Max Müller
24. 4. 67

Sonderdruck
aus der Zeitschrift

**Elektronische
Informationsverarbeitung
und Kybernetik**

Band 1, Heft 3, 1965

G. Hotz

Eine Algebraisierung des Syntheseproblems
von Schaltkreisen I.

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

EIK 1 (1965) Seite 185–205

Eine Algebraisierung des Syntheseproblems von Schaltkreisen I[1])

Von GÜNTER HOTZ[2])

Inhaltsübersicht[3])

0. Einleitung

Der Anlaß zu dieser Arbeit ist ein Problem der Automatentheorie: Aus einem gegebenen Bausteinsystem ist ein Automat zusammenzuschalten, dessen Funktion vorgegeben ist. Unter den verschiedenen der eventuell existierenden Lösungen ist die billigste auszusuchen.

Ein Baustein $A \in \mathfrak{A}$ ist ein physikalisches, meist elektrisches Gerät mit $Q(A)$ Eingängen und $Z(A)$ Ausgängen. Für jeden Eingang ist eine bestimmte Menge S von Eingangssignalen zugelassen, auf die der Baustein mit Ausgangssignalen

---

[1]) Habilitationsschrift, Universität des Saarlandes, Saarbrücken 1965. Referenten: Prof. Dr. J. DÖRR, Prof. Dr. D. PUPPE (beide Saarbrücken), Prof. Dr. F. L. BAUER (München).

[2]) Institut für Angewandte Mathematik der Universität des Saarlandes, Saarbrücken (Direktor: Prof. Dr. J. DÖRR).

[3]) Das vorliegende Heft enthält die Abschnitte 1 und 2. Der restliche Teil der Arbeit erscheint im folgenden Heft dieser Zeitschrift.

reagiert. Wir nehmen gegenüber dem technischen Sachverhalt vereinfachend an, daß folgendes gilt:

(1) Für jeden Eingang der Elemente von $\mathfrak{A}$ ist die gleiche Signalmenge S vorgeschrieben, und jedes Element von S^n ist als Eingangssignal für A mit $n = Q(A)$ zugelassen.

(2) Die Menge der Ausgangssignale von $A \in \mathfrak{A}$ liegt in S^m mit $m = Z(A)$.

(3) Liegt zur Zeit t das Eingangssignal $s \in S^n$ in A an, dann ist das Ausgangssignal zur Zeit t durch s eindeutig bestimmt. (Wir vernachlässigen also die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen.)

Der endliche Automat ist für uns also vollständig beschrieben durch seine Funktion $\varphi(A): S^n \to S^m$. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Eingänge und Ausgänge von A in einer festen Numerierung mit den Zahlen 1 bis $Q(A)$ bzw. 1 bis $Z(A)$ versehen sind, und der i-te Eingang bzw. i-te Ausgang der i-ten Komponente von S^n bzw. S^m zugeordnet ist.

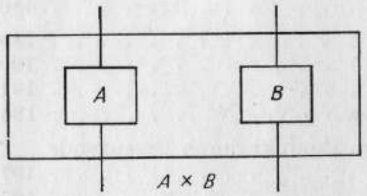

Abb. 1

Ein Element von $\mathfrak{A}$ ist ein Schaltkreis. Sind A und B Schaltkreise mit $Q(A)$ bzw. $Q(B)$ Eingängen und $Z(A)$ bzw. $Z(B)$ Ausgängen, dann bilden wir aus A und B neue Schaltkreise, indem wir A und B zu einem Element $A \times B$ mit $Q(A) + Q(B)$ Eingängen und $Z(A) + Z(B)$ Ausgängen zusammenfassen, und den i-ten Eingang von A zum i-ten Eingang von $A \times B$ und den i-ten Eingang von B zum $(Q(A) + i)$-ten Eingang von $A \times B$ erklären (Abb. 1).

Ist $Z(A) = Q(B)$, dann erhalten wir aus A und B einen Schaltkreis $B \circ A$, indem wir den i-ten Ausgang von A auf den i-ten Eingang von B schalten.

Ein Schaltkreis aus Elementen von $\mathfrak{A}$ ist ein Gerät, das durch die vorigen Erklärungen induktiv beschrieben wird.

Ist $\varphi(A)$ bzw. $\varphi(B)$ die Funktion des Schaltkreises A bzw. B, dann ist $\varphi(A) \times \varphi(B)$ bzw. $\varphi(B) \circ \varphi(A)$ für $Q(B) = Z(A)$ die Funktion von $A \times B$ bzw. $B \circ A$.

Die Kosten der Bausteine von $\mathfrak{A}$ seien durch die Funktion $L: \mathfrak{A} \to \mathsf{N} \cup \{0\}$ gegeben; wir definieren:

$$L(A \times B) = L(A) + L(B)\,,$$
$$L(B \circ A) = L(A) + L(B)\,.$$

Hierdurch wird jedem Schaltkreis ein „Preis" zugeordnet.

Die Aufgabe lautet nun: Man finde zu vorgegebenem $f: S^n \to S^m$ einen Schaltkreis A mit $\varphi(A) = f$ und

$$L(A) = \operatorname*{Min}_{B \in \varphi^{-1}(f)} \{L(B)\}\,.$$

Ist f nicht auf ganz S^n vorgeschrieben, sondern nur auf $R \subset S^n$, dann ist das Optimum auf $\bigcup_{g|R=f} \varphi^{-1}(g)$ zu suchen.

Ist $Q(f) = Z(f) = S^n$ und f, wie es bei endlichen Automaten oft der Fall ist, nur bis auf eine Transformation von S^n vorgeschrieben, verallgemeinert sich die Aufgabe nochmals in naheliegender Weise.

Zur Lösung pieser Aufgabe erscheint es vorteilhaft, Relationen zu kennen, die es erlauben, aus einem Element $A \in \varphi^{-1}(f)$ jedes Element der Klasse $\varphi^{-1}(f)$ zu erzeugen.

In den ersten beiden Abschnitten der Arbeit wird eine Theorie des Zusammenschaltens von Automaten entwickelt, wie sie in dieser Beschreibung der Aufgabenstellung schon skizzenhaft vorhanden ist:

Es wird zunächst der topologische Begriff des *ebenen Netzes* eingeführt. Für die Netze werden die binären Operationen „$\circ$" und „$\times$" erklärt. Man erhält so ein algebraisches Gebilde $\mathfrak{N}$, das bezüglich „$\circ$" eine Kategorie ist und bezüglich „$\times$" eine Halbgruppe. $\mathfrak{N}$ erweist sich als eine Verallgemeinerung der D-Kategorie (Kategorie mit direktem Produkt), die wir als *X-Kategorie* bezeichnen wollen.

In $\mathfrak{N}$ spiegelt sich das Zusammenschalten der Automaten wider, nicht aber die Möglichkeit verschiedener Bausteine mit gleicher Anzahl von Ein- und Ausgängen. Dieser wird Rechnung getragen, indem Belegungen der inneren Punkte des Netzes mit dem Zeichen eines Alphabets $\mathfrak{A}$ durchgeführt werden unter Berücksichtigung von Funktionen $Q: \mathfrak{A} \to \mathsf{N} \cup \{0\}$ und $Z: \mathfrak{A} \to \mathsf{N} \cup \{0\}$. Man gelangt so zu einer X-Kategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, die $\mathfrak{A}$ als freies Erzeugendensystem besitzt. Die Elemente von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ entsprechen der Menge der Schaltkreise, die man aus $\mathfrak{A}$ erhalten kann. Die Abbildung φ, die jedem Automaten seine Funktion zuordnete, wird zu einem Funktor $\varphi: \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$, wo $\mathfrak{C}$ die Kategorie der Abbildungen vom Typ $S^n \to S^m$ ist.

Die Einführung der Faktorkategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ nach einem Relationensystem $\mathfrak{R}$ bildet die Basis für die Untersuchung der Klassen $\varphi^{-1}(f)$. In Abschnitt 3 wird $\varphi^{-1}(f)$ für bestimmte Kategorien $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und ausgezeichnete Funktoren φ untersucht: Wir betrachten nur Erzeugendensysteme $\mathfrak{A}$ mit $\{U, V, D\} \subset \mathfrak{A}$ und $Z(A) = 1$ für $A \in \mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ und Funktoren φ, für die $\varphi(U)$ die Abbildung von S auf S°, $\varphi(V)$ die Vertauschung der Komponenten von S^2 ist und $\varphi(D)$ die Diagonalisierung $S \to S^2$. Solche Funktoren heißen *normal*. Es wird ein Relationensystem $\mathfrak{R}$ angegeben mit der Eigenschaft: Für jedes normale φ gilt $\varphi(F) = \varphi(G)$ für $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ genau dann, wenn $F \equiv G(\mathfrak{R})$ ist. $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ ist eine D-Kategorie und $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ ein freies Erzeugendensystem der D-Kategorie.

Das Relationensystem gestattet also gerade die Vereinfachungen in den Darstellungen F einer Funktion $\varphi(F)$ vorzunehmen, die ohne Kenntnis der Funktionen der Elemente aus $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ möglich sind. Abb. 2 veranschaulicht, daß es in diesem System echte Vereinfachungen gibt.

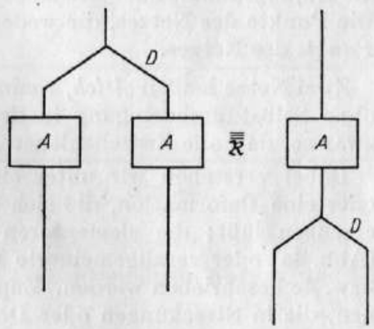

Abb. 2.

Es wird in der Arbeit für S eine beliebige abzählbare Menge zugelassen, so daß die Ergebnisse auch für Fragen der Programmierung von Rechenautomaten von Interesse sind. Will man Programme, die aus Unterprogrammen aufgebaut sind, formal vereinfachen, so kann dies bei der Vielzahl der möglichen Unterprogramme nicht unter besonderer Berücksichtigung der durch das Programm berechneten Funktion geschehen, sondern die Regeln zur Veränderung der Programme müssen gleichmäßig für alle Unterprogramme anwendbar sein. Das heißt aber gerade, daß es sich bei den zugelassenen Relationen um das System $\mathfrak{R}$ oder ein dazu äquivalentes handeln muß.

Zur Orientierung über den Stand der Theorie der Schaltkreissynthese sei auf [2] hingewiesen, im Zusammenhang mit Streckenkomplexen auf [5] und Kategorien auf [4] oder [6].

Für anregende Diskussionen und kritische Bemerkungen danke ich J. Dörr und D. Puppe. Mein Dank gilt auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die diese Untersuchung durch ein Stipendium der Fritz-Thyssen-Stiftung unterstützt hat.

1. Die Kategorie ebener Netze

1.1. Die Kategorie $\mathfrak{N}$ ebener Netze

Unter einem *Netz* mit *n Eingängen* und *m Ausgängen* $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ verstehen wir folgendes topologisches Gebilde:

In der euklidischen Ebene sei ein Rechteck mit den Seiten g_1, g_2 und h_1, h_2 gegeben, worin sich sowohl die g_i als auch die h_i jeweils gegenüber liegen. $A_1, \ldots, A_n$ bzw. $B_1, \ldots, B_m$ seien paarweise verschiedene Punkte auf g_1 bzw. g_2, wobei die Numerierungen der Punkte von h_1 nach h_2 laufen; die A_i bzw. B_i teilen g_1 bzw. g_2 in äquidistante Stücke.

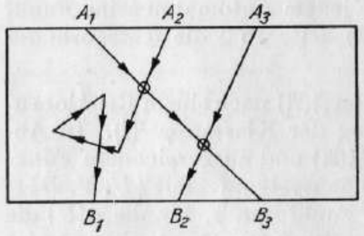

Abb. 3

Die A_i seien Anfangspunkte, die B_i Endpunkte von je genau einer Strecke eines orientierten, endlichen, ebenen Streckenkomplexes, der in der euklidischen Ebene in überkreuzungsfreier Lage in dem Rechteck liege[3]). Wir fordern von dem Streckenkomplex weiter, daß jede seiner Strecken schlicht über h_1 ist und daß die Orientierung der Strecken in Richtung von g_1 nach g_2 zeigt. Es ist also der durch Abb. 3 beschriebene Fall ausgeschlossen.

Wir nennen g_1, g_2, h_1, h_2 den *Rahmen* des Netzes, $A_1, \ldots, A_n$ bzw. $B_1, \ldots, B_m$ die *Anfangspunkte* oder *Eingänge* bzw. die *Endpunkte* oder *Ausgänge* des Netzes. Die Punkte des Netzes, die weder Eingänge noch Ausgänge sind, heißen *innere Punkte* des Netzes.

Zwei Netze heißen *gleich*, wenn sie sich nach Aufeinanderlegen ihrer Rahmen ohne Selbstdurchdringung in der Ebene ineinander deformieren lassen, und zwar so, daß alle Zwischenlagen Netze sind.

Dabei verstehen wir unter einer *Deformation* eine *elementare Deformation* oder eine Deformation, die sich durch eine Kette elementarer Deformationen erzeugen läßt; die elementaren Deformationen sind Dreiecksdeformationen (Abb. 4a) oder verallgemeinerte Dreiecksdeformationen, wie sie durch Abb. 4b bzw. 4c beschrieben werden. Zugelassen sind weiter die (trivialen) Deformationen, die in Streckungen oder Dehnungen des Rahmens oder euklidischen Bewegungen des Netzes bestehen.

Man erkennt, daß die gegebene Gleichheitsdefinition reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, d. h. eine Einteilung der Netze in Äquivalenzklassen liefert.

Wir bezeichnen von nun an diese Klassen als Netze und nennen ein Netz im alten Sinne, wenn eine Unterscheidung wichtig ist, *Repräsentant* eines Netzes.

[3]) Im euklidischen Sinne handelt es sich um stückweise lineare Kurvenzüge.

Verschiedene Repräsentanten eines Netzes haben die gleiche Anzahl von Eingängen und Ausgängen, die wir mit $Q(N)$ bzw. $Z(N)$ bezeichnen.

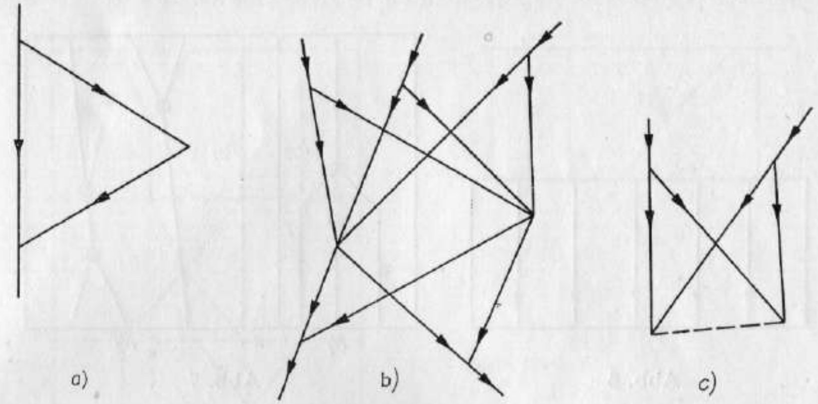

Abb. 4

Seien nun N_1 und N_2 Netze mit $Q(N_2) = Z(N_1)$, dann erklären wir zwischen N_1 und N_2 eine Komposition über die Repräsentanten N_1' bzw. N_2' von N_1 und N_2:

Wir deformieren den Rahmen von N_2' (in trivialer Weise), so daß wir N_2' an N_1' ansetzen können; d. h., wir bringen g_2 und g_1' auf gleiche Größe und setzen die beiden Rahmen längs g_2 und g_1' aneinander (Abb. 5). Wir entfernen $g_2 = g_1'$ und die Punkte $A_i' = B_i$ und erhalten wieder einen Repräsentanten eines Netzes, das wir mit $N_2 \circ N_1$ bezeichnen. Man erkennt, daß die Definition von der Auswahl des Repräsentanten unabhängig ist.

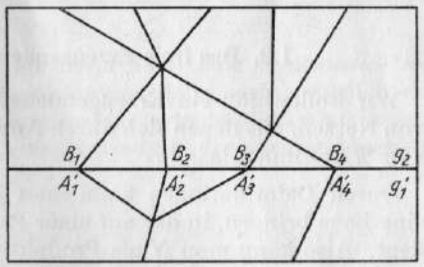

Abb. 5

Weiter gilt:

$$Q(N_2 \circ N_1) = Q(N_1)\,,$$
$$Z(N_2 \circ N_1) = Q(N_2)\,.$$

Wie man leicht zeigt, ist das Produkt assoziativ; d. h., es gilt für Netze N_1, N_2, N_3 mit $Q(N_2) = Z(N_1)$ und $Q(N_3) = Z(N_2)$

$$(N_3 \circ N_2) \circ N_1 = N_3 \circ (N_2 \circ N_1)\,.$$

Zu jedem Netz mit $Q(N) = n$ und $Z(N) = m$ gibt es genau ein Netz E_n und E_m mit der Eigenschaft

$$N \circ E_n = E_m \circ N = N\,;$$

E_n ist ein Netz mit n Eingängen, n Ausgängen und n Strecken (Abb. 6). Die Menge der Netze bildet also bezüglich des Produktes „$\circ$" eine Kategorie.

Wir erklären eine weitere Zusammensetzung der Netze, nämlich das *X-Produkt*. Seien N_1' und N_2' Repräsentanten von Netzen N_1 bzw. N_2, dann deformieren wir die Rahmen auf gleiche Länge und setzen sie längs h_{12} und h_{21} aneinander (Abb. 7). Anschließend löschen wir $h_{21} = h_{12}$ und numerieren die Eingänge von links nach rechts durch. Sorgen wir dafür, daß die Eingangs- und Ausgangspunkte des neuen Gebildes wieder äquidistant liegen, dann erhalten wir auf diese Weise wieder einen Repräsentanten eines Netzes N_3. Wir nennen N_3

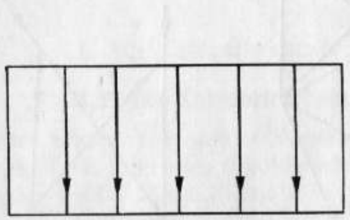

Abb. 6

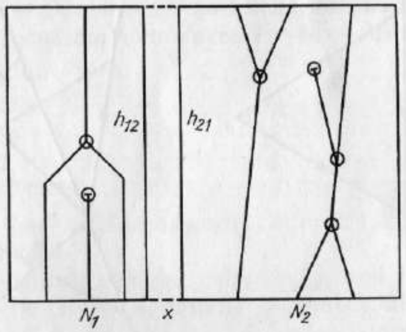

Abb. 7

das direkte Produkt von N_1 und N_2 und schreiben $N_3 = N_1 \times N_2$. Man erkennt, daß das direkte Produkt unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten und assoziativ ist und daß $E_k = E_1 \times \ldots \times E_1$ (k-mal) ist und $E_0 \times N = N \times E_0 = N$ für jedes Netz N ist.

Wir bezeichnen die Menge der Netze mit diesen beiden Verknüpfungen mit $\mathfrak{N}$. Die Ergebnisse fassen wir zusammen zu

Satz 1. *$\mathfrak{N}$ bildet bezüglich „$\circ$" eine Kategorie und bezüglich „$\times$" eine Halbgruppe.*

1.2. Das freie Erzeugendensystem von $\mathfrak{N}$

Wir wollen nun ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{N}$ angeben, d. h. eine Menge $\mathfrak{E}$ von Netzen, aus denen sich durch Anwendung der Operationen von $\mathfrak{N}$ alle Netze von $\mathfrak{N}$ gewinnen lassen.

Durch Deformationen kann man jeden Repräsentanten eines Netzes N in eine Lage bringen, in der auf einer Parallelen zu g_1 höchstens ein innerer Punkt liegt. Also kann man N als Produkt von Netzen erhalten, die je einen inneren Punkt besitzen, außer in dem Fall, daß N keinen inneren Punkt besitzt, also eine Einheit ist (Abb. 8).

Jedes Netz N mit genau einem inneren Punkt läßt sich in ein direktes Produkt

$$N = E_k \times F \times E_m$$

aufspalten, worin F den inneren Punkt enthält und jede Strecke von F diesen Punkt als Anfangs- oder Endpunkt besitzt (Abb. 9). Eventuell ist $k = 0$ oder $m = 0$. F ist durch die Anzahl seiner Eingänge und Ausgänge vollständig charakterisiert. Hat F n Eingänge und m Ausgänge, dann schreiben wir γ_m^n für F.

