ, si le rang de α en f_0 est égal à la dimension de Δ; sinon $\alpha(U)$ est une sous-variété propre de Δ. Si $f_0 \in \Delta$, on pourra supposer que $U \cap \Delta$ est défini par $y = 0$. On a des systèmes de coordonnées locales analogues correspondant au feuilletage défini par β.

La classe des couples composables (g,f) est une sous-variété ϕ de classe r de $\Phi \times \Phi$. Un système de coordonnées locales admissible au voisinage d'un tel couple (g,f) dans ϕ est formé par (y',y,x), où (y,x) est un système de coordonnées locales de f et (y',x') un système de coordonnées locales de g, avec $x' = \beta(f)$. Le composé gf est représenté par (y'',x), où $y'' = \varphi(y', y, x)$, φ étant une fonction différentiable de classe r de (y',y,x); ceci est la signification de l'axiome 2).

Si f_0 est inversible, l'application $g \to gf_0$ est une application biunivoque différentiable de classe r de $\alpha^{-1}(x_0')$ sur $\alpha^{-1}(x_0)$ de déterminant jacobien différent de 0 en tout point, parce que $g \to (gf_0)f_0^{-1} = g(f_0 f_0^{-1}) = g$ est l'application identique de la feuille $\alpha^{-1}(x_0')$. A l'aide de coordonnées locales admissibles, f_0 est représenté par (y_0,x_0), f_0^{-1} par (y_0',x_0') et $f_0^{-1}f_0$ par $(0,x_0)$; c'est-à-dire $\varphi(y_0',y_0,x_0) = 0$. Le déterminant jacobien de φ par rapport à y' étant différent de 0, l'équation $\varphi(y',y,x) = 0$ détermine y' en fonction différentiable de classe r de (y,x) dans un voisinage U de f_0. Le couple (y',x'), où $x' = \beta(f)$, correspond à un élément f' tel que $f'f = \alpha(f)$. On montre de la même façon qu'à tout f appartenant à un voisinage U_1 de f_0 on peut faire correspondre un élément f'' voisin de f_0^{-1} tel que $ff'' = \beta(f)$. Si f appartient au voisinage $U \cap U_1$, on lui fait correspondre ainsi deux éléments f' et f'' tels que $f'f = \alpha(f)$ et $ff'' = \beta(f)$. Il en résulte : $(f'f)f'' = f'' = f'(ff'') = f'$. Par conséquent $f' = f'' = f^{-1}$. Ceci démontre le théorème suivant :

Théorème 1 : *La classe des éléments inversibles dans une catégorie différentiable Φ de classe r est un groupoïde Π ouvert dans Φ. L'application $f \to f^{-1}$ de Π sur Π est un isomorphisme de classe r de la variété différentiable Π.*

Une catégorie différentiable de classe r dont tous les éléments sont inversibles est appelée *groupoïde différentiable* de classe r. Pour un tel groupoïde l'application $f \to f^{-1}$ est un isomorphisme de sa structure différentiable de classe r.

On obtient un théorème analogue au théorème 1 pour certaines catégories topologiques, en posant la définition suivante :

Définition 2. *Une catégorie topologique est une catégorie Φ munie d'une structure topologique telle que les conditions suivantes soient vérifiées* :

1. *Les fonctions α et β sont continues.*
2. *La loi de composition $(g,f) \to gf$ est continue, sur la sous-classe de $\Phi \times \Phi$ formée par les couples (g,f) composables.*

Un groupoïde topologique est une catégorie topologique Φ dont tous les éléments sont inversibles et telle que l'application $f \to f^{-1}$ soit continue. (Ce qui entraîne qu'elle est un homéomorphisme de Φ sur Φ). *Une catégorie topologique Φ sera dite régulière si sa structure topologique est une structure de variété topologique et si au voisinage de chaque élément de Φ les feuilletages définis par α et β sont des structures de variétés feuilletées.*

Théorème 2 : *Si Φ est une catégorie topologique régulière, la classe des éléments inversibles de Φ est un groupoïde topologique régulier ouvert dans Φ.*

Dans une catégorie topologique régulière Φ, la classe des unités est une sous-variété propre. On peut utiliser, comme dans le cas des catégories différentiables, les systèmes de coordonnées locales adaptées aux feuilletages définis par α et β. Soit f_0 un élément inversible de Φ, représenté par (y_0, x_0) dans un système de coordonnées locales; f_0^{-1} sera représenté par (y_0', x_0') dans un autre système de coordonnées locales; $x_0' = \beta(f_0)$. Il existe un voisinage U de f_0 et un voisinage U_1 de f_0^{-1} tel que l'application

