

**THESE DE DOCTORAT ES-SCIENCES**

**présentée à**

**L'UNIVERSITE de PROVENCE**

**par**

**Patrick IGLESIAS**

**Fibrations différentielles et Homotopie**

**Soutenu le 29 novembre 1985 devant le jury composé de messieurs:**

**Daniel Bennequin  
Jacques Breuneval  
Jacques Dixmier  
Paul Donato  
Jean Pradines  
Jean-Marie Souriau  
Raymond Stora**

**Rapporteurs:**

**Jean Pradines  
Jean-Marie Souriau  
Raymond Stora**

A Nelly,  
pour son anniversaire.

je remercie Messieurs les Professeurs Daniel Bennequin, Jacques Breuneval, Jacques Dixmier, Jean Pradines et Raymond Stora pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse. Je remercie en particulier Jean Pradines et Raymond Stora pour avoir aussi accepté d'être les rapporteurs de ce travail.

Il ne saurait y avoir de remerciements raisonnables sans un mot particulier pour mon directeur Jean-Marie Souriau, à qui je dois, pour l'essentiel, ma formation à la recherche.

Je voudrais maintenant remercier mes camarades du Centre de Physique Théorique auxquels, évidemment, je dois énormément, en particulier mes camarades du groupe (secte?) de géométrie différentielle : Guy Bérenguier, Georges Bigot, Guy Burdet, Christian Duval, Paul Donato, Jimmy Elhadad, Henry-Hugues Fliche, Martine Perrin, Roland Triay et aussi, bien entendu, Jean-Louis Richard qui a été véritablement adopté.

Que ceux dont je n'écris pas le nom n'en prennent pas ombrage, qu'ils sachent que je leur suis tout aussi reconnaissant pour les discussions qu'ils m'accordent et leurs conseils, ainsi que pour avoir fait du CPT ce qu'il est aujourd'hui, il est inutile que j'épilogue sur cette question.

Il est évident que mes remerciements ne sauraient s'arrêter aux seuls chercheurs du CPT. La vie de notre centre ne repose pas uniquement sur eux, j'allais dire heureusement. Je tiens donc à remercier encore France Bodin, Maryse Cohen-Solal, Dominique Escalier, Nicole Lambert, Elyane Mascré, Dolly Roche, Antoinette Sueur, sans oublier Nicole Jean et Josette de la Vega et bien entendu notre grande argentièrre Paulette Bourgeois.

Je voudrais remercier enfin madame Escalon pour le mal qu'elle s'est donné à faire ressembler cette thèse à quelque chose de sérieux, ainsi que madame Baloco pour l'aide qu'elle lui a apportée.

## **TABLE DES MATIERES**

### **§1 - PRINCIPES DE LA DIFFÉOLOGIE**

- 1.1 Définitions et conventions
- 1.2 La catégorie des espaces difféologiques
- 1.3 Quelques illustrations
- 1.4 La catégorie des applications différentiable

### **§2 - GROUPOIDES DIFFÉOLOGIQUES**

- 2.1 Définitions et notations
- 2.2 Groupoïdes difféologiques
- 2.3 Groupoïdes difféologiques parfaits
- 2.4 Exemples élémentaires
- 2.5 Groupoïde structural d'une application différentiable

### **§3 - FIBRATIONS DIFFÉOLOGIQUES**

- 3.1 Fibrations difféologiques et micro-trivialité
- 3.2 Catégorie des fibrés difféologiques
- 3.3 Catégorie des fibrés difféologiques principaux
- 3.4 Fibré principal associé à un groupoïde parfait
- 3.5 Fibrés à structure
- 3.6 Fibrés associés à un fibré principal
- 3.7 Espace des structures d'un fibré difféologique
- 3.8 Plaques globales et micro-trivialité
- 3.9 Quelques exemples de fibrés difféologiques

### **§4 - HOMOTOPIE DIFFÉOLOGIQUE**

- 4.1 Connexité et foncteur  $\pi_0$
- 4.2 Homotopie d'applications et foncteur  $\mathcal{X}$
- 4.3 Chemin faisant
- 4.4 Groupoïde et groupe fondamentaux
- 4.5 Homotopie supérieure et foncteur  $\pi_n$

## **§5 - SUITES EXACTES D'HOMOTOPIE**

- 5.1 Homotopie relative
- 5.2 Homomorphismes canoniques
- 5.3 Suite exacte du couple  $(X,A)$
- 5.4 Fibré des lacets associé à un fibré différentiel
- 5.5 Suite d'homotopie d'un fibré différentiel

## **§6 - REVÊTEMENTS DIFFÉRENTIELS**

- 6.1 Revêtements et action de  $\pi_1$
- 6.2 Théorème de monodromie
- 6.3 Revêtement universel
- 6.4 Revêtements et actions de groupes

## **Annexes**

- 1 Homologie et cohomologie d'un groupoïde
- 2 Morphismes de fibrés
- 3 Exemples de groupes différentiels: flots irrationnels sur le tore
- 4 Difféologie d'espace singulier et petits diviseurs
- 5 Espace des connexions d'un fibré principal
- 6 Un fibré différentiel non trivial sur un espace contractile
- 7 Homotopie et sphères.  $k$ -connexité.

## INTRODUCTION

Ce travail est consacré au développement de la notion de fibration dans le cadre de la théorie des espaces difféologiques. Nous rappelons au premier chapitre quelques définitions générales relatives à cette théorie (pour plus de précision voir [21][22][23][6][13]).

Le deuxième chapitre est consacré à la structure de groupoïde difféologique, structure sur laquelle se fonde la théorie des fibrés difféologiques (troisième chapitre). Un point de vue analogue utilisant la catégorie des "groupoïdes différentiables" avait été indiqué par Ehresmann (voir [8] et [17]).

Dans le troisième chapitre nous proposons une définition difféologique des fibrés. Ceux-ci sont introduits à partir de ce que nous avons appelé le "groupoïde associé à une application différentiable" (2.5). Une définition équivalente, mais moins intrinsèque, des fibrés difféologiques utilise une propriété des applications différentiables que nous avons appelée "micro-trivialité". C'est ce deuxième point de vue qui permet de s'assurer que la définition proposée est bien une extension de celle de variétés fibrées, elle englobe en outre certains types de feuilletages, en particulier les quotient de variétés par l'action libre et différentiable de groupes de Lie. Un autre exemple de fibrés difféologiques est celui des quotients de groupes difféologiques par l'un quelconque de ses sous-groupes (ceci pouvant mettre en jeu des espaces de dimension infinie). Nous donnons dans la suite de ce troisième chapitre quelques définitions et propriétés élémentaires relatives à ces fibrés difféologiques. En particulier, nous définissons les fibrés (difféologiques) principaux et montrons que tout fibré difféologique est associé à un fibré difféologique principal. C'est

une généralisation, en quelque sorte, de la situation en dimension finie lorsque le groupe structural du fibré se réduit à un groupe de Lie.

Au quatrième chapitre, nous décrivons l'homotopie difféologique. Ce n'est qu'une généralisation immédiate, modulo quelques précautions d'ordre technique, des définitions classiques. Précisons simplement que le  $\pi_1$  est introduit à partir du groupoïde fondamental des espaces difféologiques connexes, autre exemple de groupoïde difféologique.

L'étude de la suite d'homotopie d'un fibré difféologique est abordée dans le cinquième chapitre. Nous y prouvons son exactitude. La démonstration que nous proposons fait appel à la construction d'un nouveau fibré, défini à l'aide des lacets de la base homotopes à zéro, ceci permet d'utiliser avec profit la récursivité de la structure d'espace difféologique. Les résultats de ce chapitre généralisent certaines propriétés des variétés fibrées.

Le dernier chapitre est consacré à la théorie des revêtements des espaces difféologiques; nous y montrons en particulier que tout espace difféologique connexe possède un revêtement universel simplement connexe, à partir duquel tous les autres revêtements se déduisent, comme c'est le cas en géométrie différentielle ordinaire. Nous généralisons ensuite un théorème relatif au relèvement d'actions de groupe aux revêtements. Cela donne une construction particulière des revêtements universels pour les bases des fibrés difféologiques principaux qui utilise le revêtement de leur espace total. Cette dernière construction généralise un théorème sur les espaces homogènes d'espaces difféologiques.

Enfin, en annexes, nous donnons quelques exemples simples qui illustrent les paragraphes précédents. En particulier nous y avons inséré un travail sur la difféologie du tore irrationnel réalisé en collaboration avec Paul Donato. Nous

montrons aussi comment peuvent apparaître, en difféologie, les questions liées aux petits diviseurs. Ces résultats montrent comment la difféologie permet l'étude de ce qu'on a coutume d'appeler les quotients singuliers. Enfin, dans l'annexe 5, nous donnons une première analyse difféologique de l'espace des connexions d'un fibré principal. Nous montrons comment se généralise naturellement la notion de connexion aux fibrés difféologiques principaux, à condition de renoncer à l'interprétation infinitésimale. Nous y avons ajouté quelques résultats concernant la situation en dimension finie; nous donnons certaines conditions suffisantes pour que la projection de l'espace des connexions, d'une variété fibrée principale, sur son quotient par le sous-groupe des transformations de jauge, conservant un point, soit une fibration principale et pour que cette fibration soit non triviale. Il semble que ces derniers résultats puissent être rapprochés de résultats analogues, faisant intervenir des structures topologiques sur ces espaces (espaces de connexions et groupes de jauge) (voir [20]). Ces définitions et constructions devraient pouvoir être utilisées pour donner un cadre rigoureux à des constructions du type Hyper-Espace / principe de covariance générale, intervenant en théorie de la relativité [7][24].

En conclusion, il semble que qu'un grand nombre de résultats essentiels concernant la théorie des variétés fibrées se généralise aux fibrés difféologiques tels qu'ils sont définis dans ce travail. Sans pour cela perdre de la pertinence au profit de la généralité. La théorie des espaces difféologiques semble être un outil commode et naturel pour le géomètre qui désire sortir du cadre de la dimension finie (aussi bien vers la dimension infinie que vers les quotients singuliers) tout en conservant, et en mettant à profit, le savoir-faire et l'intuition géométrique qu'il possède.

Certaines des techniques et définitions proposées dans ce travail, étendues de façon adéquates aux situations de feuilletage, devraient permettre d'intégrer à la théorie des espaces difféologiques nombre de constructions proposées pour



l'étude géométrique des feuilletages comme les  $Q$ -variétés, les schémas de variété, les  $QF$ -variétés etc... [2] [3] [4] [17].

Il faudrait avoir tout à fait  
l'esprit faux pour mal  
raisonner sur des princi-  
pes si gros qu'il est pres-  
qu'impossible qu'ils échap-  
pent.

B. Pascal

## **§1 - PRINCIPES DE LA DIFFELOGIE**

La structure d'**espace difféologique**<sup>1</sup> a été introduite récemment par J.M. Souriau dans [21] [22][23], notion conçue à l'origine pour aborder l'étude des groupes de dimension infinie (groupes de difféomorphismes, de quantomorphismes et ...), possédant, outre leur structure de groupe, une "structure différentielle" supplémentaire compatible (**groupe difféologique**). Ce travail a été étendu par P. Donato [6] aux espaces homogènes et à leurs revêtements (existence d'un revêtement universel, définition du groupe fondamental ...)