Damit haben wir

Satz 2. *Die Menge $\mathfrak{E} = \{\gamma_m^n \mid n, m = 0, 1, \ldots\}$ ist ein vollständiges Erzeugendensystem von $\mathfrak{N}$.*

Man erkennt weiter, daß das Erzeugendensystem minimal ist, da sich keine Erzeugende durch andere Erzeugende ausdrücken läßt. $\mathfrak{E}$ ist auch das einzige minimale Erzeugendensystem von $\mathfrak{N}$, da keine Erzeugende durch andere Elemente von $\mathfrak{N}$ ausgedrückt werden kann als durch sich selbst; letzteres folgt

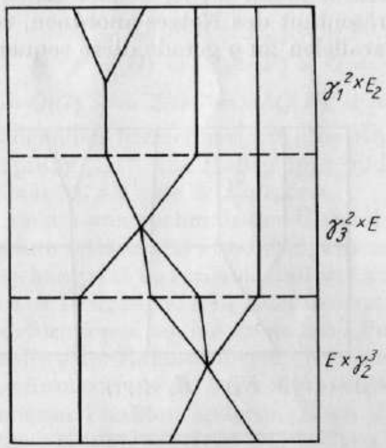

Abb. 8

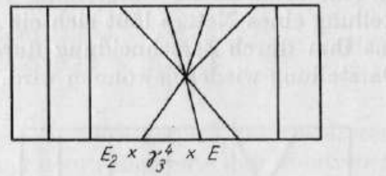

Abb. 9

daraus, daß die Anzahl der inneren Punkte eines Produktes gleich der Summe der inneren Punkte der Faktoren ist. Später (in 2.4.) werden wir zeigen, daß $\mathfrak{E}$ ein freies Erzeugendensystem ist.

Wir haben oben mehr gezeigt, als in Satz 2 enthalten ist, nämlich:

Satz 3. *Jedes Netz $N \in \mathfrak{N}$ mit mindestens einem inneren Punkt läßt sich in ein „$\circ$"-Produkt von direkten Produkten der Form $E_k \times \gamma_m^n \times E_j$ zerlegen.*

Die Darstellung eines Netzes N in dieser Form heißt eine *sequentielle Darstellung* von N. Gleiche sequentielle Darstellungen definieren natürlich das gleiche Netz, aber das gleiche Netz läßt verschiedene sequentielle Darstellungen zu. Über die verschiedenen Darstellungen eines Netzes gibt der nächste Abschnitt Auskunft.

1.3. Die Relationen von $\mathfrak{N}$

Wie aus der Definition der Deformationen unmittelbar folgt, gelten die Relationen

$$(E_{n+k} \times \gamma_j^l) \circ (\gamma_n^m \times E_{k+l}) = (\gamma_n^m \times E_{k+j}) \circ (E_{m+k} \times \gamma_j^l) \qquad \text{(R1)}$$

für $k, m, n = 0, 1, 2, \ldots$ (siehe Abb. 10).

Weiter gelten für $F, G, H \in \mathfrak{N}$ mit $m = Q(F)$, $n = Z(F)$ und $Q(H) = Z(G)$ die Relationen

$$\left.\begin{aligned} (H \circ G) \times F &= (H \times F) \circ (G \times E_m) = (H \times E_n) \circ (G \times F), \\ F \times (H \circ G) &= (F \times H) \circ (E_m \times G) = (E_n \times H) \circ (F \times G) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(R2)}$$

(siehe Abb. 11).

Man erkennt, daß die Relationen (R1) in (R2) enthalten sind.

Satz 4. *Zwei Darstellungen H_1 und H_2 des gleichen Netzes in dem Erzeugendensystem $\mathfrak{E}$ unter Benutzung beider Verknüpfungen von $\mathfrak{N}$ sind mittels* (R2) *ineinander überführbar.*

Beweis. Man erkennt ohne weiteres, daß man jede Darstellung mittels (R2) in eine sequentielle Darstellung verwandeln kann. Jeder sequentiellen Darstellung eines Netzes läßt sich ein Repräsentant des Netzes zuordnen, so daß aus ihm durch Zerschneidung durch Parallelen zu g gerade diese sequentielle Darstellung wieder gewonnen wird.

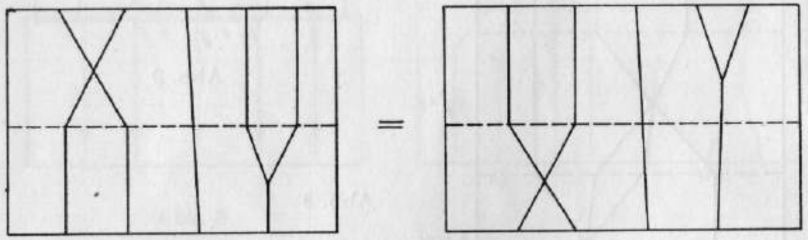

Abb. 10. $(E_3 \times \gamma_1^2) \circ (\gamma_2^2 \times E_3) = (\gamma_2^2 \times E_2) \circ (E_3 \times \gamma_1^2)$

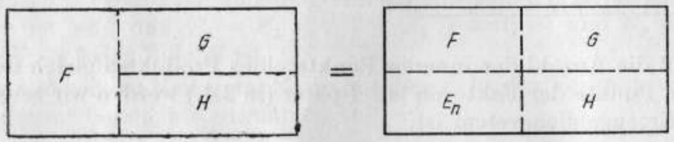

Abb. 11

Nach dem vorigen können wir annehmen, daß H_1 und H_2 sequentielle Darstellungen des gleichen Netzes sind. N_1' und N_2' seien H_1 und H_2 in der eben beschriebenen Weise zugeordnet. Nach Definition der Gleichheit läßt sich N_1' in N_2' deformieren. Jeder Deformationsschritt kann aber so in Teildeformationen zerlegt werden, daß dabei die Reihenfolge von höchstens zwei Punkten des Netzes geändert wird, da in N_1' nach Konstruktion keine zwei Punkte auf einer Parallelen zu g liegen. Im Falle, daß die Reihenfolge von Punkten nicht geändert wird, bleibt die sequentielle Darstellung des Netzes die gleiche. Wird sie geändert, dann betrachten wir die beiden entsprechenden Faktoren des sequentiellen Produktes. Diese mögen die Form

$$(E_t \times \gamma_n^m \times E_s) \circ (E_r \times \gamma_j^l \times E_q)$$

haben. Mittels (R2) können wir die gemeinsamen E-Faktoren auf beiden Seiten abspalten; auf Grund der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der Punkte läßt sich der Ausdruck auf die Form

$$E_u \times ((\gamma_n^m \times E_{k+j}) \circ (E_{m+k} \times \gamma_j^l)) \times E_v$$

bringen, oder auf die Form, die der anderen Reihenfolge der beiden betreffenden Punkte des Netzes entspricht. Nun wenden wir (R1) an und erhalten damit eine Darstellung, die der Änderung der Reihenfolge der Punkte nach der Deformation entspricht. Mittels (R2) bringen wir die Darstellung wieder in die sequentielle Form. Indem man nun N_1' Schritt um Schritt in N_2' deformiert und

stets die eben beschriebenen, dieser Deformation entsprechenden Umformungen der sequentiellen Darstellungen vornimmt, verwandelt man H_1 mittels (R1) und (R2) in H_2, was zu beweisen war.

Wir verwenden im weiteren häufig noch die folgenden sich aus (R2) ergebenden Relationen:

$$\left.\begin{aligned} F \times G &= (F \circ E_m) \times G = (F \times E_j) \circ (E_m \times G)\,, \\ (F \times G) &= (E_n \circ F) \times G = (E_n \times G) \circ (F \times E_k) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{R2}')$$

mit $k = Q(G)$, $j = Z(G)$, $m = Q(F)$, $n = Z(F)$.

Im folgenden bezeichnen wir eine Kategorie $\mathfrak{F}$, die bezüglich einer weiteren Verknüpfung „$\times$" eine Halbgruppe bildet, und deren Elemente den Relationen (R2) genügen, als eine *X-Kategorie*.

Wir wollen uns nochmals der Überführung einer sequentiellen Darstellung in eine andere mittels (R1) und (R2) zuwenden.

Wir gehen jetzt davon aus, daß wir zwei Repräsentanten eines Netzes haben, die ja nach Definition ineinander deformierbar sind. Wir können zunächst beide Netze deformieren, so daß keine zwei Punkte der Netze auf einer Parallelen zur Grundseite g der Rahmen liegen. Nun zerlegten wir jede elementare Deformation in Teildeformationen, so daß sich bei einem Schritt die Reihenfolge von höchstens zwei inneren Punkten änderte. Blieb die Reihenfolge der Punkte die gleiche, dann blieb die sequentielle Darstellung unverändert, im anderen Fall konnten wir durch Anwendung von Relationen aus (R1) und (R2) in der sequentiellen Darstellung eine Vertauschung der entsprechenden Faktoren vornehmen. Zur Vereinfachung eines späteren Beweises wollen wir diese Abänderungen von sequentiellen Darstellungen etwas formaler beschreiben. Diese Abänderungen der sequentiellen Darstellungen werden eindeutig beschrieben durch die Angabe der beiden Faktoren, die die Änderung der Reihenfolge betrifft, wenn der Punkt des oberen Faktors Anfangspunkt oder der Punkt des unteren Faktors Endpunkt mindestens einer Strecke ist. Wird der i-te Faktor der Darstellung H in der oben im einzelnen beschriebenen Weise mit dem $(i+1)$-ten vertauscht und ist das Ergebnis die sequentielle Darstellung H', dann schreiben wir $H' = v_i\, H$.

Um die Bedingung für die Eindeutigkeit von $v_i\, H$ zu gewährleisten, machen wir *für diesen Abschnitt* die *Voraussetzung*, daß in den betrachteten Netzen entweder jeder Punkt Anfangspunkt oder jeder Punkt Endpunkt mindestens einer Strecke ist. Dies ist die Voraussetzung des angestrebten Satzes 5.

Eine Folge

$$H_1,\ H_2 = v_{i_1} H_1\,, \ldots,\ H_j = v_{i_{j-1}} H_{j-1}$$

von sequentiellen Darstellungen nennen wir eine Deformationskette. Wir schreiben auch $H_j = v\, H$ mit $v = [v_{i_1}, \ldots, v_{i_{j-1}}]$.

Aus dem Beweis zu Satz 4 ergibt sich:

Hilfssatz 1. *Sind H und H' sequentielle Darstellungen des gleichen Netzes, dann gibt es eine Deformationskette v mit $H' = v\, H$; dabei lassen wir für v auch das leere Wort e zu und definieren $e\, H = H$.*

Man erkennt: Ist $H' = v_i\, H$, dann ist auch $v_i\, H'$ erklärt, und es ist $H = v_i\, H' = [v_i, v_i]\, H$.

Definition. Eine Deformationskette v heißt *reduziert*, wenn in v kein Paar $[v_i, v_i]$ auftritt. Wir sagen, daß v' aus v durch Reduktion hervorgeht, wenn sich v' durch Streichungen von Paaren $[v_i, v_i]$ aus v erhalten läßt.

Es folgt unmittelbar

Hilfssatz 2. *v beschreibe eine Deformationskette von H und v' gehe aus v durch Reduktion hervor. Ist $H' = v\,H$, dann ist auch $H' = v'H$.*

Wir verfolgen nun, welchen „Weg" der erste Faktor einer sequentiellen Darstellung (der am weitesten rechts stehende Faktor bzw. der oberste Punkt des zugehörigen Repräsentanten) bei einer Deformation durchläuft.

Wir setzen

$$h(0) = 1 = \text{Platz des ersten Faktors vor der ersten Deformation};$$
$$h(l)\ (0 \leqq l < j) = \text{Platz des ersten Faktors nach der } l\text{-ten Deformation}.$$

Wir finden:

$$h(l+1) = \begin{cases} h(l), & \text{falls } i_{l+1} \neq h(l),\, h(l) - 1; \\ h(l) + 1, & \text{falls } i_{l+1} = h(l); \\ h(l) - 1, & \text{falls } i_{l+1} = h(l) - 1; \end{cases}$$

wobei $v = [v_{i_1}, \ldots, v_{i_j}]$ die betrachtete Deformationskette beschreibt.

Hilfssatz 3. *Ist $h(l) \neq h(l+1)$ für $l = 0, \ldots, k-1$ $(\geqq 0)$ und ist $h(0) = h(k)$ bei der Deformationskette v von H, dann ist v nicht reduziert.*

Beweis. Sei $v = [v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}]$. Wegen $k \geqq 1$ und $h(l) \neq h(l+1)$ existiert ein j mit $h(j) \geqq 1$ und $h(j)$ maximal. Dann ist $h(j) = h(j+1) + 1$ und $v_{i_j} = v_{i_{j+1}}$ und also v nicht reduziert.

Hilfssatz 4. (1) *Ist $v = [v_i, v_k]$ mit $i \neq k \pm 1$ eine Deformationskette für H, dann ist auch $v' = [v_k, v_i]$ eine Deformationskette für H, und es gilt $v\,H = v'H$.*

(2) *Ist $v = [v_i, v_{i+1}, v_i]$ und $v' = [v_{i+1}, v_i, v_{i+1}]$, dann ist v genau dann für H erklärt, wenn v' für H erklärt ist, und es gilt dann $v\,H = v'H$.*

(3) *Sei v' eine Teilfolge von v, und sei v'' genau dann für eine sequentielle Darstellung H_1 erklärt, wenn dies für v' gilt, und es sei $v'H_1 = v''\,H_1$. Erhält man v^+ aus v durch Ersetzen von v' durch v'', dann sind v und v^+ für genau die gleichen sequentiellen Darstellungen erklärt, und es gilt, wenn v für H definiert ist, $v\,H = v^+H$.*

Beweis. (1) und (2) sind geometrisch evident. (3) ergibt sich aus Abb. 12, worin $[v_1, v', v_2] = v$ ist und v_1, v', v_2 Teilfolgen von v sind.

$$H \xrightarrow{\;v_1\;} H_1 \underset{v''}{\overset{v'}{\rightrightarrows}} H_2 \xrightarrow{\;v_2\;} H_3$$

Abb. 12

1.4. Die Eindeutigkeit der Lösung von Gleichungen $N \circ X = N'$

Satz 5. *Sei $F, G, G' \in \mathfrak{N}$ und $G' \circ F$ erklärt, und jeder innere Punkt von $G \circ F$ sei Endpunkt von mindestens einer Strecke. Dann gilt:*

$$G \circ F = G' \circ F \Rightarrow G = G'. \tag{1}$$

Es gilt auch die dazu symmetrische Aussage: Ist $F \circ G$ und $F \circ G'$ erklärt und jeder innere Punkt Anfangspunkt mindestens einer Strecke, dann folgt:

$$F \circ G = F \circ G' \Rightarrow G = G'. \tag{2}$$

Sind die Voraussetzungen von (1) oder aber die Voraussetzungen von (2) erfüllt, so gilt:

$$F \times G = F \times G' \Rightarrow G = G', \tag{3}$$
$$G \times F = G' \times F \Rightarrow G = G'. \tag{4}$$

Wie man aus dem Beispiel auf Abb. 13 erkennt, sind die Behauptungen (1) und (2) des Satzes ohne eine Einschränkung über die inneren Punkte nicht

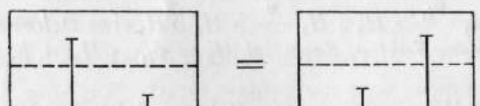

Abb. 13

richtig. Das Beispiel zeigt:

$$(E \times \gamma_1^0) \circ \gamma_1^0 = (\gamma_1^0 \times E) \circ \gamma_1^0,$$
$$E \times \gamma_1^0 \neq \gamma_1^0 \times E.$$

Für die Aussagen (3) und (4) ist die Voraussetzung zwar überflüssig, aber sie erleichtert sehr den Beweis. Da wir mit (3) und (4) mit Voraussetzung im folgenden auskommen, geben wir uns mit Satz 5 zufrieden.

Wir beweisen zunächst (3) und (4) unter der Voraussetzung von (1) und (2).

Beweis zu (3) und (4). Sei die Voraussetzung von (1) erfüllt. Wir wenden (R2′) an und erhalten

$$G \times F = (G \times E_n) \circ (E_m \times F),$$
$$G' \times F = (G' \times E_n) \circ (E_k \times F).$$

Wegen $G \times F = G' \times F$ ist $Q(G) = Q(G')$ und also $k = m$. Wir wenden die Voraussetzung zu (4) und die Behauptung (1) an und haben

$$G \times E_n = G' \times E_n.$$

Nun wählen wir sequentielle Darstellungen H von G und H' von G'. Hieraus erhalten wir eine sequentielle Darstellung von $G \times E_n$ bzw. $G' \times E_n$, indem wir jeden Faktor von rechts „direkt" mit E_n multiplizieren; die so erhaltenen sequentiellen Darstellungen seien H_1 bzw. H_1'. Aus Hilfssatz 1 folgt, daß es eine Deformationskette v gibt mit $H_1' = v\,H_1$. Nun sieht man, daß v auch eine Deformationskette für H beschreibt und daß $H' = v\,H$ ist, woraus $G = G'$ folgt.

Der Beweis läuft analog, wenn die Voraussetzung von (2) erfüllt ist; wir bringen dann $G \times F$ auf die Form, die für die Anwendung von (2) geeignet ist. Damit ist (4) bewiesen. (3) beweist man entsprechend. Es genügt nun, (1) zu beweisen, da der Beweis zu (2) symmetrisch verläuft. Wir beweisen zunächst noch einige Hilfssätze.

Hilfssatz 5. *$H_2 \circ H_1$ und $H_2' \circ H_1$ seien sequentielle Darstellungen des gleichen Netzes. H_1 bestehe aus einem einzigen Faktor. Ist die Voraussetzung von (1) erfüllt, und ist $v = [v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}]$ eine Deformationskette für $H_2 \circ H_1$ mit $H_2' \circ H_1 = v(H_2 \circ H_1)$, dann ist $h(0) = h(k)$, wo h die in 1.3. definierte Funktion ist.*

Beweis. Wir führen den Beweis geometrisch, indem wir zu Repräsentanten der Netze übergehen, die den beiden sequentiellen Darstellungen entsprechen. $h(k)$ gibt an, an welche Stelle in der Reihenfolge der inneren Punkte der in $H_2 \circ H_1$ oberste Punkt durch die v entsprechende Deformation gebracht wird.

Auf Grund der Voraussetzung von (1) wissen wir, daß der in $H_2 \circ H_1$ und $H_2' \circ H_1$ jeweils oberste Punkt mit mindestens einem Anfangspunkt des Netzes verbunden ist. Da in beiden sequentiellen Darstellungen die beiden obersten Faktoren gleich sind und von einem Anfangspunkt höchstens eine Strecke ausgeht, bei der Deformation aber die Inzidenzrelationen des Streckenkomplexes nicht geändert werden, folgt, daß der an $(h(k))$-ter Stelle in $H_2' \circ H_1$ stehende Punkt mit dem an erster Stelle stehenden identisch ist, d. h. $h(k) = 1 = h(0)$.

Hilfssatz 6. *Sei* $H_2 \circ H_1 \xrightarrow{v_{i_1}} H_2' \circ H_1 \xrightarrow{v} H_2^{+} \circ H_1$ *eine Deformationskette, und H_1 bestehe aus nur einem Faktor, dann ist* $H_2' = v_{i_1 - 1} H_2$, *d. h.* $H_2^{+} \circ H_1 = v((v_{i_1-1} H_2) \circ H_1)$.

Beweis. Da $i_1 > 1$, betrifft v_{i_1} den ersten Faktor nicht, sondern nur Faktoren in H_2. Deren Platz hat aber in H_2 gemessen eine um 1 kleinere Stellenzahl als in $H_2 \circ H_1$, woraus die Behauptung folgt.

Beschreibt $v = [v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}]$ eine Deformationskette für H, dann definieren wir

$$A(v) = \text{Anzahl der Stellen } i \text{ mit } h(i) = h(i+1)$$
$$\text{für } i = 0, \ldots, k-1.$$

Hilfssatz 7. *Sei* $v = [v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}]$ *eine reduzierte Deformationskette für H, und sei $h(0) = h(k)$. Ist $A(v) > 0$, dann gibt es eine Deformationskette* $v' = [v_{l_1}, \ldots, v_{l_k}]$ *mit $l_1 > 1$ und $v'H = v\,H$, $A(v) = A(v')$ und $h(0) = h'(k)$.*

Beweis. Da $A(v) > 0$ ist, gibt es ein j mit $h(j) = h(j-1)$; j sei die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft. Ist $j = 1$, dann ist $v_{i_1} \neq v_1$, und es ist nichts zu zeigen.