$(g,f) \to gf$ soit définie par :

$$(y',y,x) \to (\varphi(y',y,x),x),$$

si $f \in U$ de coordonnées (y,x) et $g \in U_1$ de coordonnées (y',x'), $x' = \beta(f)$. L'application $y' \to \varphi(y',y_0,x_0)$ est un homéomorphisme $\varphi(f_0)$ d'un ouvert W de R^n sur un ouvert W' de R^n qui applique y'_0 sur $\varphi(y'_0,y_0,x_0) = 0$. Soit $\varphi(f)$ l'application $y' \to \varphi(y',y,x)$ que nous pouvons supposer définie sur W. Soit B_n^0 une boule de centre 0 dans R^n; soit B_n la boule topologique appliquée par $\varphi(f_0)$ sur B_n^0. Dans U, il existe un voisinage V de f_0 tel que pour $f \in V$ l'image par $\varphi(f)$ du bord de la boule B_n ne contienne pas 0, à cause de la convergence uniforme de φ sur un compact de l'espace des triplets (y',y,x). De l'invariance du degré topologique par déformation, il résulte qu'il existe dans B_n un point y' qui est appliqué par $\varphi(f)$ sur 0. Soit f' l'élément de Φ de coordonnées (y',x') où $x' = \beta(f)$. On a $f'f = \alpha(f) = x$. On démontre de même qu'il existe un voisinage V_1 de f_0 tel qu'à tout $f \in V_1$ corresponde un f'' vérifiant la condition $ff'' = \beta(f)$. Pour tout $f \in V \cap V_1$ on a donc deux éléments f' et f'' tels que $f'f = \alpha(f)$ et $ff'' = \beta(f)$. Il en résulte :

$$(f'f)f'' = f'(ff'') = f' = f''.$$

Donc f' est l'élément inverse unique f^{-1} de f. L'application $f \to f^{-1}$ est continue, car on peut choisir le voisinage V de f_0 tel que f^{-1} correspondant à $f \in V$ appartienne à un voisinage donné de f_0^{-1} représenté par $B_n \times U(x'_0)$, où $U(x'_0)$ est un voisinage de $x'_0 = \beta(f_0)$ dans Δ. Ceci achève la démonstration du théorème 2.

En particulier, soit Φ une catégorie topologique ayant une seule unité e, la structure topologique de Φ étant celle d'une variété topologique. L'ensemble des éléments inversibles de Φ forme alors un groupe topologique G ouvert dans Φ. Si la catégorie Φ est de plus différentiable, G est un groupe de Lie. Inversement on est conduit au problème de complétion d'un groupe topologique ou d'un groupe de Lie G, c'est-à-dire au problème de construire les catégories topologiques ou différentiables dont les éléments inversibles forment G.

ESPACE FIBRÉ SUR UNE CATÉGORIE TOPOLOGIQUE :

Définition 3. *Etant données une catégorie topologique* Φ *et* *une classe $\mathfrak{S}_0$ munie d'une structure topologique, Φ est appelée catégorie d'opérateurs topologique sur $\mathfrak{S}_0$ lorsqu'on a donné une loi de composition $(f,z) \to fz, f \in \Phi, z \in \mathfrak{S}_0$ — définissant Φ comme catégorie d'opérateurs à gauche ou à droite sur $\mathfrak{S}_0$ et vérifiant de plus les conditions suivantes :*

1) *Si $p(z)$ désigne l'unité de Φ composable avec z, l'application p de $\mathfrak{S}_0$ sur Δ, classe des unités de Φ, est continue.*

2) *L'application $(f,z) \to fz$ est continue sur la sous-classe de $\Phi \times \mathfrak{S}_0$ formée par les couples (f,z) composables.*

Φ sera appelée catégorie d'opérateurs différentiable de classe r sur $\mathfrak{S}_0$, si Φ est une catégorie d'opérateurs topologique sur $\mathfrak{S}_0$ vérifiant encore les conditions suivantes : Φ est une catégorie différentiable de classe r ; $\mathfrak{S}_0$ est munie d'une structure de variété différentiable de classe r; p est différentiable de classe r; le rang de p au point $z \in \mathfrak{S}_0$ est égal à la dimension de Δ au point $p(z)$; la loi de composition $(f,z) \to fz$ est différentiable de classe r sur la sous-variété de $\Phi \times \mathfrak{S}_0$ formée par les couples composables (f,z).

Une classe $\mathfrak{S}_0$ munie d'une catégorie d'opérateurs topologique peut aussi être appelée [3] *espace fibré sur Φ*. Si Φ est une catégorie régulière ou différentiable de classe r, $\mathfrak{S}_0$ est aussi un espace fibré sur le groupoïde topologique Π des éléments inversibles de Φ.

Les couples composables (f,z), $f \in \Phi$, $z \in \mathfrak{S}_0$, forment une catégorie topologique $\mathfrak{S}$ dont la classe des unités peut s'identifier avec $\mathfrak{S}_0$, en identifiant $(p(z),z)$ avec z. Si Φ est un groupoïde topologique, $\mathfrak{S}$ est aussi un groupoïde topologique.