Nous rappelons dans ce premier paragraphe l'axiomatique des espaces difféologiques ainsi que certaines définitions qui seront amplement utilisées par la suite. Nous y avons introduit aussi quelques constructions et définitions personnelles (**plongement** difféologique, **catégorie des applications différentiables**) et nous avons illustré ce paragraphe à l'aide d'exemples élémentaires.

---

<sup>1</sup>initialement "espace différentiel"

### 1.1 Définitions et conventions

$f$  étant une application quelconque  $\text{def}(f)$  et  $\text{im}(f)$  désigneront respectivement son **espace de définition** et son **espace de valeurs**. Etant donné un sous ensemble  $A$  de  $\text{def}(f)$  nous désignerons par  $f|_A$  sa **restriction**<sup>2</sup> à  $A$ .

La composition des applications sera comprise au sens large : étant données deux applications  $f$  et  $g$  nous conviendrons que :

$$\text{def}(g \circ f) = f^{-1}(\text{def}(g)) \quad (1.1.1)$$

Si  $\text{def}(g \circ f) = \emptyset$  nous noterons  $g \circ f = \mathbb{1}_\emptyset$  (**application vide**). Une famille  $\{f_i\}_{i \in I}$  d'applications sera dite **compatible** si elle vérifie:

$$x \in \text{def}(f_i) \cap \text{def}(f_j) \Rightarrow f_i(x) = f_j(x) \quad (1.1.2)$$

Il existe pour une telle famille un plus petit prolongement commun qui sera noté :

$$\text{Sup}(f_i) \quad (1.1.3)$$

Nous noterons

$$DL^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \quad (1.1.4)$$

l'ensemble des applications  $C^\infty$  définies sur les ouverts de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ , nous conviendrons que  $\mathbb{1}_\emptyset \in DL^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ . Le symbole  $DL$  signifie différentiable local. Nous conviendrons encore que toute application définie sur le singleton  $\mathbb{R}^0 = \{0\}$  est différentiable.

#### 1.1.5 Définition :

Une **difféologie** sur un ensemble  $E$  est la donnée pour tout entier  $n$  d'un ensemble d'applications

$$DL(\mathbb{R}^n, E)$$

définies sur des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $E$  tel que :

a) Pour tout  $x \in E$ ,  $x^\circ = [0 \mapsto x] \in DL(\mathbb{R}^0, E)$

b) Pour tout  $n$  et  $p$  entiers, pour tout  $\varphi \in DL(\mathbb{R}^n, E)$  pour tout

<sup>2</sup> La restriction  $f|_A$  désigne la composée  $f \circ \text{in}_A$  où  $\text{in}_A$  est l'inclusion de  $A$  dans  $\text{def}(f)$ .

$F \in DL^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ , si  $\text{im}(F) \subset \text{def}(\varphi)$  alors  $\varphi \circ F \in DL(\mathbb{R}^p, E)$ .

c) Pour toute famille compatible  $\{f_i\}_{i \in I}$  d'éléments de  $DL(\mathbb{R}^n, E)$ .

$\text{Sup}(f_i)$  est encore un élément de  $DL(\mathbb{R}^n, E)$ .

Une difféologie de  $E$  sera désignée par la lettre  $D$  munie éventuellement d'indices ou d'accents ( par exemple  $D_1, D_2, D', D'' \dots$  ). Un ensemble muni d'une difféologie  $(E, D)$  sera appelé **espace difféologique**. Nous noterons le plus souvent, lorsqu'aucune confusion ne sera possible, un espace difféologique par la lettre désignant son ensemble sous-jacent .

Les éléments de l'ensemble  $DL(\mathbb{R}^n, E)$  seront appelés **plaques** de  $E$ , où plus précisément **n-plaques** de  $E$ . Nous conviendrons que l'application vide est une plaque de  $E$ :  $\mathbb{1}_\emptyset \in DL(\mathbb{R}^n, E)$ . Nous utiliserons parfois la notation  $\{DL(\mathbb{R}^n, E)\}_{n \in \mathbb{N}}$  pour désigner l'ensemble de toutes les plaques de  $E$ .

Nous utiliserons le plus souvent l'axiome c) formulé de la façon suivante:

c') Toute application  $\varphi$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $E$  vérifiant<sup>3</sup>

$$\forall r \in U, \exists V \text{ voisinage de } r \text{ tel que } \varphi|_V \in DL(\mathbb{R}^n, E)$$

est un élément de  $DL(\mathbb{R}^n, E)$ .

En posant  $DL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = DL^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ ,  $\mathbb{R}^p$  est muni de sa difféologie standard, dont les plaques sont les applications différentiables.

A titre d'exemple toute variété  $V$  possède une difféologie standard définie par les applications différentiables.

## 1.2 La catégorie des espaces difféologiques

<sup>3</sup>Nous dirons alors, par abus, que  $f$  est localement différentiable, nous verrons en quoi cela se justifie plus tard.

1.2.1 **Définition :**

Etant donnés deux espaces difféologiques  $E$  et  $E'$ , une partie  $A$  de  $E$  et une application  $f$  définie sur  $A$  à valeurs dans  $E'$ ,  $f$  sera dite **différentiable locale** si et seulement si

$$\forall \varphi \in DL(\mathbb{R}^n, E) \quad f \circ \varphi \in DL(\mathbb{R}^n, E')$$

Si  $A=E$  nous dirons que  $f$  est **différentiable**. Nous noterons  $D(E, E')$  l'ensemble des applications différentiables définies dans  $E$  à valeurs dans  $E'$  et  $DL(E, E')$  l'ensemble des applications différentiables locales définies sur  $E$  à valeurs dans  $E'$ .

Le domaine de définition de  $f \circ \varphi$  (1.2.1) peut être vide, auquel cas  $f \circ \varphi = \mathbb{1}_\emptyset$  est un élément de  $DL(\mathbb{R}^n, E)$  (cf. S1.1).

Notons que les plaques de  $E$  sont alors les applications différentiables locales de  $DL(\mathbb{R}^n, E)$  à valeurs dans  $E$ , ce qui justifie, à posteriori, la notation  $DL(\mathbb{R}^n, E)$ . Nous dirons donc indifféremment plaques ou applications différentiables (définies sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ).

1.2.2 **Proposition :**

Etant donnés deux espaces difféologiques  $E$  et  $E'$  et une application  $f$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $E'$ . Si pour tout  $x \in E$  il existe  $A \subseteq E$  contenant  $x$  tel que  $f|_A$  soit différentiable locale ( nous dirons que  $f$  est **localement différentiable**) alors  $f$  est différentiable. En d'autres termes toute application localement différentiable est différentiable.

□ Soit  $\varphi$  une  $n$ -plaque de  $E$  et  $r_0 \in \text{def}(\varphi)$ , soit  $x_0 = \varphi(r_0)$ , il existe  $A \subseteq E$  tel que  $f|_A$  soit différentiable locale et donc que  $f|_A \circ \varphi \in DL(\mathbb{R}^n, E')$  (1.2.1), ceci implique que  $\text{def}(f|_A \circ \varphi) = \varphi^{-1}(A)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Donc en vertu de l'axiome c) de 1.1.5,  $f \circ \varphi$  est une  $n$ -plaque de  $E'$ . □

Ceci fait apparaître en fait une topologie naturelle associée à toute difféologie :

### 1.2.3 Définition :

La topologie la plus fine qui rende toutes les plaques d'un espace difféologique continues est appelée **D-topologie**.

Les ouverts de la D-topologie, appelés **D-ouverts**, sont les parties A dont l'image réciproque par toute plaque est ouverte. Une application continue pour la D-topologie est dite **D-continue**. Une application différentiable locale est alors nécessairement définie sur un D-ouvert.

### 1.2.4 Proposition :

Toute application différentiable est D-continue .

□ Soient E et E' deux espaces difféologiques et  $F \in D(E, E')$ . Soit  $\Omega$  un D-ouvert de E',  $F^{-1}(\Omega)$  est un D-ouvert si et seulement si pour toute plaque  $\varphi$  de E,  $\varphi^{-1}(F^{-1}(\Omega))$  est ouvert, or  $\varphi^{-1}(F^{-1}(\Omega))$  est égal à  $(F \circ \varphi)^{-1}(\Omega)$ , qui est ouvert parce que  $F \circ \varphi$  est une plaque de E'. □

La catégorie des espaces difféologiques est alors définie par ses objets qui sont naturellement les espaces difféologiques et ses morphismes qui sont les applications différentiables. Cette catégorie<sup>4</sup> sera notée:

$$\mathbf{Desp} \quad (1.2.5)$$

Les axiomes des catégories se vérifient immédiatement (la composée de deux applications différentiable est encore différentiable etc...)

Les isomorphismes de la catégorie **Desp** sont naturellement appelés **difféomorphismes** et :

$$\mathbf{Diff}(E, E') \quad (1.2.6)$$

désignera l'espace des difféomorphismes de E à E', E et E' espaces difféologiques.

<sup>4</sup> métacatégorie au sens de [15].

Toute application injective, différentiable locale ainsi que son inverse, est appelée **difféomorphisme local**.

Les variétés différentiables peuvent être définies alors en termes de difféologie :

### 1.2.7 Définition :

Une **variété** est un espace difféologique, en tout point localement difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$ .

Etant donné un ouvert  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$  et une variété  $V$ ,  $D(U,V) = C^\infty(U,V)$ . La  $D$ -topologie d'une variété coïncide avec la topologie naturelle induite par ses cartes.

Un ensemble peut être muni a priori de plusieurs difféologies, celles-ci peuvent être comparées :

### 1.2.8 Définition :

Etant donnés deux difféologies  $D$  et  $D'$  définies sur un ensemble  $E$ .  $D$  est plus **fine** que  $D'$ , ( $D \leq D'$ ), si elle contient **moins d'applications**:

$$D \leq D' \Rightarrow DL(\mathbb{R}^n, E) \subset DL(\mathbb{R}^n, E') \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Il est équivalent de dire que  $\mathbb{1}_E : (E, D) \mapsto (E, D')$  est différentiable<sup>5</sup>.

La finesse est une relation d'ordre sur les difféologies d'un ensemble. Tout ensemble non vide possède une plus fine difféologie appelée **difféologie discrète**, ses plaques sont les applications localement constantes, et une moins fine difféologie appelée **difféologie grossière** ou bien **difféologie vague**, ses plaques sont toutes les applications définies sur des ouverts.

Les notions d'images directes et réciproques de difféologies sont données par la proposition suivante:

<sup>5</sup> Si  $A$  est un ensemble non vide  $\mathbb{1}_A$  désignera toujours l'identité sur  $A$ .



**1.2.9 Proposition :**

Etant données un espace difféologique  $E$ , un ensemble  $E'$  et une application  $F$  définie sur  $E$  à valeurs dans  $E'$  :

$$F : E \rightarrow E'$$

Il existe sur  $E'$  une plus fine difféologie qui rende  $F$  différentiable, elle est appelée **difféologie image** par  $F$ .

Etant données un espace difféologique  $E'$ , un ensemble  $E$  et une application  $F$  définie sur  $E'$  à valeurs dans  $E$ , il existe sur  $E$  une moins fine difféologie qui rende  $F$  différentiable, elle est appelée **difféologie réciproque** par  $F$ .