Sei also $j > 1$. Da v reduziert ist und j minimal ist mit $h(j) = h(j-1)$, folgt $i_1 = 1$, $i_2 = 2, \ldots, i_{j-1} = j-1$, $h(j-1) = j$ und $i_j \neq j-1, j$. Ist $i_j > j$, dann können wir v_{i_j} nach Hilssatz 4 mit $[v_1, \ldots, v_{j-1}]$ vertauschen und erhalten so die gesuchte Deformationskette v'. Ist $i_j < j-1$, dann können wir so lange vertauschen, bis wir an ein v_l mit $l = i_j + 1$ gelangen. Dann wenden wir die in Hilfssatz 4 betrachtete Ersetzung von $[v_{l-1}, v_l, v_{l-1}]$ durch $[v_l, v_{l-1}, v_l]$ an, so daß die nun erhaltene Deformationskette die Gestalt $[v_1, \ldots, v_{l-2}, v_l, v_{l-1}, v_l, \ldots]$ hat. Wir können nun v_l mit $[v_1, \ldots, v_{l-2}]$ vertauschen und haben so eine Deformationskette v' von gleicher Länge wie v erhalten, die mit $v_l \neq v_1$ beginnt und für die $v'H = v\,H$ gilt (nach Hilfssatz 4). Man erkennt ohne weiteres: $A(v') = A(v)$ und $h(k) = h'(k)$, d. h. $h(k) = 1$.

Hilfssatz 8. *Sei H_1 ein Netz mit genau einem inneren Punkt, $H_2 \circ H_1$ und $H_2' \circ H_1$ seien erklärt und mögen die Voraussetzung von (1) (Satz 5) erfüllen.* $v = [v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k-1}}]$ *definiere eine Deformationskette für $H_2 \circ H_1$ mit* $H_2' \circ H_1 = v\,(H_2 \circ H_1)$. *Dann gilt: H_2 und H_2' definieren das gleiche Netz.*

Beweis (vollständige Induktion nach der Länge k der Deformationskette).

1. Verankerung. Für $k = 0$, d. h. $v = e$ folgt $H_2 = H_2'$.

2. Die Behauptung sei richtig für $0 \leqq n \leqq k-1$. Ist v nicht reduziert, dann folgt die Behauptung über Hilfssatz 2. Sei also v reduziert. Dann ist $A(v) > 0$ wegen Hilfssatz 3. Nach Hilfssatz 5 ist $h(0) = h(k)$. Damit sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 erfüllt. Es gibt ein

$$v' = [v_{l_1}, \ldots, v_{l_{k-1}}] \text{ mit } v_{l_1} \neq v_1 \text{ und } v'(H_2 \circ H_1) = H_2' \circ H_1.$$

Wir wenden nun Hilfssatz 6 an und erhalten ein H_2'' mit

$$H_2 \circ H_1 \xrightarrow{v_{l_1}} H_2'' \circ H_1 \xrightarrow{[v_{l_2}, \ldots, v_{l_k}]} H_2' \circ H_1$$

und

$$H_2'' = v_{l_1 - 1} H_2.$$

Auf Grund der Induktionsvoraussetzung können wir schließen, daß H_2'' und H_2' das gleiche Netz definieren, woraus dies auch für H_2 und H_2' folgt, was zu beweisen war.

Nun können wir Satz 5 endlich beweisen.

Sei $G \circ F = G' \circ F$. Dann wählen wir eine sequentielle Darstellung von G, G' und F, die wir zu sequentiellen Darstellungen von $G \circ F$ und $G' \circ F$ zusammensetzen. Enthält F genau einen inneren Punkt, dann folgt direkt aus Hilfssatz 8 die Behauptung $G = G'$. Wir beweisen den Satz allgemein durch Induktion nach der Anzahl der inneren Punkte von F, d. h. nach der Anzahl der Faktoren in der sequentiellen Darstellung von F. Sei $F_2 \circ F_1 = F$, und F_1 enthalte genau einen inneren Punkt, dann gilt $(G \circ F_2) \circ F_1 = (G' \circ F_2) \circ F_1$, woraus nach vorigem $G \circ F_2 = G' \circ F_2$ folgt. Hierauf können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten $G = G'$, womit Satz 5 bewiesen ist.

Die Ergebnisse des Satzes 5 gestatten es, uns ein einfaches Verfahren zur Entscheidung der Gleichheit von Netzen anzugeben, die den Voraussetzungen des Satzes genügen.

Eine notwendige Voraussetzung für $N_1 = N_2$ ist $Q(N_1) = Q(N_2)$ und $Z(N_1) = Z(N_2)$ und die Gleichheit der Anzahl der inneren Punkte von N_1 und N_2.

N_1 und N_2 mögen die Voraussetzungen von (1) und die genannten notwendigen Bedingungen erfüllen; m sei die Anzahl der inneren Punkte von N_1 und N_2.

Ist $m = 1$, dann ist die Entscheidung trivial.

Sei $m > 1$. In diesem Fall gibt es ein Netz N_1' mit $m-1$ inneren Punkten, so daß gilt: $N_1 = N_1' \circ H_1$. Nun untersuchen wir, ob sich von N_2 der Faktor H_1 abspalten läßt. Dies kann geschehen, indem man nachprüft, ob es einen inneren Punkt von N_2 mit der gleichen Anzahl von Ein- und Ausgängen wie der innere Punkt von H_1 gibt, und ob dieser Punkt in entsprechender Weise mit den Anfangspunkten von N_2 verbunden ist, wie es für den inneren Punkt von H_1 gilt. Gibt es keinen solchen Punkt, dann folgt $N_1 \neq N_2$. Gibt es einen solchen Punkt, dann können wir schreiben $N_2 = N_2' \circ H_1$ und wegen Satz 5 folgt $N_2 = N_1$ genau dann, wenn $N_2' = N_1'$. N_2' und N_1' haben aber nur $m-1$ innere Punkte. Also haben wir damit ein Verfahren, daß uns spätestens in m Schritten die gesuchte Entscheidung liefert.

2. Definition von Kategorien mit einem direkten Produkt durch Erzeugende und definierende Relationen

2.1. Die freie durch $\mathfrak{A}$ erzeugte X-Kategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$

Sei $\mathfrak{A}$ ein endliches oder abzählbar unendliches Alphabet, und Q und Z seien Abbildungen, die jedem Element von $\mathfrak{A}$ eine ganze Zahl zuordnen.

Sei nun N' Repräsentant eines Netzes und $\mathfrak{M}_{N'}$ die Menge seiner inneren Punkte. Eine Abbildung $f\colon \mathfrak{M}_{N'} \to \mathfrak{A}$ heißt *erlaubt*, wenn für $P \in \mathfrak{M}_{N'}$ gilt:

(1) $Q(f(P))$ = Anzahl der Strecken in N', die P als Endpunkt besitzen;
(2) $Z(f(P))$ = Anzahl der Strecken von N', die P als Anfangspunkt besitzen.

Eine erlaubte Abbildung belegt also die Punkte von N' mit Zeichen aus $\mathfrak{A}$, so daß der jeweilige Punkt und das zugeordnete Zeichen die gleiche Anzahl von „Ein- und Ausgängen" besitzen.

Wir bilden nun Paare (N', f) und wollen zwischen diesen eine Gleichheitsrelation definieren. Seien N_1 und N_2 Repräsentanten von $N \in \mathfrak{N}$. Dann gibt es eine Deformation Δ von N_1 in N_2. Wir definieren eine Abbildung $\alpha_\Delta : \mathfrak{M}_{N_1} \to \mathfrak{M}_{N_2}$, indem wir setzen: $\alpha_\Delta(P_1) = P_2$ genau dann, wenn P_1 durch Δ in P_2 übergeht. Man erkennt, daß α_Δ eine eineindeutige Abbildung ist.

Wir definieren nun

$$(N_1, f) = (N_2, g) \iff \text{es existiert ein } \Delta \text{ mit } N_2 = \Delta N_1 \text{ und } f = g \circ \alpha_\Delta.$$

Hierdurch erhalten wir eine Klasseneinteilung der Paare (N_1, f); die durch (N_1, f) definierte Klasse bezeichnen wir mit $[N_1, f]$.

Sei

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) = \{[N_1, f] \mid N_1 \text{ Repräsentant von } N;\ N \in \mathfrak{N};\ f : \mathfrak{M}_{N_1} \to \mathfrak{A} \text{ ist eine erlaubte Abbildung}\}.$$

Wir definieren Q und Z auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ durch $Q([N_1, f]) = Q(N_1)$ und $Z([N_1, f]) = Z(N_1)$.

Ist $F = [N_1, f]$, $G = [N_2, g]$, $H = [N_3, h] \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und ist $N_3 = N_2 \circ N_1$ und

$$h(P) = \begin{cases} f(P) \text{ für } P \in \mathfrak{M}_{N_1}, \\ g(P) \text{ für } P \in \mathfrak{M}_{N_2}, \end{cases}$$

dann schreiben wir $H = G \circ F$.

Man erkennt, daß $G \circ F$ erklärt ist für $G, F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und $Q(G) = Z(F)$ (und zwar unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten) und daß das Produkt assoziativ ist.

Es gibt zu jedem Element $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ eine Links- und eine Rechts-Einheit. Es ist $\mathfrak{M}_{E_k} = \emptyset$ und damit $f_k : \mathfrak{M}_{E_k} \to \mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt. Man erkennt:

$$F \circ [E_k, f_k] = [E_m, f_m] \circ F = F$$

für $k = Q(F)$ und $m = Z(F)$.

Der Kürze halber schreiben wir für $[E_k, f_k]$ wieder E_k.

Damit haben wir gezeigt, daß $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ bezüglich „$\circ$" eine Kategorie bildet. Nun erklärt man in entsprechender Weise das direkte Produkt in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, bezüglich dessen $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ eine Halbgruppe bildet.

Ist γ_n^m eine Erzeugende von $\mathfrak{N}$, dann gibt es genau so viele erlaubte Abbildungen f zu γ_n^m, wie es Elemente A in $\mathfrak{A}$ gibt mit $Q(A) = m$ und $Z(A) = n$. Wir identifizieren nun $[\gamma_n^m, f] \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mit dem zugehörigen $A \in \mathfrak{A}$ und haben dann in $\mathfrak{A}$ ein vollständiges Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Wir fassen das Ergebnis zusammen zu

Satz 6. *$\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ist bezüglich „$\circ$" eine Kategorie und bezüglich „$\times$" eine Halbgruppe. $\mathfrak{A}$ bildet ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Die Elemente von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ genügen* (R1$^+$) *und* (R2$^+$), *d. h. $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ist eine X-Kategorie (siehe* 1.3.).

Die Relationen von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ erhält man leicht aus den Relationen von $\mathfrak{N}$. Zunächst sieht man, daß

$$(E_{n+k} \times A) \circ (B \times E_{k+l}) = (B \times E_{k+j}) \circ (E_{k+m} \times A) \qquad (\mathrm{R1}^+)$$

für $A \in \mathfrak{A}$ und $Q(A) = l$, $Z(A) = j$, $Q(B) = m$, $Z(B) = n$ und

$$\left.\begin{aligned} (H \circ G) \times F &= (H \times F) \circ (G \times E_m) = (H \times E_n) \circ (G \times F), \\ F \times (H \circ G) &= (F \times H) \circ (E_m \times G) = (E_n \times H) \circ (F \times G) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{R2}^+)$$

für $F, G, H \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und $m = Q(F)$, $n = Z(F)$ und $Q(H) = Z(G)$ Relationen von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ sind. Ganz analog wie in 1.3. zeigt man, daß sich durch (R1$^+$) und (R2$^+$) zwei Darstellungen des gleichen Elements aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ineinander überführen lassen. (R2$^+$) ist gerade hinreichend dafür, daß $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ eine X-Kategorie ist.

2.2. Die Eindeutigkeit der Lösung $F \circ X = G$

Hilfssatz 9. *Seien N und N' Repräsentanten des gleichen Netzes, das den Voraussetzungen des Satzes 5(1) oder 5(2) genügt. Δ_1 und Δ_2 seien zwei Deformationen mit $N' = \Delta_1 N = \Delta_2 N$. Dann gilt: $\alpha_{\Delta_1} = \alpha_{\Delta_2}$.*

Beweis. Es genügt, den Fall zu betrachten, daß $N = N'$ ist, d. h. daß Δ_1 eine Deformation des Repräsentanten in sich selbst ist. Die Behauptung lautet dann: α_{Δ_1} ist eine Identität.

Man kann sich weiter auf den Fall beschränken, daß keine zwei Punkte von N auf einer Parallelen zu g liegen. Dann gehen wir zu der zugehörigen sequentiellen Darstellung H von N über; Δ wird dann zu einer Deformationskette v von H. Wir zeigen durch vollständige Induktion nach der Anzahl n der inneren Punkte von N, daß α_v eine Identität ist.

Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Sei für $n - 1 \geqq 1$ die Behauptung bewiesen und 5(1) erfüllt. Dann spalten wir von H den obersten Faktor ab; d. h., wir zerlegen $H = H_2 \circ H_1$, wo H_1 nur einen inneren Punkt enthält. Nach Voraussetzung ist $v(H_2 \circ H_1) = H_2 \circ H_1$. Nach Hilfssatz 5 geht bei dieser Deformation der oberste Faktor in den obersten Faktor über, d. h., ist P der oberste Punkt in N, dann ist $\alpha_v(P) = P$. Nun folgt durch eine mehrfache Anwendung des Hilfssatzes 7, daß es ein $v' = v^+ \cdot v^*$ gibt, so daß $h(i) = h(0)$ für $0 < i \leqq k$ und $h(i) \neq h(i+1)$ für $k < i < m$ gilt, wo k die Länge von v^+ und m die Länge von v' ist. Beim Beweis von Hilfssatz 7 benutzten wir den Hilfssatz 4, der die Regeln enthält, durch die v' aus v gewonnen werden kann. Man sieht, daß α_v gegenüber diesen Ersetzungen invariant ist. Also ist $\alpha_v = \alpha_{v'} = \alpha_{v^*} \circ \alpha_{v^+}$.

Nun folgt aus Hilfssatz 3, daß sich v^* auf e (leere Deformationskette) reduzieren läßt. Also ist $v(H_2 \circ H_1) = v^+(H_2 \circ H_1)$ und $\alpha_v = \alpha_{v^+}$. Nun betreffen die Operationen von v^+ aber nur H_2. Erniedrigen wir also den Index jeder Komponente von v^+ um 1 und bezeichnen wir die so für H_2 erhaltene Deformationskette mit v'', dann gilt $v(H_2 \circ H_1) = (v'' H_2) \circ H_1$, $v'' H_2 = H_2$ und $\alpha_{v''} = \alpha_v$ auf $\mathfrak{M}_{H_2}$. Auf H_2 können wir nun die Induktionsannahme anwenden und erhalten, daß $\alpha_{v''}$ eine Identität ist. Also ist α_v die Identität, was zu zeigen war.

Satz 7. (1) *Enthält $\mathfrak{A}$ kein Element A mit $Z(A) = 0$, dann gilt für $F, G, G' \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mit $Z(F) = Q(G) = Q(G')$:*

$$F \circ G = F \circ G' \Rightarrow G = G'.$$

(2) *Enthält $\mathfrak{A}$ kein Element A mit $Q(A) = 0$, dann gilt für $F, G, G' \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mit* $Q(F) = Z(G) = Z(G')$:

$$G \circ F = G' \circ F \Rightarrow G = G'.$$

(3) *Unter den Voraussetzungen von* (1) *oder* (2) *gilt*

$$F \times G = F \times G' \Rightarrow G = G',$$
$$G \times F = G' \times F \Rightarrow G = G'.$$

Beweis. Behauptung (3) folgt wie in Satz 5 aus 5(1) oder 5(2). Aus Symmetriegründen genügt es, (1) zu zeigen. Sei $F = [N_1', f_1]$, $G = [N_2', f_2]$, $G' = [N_3', f_3]$. Sind N_1, N_2, N_3 die durch N_1', N_2' bzw. N_3' definierten Netze, dann gilt $N_2 \circ N_1 = N_3 \circ N_1$, und N_1, N_2, N_3 erfüllen die Voraussetzung von 5(1). Also folgt $N_2 = N_3$. Es gibt also eine Deformation Δ mit $N_3' = \Delta N_2'$. Nun erhalten wir eine Deformation Δ' mit $\Delta'(N_2' \circ N_1') = N_3' \circ N_1'$, indem wir N_1' festhalten und Δ auf N_2' anwenden. Nun gibt es nach Voraussetzung eine Deformation Δ^+ mit $N_3' \circ N_1' = \Delta^+(N_2' \circ N_1')$ und $f' = f^+ \circ \alpha_{\Delta^+}$ mit

$$f'(P) = \begin{cases} f_1(P) & \text{für } P \in \mathfrak{M}_{N_1'}, \\ f_2(P) & \text{für } P \in \mathfrak{M}_{N_2'}; \end{cases}$$

$$f^+(P) = \begin{cases} f_1(P) & \text{für } P \in \mathfrak{M}_{N_1'}, \\ f_3(P) & \text{für } P \in \mathfrak{M}_{N_3'}. \end{cases}$$

Nach Hilfssatz 9 ist aber $\alpha_{\Delta'} = \alpha_{\Delta^+}$ und also $f_2 = f_3 \circ \alpha_\Delta$, woraus $G = G'$ folgt.

2.3. Bildung der Faktorkategorie von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ nach einem Relationensystem

Eine Menge $\mathfrak{R} = \{F_1 \equiv G_1, \ldots, F_k \equiv G_k\}$ mit $F_i, G_i \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und $Q(F_i) = Q(G_i)$ und $Z(F_i) = Z(G_i)$ für $i = 1, \ldots, k$ heißt ein *Relationensystem*.

Wir wollen in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mittels $\mathfrak{R}$ eine Äquivalenzrelation definieren.

Zwei Elemente $H, H' \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ heißen *benachbart* bezüglich $\mathfrak{R}$, wenn es $H_1, H_2, H_2', H_3 \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ gibt, so daß folgendes gilt:

(1) $H = H_1 \circ H_2 \circ H_3$ und $H' = H_1 \circ H_2' \circ H_3$.

(2) Es existiert ein i mit $1 \leq i \leq k$, so daß für geeignete l und j gilt:

$$H_2 = E_l \times F_i \times E_j, \qquad H_2' = E_l \times G_i \times E_j$$

oder

$$H_2 = E_l \times G_i \times E_j, \qquad H_2' = E_l \times F_i \times E_j.$$

H und H' heißen *äquivalent* bezüglich $\mathfrak{R}$, wenn es eine Kette $H = H_1, H_2, \ldots, H_m = H'$ gibt, so daß H_i und H_{i+1} für $i = 1, \ldots, m-1$ benachbart sind bezüglich $\mathfrak{R}$ oder gleich sind. Wir schreiben dafür $H \equiv H'(\mathfrak{R})$. Es ist klar, daß diese Definition reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, also eine echte Klasseneinteilung festlegt. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$.

Hilfssatz 10. *Sei $H \equiv H'(\mathfrak{R})$, dann ist $Q(H) = Q(H')$ und $Z(H) = Z(H')$.*

Beweis. Es genügt, die Behauptung für benachbarte H, H' zu beweisen. Für Nachbarn ist die Behauptung aber klar, da sich nach Definition der Nachbarschaft von H und H' je ein erster und letzter Faktor abspalten läßt, die jeweils gleich sind.

Hilfssatz 11. *Sei $F \equiv F'(\mathfrak{R})$, $Q(F) = Z(G)$ und $Z(F) = Q(H)$, dann ist $F \circ G \equiv F' \circ G(\mathfrak{R})$ und $H \circ F \equiv H \circ F'(\mathfrak{R})$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 10 ist mit $F \circ G$ auch $F' \circ G$ und mit $H \circ F$ auch $H \circ F'$ erklärt. Es genügt, wieder die Behauptung für benachbarte F, F' zu beweisen. In diesem Fall gibt es Zerlegungen

$$F = A \circ B \circ C, \qquad F' = A \circ B' \circ C$$

mit $B = E_j \times F_i \times E_l$, $B' = E_j \times G_i \times E_l$ oder $B = E_j \times G_i \times E_l$, $B' = E_j \times F_i \times E_l$, deren Existenz hinreichend und notwendig für die Nachbarschaft der Produkte ist.

Nun ist aber

$$F \circ G = A \circ B \circ (C \circ G), \qquad F' \circ G = A \circ B' \circ (C \circ G);$$
$$H \circ F = (H \circ A) \circ B \circ C, \qquad H \circ F' = (H \circ A) \circ B' \circ C.$$

Also ist auch $F \circ G$ benachbart zu $F' \circ G$ und $H \circ F$ benachbart zu $H \circ F'$.

Hilfssatz 12. *Aus $F \equiv F'(\mathfrak{R})$, $G \equiv G'(\mathfrak{R})$ und $Q(F) = Z(G)$ folgt $F \circ G \equiv F' \circ G'(\mathfrak{R})$.*

Beweis. Aus Hilfssatz 11 folgt $F \circ G \equiv F \circ G'(\mathfrak{R})$ und $F \circ G' \equiv F' \circ G'(\mathfrak{R})$. Aus der Transitivität der Äquivalenz folgt $F \circ G \equiv F' \circ G'(\mathfrak{R})$.