D'après la terminologie proposée dans [1], une classe $\mathfrak{S}_0$ munie d'un groupoïde d'opérateurs Π est appelée espèce de structures sur Π. Si $\mathfrak{S}_0$ est muni d'une catégorie d'opérateurs Φ, c'est une espèce de structures sur le sous-groupoïde Π des éléments inversibles de Φ. On pourra aussi dire que $\mathfrak{S}_0$ est une espèce de structures sur Φ admettant $\mathfrak{S}$ comme catégorie d'homomorphismes; le groupoïde des isomorphismes est composé alors des couples $(f,z) \in \mathfrak{S}$, où $f \in \Pi$. Si Φ opère à gauche (resp. à droite) sur $\mathfrak{S}_0$, on peut dire que $\mathfrak{S}_0$ est une espèce de structures covariante (resp. contravariante) sur Φ. Un élément z de $\mathfrak{S}_0$ est appelé une structure sur l'unité $p(z)$ de Φ, ou bien sur l'objet correspondant, lorsqu'on s'est donné une classe d'objets correspondant d'une façon biunivoque à la classe des unités. Dans le cas covariant, le couple (f,z) est composable si $\alpha(f) = p(z)$ et l'on a $p(fz) = \beta(f)$. Dans le cas contravariant, le couple (f,z) est composable si $\beta(f) = p(z)$

et l'on a $p(fz) = \alpha(f)$. Un couple composable (f,z) est un homomorphisme de z vers fz. Pour la définition générale d'une catégorie d'homomorphismes, voir [1].

CATÉGORIES TOPOLOGIQUES TRIVIALES OU LOCALEMENT TRIVIALES :

Soit Φ une catégorie dont le groupoïde Π des éléments inversibles est transitif, c'est-à-dire opère transitivement dans la classe Δ de ses unités. Soit Φ_e la sous-catégorie formée par les f tels que $\alpha(f) = \beta(f) = e$. Pour chaque unité $x \in \Delta$ soit l_x un élément de Π tel que $\alpha(l_x) = e$, $\beta(l_x) = x$. La classe des éléments l_x et des éléments de Φ_e forme un système de générateurs de Φ : tout élément f de Φ est de la forme $l_{x'} y l_x^{-1}$, où $y \in \Phi_e$. *L'application* $(x',x,y) \to l_{x'} y l^{-1}$ *est un foncteur biunivoque, c'est-à-dire une équivalence, de la catégorie* $\Delta \times \Delta \times \Phi_e$ *sur* Φ, la multiplication dans $\Delta \times \Delta \times \Phi_e$ étant définie par :

$$(x'',x',y')\,(x',x,y) = (x'',x,y'y). \tag{1}$$

Du point de vue algébrique *la structure d'une catégorie Φ dont le groupoïde Π des éléments inversibles est transitif est donc déterminée par Φ_e et Δ.*

Si Π n'est pas transitif, soit Δ_i une classe d'intransitivité quelconque de Δ relativement à Π et soit e_i un élément choisi dans Δ_i. Pour toute unité x soit l_x un élément de Π tel que $\alpha(x) = e_i$, $\beta(x) = x$, en supposant $x \in \Delta_i$. Soit Φ_{e_j, e_i} la classe des éléments f de Φ tels que $\alpha(f) = e_i, \beta(f) = e_j$. Tout $f \in \Phi$ se met d'une manière unique sous la forme $l_{x'} y l_x^{-1}$, où $x = \alpha(f) \in \Delta_i$, $x' = \beta(f) \in \Delta_j$, $y \in \Phi_{e_j, e_i}$. Soit Φ^0 la sous-catégorie pleine de Φ ayant pour unités les éléments e_i. L'application $l_{x'} y l_x^{-1} \to (x', x, y)$ est un foncteur biunivoque de Φ sur la sous-catégorie A de $\Delta \times \Delta \times \Phi^0$ formée par les triplets (x',x,y) tels que $x \in \Delta_i$, $x' \in \Delta_j$, $y \in \Phi_{e_j, e_i}$. Posons $A_{ji} = \Delta_j \times \Delta_i \times \Phi_{e_j, e_i}$; alors $A = \sum_{(j,i)} A_{ji}$.

La multiplication dans $\Delta \times \Delta \times \Phi^0$ est encore définie par (1).

Un groupoïde topologique Π est dit *localement transitif* si les classes d'intransitivité Δ_i sont des ouverts dans Δ. Soit Φ une catégorie topologique dont le groupoïde Π des éléments inversibles est un groupoïde topologique localement transitif. S'il existe un relèvement continu σ de Δ dans Π tel que : $\alpha\sigma(x) = e_i$, $\beta\sigma(x) = x$, $x \in \Delta_i$, le foncteur biunivoque $\sigma(x')y\sigma(x)^{-1} \to (x', x, y)$ est un homéomorphisme; il définit une équivalence topologique de Φ sur A. On dira que *la catégorie topologique Φ est triviale*. Φ^0 est une catégorie topologique dont les unités sont isolées et invariantes par rapport au groupoïde Π^0 des éléments inversibles de Φ^0; c'est-à-dire Π^0 est la réunion des groupes Π_{e_i}. Si $\Phi_{j,i}$ désigne la classe des $f \in \Phi$ tels que $\alpha(f) \in \Delta_i$, $\beta(f) \in \Delta_j$, Φ_{ji} est homéomorphe à $\Delta_j \times \Delta_i \times \Phi_{e_j, e_i}$.