La difféologie réciproque (1.2.9) est explicitement donnée par :

$$\varphi \in DL(\mathbb{R}^n, E) \Leftrightarrow F \circ \varphi \in DL(\mathbb{R}^n, E') \quad (1.2.10)$$

Dans le cas où  $F$  est surjective la difféologie image est explicitement donnée par :

$$\varphi \in DL(\mathbb{R}^n, E') \Leftrightarrow \forall r \in \text{def}(\varphi), \exists V \text{ voisinage de } r, \exists \psi \in DL(\mathbb{R}^n, E) : \varphi|_V = F \circ \psi \quad (1.2.11)$$

Nous dirons dans ce cas (1.2.11) que  $\varphi$  est un **relevé local** de  $\psi$ . En d'autres termes  $\varphi$  est une plaque de  $E'$  si elle admet en tout point un relevé local dans  $E$ .

Grâce aux notions d'images directe et réciproque sont définies les subductions et les inductions difféologiques :

**1.2.12 Définition :**

Etant donnés deux espaces difféologiques  $E$  et  $E'$  et une application différentiable  $F \in D(E, E')$  :

- a)  $F$  est une **subduction** de  $E$  sur  $E'$  si  $F$  est surjective et si la difféologie de  $E'$  coïncide avec la difféologie image de  $E$  par  $F$ .
- b)  $F$  est une **induction** de  $E$  dans  $E'$  si  $F$  est injective et si la difféologie de  $E$  coïncide avec la difféologie réciproque de  $E'$  par  $F$ .

En particulier:

### 1.2.13 Définition :

Etant donné un espace difféologique  $E$ , une partie  $A$  de  $E$  et  $\text{in}_A$  l'injection canonique de  $A$  dans  $E$ .  $\text{in}_A$  est une induction lorsque  $A$  est muni de la difféologie réciproque de  $E$  par  $\text{in}_A$ . Muni de cette difféologie,  $A$  est appelé **sous-espace difféologique** de  $E$  et sa difféologie: **difféologie induite** par  $E$  ou **difféologie de partie** de  $E$ .

Soit  $E$  un espace difféologique,  $\mathcal{R}$  une partition de  $E$  et  $E' = E/\mathcal{R}$  l'ensemble quotient. la projection canonique  $\pi$  de  $E$  sur  $E'$  est une subduction lorsque  $E'$  est muni de la difféologie image de  $E$  par  $\pi$ . Muni de cette difféologie  $E'$  est appelé **espace difféologique quotient** et sa difféologie **difféologie de quotient**.

Un quotient de variété par une relation d'équivalence ne possède pas, à priori, de structure de variété. Il possède, par contre, toujours une structure canonique d'espace difféologique quotient.

Il est possible en utilisant la D-topologie de définir la notion de plongement difféologique :

### 1.2.14 Définition :

Etant donné deux espaces difféologiques  $E$  et  $E'$  et une induction  $i$  de  $E$  dans  $E'$ ,  $i$  sera appelé **plongement** (difféologique) si l'image réciproque de la D-topologie de  $E'$  par  $i$  coïncide avec la D-topologie de  $E$ .

Donnons quelques propriétés des subductions et des inductions :

### 1.2.15 Proposition :

Toute induction surjective, ainsi que toute subduction injective, est un difféomorphisme. La composée de deux subductions (resp. inductions) est

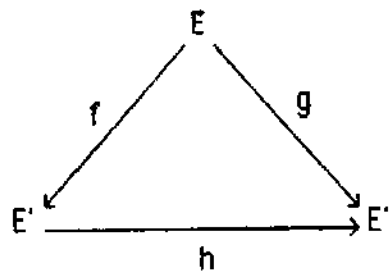
une subduction (resp. induction). La restriction d'une induction à un sous espace difféologique est encore une induction.

□ La démonstration est Immédiate. □

### 1.2.16 Proposition :

Etant donnés trois espaces difféologiques  $E, E', E''$  et trois applications différentiables  $f, g$  et  $h$  telles que le diagramme 1.1 commute. Si  $g$  est une subduction il en est de même pour  $h$ .

□ Si  $g$  est surjective, grâce à la commutativité du diagramme 1.1, il en est de même pour  $h$ . D'autre part pour toute plaque  $\phi$  de  $E''$  et tout point  $r$  de  $\text{def}(\phi)$  il existe un voisinage  $V$  de  $r$  et un relevé local  $\psi$  de  $\phi$  dans  $E$  au dessus de  $V$  (1.2.11):  $g \circ \psi = \phi|_V$ . L'application  $\psi' = f \circ \psi$  est donc une plaque de  $E'$  qui relève localement  $\phi$  dans  $E'$ . □



(diag. 1.1)

### 1.2.17 Proposition :

Etant donnés deux espaces difféologiques  $E$  et  $E'$ ,  $A$  un sous-espace difféologique de  $E$  et  $f \in \mathcal{D}(E, E')$ , la restriction  $f|_A$  de  $f$  à  $A$  est différentiable. De plus si  $f$  est un difféomorphisme de  $E$  dans  $E'$  sa restriction  $f|_A$  est un difféomorphisme de  $A$  sur son image.

□  $f|_A$  est différentiable si et seulement si pour toute plaque  $\phi$  de  $A$ , munie de la difféologie de partie,  $f \circ \phi$  est une plaque de  $E'$ ; or par définition de la difféologie de partie,  $\phi$  est une plaque de  $E$  à valeurs dans  $A$ , donc puisque  $f$  est

différentiable,  $f \circ \varphi$  est différentiable. Si  $f$  est un difféomorphisme  $f|_A$  est bijective et différentiable de  $A$  sur  $f(A)$ , son inverse  $f|_A^{-1} = f^{-1}|_{f(A)}$  est différentiable pour les mêmes raisons que  $f|_A$ .  $\square$

### 1.2.18 Proposition :

Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces difféologiques et  $\pi$  une subduction de  $E$  sur  $E'$ . Soit  $A$  un sous-espace difféologique de  $E'$  et  $B = \pi^{-1}(A)$  muni de la difféologie de partie. La restriction de  $\pi$  à  $B$  est une subduction sur  $A$ .

$\square$  La démonstration est immédiate.  $\square$

Nous achèverons ce paragraphe sur les notions de difféologie somme et difféologie produit :

### 1.2.19 Définition :

Etant donnée une famille  $(E_i)$  d'espaces difféologiques, on définit sur le produit  $\prod E_i$  la **difféologie produit** comme la plus fine qui rende différentiable les projections canoniques  $pr_{E_i}$ , ce sont alors des subductions<sup>6</sup>. On définit sur l'union disjointe<sup>7</sup>  $\cup E_i$  la **difféologie somme** comme la moins fine qui rende différentiable les injections canoniques  $in_{E_i}$ , ce sont alors des inductions.

## 1.3 Quelques illustrations

Considérons le quotient de la droite réelle  $\mathbb{R}$  par l'action naturelle de  $Z_2 = O(1)$  et celui de  $\mathbb{R}^2$  par  $O(2)$ .

<sup>6</sup> La projection canonique d'un produit  $\prod X_i$  sur un de ses facteurs  $X_j$  sera toujours notée  $pr_{X_j}$ .

<sup>7</sup>Le symbole  $\cup$  désignera toujours l'union disjointe d'ensembles ou la somme difféologique d'espaces.

Topologiquement ces deux espaces s'identifient à la demi droite  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ .  
 Difféologiquement ils s'identifient à la demi droite  $\mathbb{R}^+$  munie respectivement  
 des difféologies images de  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^2$  par les applications  $\pi_1$  et  $\pi_2$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto x^2 \\ \\ \pi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \xi \mapsto \|\xi\|^2 \end{array} \right. \quad (1.3.1)$$

### 1.3.2 Proposition :

Les espaces difféologiques quotients  $\mathbb{R}/O(1)$  et  $\mathbb{R}^2/O(2)$  sont non difféomorphes.

□ Supposons qu'il existe un difféomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}/O(1)$  sur  $\mathbb{R}^2/O(2)$ . Puisque les D-topologies quotients coïncident avec la topologie canonique de la demi droite  $\mathbb{R}^+$ ,  $f$  est aussi un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^+$  et applique donc zéro sur zéro :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^+ \\ & \xleftarrow{f^{-1}} & \end{array}$$

(diag. 1.2)

Puisque  $f$  est différentiable il existe un voisinage  $V$  de zéro dans  $\mathbb{R}$  et une application différentiable  $f_1$  définie sur  $V$  telle que :

$$f \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f_1 \quad \text{sur } V$$

de même il existe un voisinage  $U$  de zéro dans  $\mathbb{R}^2$  et une application différentiable  $f_2$  définie sur  $U$  telle que

$$f^{-1} \circ \pi_2 = \pi_1 \circ f_2 \text{ sur } U$$

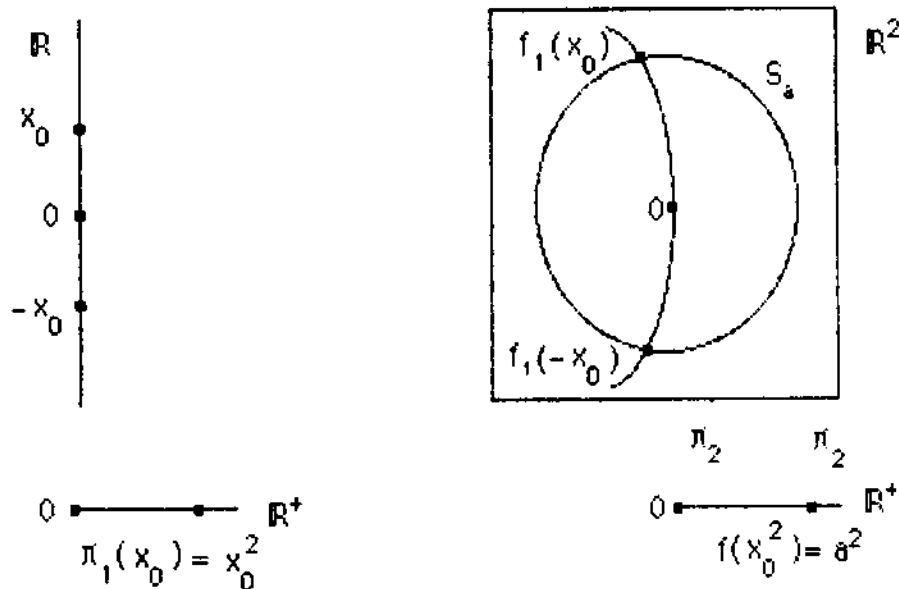
Pour tout  $x \in V \cap f_1^{-1}(U)$ , qui est non vide car  $0 \in V \cap f_1^{-1}(U)$ , on a :  
 $\pi_1(x) = f^{-1} \circ \pi_2 \circ f_1(x) = \pi_1 \circ f_2 \circ f_1(x)$ , dont on déduit :

$$\forall x \in V \cap f_1^{-1}(U) \quad f_2 \circ f_1(x) = \pm x$$

Or  $f_2 \circ f_1$  est différentiable et donc une seule de ces éventualités est réalisée. Nous supposons  $f_2 \circ f_1(x) = x, \forall x \in V \cap f_1^{-1}(U)$ . On déduit alors que  $f_1$  est injective (voir figure 1.1).