Hilfssatz 13. *Sei $F \equiv F'(\mathfrak{R})$ und $G \equiv G'(\mathfrak{R})$, dann ist $F \times G \equiv F' \times G'(\mathfrak{R})$.*

Beweis. Es ist $F \times G = (F \times E_n) \circ (E_m \times G)$ und $F' \times G' = (F' \times E_n) \circ (E_m \times G')$, worin $n = Z(G)$ und $m = Q(F)$ ist. Aus der Definition der Nachbarschaft folgt unmittelbar $F \times E_n \equiv F' \times E_n(\mathfrak{R})$ und $E_m \times G \equiv E_m \times G'(\mathfrak{R})$. Aus Hilfssatz 12 folgt nun die Behauptung.

Satz 8. *Sei $\mathfrak{R}$ ein Relationensystem zu $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Definieren wir auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ die Funktionen Q und Z über Repräsentanten und ebenso die Komposition „$\circ$“ und „$\times$“ für die Elemente von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$, dann wird $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ eine X-Kategorie.*

Als Beispiel einer topologisch interessanten Kategorie, die sich in dieser Form darstellen läßt, geben wir die Kategorie der *Zöpfe* an, die sich aus den Zopfgruppen (siehe [1]) ergibt, wenn man das direkte Produkt als Verknüpfung zu dem Gruppenprodukt hinzunimmt.

Sei $\mathfrak{A} = \{V, V'\}$, $Q(V) = Z(V) = Q(V') = Z(V')$ und

$$\mathfrak{R}_3 = \{V \circ V' \equiv E_2,\ V' \circ V \equiv E_2,$$
$$(E \times V) \circ (V \times E) \circ (E \times V) \equiv (V \times E) \circ (E \times V) \circ (V \times E)\},$$

dann ist $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}_3$ die Kategorie der Zöpfe; man erkennt: V und V' sind die zueinander inversen Verdrillungen von zwei Nachbarfäden und die zweite Relation in $\mathfrak{R}_3$ entspricht der Relation $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, n-1$ der n-fädigen Zopfgruppe. Die weiteren Relationen der Zopfgruppe $\sigma_i \sigma_k = \sigma_k \sigma_i$ für $i < k - 1$ gelten schon in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Die Zöpfe lassen sich leicht zu einer Kategorie der räumlichen Netze verallgemeinern, die für sich schon von topologischem Interesse ist (siehe Bemerkung am Schluß).

2.4. Darstellung von Funktionen mittels Basisfunktionen

S sei eine mindestens zwei Elemente enthaltende höchstens abzählbare Menge. Wir betrachten die Menge der Abbildungen der Form $f: S^n \to S^m$ mit $n, m = 0, 1, 2, \ldots$. Diese Menge bildet eine X-Kategorie $\mathfrak{C}$. S° enthält genau ein Element. Indem wir die Abbildungen $f: S^\circ \to S$ mit dem Bildelement des Elementes von S° identifizieren, brauchen wir im folgenden das Einsetzen von Elementen von S in Funktionen von $\mathfrak{C}$ nicht besonders zu betrachten, da sich dies nun durch eine Multiplikation von rechts mit einer Abbildung von S° in S erreichen läßt.

Sei nun $\mathfrak{B}$ eine endliche oder abzählbar unendliche Teilmenge von $\mathfrak{C}$, die keine Einheit enthält. Wir wollen uns mit der Frage befassen, welche Elemente von $\mathfrak{C}$ durch Elemente von $\mathfrak{B}$ durch Anwendung der beiden in $\mathfrak{C}$ definierten Verknüpfungen erhalten werden können. Im Zusammenhang mit dem in der Einleitung geschilderten Problem der Automatentheorie formuliert: Welche Funktionen lassen sich mittels eines gegebenen Bausteinsystems, dessen Funktionen gerade die Menge $\mathfrak{B}$ bilden, darstellen? Wie erhält man alle möglichen Darstellungen der gleichen Funktion?

Dazu sei $\mathfrak{A}$ ein Alphabet und $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung auf $\mathfrak{B}$. Ist $A \in \mathfrak{A}$ und $\varphi(A) = f$ eine Abbildung $S^n \to S^m$, dann definieren wir $Q(A) = n$, $Z(A) = m$. $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ sei die durch $\mathfrak{A}$ mit Q, Z erzeugte X-Kategorie mit direktem Produkt. Dann läßt sich φ zu einem Funktor von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ in $\mathfrak{C}$ fortsetzen; d. h. zu einer Abbildung (die wir wieder mit φ bezeichnen), die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $\varphi(F \circ G) = \varphi(F) \circ \varphi(G)$ für $Q(F) = Z(G)$ und $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$;

(2) $\varphi(F \times G) = \varphi(F) \times \varphi(G)$ für $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$;

(3) $\varphi(E) = I$, wo $I: S \to S$ die Identität ist.

Wir behaupten schärfer:

Satz 9. *$\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ läßt sich zu einem (wieder mit φ bezeichneten) Funktor $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$ fortsetzen, und diese Fortsetzung ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Um φ auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ fortzusetzen, verwenden wir gerade die Bedingungen (1), (2) und (3). Da $\mathfrak{A}$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ist, ist es klar, daß jedem Element von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mindestens ein Element von $\mathfrak{C}$ zugeordnet wird. Es könnte aber sein, daß diese Definition widersprüchlich ist, da die Darstellung der Elemente von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ in $\mathfrak{A}$ nicht eindeutig ist. Zum Beweis der Eindeutigkeit von φ genügt es zu zeigen, daß die Relationen ($R1^+$) und ($R2^+$) von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ in Identitäten von $\mathfrak{C}$ übergehen, was sich leicht ergibt.

φ ist eine Abbildung von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ auf die von $\mathfrak{B}$ erzeugte Unterkategorie $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{C}$. Aus dem Beweis zu Satz 9 geht hervor, daß sich jede Abbildung $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, wo $\mathfrak{B}$ Erzeugendensystem irgendeiner X-Kategorie $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{C}$ ist, zu einem Funktor von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ auf die durch $\mathfrak{B}$ erzeugte Kategorie fortsetzen läßt, wenn nur für jedes $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ gilt:

$$Q(F) = Q(E_k) \Rightarrow Q(\varphi(F)) = Q(\varphi(E_k)),$$
$$Z(F) = Z(E_l) \Rightarrow Z(\varphi(F)) = Z(\varphi(E_l)).$$

Also gilt:

Korollar zu Satz 9. *$\mathfrak{A}$ ist ein freies Erzeugendensystem von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und also $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ eine freie X-Kategorie.*

Durch φ^{-1} wird in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ eine Klasseneinteilung definiert. Wir bezeichnen jedes Element $F \in \varphi^{-1}(f)$, wo $f \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$ ist, als eine Darstellung von f bezüglich $\mathfrak{B}$. Im Zusammenhang mit der Aufgabe aus der Automatentheorie bedeutet $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ die Menge der möglichen Netzwerke aus dem Bausteinsystem $\mathfrak{A}$, wo φ die Funktion der Bausteine angibt. $\varphi^{-1}(f)$ gibt die Menge aller möglichen Realisierungen von f mit dem Bausteinsystem $\mathfrak{A}$ an.

Ein Funktor φ heißt mit einem Relationensystem $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ *verträglich*, wenn φ die Menge der Relationen in eine Menge von Identitäten im Bildbereich abbildet.

Wie üblich bezeichnen wir den Funktor $\varphi': \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$, der F seine Kongruenzklasse nach $\mathfrak{R}$ zuordnet, als *kanonischen* Funktor.

Man erkennt: Ist $\varphi: \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ verträglich und ist $\varphi': \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ der kanonische Funktor, dann gibt es einen Funktor $\varphi^+: \mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R} \to \mathfrak{C}$ mit $\varphi = \varphi^+ \circ \varphi'$.

Literatur

[1] Artin, E., Theorie der Zöpfe. Abh. des Math. Seminars der Hamburgischen Universität Bd. IV (1926)

[2] Curtis, H. A., A New Approach to the Design of Switching Circuits. D. van Norstrand Com., Princeton 1962

[3] Hermes, H., Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961

[4] Puppe, D., Kategorien und Funktoren. Ausarbeitung einer Vorlesung an der Universität Saarbrücken im Sommersemester 1963

[5] Reidemeister, K., Einführung in die kombinatorische Topologie. Vieweg-Verlag, Braunschweig 1951

[6] Kurosch, A. G. u. a., Zur Theorie der Kategorien. Mathematische Forschungsberichte XV. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963

Kurzfassung

Das Zusammensetzen von Schaltkreisen A, B zu neuen Schaltkreisen läßt sich auf zwei Grundverknüpfungen zurückführen:

1. Das Hintereinanderschalten $A \circ B$ von A und B, wenn die Anzahl der Ausgänge von B gleich der Anzahl der Eingänge von A ist.
2. Das Zusammenfassen von A und B zu einer begrifflichen Einheit $A \times B$; $A \times B$ hat jeden Eingang beziehungsweise Ausgang sowohl von A als auch von B als Eingang bzw. Ausgang.

Zwischen verschiedenen Zusammenschaltungen wird eine Äquivalenz erklärt, die mit „$\circ$" und „$\times$" verträglich ist. Überträgt man diese Verknüpfungen auf die Menge der Äquivalenzklassen, dann erhält man eine algebraische Struktur, die bezüglich „$\circ$" eine Kategorie und bezüglich „$\times$" eine Halbgruppe bildet. Beide Verknüpfungen genügen der Relation

$$(A \times B) \circ (C \times D) = (A \circ C) \times (B \circ D).$$

Eine Kategorie mit dieser Eigenschaft bezeichnen wir als X-Kategorie. Die hier betrachteten X-Kategorien $\mathfrak{F}$ lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

1. Die Menge der Einheiten von $\mathfrak{F}$ bildet bezüglich „$\times$" eine freie Halbgruppe mit einer Erzeugenden e,
2. $\mathfrak{F}$ hat höchstens abzählbar unendlich viele Erzeugende oder es gilt
3. $\mathfrak{F}$ ist Unterkategorie einer 1 und 2 genügenden Kategorie.

Es wird gezeigt, daß für eine freie X-Kategorie, die 1, 2 und 3 genügt, unter einer schwachen Voraussetzung die Kürzungsregeln bezüglich „$\circ$" und „$\times$" gelten.

Eine besondere Rolle spielt im Aufbau dieser Theorie die X-Kategorie der ebenen Netze, ein Begriff der kombinatorischen Topologie, der den Artinschen Zöpfen verwandt ist. Jede der betrachteten freien X-Kategorien läßt sich durch einen Funktor auf eine X-Kategorie von ebenen Netzen abbilden. Die Bedeutung hiervon liegt in dem folgenden Sachverhalt: Jeder Satz über $\mathfrak{F}$ wird durch den Funktor

in einen Satz über Netze verwandelt. Hat man den Satz für die Netze bewiesen, ist es im allgemeinen leicht, indem man von den Netzen zu $\mathfrak{F}$ übergeht, den Satz auch für $\mathfrak{F}$ zu beweisen, d. h., die Sätze über $\mathfrak{F}$ haben einen wesentlichen kombinatorischen Gehalt. Dies ist der Grund, daß beim Aufbau der Theorie die Netze an den Anfang gestellt wurden.

Die Verbindung der „Schaltkreise" mit ihrer Funktion stellt ein Funktor von $\mathfrak{F}$ in die X-Kategorie $\mathfrak{C}_S$ der Abbildungen vom Typ $S^n \to S^m$ her, wo S eine höchstens abzählbar unendliche Menge ist, die aber mindestens zwei Elemente enthält. Das „$\times$"-Produkt ist in $\mathfrak{C}_S$ das cartesische Produkt.

Abstract

The composition of switching circuits A, B, to new circuits can be reduced to two basic operations:

1. The sequential composition $A \circ B$ of A and B, if the number of outputs of B is equal to the number of inputs of A.
2. The composition of A and B to $A \times B$ analogue to the cartesian product. The number of inputs of $A \times B$ is equal the sum of the numbers of the inputs of A and B. The same holds for the outputs.

Between different compositions a equivalence is introduced which is compatible with "$\circ$" and "$\times$". When the compositions are carried over to the set of the equivalence classes, one gets a algebraical structure, that forms category respective to "$\circ$" and a semi-group (monoid) respective "$\times$". The compositions satisfy the relation

$$(A \times B) \circ (C \times D) = (A \circ C) \times (B \circ D)$$

if $A \circ C$ and $B \circ D$ are defined. A category with this property is called a X-category. The X-categories $\mathfrak{F}$ studied here can be characterized in the following way:

1. The set of units of $\mathfrak{F}$ form a semi-group generated by one generator relative to "$\times$",
2. $\mathfrak{F}$ has a countable generator set or it holds
3. $\mathfrak{F}$ is a subcategory of a category satisfying 1 and 2.

In a free X-category of this type holds the concellation law relativ to "$\circ$" and "$\times$" under a weak condition.

In the whole theory the X-category of „plane nets" a concept of the combinatorial topology related to the braids of Artin plays an important role. Each of the studied free X-categories $\mathfrak{F}$ may be mapped on to a X-category of plane nets by a functor. Each theorem about $\mathfrak{F}$ by the functor is carried over to a theorem about a category of nets. The theorem proved for the nets can easy be proved in most cases for $\mathfrak{F}$; i. e. the theorems about $\mathfrak{F}$ have an essential combinatorial character. This is the reason that the first chapter only deals about nets.

The connection of the switching circuits represented by the elements of $\mathfrak{F}$ with their function gives a functor from $\mathfrak{F}$ into the X-category $\mathfrak{C}_S$ of the maps of the type f: $S^n \to S^m$, where S is a countable set containing at least two elements. The "$\times$"-product is in $\mathfrak{C}_S$ the cartesian product.

Резюме

Составление новых схем из данных схем A, B сводится к двум основным операциям:

1. Последовательная операция $A \circ B$, если число выходов схемы B равно числу входов схемы A.

2. Соединение схем A и B к схеме $A \times B$; число входов схемы $A \times B$ равно сумме входов схем A и B. Тоже самое считается для выходов.

Между схемами определяется эквивалентность, совместимая с операциями „$\circ$" и „$\times$". Если перенести эти операции на множество классов эквивалентности, получается алгебраическая структура, образующая категорию относительно „$\circ$" и полугруппу относительно „$\times$". Обе операции удовлетворяют соотношению

$$(A \times B) \circ (C \times D) = (A \circ C) \times (B \circ D) .$$

Категория с этим свойством называется X-категорией. Рассмотренные в данной работе X-категории можно характеризовать следующим образом:

1. Множество единиц X-категории $\mathfrak{F}$ образует свободную полугруппу с порождающим элементом e,
2. Множество всех порождающих элементов из $\mathfrak{F}$ не более чем счетно.
3. $\mathfrak{F}$ является подкатегорией категории, удовлетворяющей 1. и 2. В такой свободной X-категории имеют место правила сокращения относительно „$\circ$" и „$\times$", если выполняется некоторое слабое условие.

При построении этой теории особенную роль играет X-категория „плоских сетей"-понятие комбинаторной топологии, которая имеет сходство с „косами Артина". Каждую изучащуюся здесь свободную X-категорию можно отобразить функтором на X-категорию плоских сетей. Каждая теорема относительно $\mathfrak{F}$ переносится функтором в теорему о сетях. Если доказана теорема о сетях, то вообще не трудно доказать аналогичную теорему для $\mathfrak{F}$, т. е. теоремы о X-категории $\mathfrak{F}$ имеют существенное комбинаторное содержание. Это явилось причиной того, что в начало построения излагаемой здесь теории поставленные сети.

Связь схем с их функциями является функтором X-категории $\mathfrak{F}$ в X-категорию $\mathfrak{C}_S$, где $\mathfrak{C}_S$ есть отображение типа $S^n \to S^m$ и S не более чем счетное множество, содержащее по крайней мере два элемента; „X"-операция является в $\mathfrak{C}_S$ прямым произведением множесть.

(Eingegangen am 9. 3. 1965)

Anschrift des Verfassers:

Dr. G. Hotz
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität des Saarlandes
66 Saarbrücken 15

Max Müller
24.4.67

Sonderdruck
aus der Zeitschrift

**Elektronische
Informationsverarbeitung
und Kybernetik**

Band 1, Heft 4, 1965

G. Kotz

Eine Algebraisierung des Syntheseproblems
von Schaltkreisen <u>II</u>.

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

V/12/6

EIK 1 (1965) Seite 209 – 231

Eine Algebraisierung des Syntheseproblems von Schaltkreisen II[1])

Von GÜNTER HOTZ[2])

3. Definition der freien Kategorie mit direktem Produkt als Faktorkategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{N}$

3.1. Einführung der Projektion und der Diagonalisierung

In den Abschnitten 1 und 2 haben wir die in der Einleitung geschilderte technische Aufgabe in ein algebraisches Problem verwandelt. Nun wollen wir unsere Theorie weiter dem technischen Sachverhalt anpassen.

Beim Zusammenschalten von Automaten wird man in der Regel einen Ausgang eines Automaten auf mehr als einen Eingang des folgenden Automaten schalten wollen und andererseits nicht jeden Ausgang des vorhergehenden Automaten für jeden nachfolgenden Automaten benötigen. Dementsprechend nehmen wir in unser Alphabet $\mathfrak{A}$ Zeichen auf, die Verzweigungen eines Drahtes repräsentieren und solche, die eine Auswahl der angebotenen Eingänge herstellen. In der Sprache der zugehörigen Abbildungen heißt das, daß wir in das Basissystem stets Abbildungen von dem Typ $f\colon S \to S^n$ mit $f(s) = [s, \ldots, s]$, d. h. Diagonalisierungen, aufnehmen und die Projektion von S^n auf eine oder mehrere Komponenten. Wir kommen mit einem endlichen Basissystem aus, wenn wir zu der Abbildung $u\colon S \to S^0$ und der Diagonalisierung $S \to S^2$ noch eine weitere Abbildung $v\colon S^2 \to S^2$ mit $v(s_1, s_2) = [s_2, s_1]$ für $[s_1, s_2] \in S^2$ hinzunehmen; d. h., mit diesen drei Basisfunktionen können wir jede Projektion und Diagonalisierung in $\mathfrak{C}$ erzeugen.

Die Hinzunahme der Abbildung v kann man noch weiter motivieren: In der modernen Schaltungstechnik geht man mehr und mehr zu gedruckten Schaltungen über, für die Permutationen von Anschlüssen, die zu Überkreuzungen der Leitungen führen würden, zu vermeiden sind; bei der Realisierung einer Schaltung als ebenes Netz kommt eine Überkreuzung gerade in der Verwendung von v zum Ausdruck.

Sei $\mathfrak{A}' = \{U, V, D\}$ und $Z(U) = 0$, $Q(U) = Q(D) = 1$, $Z(D) = Q(V) = Z(V) = 2$. In Zukunft betrachten wir stets Alphabete $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$; U übernimmt die Rolle der Abbildung $S \to S^0$, D die Rolle der Diagonalisierung und V die der Funktion v.

---

[1]) Habilitationsschrift, Universität des Saarlandes, Saarbrücken 1965. Referenten: Prof. Dr. J. DÖRR, Prof. Dr. D. PUPPE (beide Saarbrücken), Prof. Dr. F. L. BAUER (München) – Der erste Teil dieser Arbeit, der die Abschnitte 1 und 2 sowie das Literaturverzeichnis umfaßt, findet sich im Heft 3 (1965) der vorliegenden Zeitschrift.

[2]) Institut für Angewandte Mathematik der Universität des Saarlandes, Saarbrücken (Direktor: Prof. Dr. J. DÖRR).

Wir definieren

$$U_1^2 = E \times U, \quad U_2^2 = U \times E$$

und setzen

$$\mathfrak{R}_0 = \{U_1^2 \circ D \equiv E, \quad U_2^2 \circ D \equiv E, \quad U_1^2 \circ V \equiv U_2^2, \quad U_2^2 \circ V \equiv U_1^2\}.$$

Satz 10. *Ist $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, dann gilt für jeden Funktor $\varphi: \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$ mit $Q(\varphi(E)) = S$:*

$$\varphi(U) = u: S \to S^0,$$

$$\varphi(U_i^2) = \textit{Projektion von } S^2 \textit{ auf die i-te Komponente.}$$

Ist φ mit $\mathfrak{R}_0$ verträglich, dann ist $\varphi(D)$ die Diagonalisierung $S \to S^2$ und $\varphi(V) = v$.