Un groupoïde topologique Π sera dit localement trivial lorsque pour tout $x_0 \in \Delta$ il existe un relèvement continu σ d'un voisinage ouvert $U(x_0)$ dans Π tel que $\alpha\sigma(x) = x_0$, $\beta\sigma(x) = x$, $x \in U(x_0)$. Les classes d'intransitivité Δ_i de Δ sont alors des ouverts dans Δ. Si $x_0 \in \Delta_i$, il existe alors aussi un relèvement continu ϱ de $U(x_0)$ dans Π tel que $\alpha\varrho(x) = e_i$, $\beta\varrho(x) = x$, $x \in U(x_0)$. En effet, soit $l_0 \in \Pi$ tel que $\alpha(l_0) = e_i$, $\beta(l_0) = x_0$. Le relèvement ϱ défini par $\varrho(x) = \sigma(x)l_0$ possède la propriété voulue. Etant donnés deux relèvements continus ϱ_λ et ϱ_μ d'un ouvert U de Δ dans Π vérifiant les conditions $\alpha\varrho_\lambda(x) = \alpha\varrho_\mu(x) = e_i$, $\beta\varrho_\lambda(x) = \beta\varrho_\mu(x) = x$, $x \in U$, on a : $\varrho_\mu(x) = \varrho_\lambda(x)s^{\mu\lambda}(x)$, où $s^{\mu\lambda}$ est une application continue de U dans le groupe topologique Π_{e_i}.

Soit $\mathfrak{E}_0$ un espace fibré sur un groupoïde topologique transitif et localement trivial Π. Si p désigne la projection de $\mathfrak{E}_0$ sur Δ, soit $F = p^{-1}(e)$. Nous avons la famille des cartes locales suivantes de $\Delta \times F$ dans $\mathfrak{E}_0$: $(x, y) \to \varrho(x)y$, $x \in U$ (ouvert dans Δ), $y \in F$, ϱ un relèvement continu de U dans Π tel que $\alpha\varrho(x) = e$, $\beta\varrho(x) = x$. Cette famille de cartes locales est un atlas de $\Delta \times F$ sur $\mathfrak{E}_0$ compatible avec le pseudo-groupe d'automorphismes locaux de $\Delta \times F$ engendré par les transformations : $(x,y) \to (x, s(x)y)$, où s est une application continue de U dans Π_e. *Donc $\mathfrak{E}_0$ est un espace fibré localement trivial de base Δ, de fibres isomorphes à F, de groupe structural* (*) *topologique Π_e*. Dans le cas où Π est un *groupoïde d'opérateurs différentiable* de classe r sur $\mathfrak{E}_0$, on a sur $\mathfrak{E}_0$ une *structure fibrée différentiable de classe r*, de base Δ, de fibres isomorphes à F, de groupe structural Π_e, qui est alors un groupe de Lie. Il suffit de prendre les cartes locales correspondant aux relèvements ϱ différentiables de classe r.

(*) Ici le groupe structural Π_e est un *groupe structural d'opérateurs* sur F; le groupe structural considéré habituellement est le *groupe de transformations* correspondant de F.

Etant donné un espace topologique F admettant Π_e comme groupe d'opérateurs topologique, on construit un espace fibré $\mathfrak{S}_0$ *bien déterminé sur le groupoïde transitif et localement trivial Π par le procédé d'élargissement d'une espèce de structures* (voir [1], page 57). Un élément de $\mathfrak{S}_0$ sera une classe de couples $(h, y)\Pi_e$, $h \in \Pi$, $\alpha(h) = e$, $y \in F$, le composé $(h, y)s$ étant $(hs, s^{-1}y)$ pour $s \in \Pi_e$. Les cartes $(x, y) \to (\varrho(x), y)\Pi_e$ définissent alors sur $\mathfrak{S}_0$ une structure fibrée localement triviale sur Π, c'est-à-dire de base Δ, de fibres isomorphes à Π et de groupe structural Π_e.

Une catégorie topologique Φ dont le groupoïde Π des éléments inversibles est un groupoïde topologique localement trivial est dite localement triviale. Considérons les cartes locales de $\Delta \times \Delta \times \Phi^0$ dans Φ de la forme : $(x', x, y) \to \varrho'(x')\, y\, \varrho(x)^{-1}$, $x \in U$, $x' \in U'$, U ouvert dans Δ_i, U' ouvert dans Δ_j, $y \in \Phi_{e_j, e_i}$, la catégorie Φ^0 étant comme plus haut la réunion des Φ_{e_j, e_i}, ϱ un relèvement continu de U dans Π, ϱ' un relèvement continu de U' dans Π, $\alpha\varrho(x) = e_i$, $\beta\varrho(x) = x$, $\alpha\varrho'(x') = e_j$, $\beta\varrho'(x') = x'$. La source d'une telle carte est $U' \times U \times \Phi_{e_j, e_i}$. Les changements de cartes sont de la forme $(x', x, y) \to (x', x, s'(x')\, y\, s(x)^{-1})$, où s est une application continue de U dans Π_{e_i}, s' une application continue de U' dans Π_{e_j}. Ceci montre que *$\Phi_{j,i}$ est un espace fibré localement trivial de base $\Delta_i \times \Delta_j$, de fibres isomorphe à Φ_{e_j, e_i} et de groupe structural $\Pi_{e_i} \times \Pi_{e_j}$.* D'ailleurs $\Phi_{j,i}$ admet $\Pi_i \times \Pi_j$ comme groupoïde d'opérateurs topologique, où Π_i est le sous-groupoïde de Π formé par les éléments f tels que $\alpha(f) \in \Delta_i$ (et par suite $\beta(f) \in \Delta_i$); la loi de composition est :