D'autre part  $f_1$ , comme  $f_2$ , envoie les orbites dans les orbites. Considérons alors  $S_a$  le cercle dans  $\mathbb{R}^2$  de rayon  $a \neq 0$ , avec  $S_a \subset U \cap f_1(V)$ , son image par  $f_2$  est alors contenue dans  $[-x_0, x_0]$  avec  $x_0 = [f^{-1}(a_2)]^{1/2}$ . Mais  $f_1(-x_0) \in S_a$  et  $f_1(x_0) \in S_a$  et  $f_1(x_0) \neq f_1(-x_0)$ . Les deux points  $x_0$  et  $-x_0$  sont donc atteints par  $f_2$  puisque  $f_2 \circ f_1 = \mathbb{1}_{V \cap f_1^{-1}(U)}$ . Ceci est impossible du fait de la différentiabilité de  $f_2$  et de  $a \neq 0 \Rightarrow x_0 \neq 0$ . La démonstration est analogue lorsque  $f_2 \circ f_1(x) = -x$ .  $\square$

Cet exemple illustre la notion de difféologie quotient. Il met en évidence le caractère plus fin de la difféologie quotient par rapport à la topologie quotient, puisque  $\mathbb{R}/O(1)$  et  $\mathbb{R}^2/O(2)$  sont topologiquement équivalents.



(fig.1.1)

Considérons maintenant le groupe  $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$  muni de sa difféologie standard de groupe de difféomorphismes (cf. S2, [21], [6]). Soit  $\text{in}_{\text{GL}(n)}$  l'injection canonique de  $\text{GL}(n)$  dans  $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$  :

$$\text{in}_{\text{GL}(n)} : \text{GL}(n) \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^n) \quad (1.3.3)$$

$\text{GL}(n)$  est muni de la difféologie de partie qui en fait un sous espace difféologique de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ , cette difféologie coïncide avec sa difféologie canonique de groupe de Lie.

#### 1.3.4 Proposition :

L'injection canonique  $\text{in}_{\text{GL}(n)}$  de  $\text{GL}(n)$  dans  $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$  est un plongement.

□  $\text{in}_{\text{GL}(n)}$  est une induction. Puisque cette application est différentiable elle est D-continue (1.2.5) et donc l'image réciproque de tout D-ouvert est un D-ouvert. Il suffit alors de montrer que l'image d'un ouvert pour la topologie standard de  $\text{GL}(n)$  (qui coïncide avec la D-topologie de  $\text{GL}(n)$  muni de la difféologie de partie) est la trace d'un D-ouvert de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$ . Il suffit en fait de le vérifier pour une boule de rayon  $r$  centrée au point  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n} \in \text{GL}(n)$ . Soit  $B_r$  cette boule. Notons  $\Omega_r$  l'ensemble :

$$\Omega_r = \{ f \in \text{Diff}(\mathbb{R}^n) \mid D(f)(0) \in B_r \}$$

où  $D(f)(0)$  désigne l'application linéaire tangente de  $f$  au point 0.

Montrons que  $\Omega_r$  est un D-ouvert :

Soit  $\varphi \in \text{DL}(U, \text{Diff}(\mathbb{R}^n))$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , ceci implique par définition :

$$[(x, \xi) \mapsto \varphi(x)(\xi)] \in \text{D}(U \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$$

et donc :

$$\varphi^{-1}(\Omega_r) = \{ x \in U \mid D(\varphi(x))(0) \in B_r \}$$

En considérant  $\varphi$  comme une application différentiable définie sur  $U \times \mathbb{R}^n$ ,  $D(\varphi(x))(0)$  est la deuxième dérivée de  $\varphi$  en 0, l'application  $[x \mapsto D(\varphi(x))(0)]$  est continue et donc  $\varphi^{-1}(\Omega_r)$  est l'image réciproque de  $B_r$  par une application continue, c'est donc un ouvert. Par définition de la D-topologie (1.2.5)  $\Omega_r$  est un D-ouvert. Puisque  $\text{in}_{\text{GL}(n)}^{-1}(\Omega_r) = B_r$  l'image par  $\text{in}_{\text{GL}(n)}$  de tout ouvert de  $\text{GL}(n)$  est la trace d'un D-ouvert de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^n)$  et donc  $\text{in}_{\text{GL}(n)}$  est un plongement. □

Nous allons achever ce paragraphe en définissant des difféologies particulières qui interviendront dans les chapitres suivants.

### 1.3.5 Définition :

Soit  $E$  un espace difféologique muni d'une partition  $\mathcal{P}$ . Chaque partie étant munie de la difféologie induite, nous appellerons **difféologie feuilletée** par  $\mathcal{P}$  la somme difféologique des parties (1.2.19).

En d'autres termes toute plaque de la difféologie feuilletée est une plaque pour la difféologie initiale localement à valeurs dans un élément de la partition  $\mathcal{P}$ . La difféologie feuilletée est donc plus fine que la difféologie initiale.

### 1.3.6 Proposition :

Etant donnés deux espaces difféologiques  $E$  et  $E'$ , on appelle valuation l'application définie par :

$$\begin{aligned} \text{val} : D(E, E') \times E' &\rightarrow E' \\ (f, x) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Il existe sur  $D(E, E')$  une difféologie la moins fine qui rende  $\text{val}$  différentiable, nous l'appellerons **difféologie fonctionnelle**. Muni de cette difféologie  $D(E, E')$  sera appelé **espace fonctionnel**.

Etant donné un autre espace difféologique  $A$  et une application  $f$  définie sur  $A$  à valeurs dans  $D(E, E')$ ,  $f$  est différentiable si et seulement si l'application  $f$  définie sur  $A \times E$  à valeurs dans  $E'$  par :

$$\forall (a, x) \in A \times E \quad f(a, x) = f(a)(x)$$

est différentiable. En particulier les plaques de  $D(E, E')$  sont définies par :

$$\varphi \in DL(\mathbb{R}^n, D(E, E')) \iff \bullet = [ (r, x) \mapsto \varphi(r)(x) ] \in D(\text{def}(\varphi) \times E, E')$$

□ Montrons d'abord que la famille  $\{DL(\mathbb{R}^n, D(E, E'))\}_{n \in \mathbb{N}}$  définit bien une difféologie. Pour toute application  $\varphi$  définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $D(E, E')$  notons  $\bullet$  l'application définie sur  $\Omega \times E$  par  $\bullet(r, x) = \varphi(r)(x)$  pour tout  $(r, x) \in \Omega \times E$ .



a) soit  $f \in D(E, E')$  l'application  $f^* : 0 \mapsto f$  vérifie évidemment  $f^* = [ (0, x) \mapsto f(x) ] \in D(\mathbb{R}^0 \times E, E')$ .

b) Soit  $\varphi \in D(\Omega, D(E, E'))$ ,  $\Omega$  ouvert dans  $\mathbb{R}^n$  et soit  $F \in DL(\mathbb{R}^n, \Omega)$ , l'application  $\varphi \circ F$  se décompose en produit d'applications différentiables :

$$\varphi \circ F : (r, x) \mapsto (F(r), x) \mapsto \varphi((F(r), x))$$

elle est donc elle-même différentiable, donc  $\varphi \circ F \in DL(\mathbb{R}^n, D(E, E'))$ .

c') Soit  $\varphi$  une application définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $D(E, E')$  qui soit localement dans  $DL(\mathbb{R}^n, D(E, E'))$ , c'est à dire :

$$\forall r \in \Omega, \exists V \text{ voisinage de } r \text{ dans } \Omega \text{ tel que } \varphi|_V \text{ est différentiable}$$

$\varphi$  est alors localement différentiable, elle est donc différentiable (1.2.2),  $\varphi$  est ainsi un élément de  $DL(\mathbb{R}^n, D(E, E'))$ .

La famille  $\{DL(\mathbb{R}^n, D(E, E'))\}_{n \in \mathbb{N}}$  définit donc sur  $D(E, E')$  une difféologie.

Considérons alors une difféologie  $D'$  sur  $D(E, E')$  qui rende val différentiable et soit  $\varphi \in D'(\Omega, D(E, E'))$ ,  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , l'application  $\varphi$  se décompose comme suit :

$$(r, x) \mapsto (\varphi(r), x) \mapsto \varphi(r)(x)$$

La première application est évidemment différentiable à valeurs dans  $D(E, E') \times E'$ , la seconde est l'application val, différentiable par hypothèse. Ceci montre que la difféologie  $D'$  est plus fine que  $D$ .

Soit maintenant  $f : A \mapsto D(E, E')$ , supposons  $f$  différentiable :

$$\forall \varphi \in DL(\mathbb{R}^n, A) \Rightarrow [ (r, x) \mapsto f(\varphi(r))(x) ] \in D(\text{def}(\varphi) \times E, E')$$

Considérons alors une plaque  $\xi$  de  $A \times E$  :  $\xi = [ r \mapsto (\varphi(r), \psi(r)) ]$ , l'application  $f \circ \xi : r \mapsto f(\varphi(r))(\psi(r))$  se décompose alors en un produit d'applications différentiables :

$$f \circ \xi : r \mapsto (r, \psi(r)) \mapsto f(\varphi(r))(\psi(r)) \quad (E)$$

Donc  $f$  est différentiable.

Réciproquement supposons que  $f$  soit différentiable (E) et soit  $\varphi \in DL(\mathbb{R}^n, A)$ , soit  $\eta : s \mapsto (\varphi(s), \psi(s))$  une plaque de  $\text{def}(\varphi) \times E$ , l'application  $[s \mapsto f(\varphi(\rho(s))), \psi(s)]$  est différentiable car  $\varphi \circ \rho$  est différentiable. Donc

$$[ (r, x) \mapsto f(\varphi(r))(x) ] \in D(\text{def}(\varphi) \times E, E')$$

c'est à dire:  $f$  est différentiable.  $\square$

Le caractère récursif de la difféologie est illustrée par le corollaire suivant:

### 1.3.7 Corollaire :

Soit une famille dénombrable  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  d'espaces difféologiques et soient  $\{\mathbf{E}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  la famille d'espaces difféologiques définis par récurrence :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0 = E_0 \\ \mathbf{E}_n = D(E_n, \mathbf{E}_{n-1}) \end{cases}$$

l'application  $f \mapsto \mathbf{f}$  définie sur  $\mathbf{E}_n$  à valeurs dans  $D(E_n \times E_{n-1} \times \dots \times E_1, E_0)$  par:

$$\mathbf{f} : (x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) \mapsto f(x_n)(x_{n-1}) \dots (x_1)$$

est un difféomorphisme .

En particulier l'espace  $\text{Arc}(E)$  des **arcs différentiables** de l'espace difféologique  $E$  sera défini comme l'espace fonctionnel  $D(\mathbb{R}, E)$ . Grâce au corollaire 1.3.7 les espaces  $\text{Arc}(\text{Arc}(\dots(\text{Arc}(E)\dots))$  seront identifiés à  $D(\mathbb{R}^n, E)$ .

$$\text{Arc}(E) = D(\mathbb{R}, E) \quad \underbrace{\text{Arc}(\text{Arc}(\dots(\text{Arc}(E)\dots))}_{n \text{ fois}} \sim D(\mathbb{R}^n, E)$$

(1.3.8)

l'**espace des lacets** de  $E$  au point  $x_0 \in E$ , noté  $L(E, x_0)$ , est le sous-espace difféologique de l'espace fonctionnel  $\text{Arc}(E)$  défini par:

$$L(E, x_0) = \{ f \in \text{Arc}(E) \mid f(0) = f(1) = x_0 \} \quad (1.3.9)$$

la difféologie induite par  $\text{Arc}(E)$  sur  $L(E, x_0)$  sera appelée encore difféologie d'espace fonctionnel.