Beweis. 1. Da φ ein Funktor ist, folgt aus $E \times E_0 = E$ und $Q(\varphi(E)) = S$, daß $Q(\varphi(E_0)) = S^0$ ist. Also ist $Q(\varphi(U)) = S$ und $Z(\varphi(U)) = S^0$. Da es nur eine einzige Abbildung von S in S^0 gibt, folgt damit die Behauptung.

2. Da φ ein Funktor ist, gilt

$$\varphi(U_1^2) = \varphi(E \times U) = \varphi(E) \times \varphi(U).$$

Sei $[s_1, s_2] \in S^2$ und $\square$ das Element von S^0, dann haben wir

$$\varphi(U_1^2)(s_1, s_2) = [\varphi(E)(s_1), \varphi(U)(s_2)] = [s_1, \square] = s_1.$$

3. Die Behauptung über U_2^2 beweist man analog.

4. $\varphi(D)$ ist eine Abbildung von S in S^2. Sei $s \in S$ und $[s_1, s_2] = \varphi(D)(s)$. Da φ mit $\mathfrak{R}_0$ verträglich ist, folgt

$$\varphi(U_1^2) \circ \varphi(D) = \varphi(E)$$

und also

$$\varphi(U_1^2)(s_1, s_2) = s,$$

woraus sich $s_1 = s$ ergibt. Analog erhält man $s_2 = s$ und damit $\varphi(D)(s) = [s, s]$ für $s \in S$.

5. Durch die gleichen Schlüsse wie eben folgt

$$\varphi(U_1^2) \circ \varphi(V) = \varphi(U_2^2).$$

Setzen wir $[s_1', s_2'] = \varphi(V)(s_1, s_2)$, dann folgt

$$\varphi(U_1^2)(s_1', s_2') = \varphi(U_2^2)(s_1, s_2).$$

Also ist $s_1' = s_2$. Analog ergibt sich $s_2' = s_1$. Also gilt

$$\varphi(V)(s_1, s_2) = [s_2, s_1]$$

für $[s_1, s_2] \in S^2$.

Wir nennen in Zukunft einen Funktor $\varphi: \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$ *normal*, wenn $Q(\varphi(E)) = S$ und φ mit $\mathfrak{R}_0$ verträglich ist.

Wir zeigen nun, daß sich in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mit $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ jede Projektion und Diagonalisierung von $\mathfrak{C}$ bezüglich jedes normalen Funktors $\varphi: \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$ darstellen läßt und daß die Darstellung jeder dieser Abbildungen von der speziellen Wahl des normalen Funktors unabhängig ist.

Wir definieren zunächst die *Vertauschung* des ersten Faktors von S^n mit den $n-1$ folgenden Faktoren, deren Reihenfolge untereinander nicht geändert wird. Wir setzen

$$V_{1,1} = V$$

und definieren induktiv $V_{1,n}$ für $n \geqq 2$ durch

$$V_{1,n} = (E \times V_{1,n-1}) \circ (V \times E_{n-1}).$$

Mittels vollständiger Induktion zeigt man leicht

$$\varphi(V_{1,n})(s_1, \ldots, s_n) = [s_2, \ldots, s_n, s_1]$$

für $[s_1, \ldots, s_n] \in S^n$ (Abb. 14).

Hiermit können wir die Diagonalisierung verallgemeinern auf den Fall

$$f: S^n \to (S^n)^2.$$

Dazu definieren wir

$$D_1 = D,$$

$$D_n = (E \times V_{1,n} \times E_{n-1}) \circ (D \times E_{2n-2}) \circ (E \times D_{n-1})$$

für $n > 1$ (s. Abb. 15).

Man findet: Für jeden normalen Funktor φ gilt $\varphi(D_n)(s) = [s, s]$ für $s \in S^n$.

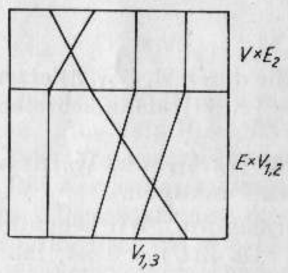

Abb. 14

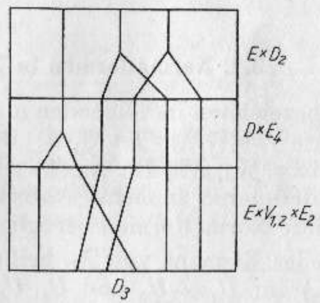

Abb. 15

Wir verallgemeinern weiter, indem wir setzen:

$$D_n^1 = D_n,$$

$$D_n^k = (D_n^{k-1} \times E_n) \circ D_n \text{ für } k > 1$$

(Abb. 16). Man erkennt hierin die Verallgemeinerung der Diagonalisierung zu der Form $S^n \to (S^n)^k$.

Durch die gleichen Schlüsse, wie im Beweis zu Satz 10 zeigt man, daß

$$U_i^n = U^{i-1} \times E \times U^{n-i}$$

für $1 \leqq i \leqq n$ bezüglich jedes normalen Funktors die Projektion von S^n auf den i-ten Faktor definiert, wenn $U^0 = E_0$ gesetzt wird. Durch

$$\overline{U}_i^n = E_i \times U^{n-i} \quad \text{bzw.} \quad U_i^{*n} = U^i \times E_{n-i}$$

wird die Projektion auf die ersten i bzw. letzten $n - i$ Faktoren von S^n definiert.

Wir fassen zusammen:

Satz 11. *Sei $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ und φ ein normaler Funktor. Hieraus folgt:*

$\varphi(V_{1,n})$ *vertauscht die erste mit den folgenden n Komponenten von $s \in S^{n+1}$,*

$\varphi(D_n^k)$ *ist die Diagonalisierung $S^n \to (S^n)^k$,*

$\varphi(U_i^n)$ *ist die Projektion von S^n auf die i-te Komponente.*

Für mit $\mathfrak{R}_0$ verträgliche Funktoren φ ist die Funktion der Elemente aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}')$ eindeutig bestimmt. Es gibt aber Elemente in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}')$, die zwar durch jeden normalen Funktor auf jeweils gleiche Elemente abgebildet werden, ohne daß diese Elemente kongruent nach $\mathfrak{R}_0$ sind. Wir werden später $\mathfrak{R}_0$ zu einem Relationensystem $\mathfrak{R}$ vergrößern mit dem jeder normale Funktor φ verträglich ist, und für das gilt:

$$\varphi(F) = \varphi(G) \Rightarrow F \equiv G(\mathfrak{R})$$

für $F, G \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$.

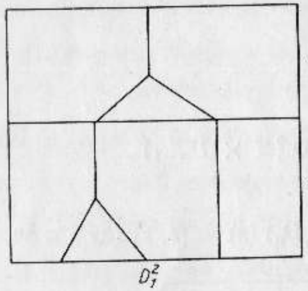

Abb. 16

3.2. Normalformen in $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$

Wir bezeichnen im folgenden mit $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_1}(\mathfrak{A})$ die durch $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ erzeugte Unterkategorie von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Ist $\mathfrak{A}_1 = \{A\}$ bzw. $= \{A, B\}$, dann schreiben wir auch $\mathfrak{F}_A(\mathfrak{A})$ bzw. $\mathfrak{F}_{A,B}(\mathfrak{A})$ für $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}_1}(\mathfrak{A})$.

Wir definieren zunächst *Normalformen* für $\mathfrak{F}_D$, $\mathfrak{F}_V$ und $\mathfrak{F}_U(\mathfrak{A})$ und vergleichen diese Normalformen bezüglich normalen Funktoren.

1. Jedes Element von $\mathfrak{F}_U$ heißt eine Normalform. Wir behaupten $\varphi(U_1) \neq \varphi(U_2)$ für $U_1 \neq U_2$ und U_1, U_2 aus $\mathfrak{F}_U$. Da $Z(U) = 0$ ist, läßt sich jedes Element in $\mathfrak{F}_U$ auf die Form

$$E_{i_1} \times U^{i_2} \times E_{i_3} \times \cdots \times U^{i_k} \times E_{i_{k+1}}$$

bringen. Wir schreiben U_1 und U_2 in dieser Form. Da beide verschieden sind, gibt es eine erste Stelle, in denen sich beide Ausdrücke unterscheiden; dies sei der j-te Eingang. Nach Voraussetzung enthält S mindestens zwei Elemente $s_1 \neq s_2$. Wir wählen nun ein Element $s \in S^n$, $n = Q(U_1)$, dessen Komponenten alle gleich s_1 sind, außer der j-ten, die gleich s_2 ist. Ist $Q(U_2) \neq Q(U_1)$, dann ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Im anderen Fall betrachten wir $\varphi(U_1)(s)$ und $\varphi(U_2)(s)$. Aus Satz 11 folgt, daß einer der beiden Funktionswerte die Komponente s_2 enthält und der andere nicht, womit die Behauptung bewiesen ist.

2. $D' \in \mathfrak{F}_D$ heißt eine Normalform, wenn D' eine Einheit ist, oder wenn es Diagonalisierungen $D_1^{k_i}$ gibt mit

$$D' = E_{i_1} \times D_1^{k_1} \times E_{i_2} \times D_1^{k_2} \times \ldots \times D_1^{k_j} \times E_{i_{j+1}};$$

die rechte Seite des Ausdruckes nennen wir eine Normaldarstellung von D'.

Sei $n = Q(D')$ und $s_1, \ldots, s_n \in S$. Dann ist $\varphi(D')(s_1, \ldots, s_n)$ erklärt und $\varphi(D')$ *ersetzt* die $(i_1 + 1)$-te Komponente s_{i_1+1} durch k_1 gleiche Komponenten, die $(i_1 + i_2 + 2)$-te Komponente durch $[s_{i_1+i_2+2}, \ldots, s_{i_1+i_2+2}]$ (k_2-mal) usw.

Sind D' und D'' zwei Normalformen aus $\mathfrak{F}_D$ mit verschiedenen Normaldarstellungen, dann gilt für jeden normalen Funktor φ: $\varphi(D') \neq \varphi(D'')$. Zum Beweis kann man annehmen $Q(D') = Q(D'')$, $Z(D') = Z(D'')$. Die betreffenden Normaldarstellungen von D' bzw. D'' müssen sich, da sie verschieden sind, zumindest für einen Eingang unterscheiden. Das kann nur dann sein, wenn die eine Normaldarstellung an diesem Eingang eine Einheit, die andere aber eine Diagonalisierung $D_1^{k_1}$ (an dieser Stelle) hat, oder wenn beide zwar eine Diagonalisierung an dieser Stelle besitzen, aber mit verschiedenem oberen Index. Wählen wir nun ein Element $s \in S^n$, das an dieser Stelle die Komponente s_2, an allen anderen Stellen die Komponente s_1 besitzt, dann enthält $\varphi(D')(s)$ und $\varphi(D'')(s)$ die Komponente s_2 in verschiedener Vielfachheit, woraus die Behauptung folgt.

3. $V' \in \mathfrak{F}_V$ heißt eine Normalform, wenn V' eine Einheit ist oder sich in der folgenden Weise induktiv definieren läßt:

$$V' = E_l \times V_{i,1} \times E_j$$

oder

$$V' = (E_1 \times V'') \circ (V_{i,1} \times E_{n-i-1}),$$

worin V'' eine Normalform ist, $n = Q(V')$ und

$$V_{i,1} = (V \times E_{i-1}) \circ (E_1 \times V \times E_{i-2}) \circ \ldots \circ (E_{i-1} \times V)$$

für $i > 1$. Die in der Definition benutzten Darstellungen heißen Normaldarstellungen. Aus Satz 10 ergibt sich, daß die Elemente $F \in \mathfrak{F}_V$ bei jedem normalen Funktor Permutationen der Komponenten von S^n ($n = Q(F)$) definieren. Die Normaldarstellungen geben ein bestimmtes Verfahren zur Herstellung dieser Permutationen an: $V_{i,1}$ vertauscht der Reihe nach die $(i + 1)$-te Komponente mit allen vorhergehenden bis sie auf die erste Stelle gekommen ist. Die Normaldarstellungen erzeugen die Permutationen, indem sie zunächst die erste Komponente herstellen, dann die zweite usw., von links nach rechts fortschreitend; dabei werden die durchzuführenden Vertauschungen durch die $V_{i,1}$ beschrieben, also stets auf kürzestem Weg ausgeführt. Es ist klar, daß auch hier für jeden normalen Funktor φ und verschiedene Normalformen V' und V'' gilt: $\varphi(V') \neq \varphi(V'')$. (Zur Veranschaulichung siehe Abb. 17, dort wird eine Normaldarstellung beschrieben: Es werden zunächst alle notwendigen Kreuzungen des am ersten Ausgang endenden „Fadens" durchgeführt, dann die noch übrigen Kreuzungen des zweiten Fadens, usw.)

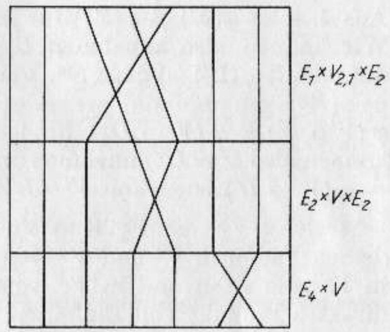

Abb. 17

4. Sei $U', U'' \in \mathfrak{F}_U$ und $F, F' \in \mathfrak{F}_{D,V}$ und $Q(F) = Z(U')$, $Q(F') = Z(U'')$.

Behauptung. Ist $U \neq U''$, dann gilt für jeden normalen Funktor φ:

$$\varphi\,(F \circ U') \neq \varphi\,(F' \circ U'').$$

Beweis. Wir können wieder annehmen $Q(U') = Q(U'') = n$. Nach 1. gibt es mindestens eine Komponente, die $\varphi(U')$ beseitigt, nicht aber $\varphi(U'')$. Wählen wir einen Punkt s in S^n, wie unter 1., dann kommt in genau einem Punkt $\varphi\,(F \circ U')\,(s)$ oder $\varphi\,(F' \circ U'')\,(s)$ s_2 als Komponente vor, da durch F bzw. F' eine Komponente höchstens vervielfacht oder permutiert wird.

5. Seien $D', D'' \in \mathfrak{F}_D$ Normalformen und $F, F' \in \mathfrak{F}_V$, $Q(F) = Z(D')$ und $Q(F') = Z(D'')$. Ist $D' \neq D''$, dann ist für jeden normalen Funktor φ wieder $\varphi\,(F \circ D') \neq \varphi\,(F' \circ D'')$.

Der Beweis läuft analog wie bei den vorhergehenden Punkten.

6. Wir wollen die Normalformen für $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ unter Benutzung der schon definierten Normalformen einführen. Naheliegend wäre der Versuch, $F \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ eine Normalform zu nennen, wenn es Normalformen V', D' und U' gibt, so daß gilt: $F = V' \circ D' \circ U'$. Bei dieser Definition würde aber der angestrebte Satz, daß verschiedene Normalformen bei jedem normalen Funktor zu verschiedenen Funktionen führen, falsch werden; denn V und D sind Normalformen und damit wäre auch $V \circ D$ eine Normalform. Es ist aber $\varphi\,(V \circ D) = \varphi(D)$, wie man leicht nachprüft. Durch eine Zusatzbedingung erhalten wir eine Normalform mit der gewünschten Eigenschaft.

$F \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}$ heißt eine Normalform, wenn es Normalformen $V' \in \mathfrak{F}_V$, $D' \in \mathfrak{F}_D$ und $U' \in \mathfrak{F}_U$ gibt mit $F = V' \circ D' \circ U'$, so daß V' keine „Fäden" von $D' \circ U'$ verdrillt, die von dem gleichen Eingang von $D' \circ U'$ herkommen.

Hilfssatz 14. *Sind $F', F^+ \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ Normalformen und ist $F^+ \neq F'$, dann gilt für jeden normalen Funktor $\varphi(F^+) \neq \varphi(F')$.*

Beweis. Seien F' und F^+ Normalformen, dann gibt es Normalformen U', D', V' und U^+, D^+, V^+ mit $F' = V' \circ D' \circ U'$ und $F^+ = V^+ \circ D^+ \circ U^+$. Aus 4. folgt $\varphi(F') \neq \varphi(F^+)$ für jeden normalen Funktor φ, wenn $U' \neq U^+$ ist. Wir können also annehmen $U' = U^+$. Ist $Q(U') = n$ und $Z(U') = m$, dann durchläuft $\varphi(U')\,(s)$ ganz S^m, wenn s die Menge S^n durchläuft; also ist $\varphi(F') = \varphi(F^+)$ genau dann, wenn $\varphi(V' \circ D') = \varphi(V^+ \circ D^+)$ gilt. Nach 5. ist aber $\varphi\,(V' \circ D') \neq \varphi\,(V^+ \circ D^+)$ für jeden normalen Funktor, wenn $D' \neq D^+$. Wir können also $D' = D^+$ annehmen und haben noch zu überlegen, wann $\varphi\,(V' \circ D') = \varphi\,(V^+ \circ D')$ ist, wenn $V' \circ D'$ und $V^+ \circ D'$ Normalformen sind.

Ist $V' \neq V^+$, dann gibt es einen ersten Ausgang B_l bzw. B_l' in V' bzw. V^+, dessen Faden in V' und V^+ von verschiedenen Eingängen kommt, sagen wir in V' vom i-ten und in V^+ vom k-ten Eingang. D' ist nach Definition ein direktes Produkt von Einheiten und Diagonalisierungen vom Typ D_1^j.

Liegt der i-te Eingang von V' an einem anderen direkten Faktor von D' als der k-te Eingang, dann ist nach früherem $\varphi\,(V' \circ D') \neq \varphi\,(V^+ \circ D')$ für alle normalen Funktoren φ. Es bleibt der Fall zu untersuchen, daß der i-te und der k-te Ausgang von D' Ausgänge eines direkten Faktors D_1^j sind. Wir können $i < k$ annehmen. In V' sei A_i der Eingang des Fadens, der in B_l endet. In

V^+ muß dieser Faden in einem B_m' mit $m > l$ enden, da nach Annahme V und V^+ in den Fäden, die in den q-ten Ausgängen ($q < l$) enden, übereinstimmen. Wir haben also in V^+ die Situation, wie sie durch Abb. 18 veranschaulicht wird. Wir wenden nun den JORDANschen Kurvensatz auf einen Repräsentanten von V^+ an. Der vom i-ten Eingang zum m-ten Ausgang laufende Faden w zerlegt das Innere des Rahmens in zwei getrennte Gebiete. Der vom k-ten Eingang zum l-ten Ausgang führende Faden w' verbindet Punkte P und P' im inneren des Rahmens, die durch w getrennt werden. Also schneidet w' den Weg w, da w', abgesehen von den Endpunkten, im Inneren des Rahmens verläuft. Der Schnittpunkt von w und w' entspricht aber gerade einem V in V^+. Also V^+ verdrillt Fäden, die von dem gleichen Eingang von $V^+ \circ D'$ herkommen, was nach der Definition der Normalformen ausgeschlossen ist. Also sind zwei Normalformen entweder gleich, oder sie werden durch jeden normalen Funktor auf verschiedene Funktionen abgebildet.

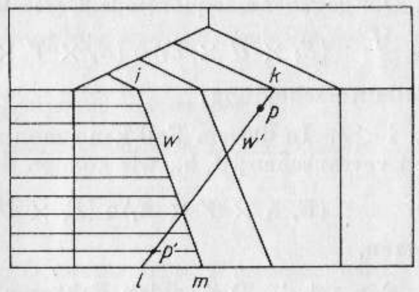

Abb. 18

3.3. Ein in $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ für Projektion und Diagonalisierung vollständiges Relationensystem

Wir geben nun eine Erweiterung des Relationensystemes $\mathfrak{R}_0$ an, mit dem wir jedes Element von $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ in eine Normalform überführen können. Wir definieren:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}' = \{ & U_1^2 \circ D \equiv E, \quad U_1^2 \circ V \equiv U_2^2, \quad V \circ V \equiv E_2, \quad V \circ D \equiv D\,,\\ & (V \times E) \circ (E \times V) \circ (V \times E) \equiv (E \times V) \circ (V \times E) \circ (E \times V)\,,\\ & (E \times D) \circ V \equiv (V \times E) \circ (E \times V) \circ (D \times E)\,,\\ & (D \times E) \circ D \equiv (E \times D) \circ D\}\,.\end{aligned}$$

Die beiden Relationen von $\mathfrak{R}_0$, die nicht in $\mathfrak{R}'$ vorkommen, lassen sich aus den beiden vorkommenden Relationen und $V \circ V \equiv E_2$ und $V \circ D \equiv D$ ableiten. Man erkennt leicht

Hilfssatz 15. *Jeder normale Funktor φ: $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$ ist mit $\mathfrak{R}'$ verträglich. Ist also $F \equiv G(\mathfrak{R}')$, dann ist für jeden normalen Funktor $\varphi(F) = \varphi(G)$.*

$\mathfrak{R}'$ ist aber auch eine echte Erweiterung von $\mathfrak{R}_0$, da, wie leicht zu sehen ist, $V \circ V \equiv E_2$ nicht aus $\mathfrak{R}_0$ abgeleitet werden kann.