$$(f, g, z) \to gzf^{-1}, \ z \in \Phi_{j,i}, \ f \in \Pi_i, \ g \in \Pi_j.$$

Soit $\Phi_{x,i}$ (resp. $\Phi_{j,x}$) la classe des $z \in \Phi$ tels que $\alpha(z) \in \Delta_i$, $\beta(z) = x$ (resp. $\alpha(z) = x$, $\beta(z) \in \Delta_j$). Π_j opère sur la classe des classes $\Phi_{x,i}$ telles que $x \in \Delta_j$; Π_i opère sur la classe des classes $\Phi_{j,x}$ telles que $x \in \Delta_i$. Le transformé de $\Phi_{x,i}$ par $g \in \Pi_j$ est $g\Phi_{x,i}$, où $\alpha(g) = x$; le transformé de $\Phi_{j,x}$ par $f \in \Pi_i$ est $\Phi_{j,x} f^{-1}$ où $\alpha(f) = x$. *Il en résulte que $\Phi_{j,i}$ est aussi un espace fibré localement trivial sur Π_i (resp. sur Π_j), de base Δ_i (resp. Δ_j), de fibres isomorphes à Φ_{j, e_i} (resp. $\Phi_{e_j, i}$), de groupe structural Π_{e_i} (resp. Π_{e_j}).* En particulier, si Π est transitif, Φ ou Π sont des espaces fibrés sur Π, la projection correspondante sur la base Δ étant soit α, soit β.

APPLICATIONS COVARIANTES :

Etant donnés deux espaces fibrés $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_0'$ sur Π localement trivial, considérons une *application covariante* φ de $\mathcal{E}_0$ dans $\mathcal{E}_0'$ qui soit continue; rappelons [1] que $\varphi(fz) = f\varphi(z)$, si $z \in \mathcal{E}_0$, $f \in \Pi$ tels que fz soit défini. Si Π est de plus transitif, l'application covariante φ est déjà complètement déterminée par sa restriction φ_e de F dans F', fibre de $\mathcal{E}_0'$ sur e. *Toute application continue φ_e de F dans F' permutable avec Π_e détermine une application covariante continue φ de $\mathcal{E}_0$ dans $\mathcal{E}_0'$*, en posant $\varphi(hy) = h\varphi_e(y)$, $h \in \Pi$, $\alpha(h) = e$.

Plus généralement, si $\mathcal{E}_0$ est un espace fibré sur Π et $\mathcal{E}_0'$ un espace fibré sur un groupoïde topologique localement trivial Π', soit ψ un foncteur continu de Π dans Π'. *Une application covariante continue relativement à ψ* de $\mathcal{E}_0$ dans $\mathcal{E}_0'$ est une application continue φ de $\mathcal{E}_0$ dans $\mathcal{E}_0'$ telle que $\varphi(fz) = \psi(f)\,\varphi(z)$. On définit de même les applications covariantes de classe r. *Si Π est transitif, φ est encore complètement déterminée par sa restriction φ_e à F.*

Remarquons qu'on définit de même la notion d'application covariante de $\mathcal{E}_0$ dans $\mathcal{E}_0'$ lorsque $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_0'$ sont des espaces fibrés sur des *catégories* topologiques Φ et Φ'.

CATÉGORIE INDUITE, ESPACE FIBRÉ INDUIT

Soit Φ une catégorie, Δ la classe de ses unités, q une application d'une classe B dans Δ. Soit $q^*(\Phi)$ la classe des triplets (u',f,u) $u \in B$, $u' \in B$, $f \in \Phi$ tels que $\alpha(f) = q(u)$, $\beta(f) = q(u')$. *Cette classe $q^*(\Phi)$ est une catégorie pour la multiplication suivante* :

$$(u'',f',u')\,(u',\ f\ ,u) = (u'',f'f,u).$$

Cette catégorie sera appelée catégorie induite par q. Ses unités sont les triplets (u,e,u), où $e = q(u)$. Elles correspondent d'une façon biunivoque aux éléments u de B qui forme ainsi une classe d'objets pour $q^*(\Phi)$. Identifions u avec l'unité correspondante (u,e,u), c'est-à-dire B avec la classe des unités de $q^*(\Phi)$. L'application $\bar{q}$ qui applique (u',f,u) sur f est un foncteur de $q^*(\Phi)$ dans Φ, dont la restriction aux unités est q; l'image de $q^*(\Phi)$ par $\bar{q}$ est la sous-catégorie pleine de Φ correspondant à $q(B)$; la restriction de $\bar{q}$ à la sous-classe de $q^*(\Phi)$ formée par les triplets (u',f,u) tels que

u et u' soient donnés est biunivoque. Si Π est le groupoïde des éléments inversibles de Φ, $q^*(\Pi)$ est le groupoïde des éléments inversibles de $q^*(\Phi)$. Si Π est transitif, $q^*(\Pi)$ est transitif.