## 1.4 La catégorie des applications différentiables

Etant donnée une application différentiable  $\pi : X \rightarrow M$ , où  $X$  et  $M$  sont des espaces difféologiques quelconques, nous noterons  $\Pi$  le triplet :

$$\Pi = (X, M, \pi) \quad (1.4.1)$$

$\Pi$  sera encore appelé **application différentiable**. Nous noterons  $X_m$  l'image réciproque par  $\pi$  d'un point  $m$  de  $M$  :

$$X_m = \pi^{-1}(m) \quad m \in M \quad (1.4.2)$$

#### 1.4.3 Définition :

Etant données deux applications différentiables  $\Pi = (X, M, \pi)$  et  $\Pi' = (X', M', \pi')$  et  $\varphi \in D(X, X')$  telle que :

$$\forall (x, y) \in X \times X : \pi(x) = \pi(y) \Rightarrow \pi' \circ \varphi(x) = \pi' \circ \varphi(y)$$

Nous dirons que  $\varphi$  se **projette** dans  $M$ . Il existe alors une application unique  $pr(\varphi) : im(\pi) \rightarrow im(\pi')$  telle que le diagramme 1.3 commute, nous l'appellerons **projection** de  $\varphi$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M \supset im(\pi) & \xrightarrow{pr(\varphi)} & im(\pi') \subset M' \end{array}$$

(diag. 1.3)

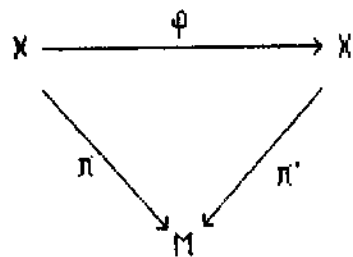
#### 1.4.4 Définition :

Etant données deux applications différentiables  $\Pi = (X, M, \pi)$  et  $\Pi' = (X', M', \pi')$ , nous appellerons **morphisme d'application différentiable** de  $\Pi$  à  $\Pi'$  toute application  $\varphi \in D(X, X')$  se projetant dans  $M$  telle que  $pr(\varphi) \in D(im(\pi), im(\pi'))$ ,  $im(\pi)$  et  $im(\pi')$  étant munis de leur difféologie de partie.

Grâce à 1.4.4 est définie la **catégorie des applications différentiables** que nous noterons :

**Dapp (1.4.5)**

Etant données deux applications différentiables de même espace de valeurs  $M$ :  $\Pi = (X, M, \pi)$  et  $\Pi' = (X', M, \pi')$ , nous appellerons **M-équivalence** de  $\Pi$  à  $\Pi'$  tout isomorphisme  $\varphi$  de  $\Pi$  à  $\Pi'$  se projetant sur l'identité de  $M$ :  $pr(\varphi) = \mathbb{1}_M$ . Ceci implique en particulier que  $\pi$  et  $\pi'$  soient surjectives, que  $\varphi$  est un difféomorphisme de  $X$  sur  $X'$  tel et  $f|_{X_m} \in \text{Diff}(X_m, X'_m)$  pour tout  $m \in M$  (diagramme 1.4). Il est clair que  $pr(\varphi)$  (1.4.3) est entièrement définie par  $\varphi$ , seule sa différentiabilité n'est pas a priori assurée.



(diag.1.4)

Mais si  $\pi$  est une subduction :

**1.4.6 Proposition :**

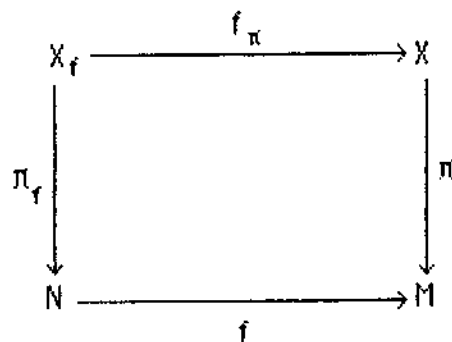
Etant données deux applications différentiables  $\Pi = (X, M, \pi)$ ,  $\Pi' = (X', M', \pi')$  et  $\varphi \in D(X, X')$  se projetant dans  $M$ . Si  $\pi$  est une subduction alors  $pr(\varphi) \in D(M, M')$  et  $\varphi$  est un morphisme de  $\Pi$  à  $\Pi'$ .

□ Il suffit de relever localement dans  $X$  une plaque de  $M$  et de la transporter par  $\varphi$  dans  $X'$ . □

Soient  $\Pi = (X, M, \pi)$  une application différentiable,  $N$  un espace difféologique et  $f \in D(N, M)$ , nous noterons  $X_f$  le sous-espace difféologique du produit  $N \times X$  défini par:

$$X_f = \{ (n, x) \in N \times X \mid f(n) = \pi(x) \} \quad (1.4.7)$$

Nous noterons  $\pi_f$  et  $f_\pi$  les restrictions à  $X_f$  des projections canoniques  $pr_N$  et  $pr_X$ :



(diag. 1.5)

#### 1.4.8 Proposition :

les applications  $\pi_f$  et  $f_\pi$  sont différentiables. Le triplet  $(X_f, N, \pi_f)$  sera appelé **image réciproque** de  $\pi$  par  $f$  et sera noté  $\Pi_f$ . Si  $\pi$  est un subduction il en est de même de  $\Pi_f$ , si  $\pi$  et  $f$  sont des subductions il en est de même de  $f_\pi$ .

□  $\pi_f$  et  $f_\pi$  sont différentiables car la restriction d'applications différentiables à un sous-espace difféologique est différentiable (1.2.17), d'autre part si  $\pi$  est une subduction et  $\varphi$  une plaque de  $N$ ,  $f \circ \varphi$  est une plaque de  $M$  qui se relève localement dans  $X$  en tout point, soit  $\psi$  un tel relevé au voisinage d'un point  $r_0$ , l'application  $[r \mapsto (\varphi(r), \psi(r))]$  est alors un relevé local de  $\varphi$  dans  $X_f$ . Enfin si  $\pi$  et  $f$  sont deux subductions et si  $F$  est une plaque de  $X$ ,  $\pi \circ F$  est une plaque de  $M$  qui se relève localement dans  $N$ , puisque  $\pi_f$  est une subduction ces relevés locaux de  $\pi \circ F$  se relèvent à leur tour dans  $X$  ce qui permet de relever localement  $F$  dans  $X_f$ . □

#### 1.4.9 Proposition :

Etant donné une application différentiable  $\Pi = (X, M, \pi)$ , deux espaces difféologiques  $V$  et  $W$ ,  $f \in D(V, M)$  et  $g \in D(W, V)$ ; l'application  $g^\pi$  définie sur  $(X_f)_g$  dans  $X_{f \circ g}$  par :

$$g^\pi : (w, x) \mapsto (w, g(x), x)$$

est une  $W$ -équivalence de  $(\Pi_r)_g$  à  $\Pi_{f \circ g}$ .

□ La démonstration est immédiate. □

#### 1.4.10 Définitions :

Etant donnée une application différentiable  $\Pi = (X, M, \pi)$ :

a) Soient  $A$  un sous-espace difféologique de  $X$  nous appellerons **restriction** de  $\Pi$  à  $A$  l'image réciproque de  $\Pi$  par l'induction canonique  $in_A : A \mapsto M$ , on notera  $\Pi^A = (X^A, A, \pi^A)$ .

b) Soit  $Y$  un sous-espace difféologique de  $X$ , nous dirons que  $\Pi_Y = (Y, M, \pi_Y)$  est la **réduction** de  $\Pi$  à  $Y$ . Nous dirons que  $Y$  est une **section** au dessus de  $im(\pi_Y)$  si  $\pi_Y$  est bijective, nous appellerons aussi section l'application  $s = \pi_Y^{-1}$ .

c) Etant donné une autre application différentiable  $\Pi' = (X', M', \pi')$  nous appellerons **produit** de  $\Pi$  par  $\Pi'$  et nous noterons  $\Pi \times \Pi'$  le triplet  $(X \times X', M \times M', \pi \times \pi')$  où

$$\pi \times \pi'(x, x') = (\pi(x), \pi(x')).$$

d) Nous dirons que  $\Pi = (X, M, \pi)$  est **triviale** si elle est  $M$ -équivalente à la projection canonique:

$$Pr_M = (M \times F, M, pr_M)$$

où  $F$  est un espace difféologique quelconque.  $F$  sera alors appelé  **fibre type** de  $\Pi$ . Nous dirons que  $\Pi$  est **localement triviale** si il existe un recouvrement  $D$ -ouvert  $\{U_j\}_{j \in J}$  de  $M$  tel que les restrictions  $\Pi|_{U_j}$  de  $\Pi$  à  $U_j$  soient triviales pour une même fibre type  $F$ .

Ceux qui s'occupent de géométrie et d'arithmétique supposent le pair et l'impair, trois espèces d'angles; ils les traitent comme choses connues: une fois cela supposé, ils estiment qu'ils n'ont plus à en rendre compte ni à eux même ni aux autres, le regardant comme clair à chacun; et partant de là, ils procèdent par ordre, pour en arriver d'un commun accord au but que leur recherche s'était proposée .

Platon

## **§2- GROUPOIDES DIFFELOGIQUES**

La notion de groupe difféologique a été introduite par J.M.Souriau, c'est une généralisation des groupes de Lie [21][23]. A partir de cette définition et de celle d'espace homogène de groupe difféologique qui en découle, P.Donato a introduit la notion de **fibres homogènes** qui sont les fibrations standards  $G \mapsto G/H$ , où  $G$  est un groupe difféologique et  $H$  un sous-groupe difféologique de  $G$ .

Afin de généraliser, aux espaces difféologiques, la notion de fibration telle qu'elle est définie ordinairement en géométrie différentielle, nous avons été amenés définir les **groupoïdes difféologiques** (qui sont des groupoïdes structurés [8] [17]). C'est l'objet du présent chapitre. Cette définition est aussi à rapprocher de celle de groupoïde mesurable qui a été développée par A.Connes pour l'étude des quotients singuliers [4]. De façon étrange l'approche fibré difféologique (et donc groupoïde difféologique) et l'approche  $\mathbb{C}^*$ -algèbre (et donc groupoïde mesurable) donnent des informations comparables en ce qui concerne l'étude particulière de l'enroulement irrationnel sur le tore  $\mathbb{T}^2$  ("espace singulier"  $\mathbb{T}^2/[\alpha]$ , où  $[\alpha]$  est la droite de pente  $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ , est en fait un espace homogène difféologique et la projection standard  $\mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{T}^2/[\alpha]$  une fibration difféologique) [Annexe 3] [Annexe 4].