Wir zeigen zunächst den

Hilfssatz 16. *Zu $F \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ existieren $U' \in \mathfrak{F}_U$, $V' \in \mathfrak{F}_V$ und $D' \in \mathfrak{F}_D$ mit $F \equiv G(\mathfrak{R}')$, worin $G = V' \circ D' \circ U'$ ist.*

Beweis. Wir denken uns F in sequentieller Darstellung gegeben. Wir zeigen, daß wir durch Anwendung von $\mathfrak{R}'$ die gegebene Darstellung so abändern können, daß schließlich die von dem Satz behauptete Darstellung erzielt wird.

1. Die gegebene sequentielle Darstellung von F enthält das Produkt

$$(E_i \times U \times E_l) \circ (E_s \times V \times E_t).$$

Fallunterscheidung:

a. $i < s$. In diesem Fall kann man schon in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ die Reihenfolge der Faktoren vertauschen; d. h., wir können das oben stehende Produkt durch

$$(E_{s-1} \times V \times E_l) \circ (E_i \times U \times E_l)$$

ersetzen.

b. $i > s + 1$. Die beiden Faktoren können in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ durch

$$(E_s \times V \times E_{t-1}) \circ (E_i \times U \times E_l)$$

ersetzt werden.

c. $i = s$. Durch Abspalten der gemeinsamen Einheiten erhalten wir aus dem gegebenen Produkt $(U \times E) \circ V$, was wir nach $\mathfrak{R}'$ durch $(E \times U)$ ersetzen dürfen.

d. $i = s + 1$. Durch Abspalten der gemeinsamen E-Faktoren erhalten wir $(E \times U) \circ V$, was nach $\mathfrak{R}'$ durch $U \times E$ ersetzt werden darf.

Damit haben wir gezeigt, daß ein sequentieller Faktor, der ein U enthält, stets vor einen solchen Faktor mit einem V gezogen werden kann, bzw., daß der V-Faktor beseitigt werden kann durch Anwendung von $\mathfrak{R}'$.

2. Die sequentielle Darstellung enthalte

$$(E_i \times U \times E_l) \circ (E_s \times D \times E_t).$$

Fallunterscheidung:

a. $i < s$ oder $i > s + 1$. Analog wie unter 1a zeigt man, daß sich die Reihenfolge der Faktoren vertauschen läßt.

b. $i = s$. Durch Abspalten der gemeinsamen Einheiten erhält man $(U \times E) \circ$ $\circ\, D$, was sich nach $\mathfrak{R}'$ durch E ersetzen läßt.

c. $i = s + 1$. Durch Abspalten der gemeinsamen Einheiten ergibt sich $(E \times U) \circ D$, was nach $\mathfrak{R}'$ durch E ersetzt werden darf.

3. Die betrachtete sequentielle Darstellung enthalte

$$(E_i \times D \times E_l) \circ (E^s \times V \times E_t).$$

Fallunterscheidung:

a. $i < s$ oder $i > s + 1$. Analog 1a.

b. $i = s$. Dieser Fall läßt sich mittels der Relation

$$(D \times E) \circ V \equiv (E \times V) \circ (V \times E) \circ (E \times D)$$

erledigen, die sich aus der in $\mathfrak{R}'$ vorkommenden Relation

$$(E \times D) \circ V \equiv (V \times E) \circ (E \times V) \circ (D \times E)$$

und $V \circ V \equiv E_2$ ableiten läßt.

c. $i = s + 1$. In diesem Fall läßt sich die Reihenfolge von D und V in der sequentiellen Darstellung durch Anwendung der zweiten Relation in 3b vertauschen.

Aus 1., 2., 3. folgt nun leicht die Behauptung des Satzes

Hilfssatz 17. *Zu $D' \in \mathfrak{F}_D(\mathfrak{A})$ existiert eine Normalform $D^+ \equiv D'(\mathfrak{R}')$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$(D_1^k \times E_l) \circ D_1^l = D_1^{k+l}.$$

Nach Definition ist $D_1^l = (D_1^{l-1} \times E) \circ D$, wenn $D_1^0 = E$ gesetzt wird. Für $l = 1$ gilt die Behauptung auf Grund der Definition. Sei nun $l > 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}(D_1^k \times E_l) \circ D_1^l &= (D_1^k \times E_{l-1} \times E) \circ (D_1^{l-1} \times E) \circ D = \\ &= ((D_1^k \times E_{l-1}) \circ D_1^{l-1} \times E) \circ D = (D_1^{k+l-1} \times E) \circ D = D_1^{k+l},\end{aligned}$$

wenn die Behauptung für $l - 1$ als Induktionsannahme vorausgesetzt wird.

Nun zum Beweis des Hilfssatzes: Man erkennt, daß sich jedes Element D' von $\mathfrak{F}_D(\mathfrak{A})$ in ein direktes Produkt von der Form

$$D' = (E_{i_1} \times F_1 \times E_{i_2} \times F_2 \times \ldots \times F_{i_j} \times E_{i_{j+1}})$$

aufspalten läßt, worin F_i vom Typ $F_i' \circ D$ ist mit $F_i' \in \mathfrak{F}_D(\mathfrak{A})$. (Das folgt daraus, daß $Q(D) = 1$ und D einzige Erzeugende von $\mathfrak{F}_D(\mathfrak{A})$ ist.)

Sei für jedes F_i eine sequentielle Darstellung gegeben und $l(F_i)$ die Anzahl der Faktoren der Darstellung; $l(D') = \max l(F_i)$. Wir führen den Beweis durch Induktion nach l. Für $l = 1$ ist D' eine Normalform, und damit ist die Induktion verankert.

Sei die Behauptung für $l - 1 \geqq 1$ bewiesen. Wie schon gezeigt, ist

$$F_i = F_i' \circ D$$

mit $F_i' \in \mathfrak{F}_D(\mathfrak{A})$. Es ist $Q(F_i') = 2$. Also läßt sich unsere sequentielle Darstellung von F_i auch schreiben:

$$F_i = (F_{i1} \times F_{i2}) \circ D; \quad F_{i1}, F_{i2} \in \mathfrak{F}_D(\mathfrak{A}); \quad Q(F_{i1}) = Q(F_{i2}) = 1.$$

Nun ist $l(F_{i1}) < l(D')$ und $l(F_{i2}) < l(D')$. Also gibt es nach der Induktionsannahme k_{i1} und k_{i2} mit

$$F_{i1} \equiv D^{k_{i1}}(\mathfrak{R}'); \quad F_{i2} \equiv D_1^{k_{i2}}(\mathfrak{R}').$$

Also ist

$$\begin{aligned}F_i &\equiv (D_1^{k_{i1}} \times D_1^{k_{i2}}) \circ D(\mathfrak{R}') \\ &= (D_1^{k_{i1}} \times E_{k_{i2}+1}) \circ (E \times D_1^{k_{i2}}) \circ D \\ &= (D_1^{k_{i1}} \times E_{k_{i2}+1}) \circ (E \times D_1^{k_{i2}-1} \times E) \circ (E \times D) \circ D \\ &\equiv (D_1^{k_{i1}} \times E_{k_{i2}+1}) \circ (E \times D_1^{k_{i2}-1} \times E) \circ (D \times E) \circ D \\ &= (D_1^{k_{i1}} \times E_{k_{i2}+1}) \circ ((E \times D_1^{k_{i2}-1}) \circ D \times E) \circ D.\end{aligned}$$

Nach Induktionsannahme ist

$$(E \times D_1^{k_{i2}-1}) \circ D = D^{k_{i1}}.$$

Nun folgt aus dem zu Beginn bewiesenen weiter

$$F_i = (D_1^{k_{i1}+k_{i2}} \times E) \circ D = D^{k_{i1}+k_{i2}+1},$$

q. e. d.

Hilfssatz 18. *Sei $F \in \mathfrak{F}_{V,D}(\mathfrak{A})$, dann gibt es eine Normalform $F' = V' \circ D'$ mit $V' \in \mathfrak{F}_V(\mathfrak{A})$ und $D' \in \mathfrak{F}_D(\mathfrak{A})$ mit $F \equiv F'(\mathfrak{R}')$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$(E_l \times V \times E_j) \circ D_1^k \equiv D_1^k(\mathfrak{R}') \quad \text{für} \quad l + 2 + j = k + 1. \tag{*}$$

Es ist nach der im Beweis zu Hilfssatz 18 gezeigten Identität:

$$(E_l \times V \times E_j) \circ D_1^k = (E_l \times V \times E_j) \circ (D_1^{l+1} \times E_j) \circ D_1^j =$$
$$= ((E_l \times V) \circ D_1^{l+1} \times E_j) \circ D_1^j.$$

Nun ist auf Grund der gleichen Identität:

$$(E_l \times V) \circ D_1^{l+1} = (E_l \times V) \circ (D_1^{l-1} \times E_2) \circ D_1^2 =$$
$$= (D_1^{l-1} \times V) \circ D_1^2 = (D_1^{l-1} \times V) \circ (D \times E) \circ D,$$

und wegen $(E \times D) \circ D \equiv (D \times E) \circ D(\mathfrak{R}')$ gilt weiter:

$$\equiv (D_1^{l-1} \times V) \circ (E \times D) \circ D = (D_1^{l-1} \times V \circ D) \circ D \equiv$$
$$\equiv (D_1^{l-1} \times D) \circ D = (D_1^{l-1} \times E) \circ (E \times D) \circ D \equiv D_1^{l+1}.$$

Setzen wir das Ergebnis oben ein, so erhalten wir (*).

Aus den Hilfssätzen 16 und 17 folgt, daß es eine Normalform $D' \in \mathfrak{F}_D(\mathfrak{A})$ gibt und ein $V^+ \in \mathfrak{F}_V(\mathfrak{A})$ mit $F \equiv V^+ \circ D'(\mathfrak{R}')$.

Wir haben zu zeigen, daß sich mittels der Relationen $\mathfrak{R}'$ erstens V^+ auf eine Normalform bringen läßt und zweitens, daß diese so gewählt werden kann, daß keine „Fäden" des zu $V^+ \circ D'$ gehörigen Netzes überkreuzt werden, die beide von demselben Eingang $V^+ \circ D'$ kommen: d. h., Fäden, die von einem direkten Faktor D_1^k von D' herstammen, sollen nicht verdrillt werden. Wir zeigen zuerst, daß wir in V^+ mittels $\mathfrak{R}'$ alle Faktoren V entfernen können, deren Eingangsfäden an dem gleichen Faktor D_1^k hängen.

Folgt ein solches V unmittelbar auf ein D_1^k, dann können wir unser Ziel durch Anwendung von (*) erreichen.

Folgt ein solches V nicht unmittelbar auf D_1^k, dann haben wir zwei Fälle zu untersuchen: die beiden Eingangsfäden von V rühren von benachbarten Ausgängen von D_1^k her, oder dies ist nicht der Fall.

Im ersten Fall können wir mittels $(V \times E) \circ (E \times V) \circ (V \times E) \equiv (E \times V) \circ \circ (V \times E) \circ (E \times V)$ das betrachtete V „unter den anderen Kreuzungen hindurch schieben", womit wir auf den schon erledigten Fall zurückkommen.

Im zweiten Fall schließen wir mittels des Jordanschen Kurvensatzes auf vorhergehende Kreuzungen von Linien, die von D_1^k herrühren. (Siehe Abb. 19; die herausgegriffene Überkreuzung ist durch * markiert.) Nun gibt es unter diesen Überkreuzungen eine, die an D_1^k am „nächsten" liegt. Diese Eingangsfäden müssen aber von benachbarten Ausgängen von D_1^k herrühren. Also

kann ich nach vorigem dieses V beseitigen. Man erkennt, daß das Verfahren dann abbricht, wenn kein V mehr existiert, das zwei Fäden aus dem gleichen D_1^k aufnimmt.

Damit haben wir gezeigt, daß es zu F eine Normalform D' gibt und ein V'' mit $F \equiv V'' \circ D'(\mathfrak{R}')$, wobei V'' keine Fäden von D' permutiert, die an dem gleichen Eingang von D' hängen. Wir haben noch zu zeigen, daß man V'' in eine Normalform V' bringen kann, ohne daß die eben beschriebene Eigenschaft von V'' verloren geht. Letzteres ergibt sich daraus, daß wir zur Herstellung der Normalform von den Relationen aus $\mathfrak{R}'$ nur $V^2 \equiv E$ und $(V \times E) \circ (E \times V) \circ (V \times E) \equiv \equiv (E \times V) \circ (V \times E) \circ (E \times V)$ verwenden, die die obige Eigenschaft nicht verändern. Die erste der beiden Relationen besagt, daß wir geradzahlige Verdrillungen von zwei Fäden beseitigen und ungeradzahlige durch eine einzige ersetzen dürfen. Die zweite Relation erlaubt uns, Fäden über Kreuzungspunkte hinwegzuschieben.

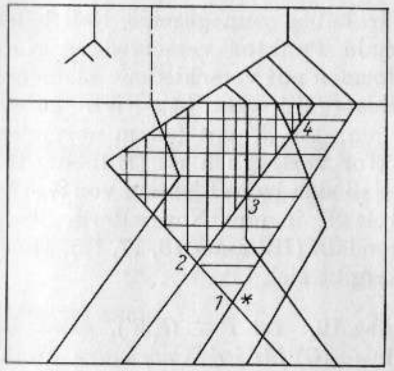

Abb. 19

Konstruktion der Normalform. Wir bezeichnen den „Faden" von V'', der in dem ersten Endpunkt von V'' endet, mit w.

Ist $Q(V'') = 1$, dann ist $V'' = E$ und V'' also Normalform. Wir machen vollständige Induktion nach $n = Q(V'')$. Zunächst zeigen wir, daß sich V'' durch die beiden genannten Relationen auf die Form

$$(E \times V^+) \circ (V_{k,1} \times E_{n-k-1})$$

bringen läßt. Da $Q(V^+) = n - 1$ ist, können wir dann auf V^+ die Induktionsannahme anwenden und erhalten die Behauptung.

Sei H eine sequentielle Darstellung von V''. Wir ersetzen jeden Faktor $(E_i \times V \times E_{n-i-2})$ von H, dessen l-ter Eingang auf dem Faden w liegt, durch

$$(V_{1,l-1} \times E_{n-l}) \circ (E_i \times V \times E_{n-i-2}) \circ (V_{l-1,1} \times E_{n-l}) \quad \text{für } l \leqq i,$$
$$(V_{1,l} \times E_{n-l-1}) \circ (V_{l-1,1} \times E_{n-l}) \quad \text{für } l = i + 1,$$
$$(V_{1,l-2} \times E_{n-l+1}) \circ (V_{l-1,1} \times E_{n-l}) \quad \text{für } l = i + 2,$$
$$(V_{1,l-1} \times E_{n-l}) \circ (E_{i+1} \times V \times E_{n-i-3}) \circ (V_{l-1,1} \times E_{n-l}) \quad \text{für } l \geqq i + 2$$

(siehe Abb. 20).

In jedem der vier Fälle wird $E_i \times V \times E_{n-i-2}$ durch Ausdrücke ersetzt, die zu dem Faktor kongruent modulo den beiden Relationen sind. In den drei ersten Fällen genügt schon $V^2 \equiv E_2$ allein, im vierten Fall braucht man auch $(V \times E) \equiv (E \times V) \circ (V \times E) \circ (E \times V) \circ (V \times E) \circ (E \times V)$, was aus beiden Relationen folgt. Man erhält so eine zu V'' modulo $\mathfrak{R}'$ kongruente Darstellung, worin sich benachbarte „Einschiebungen" mittels $V^2 \equiv E_2$ gerade wegkürzen lassen, da w den vorhergehenden Faktor im l-ten Ausgang verläßt, wenn er den folgenden im l-ten Eingang betritt.

Es bleibt damit nur der oberste Faktor der Ersetzung des obersten Faktors von H und der unterste Faktor der Ersetzung des untersten Faktors von H stehen. Auf Grund der Voraussetzung über den Faden w ergibt sich aber, daß dieser Faktor eine Einheit ist, so daß V'' die gewünschte Form angenommen hat.

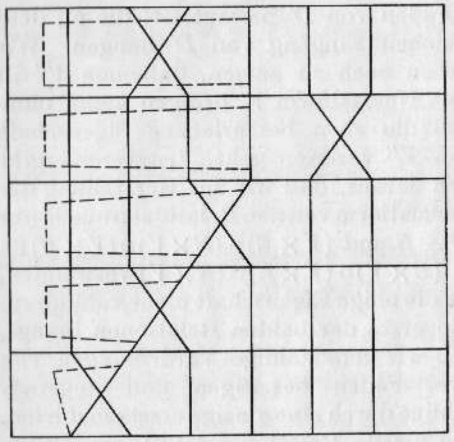

Abb. 20

Wir haben nun gezeigt, daß jeder normale Funktor verschiedene Normalformen auf verschiedene Elemente abbildet (Hilfssatz 14). Wir haben gesehen, daß $\mathfrak{R}'$ mit jedem normalen Funktor verträglich ist (Hilfssatz 15) und daß sich jedes Element von $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$ mittels $\mathfrak{R}'$ in eine Normalform überführen läßt (Hilfssatz 16, 17, 18). Hieraus ergibt sich

Satz 12. *Ist $F \equiv G(\mathfrak{R}')$, dann ist $\varphi(F) = \varphi(G)$ für jeden normalen Funktor φ. Ist $F \not\equiv G(\mathfrak{R}')$, dann ist $\varphi(F) \neq \varphi(G)$ für jeden normalen Funktor φ.*

Aus dem Beweis zu Hilfssatz 18 ergibt sich leicht ein

Korollar zu Hilfssatz 18. Sei $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{V,D}$, $Q(F_1) = Q(F_2)$ und $Z(F_1) = Z(F_2)$. Wird der i-te Eingang von F_1 genau dann mit dem j-ten Ausgang durch einen „Faden" von F_1 verbunden, wenn dies für F_2 gilt, dann ist $F_1 \equiv F_2(\mathfrak{R}')$.

Bemerkung. In diesem Zusammenhang ist leicht zu sehen, daß $\mathfrak{F}(V)/\mathfrak{R}^+$ mit

$$\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{F}(V) \cap \mathfrak{R}' = \{V \circ V \equiv E_2,\ (V \times E)\,(E \times V)\,(V \times E) \equiv \equiv (E \times V)\,(V \times E)\,(E \times V)\}$$

die Kategorie der Permutationen endlicher Mengen liefert. $\mathfrak{F}(V, D)/\mathfrak{R}^{++}$ mit $\mathfrak{R}^{++} = \mathfrak{R}' \cap \mathfrak{F}(V, D)$ steht in engem Zusammenhang mit der Kategorie $\mathfrak{C}^+$ der Abbildungen der Abschnitte der natürlichen Zahlen in sich. Vertauscht man in der Definition von D die Bedeutung von $Q(D)$ und $Z(D)$ und ändert man die Relationen von $\mathfrak{R}^{++}$ durch Vertauschung von Faktoren entsprechend ab, dann wird $\mathfrak{F}(V, D)/\mathfrak{R}^{++}$ isomorph zu $\mathfrak{C}^+$.

3.4. Das vollständige Relationensystem für die freie Kategorie mit direktem Produkt

Wir nehmen zu den Relationen $\mathfrak{R}'$ weitere Relationen $\mathfrak{R}''$ hinzu und beweisen für $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}''$ den in der Einleitung angekündigten Satz.

Für $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$ machen wir allerdings die folgende Einschränkung:

Es sei $Z(F) = 1$ für $F \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$.

Definition.

$$\mathfrak{R}'' = \{U \circ F \equiv U^n,\quad D \circ F \equiv (F \times F) \circ D_n^2,\quad V \circ (E \times F) \equiv \equiv (F \times E) \circ V_{1,n} \mid F \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}',\quad n = Q(F)\}.$$

Dabei haben wir

$$U^0 = E_0,\quad D_0^2 = E_0,\quad V_{1,0} = E_1$$

gesetzt.