Si Π est un groupoïde topologique localement transitif et si q est continu, le groupoïde $q^*(\Pi)$ est localement transitif. Si Φ est une catégorie topologique triviale (resp. localement triviale), q étant encore continu, $q^*(\Phi)$ est une catégorie topologique triviale (resp. localement triviale).

En effet, dans le cas localement trivial, il suffit de construire les relèvements locaux continus de B dans $q^*(\Pi)$ de la façon suivante; soit σ un relèvement continu dans Π d'un voisinage $U(x_0)$ de $x_0 \in \Delta$ tel que $\alpha\sigma(x) = x_0$, $\beta\sigma(x) = x$, $x \in U(x_0)$. Soit $u_0 \in B$ tel que $q(u_0) = x_0$ et soit $V(u_0)$ un voisinage de u_0 tel que $q(V(u_0)) \subset U(x_0)$. L'application $u \to (u, \sigma(q(u)), u_0)$ est alors un relèvement local continu $\bar{\sigma}$ de $V(u_0)$ dans $q^*(\Pi)$ tel que $\alpha\bar{\sigma}(u) = u_0$, $\beta\bar{\sigma}(u) = u$, $u \in V(u_0)$.

Si $\mathfrak{E}_0$ est un espace fibré sur une catégorie (topologique) Φ, on définit *l'espace fibré induit $q^*(\mathfrak{E}_0)$ sur la catégorie induite $q^*(\Phi)$*; c'est la classe des couples (u,z), $u \in B$, $z \in \mathfrak{E}_0$ tels que $q(u) = p(z)$, où p est la projection de $\mathfrak{E}_0$ sur Δ. La catégorie $q^*(\Phi)$ opère sur $q^*(\mathfrak{E}_0)$ suivant la loi de composition :

$$(u', f, u)\,(u, z) = (u', fz).$$

Si Φ est une catégorie localement triviale dont le groupoïde Π des éléments inversibles est transitif, $q^*(\mathfrak{E}_0)$ est un espace fibré localement trivial de base B, de fibres isomorphes à F, de groupe structural topologique Π_e. Si de plus $\mathfrak{E}_0$ est un espace fibré différentiable de classe r sur Φ et si q est différentiable de classe r, $q^*(\Phi)$ est une catégorie différentiable de classe r et $q^*(\mathfrak{E}_0)$ est un espace fibré différentiable de classe r.

Si ψ est un foncteur d'une catégorie Φ dans une catégorie Φ', soit ψ_0 la restriction de ψ à la classe Δ des unités de Φ. Alors ψ admet la *décomposition canonique* $\psi = \bar{\psi}_0\psi'$, où ψ' est le foncteur de Φ dans $\psi_0^*(\Phi')$ qui applique $f \in \Phi$ sur $(\beta(f), \psi(f), \alpha(f))$ et $\bar{\psi}_0$ le foncteur défini ci-dessus qui applique $(\beta(f), \psi(f), \alpha(f))$ sur $\psi(f)$.

Si $\mathfrak{E}_0$ est un espace fibré sur Φ, $\mathfrak{E}_0'$ un espace fibré sur Φ' φ une application covariante de $\mathfrak{E}_0$ sur $\mathfrak{E}_0'$ relativement à ψ, il y a de même une *décomposition canonique* $\varphi = \varphi_2\varphi_1$ où φ_1 est une application covariante de $\mathfrak{E}_0$ dans $\psi_0^*(\mathfrak{E}_0')$ et φ_2 une application covariante de $\psi_0^*(\mathfrak{E}_0')$ dans $\mathfrak{E}_0'$ relativement à $\bar{\psi}_0$.

SOUS-CATÉGORIES LOCALEMENT TRIVIALES :

Soit Π un groupoïde transitif et localement trivial. Soit H la classe des $h \in \Pi$ tels que $\alpha(h) = e$, où e est un élément fixe de Δ. Comme Π opère sur H, $(f,h) \to fh$, H est un espace fibré sur Π, c'est-à-dire de base Δ, de fibres isomorphes à Π_e, de groupe structural Π_e opérant sur Π_e comme groupe des translations à gauche. *H est appelé espace fibré principal sur Π; les autres espaces fibrés sur Π sont les espaces fibrés associés à H.*

Soit G un sous-groupe de Π_e. Soit H/G la classe des classes hG. Π opère sur H/G, le transformé de hG par $f \in \Pi$ est $(fh)G$, si fh est défini. *Donc H/G est un espace fibré sur Π, de fibres isomorphes à l'espace homogène Π_e/G, de groupe structural Π_e opérant sur cet espace homogène.*

Soit Π_G le groupoïde correspondant des couples composables (f,hG); la classe de ses unités est identifiée avec H/G. Ce groupoïde opère sur H de la façon suivante : le transformé de $h \in H$ par (f,hG) est fh. On voit que *H est un espace fibré principal sur Π_G, de base H/G de fibres isomorphes à G, de groupe structural G opérant à gauche sur G.* On démontre la proposition : *Pour que Π_G soit un groupoïde localement trivial, il faut et il suffit que Π_e soit un espace fibré localement trivial sur Π_e/G, ayant pour fibres les classes sG, $s \in \Pi_e$,* condition équivalente à l'existence d'un relèvement continu dans Π_e d'un voisinage de G dans Π_e/G.