## 2.1 Définitions et notations

Un **groupoïde** est une catégorie<sup>1</sup> dont toutes les flèches sont inversibles. Etant donné un groupoïde  $K$  nous noterons  $\text{Ob}K$  et  $\text{Mor}K$ , respectivement, l'ensemble des **objets** de  $K$  et celui des **morphismes (flèches)** de  $K$ . Pour tout couple de points  $(x, x') \in \text{Ob}K \times \text{Ob}K$  nous noterons  $\text{Mor}_K(x, x')$  l'ensemble des morphismes de  $x$  à  $x'$ , si aucune confusion n'est possible sur le groupoïde, nous noterons simplement  $\text{Mor}(x, x')$ :

$$\text{Mor}K = \{ f \in \text{Mor}_K(x, x') \mid (x, x') \in \text{Ob}K \times \text{Ob}K \} \quad (2.2.1)$$

Les applications **source** et **but** définies sur  $\text{Mor}K$  à valeurs dans  $\text{Ob}K$  seront notées respectivement  $s$  et  $b$ , nous appellerons **application caractéristique** et nous noterons  $\chi$  l'application définie sur  $\text{Mor}K$  et à valeurs dans  $\text{Ob}K \times \text{Ob}K$  par:

$$\forall f \in \text{Mor}K \quad \chi(f) = (s(f), b(f)) \quad (2.1.2)$$

L'ensemble de définition de la loi de groupoïde (composition des morphismes) sera noté  $\text{Mor}K^{(2)}$ :

$$\text{Mor}K^{(2)} = \{ (f, g) \in \text{Mor}K \times \text{Mor}K \mid b(f) = s(g) \} \quad (2.1.3)$$

nous noterons  $f.g$  le produit de  $f$  et  $g$  dans le groupoïde, défini par:

$$\forall (f, g) \in \text{Mor}K \times \text{Mor}K \quad \text{si } b(f) = s(g) \text{ alors } f.g = g \circ f \quad (2.1.4)$$

nous avons évidemment:

$$\forall (x, x') \in \text{Ob}K \times \text{Ob}K \quad \text{Mor}_K(x, x') = \chi^{-1}(x, x') \quad (2.1.5)$$

Nous noterons:

$$K_x = \chi^{-1}(x, x) \quad x \in \text{Ob}K \quad (2.1.6)$$

$K_x$  est un groupe qui sera appelé **groupe d'isotropie** de  $K$  au point  $x$ . L'**élément neutre** de  $K_x$  sera noté  $\mathbb{1}_x$ . Nous noterons **Uni** $K$  le **groupoïde des unités** de  $K$  défini par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ob Uni}K = \text{ob}K \\ \text{Mor Uni}K = \{ \mathbb{1}_x \in \text{Mor}K \mid x \in \text{Ob}K \} \end{array} \right. \quad (2.1.7)$$

En d'autre termes  $\text{Mor}_{\text{Uni}K}(x, x) = \{ \mathbb{1}_x \}$  et  $x \neq x' \Rightarrow \text{Mor}_{\text{Uni}K}(x, x') = \emptyset$ .

<sup>1</sup>au sens de S. Mac Lane[15].

Nous noterons  $\text{in}_{\text{Ob}K}$  l'injection canonique des objets vers les flèches:

$$\text{in}_{\text{Ob}K} : \text{Ob} K \rightarrow \text{Mor} K \quad (2.1.8)$$

$$m \mapsto \mathbb{1}_m$$

Un **sous-groupeïde**  $K'$  de  $K$  est une sous-catégorie, nous dirons que c'est un **sous-groupeïde respectueux** si  $\text{Ob}K' = \text{Ob}K$ .

Un morphisme d'un groupeïde  $K$  à un groupeïde  $K'$  est un foncteur covariant. Il peut être considéré comme un couple d'applications  $\Phi = (\Phi_{\text{Mor}}, \Phi_{\text{Ob}})$  où  $\Phi_{\text{Mor}}$  va de  $\text{Mor}K$  dans  $\text{Mor}K'$  et  $\Phi_{\text{Ob}}$  de  $\text{Ob}K$  dans  $\text{Ob}K'$  tel que le diagramme 2.1 commute:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor} K & \xrightarrow{\Phi_M} & \text{Mor} K' \\ \downarrow \chi & & \downarrow \chi' \\ \text{Ob} K \times \text{Ob} K & \xrightarrow{\Phi_O \times \Phi_O} & \text{Ob} K' \times \text{Ob} K' \end{array}$$

(diag. 2.1)

c'est à dire:

$$\left\{ \begin{array}{l} s \circ \Phi_{\text{Mor}}(\gamma) = \Phi_{\text{Ob}} \circ s(\gamma) \\ d \circ \Phi_{\text{Mor}}(\gamma) = \Phi_{\text{Ob}} \circ d(\gamma) \end{array} \right. \quad (2.1.9)$$

et tel que:

$$\forall (f, g) \in \text{Mor}K^{(2)} \quad \Phi_{\text{Mor}}(f.g) = \Phi_{\text{Mor}}(f) \cdot \Phi_{\text{Mor}}(g) \quad (2.1.10)$$

Etant donné un morphisme  $\Phi$  de  $K$  dans  $K'$ , nous noterons  $\ker(\Phi)$  le sous-groupeïde difféologique de  $K$  défini par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Obker}(\Phi) = \text{Ob}K \\ \text{Morker}(\Phi) = \Phi_{\text{Mor}}^{-1}(\text{Uni}K') \end{array} \right. \quad (2.1.11)$$

Il sera appelé noyau du D-Morphisme  $\Phi$ , il contient évidemment  $\text{Uni}K$  ( $\Phi_{\text{Mor}K}(\mathbb{1}_m) = \mathbb{1}_{\Phi_{\text{Ob}}(m)}, \forall m \in \text{Ob}K$ ). Remarquons que si  $v \in \ker(\Phi)$  alors  $s(v) = b(v)$ .

Nous dirons que  $\Phi$  est **bien fidèle**, si  $\ker(\Phi)$  se réduit à  $\text{Uni}K$ .

Le groupoïde quotient [15],  $K/\ker(\Phi)$  est défini par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ob}[K/\ker(\Phi)] = \text{Ob}K \\ \text{Mor}[K/\ker(\Phi)] = (\text{Mor}K)/(\text{Mor}\ker(\Phi)) \end{array} \right. \quad (2.1.12)$$

où  $\text{Mor}K/\text{Mor}\ker(\Phi)$  est le quotient de  $K$  par la relation d'équivalence:

$$\forall \gamma \in \text{Mor}K, \forall \gamma' \in \text{Mor}K, \gamma' \sim \gamma \Leftrightarrow \exists \nu \in \ker(\Phi) : \gamma' = \nu \cdot \gamma \quad (2.1.13)$$

La composition des classes:  $[\gamma].[\gamma'] = [\gamma \cdot \gamma']$  est bien définie, en effet  $\ker(\Phi)$  est un sous groupoïde invariant de  $K$ :

$$\forall \gamma \in \text{Mor}K, \forall \nu \in \ker(\Phi) \quad \gamma^{-1} \cdot \nu \cdot \gamma \in \ker(\Phi) \quad (2.1.14)$$

## 2.2 Groupoïdes difféologiques

### 2.2.1 Définition :

Soit  $K$  un groupoïde, nous appellerons **difféologie de groupoïde** sur  $K$  toute difféologie sur  $\text{Mor}K$  et  $\text{Ob}K$  telle que les applications :

$$(f, g) \mapsto f \cdot g \quad f \mapsto f^{-1}$$

définies respectivement sur  $\text{Mor}K^{(2)}$  (muni de la difféologie de partie du produit difféologique  $\text{mor}K \times \text{mor}K$ ) et sur  $\text{Mor}K$  soient différentiables ainsi que l'application caractéristique (2.1.2)  $x$  et que l'injection canonique (2.1.8)  $\text{in}_{\text{ob}K}$  des objets vers les flèches  $K$ . Muni d'une telle difféologie un groupoïde sera appelé **groupoïde difféologique**.

Puisque l'application caractéristique  $x$  d'un groupoïde difféologique  $K$  est différentiable ainsi que l'injection canonique  $\text{in}_{\text{ob}K}$  l'espace difféologique  $\text{Ob}K$  s'identifie naturellement, grâce à  $\text{in}_{\text{ob}K}$  qui est alors une induction, au sous-espace difféologique  $\text{Uni}K$  de  $\text{Mor}K$ . La difféologie de groupoïde de  $K$  est donc entièrement caractérisée par la difféologie de  $\text{Mor}K$ .

La catégorie des groupoïdes difféologiques sera définie par ses objets qui sont naturellement les groupoïdes difféologiques et ses morphismes que nous

appellerons **D-Foncteurs** et qui sont des morphismes de groupoïdes, différentiables au sens suivant:

### 2.2.2 Définition :

Etant donnés deux groupoïdes difféologiques  $K$  et  $K'$ , un morphisme  $\Phi = (\Phi_{\text{Mor}}, \Phi_{\text{Ob}})$  de  $K$  à  $K'$ , sera dit **différentiable** si  $\Phi_{\text{Mor}} \in D(\text{Mor } K, \text{Mor } K')$  et  $\Phi_{\text{Ob}} \in D(\text{Ob } K, \text{Ob } K')$ .

Nous retrouvons bien lorsque le groupoïde est un groupe ( $\text{Ob } K$  est un singleton) les définitions des groupes difféologiques [21]. En particulier :

### 2.2.3 Proposition :

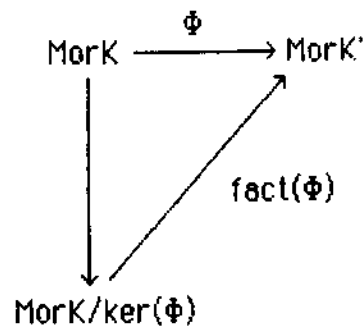
Etant donné un groupoïde difféologique  $K$ , les groupes d'isotropie  $K_x$ ,  $x \in \text{Ob } K$ , de  $K$  munis de leur difféologie de partie sont des groupes difféologiques.

□ La démonstration est immédiate. □

Un sous-groupoïde  $K'$  d'un groupoïde difféologique  $K$  possède une difféologie canonique, définie par les difféologies induites de  $\text{Ob } K$  et  $\text{Mor } K$  sur  $\text{Ob } K'$  et  $\text{Mor } K'$  qui en fait un groupoïde difféologique, muni de cette difféologie nous dirons que  $K'$  est un **sous-groupoïde difféologique** de  $K$ .

Etant donnés deux groupoïdes  $K$  et  $K'$  et un morphisme différentiable  $\Phi$  de  $K$  à  $K'$ , le groupoïde quotient  $K/\ker(\Phi)$  (2.1.11) est naturellement un groupoïde difféologique lorsque  $\text{Mor } K/\text{Mor } \ker(\Phi)$  est muni de sa difféologie quotient. Il existe alors une application différentiable, unique,  $\text{fact}(\Phi)$  telle que le diagramme 2.2 commute.

Cette application est injective par construction nous dirons que le morphisme  $\Phi$  est **strict** si c'est une induction.



(diag. 2.2)

## 2.3 Groupoïdes difféologiques parfaits

### 2.3.1 Définition :

Nous dirons qu'un groupoïde  $K$  est **parfait** si son application caractéristique  $x$ , de  $\text{Mor}K$  à  $\text{Ob}K^2$ , est une subduction.

Cela implique en particulier que  $x$  (2.3.1) est une surjection et donc que tous les groupes d'isotropie  $K_x$ ,  $x \in \text{Ob}K$ , sont isomorphes:

### 2.3.2 Proposition :

Etant donné un groupoïde difféologique parfait  $K$ , les groupes d'isotropie  $K_x$ ,  $x \in \text{Ob}K$ , munis de leur difféologie de partie sont  $D$ -isomorphes.