Man erkennt ohne weiteres:

Hilfssatz 19. *Ist $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und $F \equiv G(\mathfrak{R}'')$, dann gilt für jeden normalen Funktor φ die Gleichung $\varphi(F) = \varphi(G)$.*

Aus $\mathfrak{R}''$ folgt

$$V \circ (V \circ (E \times F)) \equiv V \circ ((F \times E) \circ V_{1,n})\ (\mathfrak{R}'').$$

Benutzen wir $V \circ V \equiv E_2(\mathfrak{R}')$, dann erhalten wir

$$E \times E \equiv (V \circ (F \times E)) \circ V_{1,n}\ (\mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}'')$$

und weiter

$$(E \times F) \circ V_{n,1} \equiv V \circ (F \times E) \circ V_{1,n} \circ V_{n,1} \equiv V \circ (F \times E)\ (\mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}'').$$

Also gilt auch

$$V \circ (F \times E) \equiv (E \times F) \circ V_{n,1}\ (\mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}''). \qquad (+)$$

Da man direkte Produkte stets in die Form

$$F \times G = (F \times E) \circ (E_n \times G)$$

mit $Q(F) = n$ bringen kann, sind in $\mathfrak{R}''$ zusammen mit $(+)$ alle Kombinationsmöglichkeiten enthalten, in denen ein Element aus $\mathfrak{A}'$ links von einem Element aus $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$ steht. Man kann also $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mittels $\mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}''$ so umformen, daß jedes Element aus $\mathfrak{A}'$ rechts von jedem Element aus $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$ steht. Es gilt also

Hilfssatz 20. *Zu jedem $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ existiert ein $G \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'}$ und ein $H \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}$ mit $F \equiv G \circ H\ (\mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}'')$.*

Aus Interesse an rekursiven Funktionen, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen, beweisen wir den angekündigten Satz in einer etwas schärferen Form. Wir nehmen außer $\{U, V, D\}$ noch weitere ausgezeichnete Elemente C und T in $\mathfrak{A}$ auf mit $Q(T) = Z(T) = Z(C) = 1$ und $Q(C) = 0$ und definieren wie folgt: Ein normaler Funktor φ: $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$ heißt *T-normal*, wenn $\varphi(C)$, $\varphi(T \circ C)$, $\varphi({}^2T \circ C), \ldots$ ganz S durchläuft. Wir setzen

$$S^* = \{{}^nT \circ C \mid n = 0, 1, \ldots\}$$

mit

$${}^nT = T \circ T \circ \cdots \circ T\ (n\text{-mal}).$$

Hilfssatz 21. *Sei $C, T \in \mathfrak{A}$ und $L, M \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}'}(\mathfrak{A})$, $Q(L) = Q(M) = n$ und $Z(L) = Z(M) = m$.*

(1) *Ist $C' \in S^{*n}$, dann existiert ein $C'' \in S^{*m}$ mit $C'' \equiv L \circ C'(\mathfrak{R})$.*

(2) *Wenn für jedes $C' \in S^{*n}$ $L \circ C' \equiv M \circ C'(\mathfrak{R})$ gilt, dann folgt $L = M$.*

Beweis. Der Beweis für (1) ergibt sich wie der Beweis zu Hilfssatz 20 daraus, daß sich die Elemente von $\mathfrak{A}'$ mittels $\mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}''$ sämtlich nach rechts bringen lassen; da $Q(C) = 0$ ist, heißt das aber, daß sie vollständig eliminiert werden.

Zu (2): Aus Hilfssatz 20 folgt für jeden normalen Funktor φ, daß $\varphi(L) \circ \varphi(C') = \varphi(M) \circ \varphi(C')$ ist. Wählen wir φ T-normal, dann gilt $\varphi(L) = \varphi(M)$, woraus nach Satz 12 die Behauptung folgt.

Hilfssatz 22. *Sei $C, T \in \mathfrak{A}$ und $Q(F) \neq 0$ für $F \in \mathfrak{A}$, $F \neq C$. Ist $H_1, H_2 \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}''}$ und gilt für jeden T-normalen Funktor φ $\varphi(H_1) = \varphi(H_2)$, dann ist $H_1 = H_2$.* $(\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A}' \cup \{C\}, \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'' = \{A_1, \dots, A_{k-1}, T\})$.

Beweis. Zum Beweis konstruieren wir zu H_1 und H_2 einen T-normalen Funktor φ mit $\varphi(H_1) \neq \varphi(H_2)$ für $H_1 \neq H_2$.

Sei $\{\sigma_0, \dots, \sigma_m\}$ freies Erzeugendensystem einer Halbgruppe Ω und $S = \{w \in \Omega \mid w \neq 1\}$. Wir setzen $m = 2n + k + 1$, wo n vorerst eine beliebige natürliche Zahl sei.

Ist $Q(A_i) = j_i$, dann ordnen wir A_i eine Abbildung f_i: $S^{j_i} \to S$ zu, indem wir setzen:

$$f_i(w_1, \dots, w_{j_i}) = \sigma_{n+i}\, \sigma_{n+k}\, w_1 \dots w_{j_i}\, \sigma_{n+k+1},$$

worin $w_1, \dots, w_{j_i} \in S$ und die rechte Seite ein Produkt in Ω ist. Weiter definieren wir eine Abbildung t: $S \to S$ durch

$$t(\sigma_i) = \sigma_{i+1} \quad \text{für } 0 \leqq i < 2n + k + 1, \quad t(\sigma_{2n+k+1}) = \sigma_0 \sigma_0;$$

$$t(w) = \begin{cases} w'\, t(\sigma_i) & \text{für } w = w' \sigma_i \text{ und } i < 2n + k + 1, \\ t(w')\, \sigma_0 & \text{für } w = w' \sigma_{2n+k+1} \text{ und } w' \neq 1. \end{cases}$$

Die Abbildung t zählt ganz S auf.

Wir definieren nun

$$\begin{aligned} \varphi(A_i) &= f_i \text{ für } i = 1, \dots, k-1; \\ \varphi(T) &= t; \\ \varphi(C) &= \sigma_0; \\ \varphi(U) &= \text{Abbildung } u\colon S \to S^0; \\ \varphi(V) &= \text{Vertauschung der Faktoren in } S^2; \\ \varphi(D) &= \text{Diagonalisierung } S \to S^2. \end{aligned}$$

Wie wir früher sahen, läßt sich φ eindeutig zu einem Funktor $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}$ fortsetzen; φ ist mit $\mathfrak{R}$ verträglich, und es ist $\varphi(S^*) = S$ auf Grund der Definition von t, so daß also φ T-normal ist.

Wir wollen zeigen, daß

$$\varphi(H_1) = \varphi(H_2) \Longleftrightarrow H_1 = H_2,$$

wenn nur n geeignet gewählt wird (in Abhängigkeit von H_1 und H_2).

Sei

$$\mathfrak{B}_n = \{w \in \Omega \mid \text{zu } w \text{ existiert ein } H \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}''}(\mathfrak{A}) \text{ mit } \varphi(H) \varphi \circ (C^l) = w$$

und $l = Q(H)$; es gibt keine Zerlegung von H der Form $F_1 \circ (E_s \times {}^pT \times E_r) \circ F_2$ mit $p > n\}$.

Man erkennt:

(1) $\sigma_i \in \mathfrak{B}_n$ für $i = 0, \dots, n$;

(2) $w_1, \dots, w_{j_i} \in \mathfrak{B}_n$, $j_i = Q(A_i) \Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma_{n+i}\, \sigma_{n+k}\, w_1 \dots w_{j_i}\, \sigma_{n+k+1} \in \mathfrak{B}_n$ für $i = 1, \dots, k-1$;

(3) $w_n \in \mathfrak{B}_n$, $w = w' \cdot \sigma_{n+k+i} \Rightarrow w' \cdot \sigma_{n+k+i+1} \in \mathfrak{B}_n$ für $i = 1, \dots, n$.

Man sieht weiter, daß $\mathfrak{B}_n$ durch (1), (2) und (3) sogar vollständig charakterisiert wird.

Ist $w = \varphi(H \circ C^l)$ und gibt es keine Zerlegung von H der Form $F_1 \circ (E_s \times {}^pT \times E_r) \circ F_2$ mit $p > n$, dann ist H durch w eindeutig bestimmt.

Dies wird plausibel, wenn man sich σ_{n+k} überall durch die Klammer „(" und σ_{n+k+i} durch die Klammer „)" ersetzt denkt.

Beispiel. $H = A_i \circ (A_j \times A_l) \circ (T \circ T \times T \times E)$ mit $Q(A_i) = Q(A_j) = 2$, $Q(A_l) = 1$.

Man findet:

$$(H \circ C^3) = \sigma_{n+i}\, \sigma_{n+k}\, \sigma_{n+j}\, \sigma_{n+k}\, \sigma_2\, \sigma_1\, \sigma_{n+k+1}\, \sigma_{n+l}\, \sigma_{n+k} \sigma_0\, \sigma_{n+k+1}\, \sigma_{n+k+1}.$$

Mit Klammern geschrieben ergibt dies:

$$\sigma_{n+i}\left(\sigma_{n+j}\, (\sigma_2\, \sigma_1)\, \sigma_{n+l}(\sigma_0)\right).$$

Hätten wir anstelle von H das Element $T \circ H$ betrachtet, dann hätten wir anstelle des letzten Faktors σ_{n+k+1} den Faktor σ_{n+k+2} erhalten. Um eindeutig auf H zurückschließen zu können, haben wir gerade so viele Klammern vom Typ „)" eingeführt, wie in H maximal Elemente T *hintereinander* vorkommen können.

Zum Beweis definieren wir die Funktion a: $S \to \mathbf{N} \cup \{0\}$ durch

$$a(w) = (\text{Häufigkeit von } \sigma_{n+k} \text{ in } w) - \sum_{i=1}^{n+1} (\text{Häufigkeit von } \sigma_{n+k+i} \text{ in } w).$$

Ist $w = v \cdot v'$ und $v \neq 1$, dann nennen wir v *Abschnitt* von w und schreiben $v < w$. Man erkennt über die Charakterisierung von $\mathfrak{B}_n$ durch (1), (2), (3):

$$a(v) > 0 \text{ für } v \neq w \text{ und } w \in \mathfrak{B}_n,$$
$$a(v) = 0 \text{ für } v = w \in \mathfrak{B}_n.$$

Folgerung. Sei $w_1, \dots, w_j \in \mathfrak{B}_n$ und $w = w_1 \dots w_j$; dann ist $a(v) = 0$ und $v < w$ äquivalent mit: $v = w_1$ oder $v = w_1 \cdot w_2$ oder … oder $v = w$.

Hieraus folgt weiter: Ist $w^+ \in \mathfrak{B}_n$ und ist $w^+ = \sigma_{n+i}\, \sigma_{n+k}\, w\, \sigma_{n+k+1}$, dann gibt es genau eine Zerlegung $w = w_1 \dots w_j$, so daß $w_l \in \mathfrak{B}_n$ für $l = 1, \dots, j$. Auf Grund der Struktur von $\mathfrak{B}_n$ folgt weiter $j = Q(A_i)$.

Wir definieren nun die Abbildung α: $\mathfrak{B}_n \to \mathfrak{F}_{\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}''}(\mathfrak{A})$, indem wir setzen:

(a) $\alpha(\sigma_0) = E$;

(b) $\alpha(\sigma_i) = ({}^iT)$ für $i = 1, \dots, n$;

(c) $\alpha(w) = A_i \circ (\alpha(w_1) \times \cdots \times \alpha(w_j))$
für $w = \sigma_i\, \sigma_{n+k}\, w'\, \sigma_{n+k+1}$ und $w' = w_1 \ldots w_j$ $(w_1, \ldots, w_j \in \mathfrak{B}_n)$;

(d) $\alpha(w) = T \circ \alpha(w'\, \sigma_{n+k-i})$ für $w = w'\, \sigma_{n+k+i+1}$, $i > 0$.

Aus der oben gegebenen Charakterisierung von $\mathfrak{B}_n$ folgt, daß α auf ganz $\mathfrak{B}_n$ definiert ist; es könnte nur sein, daß die Definition unter (c) nicht eindeutig ist. Dies wäre der Fall, wenn es für w' mehrere Zerlegungen $w' = w_1 \ldots w_j$ gäbe, so daß $w_1, \ldots, w_j \in \mathfrak{B}_n$ ist. Dies ist aber ausgeschlossen, wie wir gezeigt haben.

α ist gerade so konstruiert, daß $\alpha(\varphi(H \circ C^l)) = H$ ist für $H \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}''}$, $l = Q(H)$, wenn die sequentiellen Darstellungen von H die Erzeugende T höchstens n-mal *hintereinander* enthalten. Ist nun für jedes normale φ die Relation $\varphi(H_1) = \varphi(H_2)$ erfüllt, und kommt T in H_1 und H_2 höchstens n-mal *hintereinander* vor, dann konstruieren wir für dieses n unser φ und α und erhalten

$$H_1 = \alpha(\varphi(H_1 \circ C^l) = \alpha(\varphi(H_2 \circ C^j)) = H_2\,,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Korollar zu Hilfssatz 22. Sei $H_1, H_2 \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}''}$ und $Q(H_1) = l$, $Q(H_2) = j$ und $\varphi(H_1 \circ C^l) = \varphi(H_2 \circ C^j)$ für jeden T-normalen Funktor; dann ist $H_1 = H_2$.

Der Beweis hierfür ist im Beweis zu Hilfssatz 22 vollständig enthalten.

Hilfssatz 23. *Sei $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, $Q(A) > 0$ für $A \in \mathfrak{A}$ und $A \neq C$ und gelte für jeden T-normalen Funktor $\varphi(F) = \varphi(G)$; dann ist $F \equiv G(\mathfrak{R})$, wo $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}' \cup \mathfrak{R}''$ gesetzt ist.*

Beweis. Aus Hilfssatz 20 folgt, daß es $H_1, H_2 \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}\setminus\mathfrak{A}''}(\mathfrak{A})$ und $K_1, K_2 \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A}''}(\mathfrak{A})$ gibt, so daß gilt

$$F \equiv H_1 \circ K_1(\mathfrak{R}), \quad G \equiv H_2 \circ K_2(\mathfrak{R})\,.$$

Nach Hilfssatz 19 und Satz 12 ist $\varphi(F) = \varphi(H_1 \circ K_1)$ und $\varphi(G) = \varphi(H_2 \circ K_2)$, wo φ irgendein normaler Funktor ist. Also gilt $\varphi(H_1) \circ \varphi(K_1) = \varphi(H_2) \circ \varphi(K_2)$.

Es ist $Q(K_1) = Q(K_2)$. Sei $n = Q(K_1)$; dann bilden wir $H_i \circ K_i \circ C^n$ und haben

$$\varphi(H_1) \circ \varphi(K_1 \circ C^n) = \varphi(H_2) \circ \varphi(K_2 \circ C^n)\,.$$

Nach Hilfssatz 21 gibt es ein C^l bzw. ein C^j mit

$$C^l \equiv K_1 \circ C^n(\mathfrak{R}) \text{ bzw. } C^j \equiv K_2 \circ C^n(\mathfrak{R})\,.$$

Es gilt also für jedes normale φ

$$\varphi(H_1 \circ C^l) = \varphi(H_2 \circ C^j)\,.$$

Wir wenden das Korollar zu Hilfssatz 22 an und erhalten $H_1 = H_2$ und daraus $l = j$. Wir setzen $H = H_1 = H_2$.

Wir zeigen nun $K_1 \equiv K_2(\mathfrak{R})$. Sei

$$C^+ = (T \times {}^2T \times \cdots \times {}^nT) \circ C^n\,.$$

Aus Hilfssatz 21 folgt: Es existieren $C_1', \ldots, C_{j+1}'$, $C_1^+, \ldots, C_{m+1}^+$, so daß gilt:

$$K_1 \circ C^+ = C_1' \times C^{m_1} \times C_2' \times \ldots \times C_{j+1}' = T_1 \circ C^p\,,$$
$$K_2 \circ C^+ = C_1^+ \times C^{n_1} \times C_2^+ \times \ldots \times C_{m+1}^+ = T_2 \circ C^q$$

mit $T_1, T_2 \in \mathfrak{F}_T$.

Für jeden normalen Funktor φ gilt $\varphi(H \circ K_1 \circ C^+) = \varphi(H \circ K_2 \circ C^+)$ oder $\varphi(H \circ T_1 \circ C^p) = \varphi(H \circ T_2 \circ C^q)$. Hieraus folgt nach dem Korollar zu Hilfssatz 22

$$H \circ T_1 = H \circ T_2$$

und nach Satz 7 (1) weiter $T_1 = T_2$.

Es ist

$$T_1 = (T_1' \times E^{m_1} \times T_2' \times \ldots \times T_{j+1}')\,,$$

worin $T_1' \times T_2' \times \ldots \times T_{j+1}'$ ein Produkt von Faktoren $T, {}^2T, \ldots, {}^nT$ ist, in dem Faktoren ${}^iT$ mehrfach vorkommen aber auch völlig fehlen können.

Sei $Z(T_1) = r$ und $J = \{i_1, \ldots, i_e\}$ die Menge der Nummern der Ausgänge von T_1 und damit auch von K_1 und K_2, an denen ein Faktor ${}^iT$ endet. Ist $i_k \in J$ und endet an dem Ausgang i_k von T_1 der Faktor ${}^lT$, dann ordnen wir i_k die Zahl $l = \alpha(i_k)$ zu. Wir erhalten so eine Abbildung $\alpha\colon J \to N$,

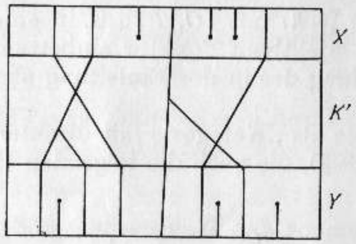

Abb. 21

$N = \{1, \ldots, n\}$, die angibt, welcher Ausgang mit welchem Eingang durch einen „Faden" in K_1 und K_2 verbunden ist. Wir können durch Anwendung unserer Relationen K_1 und K_2 auf die Form

$$K_1 \equiv Y_1 \circ K_1' \circ X_1(\mathfrak{R})\,,$$
$$K_2 \equiv Y_2 \circ K_2' \circ X_2(\mathfrak{R})$$

bringen, worin $X_1, X_2 \in \mathfrak{F}_U$, $K_1', K_2' \in \mathfrak{F}_{D,V}$ und $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{F}_C$ ist (s. Abb. 21.) Wegen $T_1 = T_2$ folgt $j = m$ und $n_i = m_i$ für $i = 1, \ldots, j+1$, so daß gilt

$$Y_1 = E^{r_1} \times E^{m_1} \times \ldots \times E^{r_{j+1}} = Y_2$$

mit $r_i = Z(T_i')$.

Da in T_1 und T_2 genau die gleichen Faktoren ${}^iT$ vorkommen, ist auch $X_1 = X_2$.

Aus $X_1 = X_2$ und $Y_1 = Y_2$ und der Abbildung α läßt sich nun eine Abbildung $\alpha'\colon N_1 \to N_2$ mit $N_1 = \{1, \ldots, Z(K_1')\}$, $N_2 = \{1, \ldots, Q(K_1')\}$ gewinnen, die für K_1' und K_2' angibt, welcher Ausgang mit welchem Eingang verbunden ist. Aus dem Korollar zu Hilfssatz 18 folgt damit $K_1' = K_2'$. Also $K_1 \equiv K_2$, q. e. d.

Satz 13. *Ist $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mit $\mathfrak{A}' \cup \{C, T\} \subset \mathfrak{A}$ und $Z(A) = 1$ für $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$, dann ist $\varphi(F) = \varphi(G)$ für jeden T-normalen Funktor genau dann, wenn $F \equiv G(\mathfrak{R})$.*

Beweis. Enthält $\mathfrak{A}$ außer C kein Element A mit $Q(A) = 0$, dann folgt die Behauptung des Satzes direkt aus Hilfssatz 23, 20 und 15.

Sei nun $\mathfrak{A}_0 = \{C_i \mid i = 1, \ldots\}$ die Menge der Elemente A mit $A \neq C$ und $Q(A) = 0$. Wir ordnen jedem Element $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ein Element $\psi_k(F) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ zu, indem wir in einer sequentiellen Darstellung von F jedes vorkommende C_i durch ${}^{k \cdot i}T \circ C$ ersetzen, worin keine natürliche Zahl größer als die Häufigkeit des Elementes T in den vorgegebenen Elementen F und G aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ist. Man erkennt, daß $\psi_k(F)$ unabhängig von der Auswahl der speziellen Darstellung von F ist. Weiter sieht man

$$F \equiv G(\mathfrak{R}) \Longleftrightarrow \psi_k(F) \equiv \psi_k(G)\ (\mathfrak{R})\,.$$

Sei nun $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und $F \not\equiv G(\mathfrak{R})$ und $F' = \psi_k(F)$, $G' = \psi_k(G)$, dann ist $F', G' \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ und $F' \not\equiv G'(\mathfrak{R})$. Nach obiger Bemerkung können wir Satz 13 aber auf $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_0}(\mathfrak{A})$ schon anwenden. Also existiert ein T-normaler Funktor φ: $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_0} \to \mathfrak{C}$ mit $\varphi(F') \neq \varphi(G')$. Wir können φ auf ganz $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ fortsetzen, indem wir definieren: $\varphi(C_i) = \varphi({}^{k \cdot i}T \circ C)$. Man erkennt: φ ist wieder T-normal, und es ist $\varphi(H) = \varphi(\psi_k(H))$ für $H \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, also $\varphi(F) \neq \varphi(G)$, was zu zeigen war.