Soit Π' un sous-groupoïde de Π et supposons que Π' soit encore transitif sur Δ et $\Pi'_e = G$. Soit H' l'espace fibré principal sur Π' formé par les éléments $h' \in \Pi'$ tels que $\alpha(h') = e$. H' est réunion des classes $h'G$, $h' \in H'$. Soit σ l'application de Δ dans H/G qui fait correspondre à $x \in \Delta$ la classe $h'_x G$, où $h'_x \in H'$, $\beta(h'_x) = x$. *Si H' est localement trivial* (et par suite aussi Π'), il existe au voisinage de $x_0 \in \Delta$ un relèvement continu $x \to h'_x$ et par suite *l'application σ sera continue*, c'est-à-dire définit un relèvement continu de Δ dans H/G. H' s'identifie naturellement à l'espace fibré induit $\sigma^*(H)$, où H est considéré comme espace fibré sur H/G. On a de même $\Pi' = \sigma^*(\Pi_G)$.

Réciproquement, si Π_e est un espace fibré localement trivial sur Π_e/G, à tout relèvement continu σ de Δ dans H/G correspond l'espace fibré $\sigma^*(H)$ qui s'identifie à un sous-espace fibré H' de H et H' est un espace fibré principal à groupe structural G. De plus $\sigma^*(\Pi_G)$ s'identifie avec un sous-groupoïde Π' de Π vérifiant les conditions : Π' est transitif dans Δ et localement trivial. *Le problème de la restriction du groupe structural des espaces fibrés* [2] *est donc équivalent au problème de la recherche des sous-groupoïdes localement triviaux de Π qui soient transitifs dans Δ. A deux relèvements homotopes de Δ dans H/G correspondent deux sous-groupoïdes topologiques isomorphes.*

Soient Φ une catégorie topologique localement triviale, Π le groupoïde des éléments inversibles, Π_i le groupoïde des éléments inversibles dont les unités forment la classe d'intransitivité Δ_i de Δ, Φ^0 la sous-catégorie pleine de Φ ayant pour unités les éléments e_i, où e_i est un élément déterminé choisi dans Δ_i. Soit Φ' une sous-catégorie topologique localement triviale telle que Δ_i soit encore classe d'intransitivité de Δ relativement à Π', groupoïde des éléments inversibles de Φ'. Soit Φ'^0 la sous-catégorie $\Phi' \cap \Phi^0$. Le groupoïde Π^0 (resp. Π'^0) des éléments inversibles de Φ^0 (resp. Φ'^0) est la réunion des groupes Π_{e_i} (resp. Π'_{e_i}). Π'_i est un sous-groupoïde localement trivial de Π_i dont la trace sur Π_{e_i} est Π'_{e_i}. Il correspond à un relèvement continu de Δ_i dans H_i/Π_{e_i}, où H_i est la classe des $h \in \Pi$ tels que $\alpha(h) = e_i$. La sous-catégorie Φ' est alors complètement déterminée par la donnée de Φ'^0 et des sous-groupoïdes Π'_i. Tout élément f de Φ' se met sous la forme $h_j y h_i^{-1}$, où $h_i \in \Pi'$, $y \in \Phi'^0$, $\alpha(h_i) = \alpha(y) = e_i$, $\alpha(h_j) = \beta(y) = e_j$. *Pour déterminer une sous-catégorie Φ' du type considéré il suffit de se donner arbitrairement une sous-catégorie Φ'^0 de Φ^0 ayant les mêmes unités que Φ^0 et, pour chaque i, un sous-groupoïde Π'_i de Π_i induit par un relèvement continu σ_i de Δ_i dans H_i/Π'_{e_i}, $\Pi'_{e_i} = \Phi'^0 \cap \Pi_{e_i}$.*