□ Puisque  $x$  est surjective il suffit de transmuter par une flèche  $\psi \in \text{Mor}K(x, x')$ ,  $\forall (x, x') \in \text{Ob}K \times \text{Ob}K$ , les éléments de  $K_x$  avec ceux de  $K_{x'}$ . On vérifie, ensuite, immédiatement que l'isomorphisme ainsi construit est différentiable (utiliser (1.2.17)). □

## 2.4 Exemples élémentaires.

Définissons sur le produit  $X \times G \times X$ ,  $G$  groupe difféologique et  $X$  espace difféologique, la loi suivante:

$$\forall (x, g, y) \in X \times G \times X, \forall (z, k, t) \in X \times G \times X \quad y = z \Rightarrow (x, g, y).(z, k, t) = (x, g, k, t) \quad (2.4.1)$$

$X \times G \times X$  étant muni de la difféologie produit le groupoïde  $\Gamma$  défini par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ob}\Gamma = X \\ \text{Mor}\Gamma = X \times G \times X \end{array} \right. \quad (2.4.2)$$

groupoïde difféologique parfait, nous l'appellerons **groupoïde trivial** de **base**  $X$  et de **groupe**  $G$ . Tout groupoïde isomorphe à un groupoïde trivial sera dit trivial.

Considérons maintenant un espace difféologique  $Y$  muni d'une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  (pouvant être définie par une partition, l'action d'un groupe etc...). Nous définirons le graphe de la relation  $\mathcal{R}$  comme le groupoïde  $\Gamma_{\mathcal{R}}$  donné par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ob}\Gamma_{\mathcal{R}} = Y \\ \text{Mor}\Gamma_{\mathcal{R}} = \{(y, y') \in Y \times Y \mid y \mathcal{R} y'\} \end{array} \right. \quad (2.4.3)$$

La loi de groupoïde étant définie naturellement par:

$$\forall (x, y) \in Y \times Y, \forall (z, t) \in Y \times Y \quad y = z \Rightarrow (x, y) \cdot (z, t) = (x, t) \quad (2.4.4)$$

Munis de leurs difféologies naturelles ces espaces définissent sur  $\Gamma_{\mathcal{R}}$  une difféologie de groupoïde.  $\text{Mor}\Gamma_{\mathcal{R}}$  encore noté  $\text{Gr}(\mathcal{R})$  est aussi appelé graphe de la relation  $\mathcal{R}$ .  $\Gamma_{\mathcal{R}}$  est parfait seulement si  $Y/\mathcal{R}$  est réduit à un point. Nous noterons parfois simplement  $\text{Gr}(\mathcal{R})$  à la place de  $\Gamma_{\mathcal{R}}$ .

## 2.5 Groupoïde associé à une application différentiable

### 2.5.1 Définition :

Etant donnée une application différentiable surjective  $\Pi = (X, M, \pi)$ , on appellera **groupoïde associé** à l'application  $\Pi$  le groupoïde  $K_{\Pi}$  défini par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ob}K_{\Pi} = M \\ \text{Mor}K_{\Pi}(m, m') = \text{Diff}(X_m, X_{m'}) \quad (m, m') \in M \times M \end{array} \right.$$

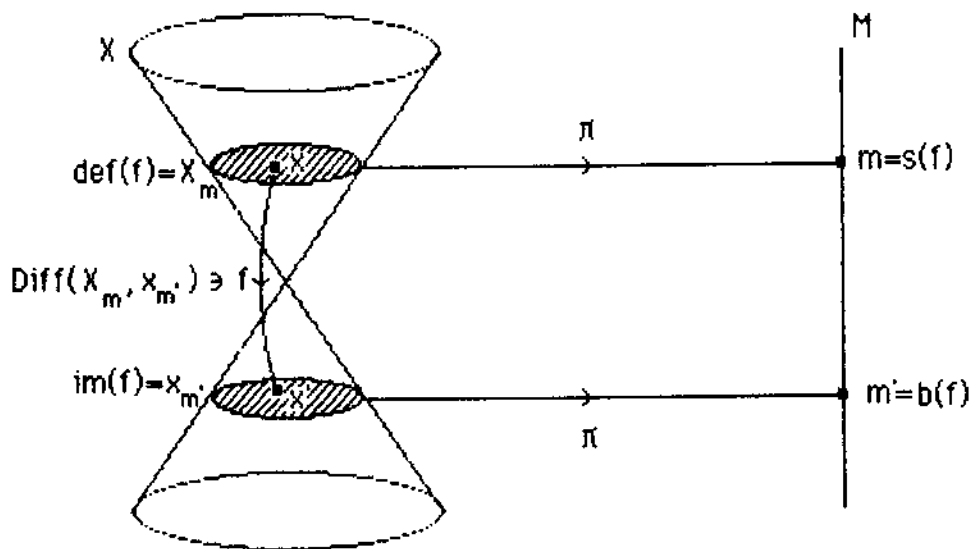
où  $X_m$  (1.4.2) est muni de la difféologie induite par  $X$ . La loi de groupoïde étant la composition des applications.

L'application caractéristique  $\chi$  de  $K_\pi$  (2.5.1) est définie par:

$$\forall f \in \text{Mor} K_\pi \quad \chi(f) = (m, m') \Rightarrow f \in \text{Diff}(X_m, X_{m'}) \quad (2.5.2)$$

c'est à dire:

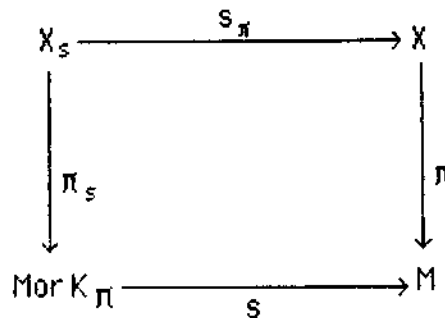
$$\forall f \in \text{Mor} K_\pi \quad s(f) = \pi(\text{def}(f)) , \quad b(f) = \pi(\text{im}(f)) \quad (2.5.3)$$



(fig. 1.2)

Définissons alors l'ensemble  $X_s$  (image réciproque de  $X$  par  $s$ ) par:

$$X_s = \{ (f, x) \in \text{Mor} K_\pi \times X \mid s(f) = \pi(x) \} \quad (2.5.3)$$



(diag. 2.3)

et v l'application valuation de  $X_s$  dans  $X$  par:

$$\begin{aligned} v : X_s &\rightarrow X \\ (r,x) &\rightarrow f(x) \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

**2.5.4 Proposition :**

Etant donnée une application différentiable surjective  $\Pi = (X,M,\pi)$  il existe sur  $\text{Mor } K_\Pi$  une difféologie la moins fine qui rende  $v$  différentiable et qui fasse du groupoïde  $K_\Pi$ , associé à  $\Pi$ , un groupoïde différentiable. Elle sera appelée **difféologie standard**.

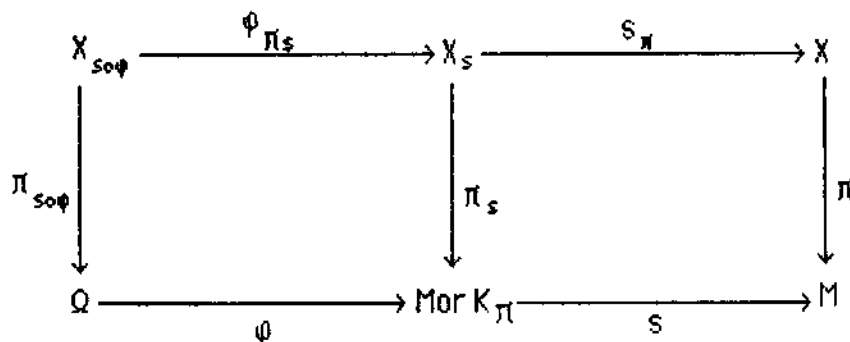
□ Soit  $\varphi$  une application définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\text{Mor } K_\Pi$ , posons:

$$\left\{ \begin{aligned} X_{\text{so}\varphi} &= \{ (r,x) \in \Omega \times X \mid x \in \text{def}(\varphi(r)) \} \\ X_{\text{bo}\varphi} &= \{ (r,x) \in \Omega \times X \mid x \in \text{im}(\varphi(r)) \} \\ \varphi_s : X_{\text{so}\varphi} &\rightarrow X & \varphi_b : X_{\text{bo}\varphi} &\rightarrow X \\ (r,x) &\mapsto \varphi(r)(x) & (r,x) &\mapsto \varphi(r)^{-1}(x) \end{aligned} \right.$$

où  $X_{\text{so}\varphi}$  et  $X_{\text{bo}\varphi}$  sont munis de la difféologie de partie du produit  $\Omega \times X$ .

Nous écrivons:

$$\varphi \in DL(\mathbb{R}^n, \text{Mor } K_\Pi)$$



(diag. 2.4)

si



i)  $x \circ \varphi \in \text{DL}(\mathbb{R}^n, M \times M)$  ii)  $\varphi_s \in \text{D}(X_{s \circ \varphi}, X)$  et iii)  $\varphi_b \in \text{D}(X_{b \circ \varphi}, X)$

Montrons que la famille  $\text{DL}(\mathbb{R}^n, \text{Mor } K^\Pi)$  ainsi définie est une difféologie:

la condition i) définit une difféologie: l'image réciproque de la difféologie de  $M$  par  $x$ . Il nous suffira de démontrer alors que les conditions ii) et iii) définissent une difféologie:

a) Soit  $f^\circ = [0 \mapsto f]$ ,  $f \in \text{Diff}(X_m, X_m)$ , on a<sup>2</sup>:

$$\begin{cases} X_{s \circ f^\circ} \sim X_m & X_{b \circ f^\circ} \sim X_m \\ f^\circ_s \sim f & f^\circ_b \sim f^{-1} \end{cases}$$

et donc par hypothèse  $f^\circ_s$  et  $f^\circ_b$  sont différentiables.

b) Soit  $\varphi \in \text{DL}(\mathbb{R}^n, \text{Mor } K_\Pi)$  et  $F \in \text{D}(U, \text{def}(\varphi))$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^p$ . L'application  $(\varphi \circ F)_s$  se décompose comme suit:

$$\begin{array}{ccccc} X_{s \circ \varphi \circ F} & \rightarrow & X_{s \circ \varphi} & \rightarrow & X \\ (r, x) & \mapsto & (F(r), x) & \mapsto & \varphi(F(r), x) \end{array}$$

les deux facteurs étant différentiables il en est de même pour  $(\varphi \circ F)_s$ . De même pour  $(\varphi \circ F)_b$ .

c) Soit  $\varphi$  une application localement différentiable définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\text{mor } K_\Pi$ , i.e. tout point  $r \in \Omega$  possède un voisinage  $\Lambda$  tel que  $F_{s \circ \varphi}|_\Lambda$  définie sur  $X_{s \circ \varphi}|_\Lambda = (X_{s \circ \varphi})^\wedge$  (restriction de  $X_{s \circ \varphi}$  à  $\Lambda$ ), soit différentiable.

$F_{s \circ \varphi}$  est localement différentiable, elle est donc différentiable (1.2.2). De même pour  $F_{b \circ \varphi}$ .

Donc la famille  $\{\text{DL}(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})\}_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi définie est une difféologie de  $\text{Mor } K_\Pi$  rendant  $x$  différentiable.

Montrons que la valuation est différentiable:

Soit  $\Phi$  une plaque de  $X_s$ :

$$\Phi(r) = (\varphi(r), F(r))$$

<sup>2</sup> Le signe  $\sim$  signifie difféomorphe.

où  $\varphi$  est une plaque de  $\text{Mor}K_\pi$  et  $F$  une plaque de  $X$  tel que  $F(r) \in \text{def}(\varphi(r))$ .  
L'application  $v \circ \Phi$  se décompose en le produit de deux applications différentiables:

$$r \mapsto (r, F(r)) \mapsto (\varphi(F(r)))$$

le deuxième facteur étant l'application  $\varphi_s$ . Donc  $v$  est différentiable.