Der Satz gilt natürlich auch, wenn wir „T-normal" durch „normal" ersetzen. In dieser Formulierung können wir auch die Voraussetzung $\{C, T\} \subset \mathfrak{A}$ fallen lassen, da sich jede Kategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ mit $\{C, T\} \not\subset \mathfrak{A}$ in eine Kategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}^+)$ mit $\{C, T\} \in \mathfrak{A}^+$ durch einen bijektiven Funktor einbetten läßt. Also stellt Satz 13 wirklich eine Verschärfung des in der Einleitung abgekündigten Satzes dar.

Es ist üblich, nicht die X-Kategorie als „Kategorie mit direktem Produkt" zu bezeichnen, sondern eine Kategorie $\mathfrak{D}$, die noch die folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) Jeder Einheit $e \in \mathfrak{D}$ ist ein Element $d_e \in \mathfrak{D}$ zugeordnet und jedem Paar von Einheiten $e_1, e_2 \in \mathfrak{D}$ ein Paar $p_1, p_2 \in \mathfrak{D}$ mit $Q\,(e \times e) = Z(d_e)$, $Q(d_e) = Q(e)$, $Q(p_1) = Q(p_2) = Z\,(e_1 \times e_2)$ und $Z(p_1) = Q(e_1)$, $Z(p_2) = Q(e_2)$.

(b) Ist $f, g \in \mathfrak{D}$ und $Q(f) = Q(g) = e$, $Z(f) = e_1$ und $Z(g) = e_2$, dann gibt es genau ein Element $h \in \mathfrak{D}$ mit

$$f = p_1 \circ h,\quad g = p_2 \circ h\,,$$

wobei die Bezeichnungen von (a) gelten.

(c) Unter den Voraussetzungen von (a) und (a) gilt weiter

$$h = (f \times g) \circ d_e\,.$$

Eine X-Kategorie, die (a), (b) und (c) erfüllt, wird auch kurz als *D-Kategorie* bezeichnet.

Korollar 1 zu Satz 13. $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ und $Z(A) = 1$ für $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$ ist eine D-Kategorie.

Beweis. Sei $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, $Q(F) = Q(G) = m$, $Z(F) = n$ und $Z(G) = k$. Aus den Relationen $\mathfrak{R}$ folgt für $H = (F \times G) \circ D^1_m$, daß

$$\overline{U}{}^{k+n}_n \circ H \equiv F(\mathfrak{R}),\quad U^{*n+k}_n \circ H \equiv G(\mathfrak{R}) \qquad (+)$$

erfüllt ist.

Sei φ: $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}_S$ ein normaler Funktor, $f = \varphi(F)$, $g = \varphi(G)$ und $h = \varphi(H)$. Nach Satz 11 sind $p_1 = \varphi(\overline{U}{}^{n+k}_n)$ und $p_2 = \varphi(U^{*n+k}_k)$ ein Paar zusammengehöriger Projektionen in der D-Kategorie $\mathfrak{C}_S$. Ist $H' \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ ein weiteres Element, das (+) erfüllt, und ist $h' = \varphi(H')$, dann gilt in $\mathfrak{C}_S$

$$f = p_1 \circ h,\quad g = p_2 \circ h,\quad f = p_1 \circ h',\quad g = p_2 \circ h',$$

woraus nach (b) $h = h'$ folgt. Da dies für jeden normalen Funktor φ gilt, ergibt sich nach Satz 13 $H \equiv H'(\mathfrak{R})$. Also ist $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ mit D als Diagonalisierung und E, U als zu E, E_0 gehörigem Paar von Projektionen eine D-Kategorie.

Korollar 2 zu Satz 13. Sei $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, $Z(A) = 1$ für $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$, aber $\mathfrak{A}$ sonst beliebig. Dann gilt: $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$ repräsentiert ein freies Erzeugendensystem der D-Kategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$.

Beweis. Sei $\mathfrak{B}$ ein Erzeugendensystem der D-Kategorie $\mathfrak{D}$ und φ_1: $(\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}') \to \mathfrak{B}$ eine Abbildung, die die Voraussetzung erfüllt, die jeder Funktor erfüllen muß, nämlich: Ist e Links-Einheit von $\varphi_1(A)$ und ist $Q(A') = n$, dann ist $Q(\varphi(A')) = Q(e^n)$ für $A' \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$.

Wir behaupten, daß sich dann φ_1 zu einem Funktor von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ auf $\mathfrak{D}$ fortsetzen läßt, der mit $\mathfrak{R}$ verträglich ist. Dazu genügt es nach früherem zu zeigen, daß sich φ_1 zunächst zu einer Abbildung φ: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ fortsetzen läßt, so daß gilt:

$\varphi(U) = p_0$, wo p_0 die zu $e = e \times e^0$ gehörige Projektion auf die zweite Komponente ist.

$\varphi(D) = d_e$, wo d_e die zu e gehörige Diagonalisierung ist.

$\varphi(V) = v$ mit $Q(v) = Z(v) = Q(e^2)$ und $(e \times p_0) = (p_0 \times e) \circ v$ und $(p_0 \times e) = (e \times p_0) \circ v$.

Man erkennt, daß

$$v = (p_2 \times p_1) \circ d_{e \times e}$$

die gewünschte Eigenschaft hat, wenn $d_{e \times e}$ die zu $e \times e$ gehörige Diagonalisierung ist und p_i die zu $e \times e$ und e gehörige Projektion auf die i-Komponente.

Da p_1, p_2 und $d_{e \times e}$ in $\mathfrak{D}$ liegen, liegt auch v in $\mathfrak{D}$, so daß also $\varphi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}' \subset \mathfrak{D}$ eine bijektive Abbildung ist, die sich zu einem Funktor φ': $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{D}$ fortsetzen läßt. φ' ist verträglich mit den Relationen aus $\mathfrak{R}$. Also gibt es einen Funktor φ^+: $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R} \to \mathfrak{D}$, der die durch $\mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}'$ in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ repräsentierten Elemente auf $\mathfrak{B}$ abbildet. Da $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})/\mathfrak{R}$ eine D-Kategorie ist, folgt, daß φ eine Abbildung *auf* ist, womit das Korollar bewiesen ist.

4. Bemerkungen

Bemerkung 1. Zum Beweis von Satz 12 genügte es, sich auf Mengen S mit nur zwei Elementen zu beschränken. Im Beweis zu Satz 13 haben wir aber für S eine abzählbar unendliche Menge verwandt. Der Satz 13 wird falsch, wenn wir nur endliche Mengen mit einer bestimmten Anzahl von Elementen zulassen.

Bemerkung 2. Die Definition der allgemein-rekursiven Funktion ist im Rahmen der hier entwickelten Theorie sehr einfach [3]:

Sei $C, T \in \mathfrak{A}$, $S^+ = \{{}^nT \circ C \mid n = 0, 1, \ldots\}$ und $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, $Q(F) = m$, $Z(F) = n$ und $\mathfrak{R}$ ein Relationensystem zu $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Sei weiter $S = \mathsf{N} \cup \{0\}$ und $\varphi: \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{C}_S$ ein Funktor mit $f = \varphi(F)$. Wir sagen, daß f durch $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{R}$ und φ rekursiv definiert wird, wenn φ mit $\mathfrak{R}$ verträglich ist und es zu jedem $C_x^+ \in S^{+m}$ genau ein $C_y^+ \in S^{+n}$ gibt mit $F \circ C_x^+ \equiv C_y^+(\mathfrak{R})$. Eine Funktion $f \in \mathfrak{C}_S$ heißt allgemein-rekursiv, wenn es ein Alphabet $\mathfrak{A}$, ein Element $F \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, ein Relationensystem $\mathfrak{R}$ und einen Funktor $\varphi: \mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{R}$ gibt, so daß F, $\mathfrak{R}$, φ die Funktion f rekursiv definieren.

Bemerkung 3. Man kann sich mit geringer Mühe von der in der Einleitung gemachten Einschränkung befreien, daß Ausgangssignale und Eingangssignale für jeden Baustein von der gleichen Art sind:

Seien $S_1, \ldots, S_k$ die verschiedenen Signalmengen, die für einen Eingang oder Ausgang der Bausteine $A \in \mathfrak{A}$ vorgeschrieben werden. Dann ordnen wir der Menge S_i die Erzeugende s_i $(i = 1, \ldots, k)$ einer freien Halbgruppe $\Omega(s_1, \ldots, s_k)$ zu.

Wir definieren $Q: \mathfrak{A} \to \Omega$, indem wir festsetzen: $Q(A) = s_{i_1} \ldots s_{i_n}$, wenn A n Eingänge hat und für den k-ten Eingang die Signalmenge S_{i_k} vorgeschrieben ist. Analog wird $Z: \mathfrak{A} \to \Omega$ definiert.

Nun erklären wir die Belegung f der Netze ähnlich wie früher: Eine Belegung $f: \mathfrak{M}_N \to \mathfrak{A}$ der inneren Punkte des Netzes N heißt erlaubt, wenn P und $f(P)$ die gleiche Anzahl von Eingängen bzw. Ausgängen haben und wenn für jede Strecke s mit P als Anfangspunkt und Q als Endpunkt gilt, daß dem s entsprechenden Eingang von $f(Q)$ und dem s entsprechenden Ausgang von $f(P)$ die gleiche Erzeugende von Ω zugeordnet ist.

Im Unterschied zu früherem führen wir zusätzlich eine Belegung der Randpunkte der Netze ein; dies geschieht durch die Abbildung

$$g: \{Q_1, \ldots, Q_n, Z_1, \ldots, Z_m\} \to \{s_1, \ldots, s_k\},$$

worin $Q_1, \ldots, Q_n$ die Anfangspunkte und $Z_1, \ldots, Z_m$ die Endpunkte des Netzes N mit der Belegung f sein mögen.

g heißt mit (N, f) *verträglich*, wenn folgendes gilt:

(1) Ist Q_i Anfangspunkt einer Strecke s des Netzes mit dem inneren Punkt P als Endpunkt und entspricht der Strecke s ein Eingang von $f(P)$, für den S_j die vorgeschriebene Signalmenge ist, dann muß gelten $g(Q_i) = s_j$ (entsprechend für z_i).

(2) Ist Q_i Anfangspunkt der Strecke s, deren Endpunkt der Ausgangspunkt Z_l des Netzes N ist, dann muß gelten: $g(Q_i) = g(Z_l)$.

Wir betrachten nun die Menge $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}, Q, Z)$ der Tripel $[N, f, g]$, wo N ein Netz ist, f eine zulässige Belegung der inneren Punkte von N und g eine für (N, f) zulässige Belegung für die Randpunkte von N. Wir definieren in naheliegender Weise $F \circ G$ für F, G falls $Z(G) = Q(F)$ und erkennen: $Q(F \circ G) = Q(G)$, $Z(F \circ G) = Z(F)$. Wir definieren $F \times G$ für $F, G \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und erkennen: $Q(F \times G) = Q(F) \cdot Q(G)$, $Z(F \times G) = Z(F) \cdot Z(G)$, wobei rechts das Produkt in Ω $(s_1, \ldots, s_k)$ gemeint ist. Man erkennt, daß man wieder eine X-Kategorie erhält, deren Einheiten die Elemente (E_k, g) sind.

Es mag zunächst vom technischen Standpunkt her als rein mathematischer Kniff erscheinen, verschiedene Einheiten mit der gleichen Anzahl von Eingängen einzuführen, nämlich nur um wieder eine Kategorie zu erhalten. Aber es kann auch physikalisch sinnvoll sein, diese Unterscheidung zu treffen, wenn man Leitungen mit verschiedenen Taktfrequenzen betreibt, so daß für diese unterschiedliche maximale Kapazitäten zugelassen werden.

Die hier betrachtete Kategorie ist von besonderem Interesse im Zusammenhang mit Fragen der Programmierung, wie sie in der Einleitung kurz angeschnitten werden; denn die Anschließbarkeit eines Programms an ein anderes ist nicht nur von der Anzahl der Ausgänge bzw. Eingänge der beiden Programme abhängig, sondern zumindest noch von der Art der über die Eingänge bzw. Ausgänge zu übernehmenden Parameter: ganze Zahlen, Gleitkommazahlen, BOOLEsche Variabeln usw.

Bemerkung 4. Man erhält die Kategorie $\mathfrak{N}_3$ der räumlichen Netze in folgender Weise:

Sei $\mathfrak{A} = \{V, V'\} \cup \mathfrak{E}'$, $\mathfrak{E}' = \{A_m^n \mid m, n = 0, 1, \ldots\}$ mit $Q(V) = Q(V') = Z(V) = Z(V') = 2$ und $Q(A_m^n) = n$, $Z(A_m^n) = m$. Wir setzen

$$\begin{aligned} R_3 = \mathfrak{R}_3 &\cup \{(A_m^n \times E) \circ V_{1,n} \equiv V_{1,m}(E \times A_m^n) \mid n, m = 0, 1, \ldots\} \cup \\ &\cup \{V_{m,1}(A_m^n \times E) \equiv (E \times A_m^n) \circ V_{n,1} \mid n, m = 0, 1, \ldots\} \cup \\ &\cup \{(E_k \times V \times E_j) \circ A_{k+j+2}^n \equiv A_{k+j+2}^n \mid n, k, j = 0, 1, \ldots\} \cup \\ &\cup \{A_m^{l+i+2} \circ (E_l \times V \times E_j) \equiv A_m^{l+i+2} \mid l, i, m = 0, 1, \ldots\}. \end{aligned}$$

Die Kategorie $\mathfrak{N}_3 = \mathfrak{F}(\mathfrak{A})/R_3$ ist die Kategorie der räumlichen Netze. $\mathfrak{R}_3$ sind die Relationen der Zöpfe; die beiden folgenden Mengen beschreiben die Deformation eines Fadens über einen Knotenpunkt; die letzten beiden Relationensysteme erlauben, die von einem ausgehenden bzw. in einem Punkt endenden Strecken beliebig zu verdrillen. Der Knotenpunkt wird dadurch von einem ebenen Punkt zu einem Punkt des Raumes.

Man sieht leicht, daß die Lösung des Wortproblems für $\mathfrak{N}_3$ auf das engste mit dem Knotenproblem verwandt ist.

Kurzfassung

In Teil I wurde die Theorie der X-Kategorie entwickelt, die es ermöglicht, die bei der Synthese von Schaltkreisen aus Bausteinen auftretenden Probleme in eine algebraische Form zu bringen. Das Bausteinsystem wurde repräsentiert durch das Erzeugendensystem $\mathfrak{A}$ einer freien X-Kategorie $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Die Elemente von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ repräsentieren je eine Zusammenschaltung von einem Schaltkreis aus den Bausteinen, und jeder Schaltkreis, der sich aus den Bausteinen zusammensetzen läßt, wird durch ein Element von $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ dargestellt.

In Teil II passen wir die Theorie noch mehr an die technischen Gegebenheiten an: Sei $A, B \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und A' bzw. B' der durch A bzw. B bezeichnete Schaltkreis. $A \circ B$ ist genau dann erklärt, wenn die Anzahl der Ausgänge von B' gleich der Anzahl der Eingänge von A' ist. $A \circ B$ bezeichnet den Schaltkreis, der entsteht, wenn man den i-ten Ausgang von B' auf den i-ten Eingang von A' schaltet. Technisch ist es natürlich möglich, den i-ten Ausgang von B' auf den i_k-ten Eingang von A' zu schalten, wo $i \to i_k$ eine Permutation ist. Weiter besteht technisch die Möglichkeit, einen Ausgang auf zwei verschiedene Eingänge zu schalten oder einen Ausgang gar nicht zu benutzen. Diesen technischen Selbstverständlichkeiten tragen

wir Rechnung, indem wir in $\mathfrak{A}$ drei Elemente V, D, U aufnehmen, deren Funktion so festgelegt wird, daß V die Überkreuzung zweier Drähte und D die Verzweigung zweier Drähte in zwei Zweige repräsentiert; U hat einen Eingang und keinen Ausgang.

Nun stellt sich folgendes Problem. Seien $A, B \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ und sei $\{V, D, U\} \subset \mathfrak{A}$ und die Funktionen von U, V, D in der oben skizzierten Weise festgelegt, während die Funktionen von $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ völlig frei sind: Man finde ein System von Relationen $\mathfrak{R}$, das es erlaubt, A genau dann in B überzuführen, wenn A und B bei jeder Belegung von $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ durch Funktionen die gleiche Funktion definieren.

Die Aufgabe wird in dieser Arbeit für den Sonderfall gelöst, daß die Elemente von $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ nur einen Ausgang besitzen. Bildet man in der durch $\mathfrak{A}$ erzeugten X-Kategorie Restklassen nach $\mathfrak{R}$, dann erhält man eine freie D-Kategorie (Kategorie mit direktem Produkt).

Dieses Ergebnis ist auch im Zusammenhang mit dem Problem der automatischen Vereinfachung von Programmen von Interesse.

Abstract

In part I the theory of X-categories was developped, which enabled us to give the problems arising in connection with the synthesis of switching circuits an algebraical form. The system of primitiv building blocks was represented by the generator system $\mathfrak{A}$ of a free X-category $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Each of the elements of $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ represents the synthesis of a circuit from the primitiv building blocks and each synthesis of a circuit has a correspondence in $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$.

In part II we adapt the theory more to the technical reality. Let be $A, B \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ and A' resp. B' the circuit designated by A resp. B. $A \circ B$ is defined, if the number of the outputs of B' is equal the number of inputs of A'. $A \circ B$ represents the circuit which arises from A' and B' by switching the output number i of B' on the input number i of A. The circuits can be switched in other ways too: On can the i-th output of B' switch on the i_k-th input of B', where $i \to i_k$ is a permutation. Beyond it, it is possible to connect one output of B' with two or more inputs of a circuit A' or not to use one output. We take account of this technical self-evidence and take three elements V, D, U into $\mathfrak{A}$ and fix their functions such that V represents the crossing of two wires and D the branching of a wire in two branchies. U represents an element, which has one input but no output.

Now the following problem arises. Let be $A, B \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. One find a system of relations $\mathfrak{R}$ that allows to transform A into B if and only if A and B realize the same function for each coordination of functions to the elements of $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$.

This problem is solved in this paper for the special case, that the elements of $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ have only one output. Forming equivalence classes respective $\mathfrak{R}$ one gets the quotient category, which is a free D-category (category with direct product).

This result is of interest for the automatic modifying of programs in computers too.

Резюме

В первой части работы была изложена теория X-категории, которая даёт возможность перевести в алгебраическую форму проблемы, возникающие при синтезе переключающих схем из элементарных блоков. Система этих элементарных блоков представлялась системой образующих $\mathfrak{A}$ свободной X-категории $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$. Каждый элемент из $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ представляет переключающую схему из элементарных блоков и каждая переключающая схема, которая может быть построена из элементарных блоков, представляется элементом из $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$.

Во второй части мы приближаем теорию ещё больше к техническим условиям: Пусть $A, B \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ и A' и B' соответствующие A и B переключающие схемы. $A \circ B$ определено тогда и только тогда, когда число выходов в B' равно числу входов в A'. $A \circ B$ обозначает переключающую схему, которая получается, если соединить i-тый выход из B' с i-тым входом в A'. Технически возможно также соединение i-того выхода из B' с i_k-тым входом в A', где $i \to i_k$ есть перестановка. Возможно соединение одного выхода с двумя разными входами, а также можно не использовать одного выхода. Учитывая эти возможности мы включаем в $\mathfrak{A}$ три элемента V, D, U, где V обозначает пересечение двух проволок, D — разветвление двух проволок на две ветви, U — имеет вход, но не имеет выхода.

Возникает следующая проблема: Пусть $A, B \in \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, пусть $\{V, D, U\} \subset \mathfrak{A}$; и пусть определяет функции элементов U, V, D таким же образом как выше было указано, но функции элементов $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ могут быть совершенно произвольны. Нужно найти систему соотношений $\mathfrak{R}$, которая даёт возможность перевести A в B тогда и только тогда, когда A и B реализуют одинаковые функции при каждом выборе функций элементов из $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$.

Эта задача решается в предложенной работе для частного случая, когда элементы из $\mathfrak{A} \setminus \{U, V, D\}$ имеют только по одному выходу. Если образовать классы вычетов по $\mathfrak{R}$ в X-категории, порождённой $\mathfrak{A}$, то получается свободная D-категория (категория с прямым произведением).

Этот результат имеет интерес и в связи с проблемой автоматического упрощения программ.

(Eingegangen am 9. 3. 1965)

Anschrift des Verfassers:

Dr. G. Hotz
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität des Saarlandes
66 Saarbrücken 15