Etant donnée une catégorie $\bar{\Phi}^0$ contenant Φ^0 comme sous-catégorie avec les mêmes unités e_i, on peut toujours définir une catégorie $\bar{\Phi}$, appelée élargissement de Φ, admettant Φ comme sous-catégorie ayant les mêmes unités et telle que $\bar{\Phi}^0$ soit la sous-catégorie pleine de $\bar{\Phi}$ correspondant aux unités e_i. Si Φ est localement trivial, il en est de même pour $\bar{\Phi}$. Soit Π'' la classe des couples (f', f), $f \in \Pi_i$, $f' \in \Pi_j$ tels qu'il existe $y \in \bar{\Phi}^0$ où $\alpha(y) = e_i$, $\beta(y) = e_j$. Soit Π''_0 la classe des couples (s', s), $s' \in \Pi_{e_j}$, $s \in \Pi_{e_i}$ Π''_0 opère sur $\bar{\Phi}^0$ de la manière suivante : le transformé de y par (s', s) est $s' y s^{-1}$. Comme Π''_0 est sous-groupoïde de Π'', le procédé d'élargissement d'une espèce de structures fournit une classe $\bar{\Phi}$ admettant Π'' comme groupoïde d'opérateurs. Un élément de $\bar{\Phi}$ est une classe de triplets (f', y, f), $f \in \Pi$, $f' \in \Pi$, $y \in \bar{\Phi}^0$,

$\alpha(f) = \alpha(y) = e_i$, $\alpha(f') = \beta(y) = e_j$, par la relation d'équivalence $(f', y, f) \sim (f's', s'^{-1} ys, fs)$, où $s' \in \Pi_{e_j}$, $s \in \Pi_{e_i}$. La multiplication dans $\bar{\Phi}$ se déduit par passage au quotient de la multiplication des triplets : $(f'', y, f')(f', y, f) = (f'', y'y, f)$. La catégorie Φ s'identifie à une sous-catégorie de $\bar{\Phi}$, en identifiant avec $f'yf^{-1}$ l'élément de $\bar{\Phi}$ déterminé par (f', y, f), où $y \in \Phi^0$. Il s'agit ici du procédé d'élargissement d'une catégorie de morphismes (voir [1], page 59).

Soient Φ et Φ' deux catégories topologiques localement triviales et φ un foncteur continu de Φ dans Φ'. Supposons le groupoïde correspondant Π transitif dans Δ. Soit φ^0 la restriction de φ à Φ^0, sous-catégorie complète de Φ ayant pour unité $e \in \Delta$. La restriction de φ^0 à Π_e est une représentation continue de Π_e dans Π_e', où $e' = \varphi(e)$. Soit H la classe des éléments h de Π tels que $\alpha(h) = e, H'$ la classe des éléments h' de Π' tels que $\alpha(h') = e'$. La restriction de φ à H est une représentation continue de H dans H' telle que $\varphi(hs) = \varphi(h)\,\varphi^0(s)$, où $s \in \Pi_e$. Dans $H \times H'$ considérons la relation d'équivalence ϱ définie par $(h, h') \sim (hs, h'\varphi^0(s))$ mod ϱ et soit M la classe quotient. M est un espace fibré associé à H, de base Δ, de fibres isomorphes à H', le transformé de (h, h') mod ϱ par $\theta \in \Pi$ étant $(\theta h, h')$ mod ϱ. Le foncteur φ définit une application continue de H dans $H \times H' : h \to (h, \varphi(h))$. Cette application est compatible avec les deux relations d'équivalence ϱ et ϱ_1, où ϱ_1 est défini par $h \sim hs$ (mod ϱ_1). Par passage aux quotients on obtient une application continue σ de Δ dans M, qui est un relèvement continu de Δ dans l'espace fibré M. *Réciproquement soit σ un relèvement continu de Δ dans M, et soit φ^0 un foncteur continu de Φ^0 dans Φ', où $\varphi^0(e) = e'$.* On en déduit une application φ de H dans H' telle que $\sigma(\beta(h)) = (h, \varphi(h))$ mod ϱ. En prenant un système de coordonnées locales admissibles dans M, correspondant à un relèvement local continu de Δ dans H, on voit que φ est continu. *On en déduit un foncteur continu, désigné encore par φ, de Φ dans Φ', défini par :*

$$\varphi(h_1 y h^{-1}) = \varphi(h_1)\varphi^0(y)\varphi(h)^{-1}, \quad \text{où } h, h_1 \in H,\ y \in \Phi^0.$$

Si Φ, Φ', σ, φ^0 sont différentiables de classe r, le foncteur φ est de plus différentiable de classe r.

Comme précédemment, on étend facilement ce résultat au cas où Π n'est plus transitif dans Δ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Gattungen von Lokalen Strukturen (Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, 60, 1957, p. 49-77).
[2] Sur la théorie des espaces fibrés (Colloque Int. Topologie algébrique, C.N.R.S., Paris, 1947).
[3] Les prolongements d'un espace fibré différentiable (Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 240, 1955, p. 1755).

N.d.E. Cet article a paru dans "Colloque de Géométrie Différentielle Globale", Bruxelles 1959, CBRM. Le texte avait été imprimé sans tenir compte des corrections d'épreuves ; nous avons effectué ici ces corrections, à l'exception de la suivante :

Page 149, remplacer les lignes -11 et -10 par: continu de Φ^0 dans Φ', tels que

$$\sigma(e) = (e, e') \bmod \rho\ , \quad \varphi^0(e) = e'.$$

On en déduit une application φ de H dans H' telle que

$$\sigma(\beta(h)) = (h, \varphi(h)) \bmod \rho, \text{ et } \varphi(s) = \varphi^0(s) \quad \text{pour } s \in \Pi^0.$$

En prenant...