Montrons que cette difféologie est une difféologie de groupoïde :

$\alpha$ ) Soit  $\Phi$  une plaque de  $\text{Mor}K_\pi^{(2)}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(r) = (\varphi(r), \varphi'(r)) \\ \varphi \in \text{DL}(\mathbb{R}^n, \text{Mor}K_\pi) \quad , \quad \varphi' \in \text{DL}(\mathbb{R}^n, \text{Mor}K_\pi) \\ b(\varphi(r)) = s(\varphi'(r)) \quad \forall r \end{array} \right.$$

nous poserons

$$\varphi''(r) = \varphi'(r) \circ \varphi(r)$$

montrons que c'est une plaque de  $\text{Mor}K_\pi$ :

$$x(\varphi''(r)) (s(\varphi''(r)), b(\varphi''(r))) = (s(\varphi(r)), b(\varphi'(r)))$$

or  $s \circ \varphi$  et  $b \circ \varphi'$  sont différentiables, donc  $x \circ \varphi''$  est différentiable;

On a d'autre part:

$$\text{Read : } X_{\{b \circ \varphi'\}} = X_{\{b \circ \varphi'\}}$$

$$X_{s \circ \varphi} = X_{s \circ \varphi} \quad X_{s \circ \varphi} = X_{s \circ \varphi}$$

L'application  $\varphi''_s$  se décompose en produit d'applications différentiables:

$$\begin{array}{l} (r, x) \rightarrow (r, \varphi(r)(x)) \\ \rightarrow \varphi'(r)(\varphi(r)(x)) \end{array} \quad \begin{array}{l} X_{s \circ \varphi} \rightarrow X_{s \circ \varphi} \rightarrow X \\ (r, x) \mapsto (\varphi(r), x) \mapsto \varphi'(r)(\varphi(r)(x)) \end{array}$$

Donc  $\varphi''_s$  est différentiable. Il en est de même pour  $\varphi''_b$ . Donc l'application  $\{(f, f') \mapsto f' \circ f\}$  est différentiable.

$\beta$ ) Soit  $\varphi$  une plaque  $\text{Mor}K_\pi$ , montrons que  $\psi = \{r \mapsto \varphi(r)^{-1}\}$  est une plaque de  $\text{Mor}K_\pi$ :

$$x(\psi(r)) = (s(\varphi(r)^{-1}), b(\varphi(r)^{-1})) = (b(\varphi(r)), s(\varphi(r)))$$

$x$  est donc différentiable.

D'autre part :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{s \circ \psi} = X_{b \circ \varphi} \quad X_{b \circ \psi} = X_{s \circ \varphi} \\ \psi_s = \varphi_b \quad \psi_b = \varphi_s \end{array} \right.$$

Donc  $\psi_s$  et  $\psi_b$  sont différentiables.

Posons Maintenant  $\text{in}_M$  l'injection canonique des objets vers les flèches de  $K_{\pi}$  :

$$\begin{aligned} \text{in}_M : M &\rightarrow \text{Mor } K_{\pi} \\ m &\mapsto \mathbb{1}_{X_m} \end{aligned}$$

et soit  $\xi$  une plaque de  $M$ , notons  $\varphi = \text{in}_M \circ \xi$ , on a :

$$\forall r \in \text{def}(\xi) \quad \varphi(r) = \mathbb{1}_{X_{\xi(r)}} \Rightarrow X_{s \circ \varphi} = X_{b \circ \varphi} = X_{\xi} = \{(r, x) \in \text{def}(\xi) \times X \mid \pi(x) = \xi(r)\}$$

les applications  $\varphi_s$  et  $\varphi_b$  définies toutes deux sur  $X_{\xi}$  sont données par :

$$\varphi_s = \varphi_b = [(r, x) \mapsto x]$$

elles sont différentiables puisque restrictions d'applications différentiables à des sous-espaces difféologiques.

La difféologie en question est donc une difféologie de groupoïde, il est alors immédiat de vérifier que c'est la difféologie la moins fine qui rende  $v$  différentiable.  $\square$

En particulier lorsque le groupoïde associé est réduit à un groupe, c'est à dire lorsque la base du fibré difféologique est réduite à un singleton, on retrouve la définition de la difféologie de groupe de difféomorphismes introduite dans la théorie des groupes difféologiques [21][23], les définitions données plus haut (morphisme différentiable...) sont compatibles.

Rappelons à ce propos qu'une **action différentiable** d'un groupe difféologique  $G$  sur un espace difféologique  $X$  est un  $D$ -morphisme de  $G$  dans  $\text{Diff}(X)$  où  $\text{Diff}(X)$  est justement muni de sa difféologie standard. Ce qui peut s'exprimer aussi en disant que l'application suivante de  $G \times X$  dans  $X$  :

$$(a, x) \mapsto a_x(x) \quad (a, x) \in G \times X$$

est différentiable.

## 2.5 Le groupoïde associé à l'application $\mathbb{h} \mapsto \mathbb{h}^3$

Nous allons illustrer la notion précédente de groupoïde associé à un application différentiable sur l'exemple de l'application  $\pi : x \mapsto x^3$  définie sur  $X = \mathbb{R}$  et à valeurs dans  $M = \mathbb{R}$ .

Cette application étant bijective les images réciproques des points de la base sont réduites à des singletons:

$$\forall t \in \mathbb{M} \quad X_t = \{t^{1/3}\} \quad (2.5.1)$$

On déduit donc que  $\text{Mor } K_{\mathbb{T}}$  est en bijection avec  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  grâce à:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto f_{(x,y)} = [x \mapsto y] \quad (2.5.2)$$

l'application caractéristique étant donnée par:

$$\forall f_{(x,y)} \in \text{Mor } K_{\mathbb{T}} \quad \chi(f_{(x,y)}) = (x^3, y^3) \quad (2.5.3)$$

Un calcul relativement élémentaire permet de montrer que la difféologie standard de  $\text{Mor } K_{\mathbb{T}}$ , transportée sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  grâce à (2.5.2), est entièrement caractérisée par:

$$\varphi = [r \mapsto (x_r, y_r)] \in \text{DL}(\mathbb{R}^n, \text{Mor } K_{\mathbb{T}}) \Leftrightarrow \begin{cases} [r \mapsto (x_r^3, y_r^3)] \in \text{DL}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2) \\ [(r, x_r) \mapsto y_r] \in \text{D}(\text{Graphe}(\varphi_1), \mathbb{R}) \\ [(r, y_r) \mapsto x_r] \in \text{D}(\text{Graphe}(\varphi_2), \mathbb{R}) \end{cases} \quad (2.5.4)$$

où on a posé:

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{Graphe}(\varphi_i) = \{(r, \varphi_i(r)) \in \text{def}(\varphi) \times \mathbb{R}\} \quad (2.5.5)$$

Remarquons que l'injection canonique  $\text{in}_{\mathbb{M}}$ , qui s'écrit ici:

$$\begin{aligned} \text{in}_{\mathbb{M}} : \mathbb{R} &\mapsto \text{Mor } K_{\mathbb{T}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (2.5.6) \\ t &\mapsto (t^{1/3}, t^{1/3}) \end{aligned}$$

est différentiable (i.e. vérifie 2.5.4); car si  $[t \mapsto t^{1/3}]$  n'est pas différentiable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , l'application  $[(t, t^{1/3}) \mapsto t^{1/3}]$  est différentiable de  $\text{graphe}(\varphi_1)$  dans  $\mathbb{R}$ .  $\text{in}_{\mathbb{M}}$  est en fait un difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  muni de sa difféologie  $C^\infty$  sur  $\text{diag}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  muni de la difféologie de partie de  $\text{Mor } K_{\mathbb{T}}$ .

On peut remarquer encore que la difféologie  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^2$  est strictement plus fine que la difféologie définie par 2.5.4.

Pour rendre tolérable cette accumulation de définitions et de trivialités, je n'ai trouvé d'autre palliatif que d'allonger encore ce chapitre ...

J. Dieudonné

### **§3- FIBRATIONS DIFFÉOLOGIQUES**

Le terme de **fibration**, ou **fibré**, est habituellement utilisé pour désigner une classe particulière d'applications ou de relations d'équivalences à l'intérieur d'une même catégorie d'espaces (espaces topologiques, variétés...)

Par exemple, sont définis dans la catégorie des espaces topologiques plusieurs types de fibrés: les fibrés de Steenrod, de Serre, d'Ehresmann-Feldbau... [25][19]. Dans la catégorie des variétés différentielles sont définis les fibrés localement triviaux [5][14].

Dans chacun de ces cas les fibres de ces applications (fibrations) sont isomorphes entre elles au sens de la catégorie en question, cette condition apparaît comme minimale qui permette à une application d'être une fibration. Les autres conditions sont imposées par certaines propriétés qu'on aimerait que possèdent ces objets, comme par exemple la propriété de relèvement des homotopies (fibrés de Steenrod, de Serre...) [25] ou bien d'autres encore (F-structures sur les fibres [19]).

En ce qui concerne la catégorie  $\text{Desp}$  des espaces difféologiques, la définition de ces fibrés devra répondre aux conditions suivantes:

a) Les **fibrés difféologiques** sont une extension des variétés différentielles fibrées.

b) La projection  $G \mapsto G/H$ , où  $G$  est un groupe difféologique et  $H$  un sous-groupe quelconque de  $G$ , est une fibration difféologique.

c) Les fibrés difféologiques possèdent la propriété de relèvement des homotopies (suite exacte exacte d'homotopie [10]).

Rien, à priori, n'indique qu'il existe une telle définition. Les première et troisième conditions seraient immédiates si nous définissions les fibrés difféologiques grâce à la propriété de trivialité locale puisque tout espace difféologique peut être muni de sa  $D$ -topologie (1.2.3); mais dans ces conditions

la propriété b) n'est pas assurée. En effet, dans la classe des quotients du type  $G \mapsto G/H$ , entre par exemple le quotient irrationnel du tore  $\mathbb{T}^2 \mapsto \mathbb{T}^2/[\alpha]$ , la D-topologie de l'espace  $\mathbb{T}^2/[\alpha]$  est évidemment triviale mais  $\mathbb{T}^2$  n'est pas difféomorphe au produit  $(\mathbb{T}^2/[\alpha]) \times \mathbb{R}$ . D'autre part il peut exister sur les espaces difféologiques plusieurs topologies toutes aussi naturelles que la D-topologie et non équivalentes ce qui donne au choix de celle-ci un caractère arbitraire.

Nous proposerons dans ce chapitre une définition des fibrés difféologiques qui répond au programme énoncé plus haut. Elle utilise le groupoïde associé aux applications différentiables (§2.5), son interprétation correspond à une extension de la condition de trivialité locale<sup>1</sup> que nous avons appelée **micro-trivialité**. On verra dans un prochain chapitre qu'elle est aussi compatible avec l'existence d'un revêtement universel au dessus de tout espace difféologique.

---

<sup>1</sup>ne faisant pas appel à une topologie des espaces difféologiques.

### 3.1 Fibration difféologique et micro-trivialité

Avec les notations et définitions du paragraphe 2.5 :

#### 3.1.1 Définition :

Nous dirons qu'une application différentiable  $\Pi = (X, M, \pi)$  est une **fibration difféologique** si son groupoïde associé  $K_\Pi$  est parfait.

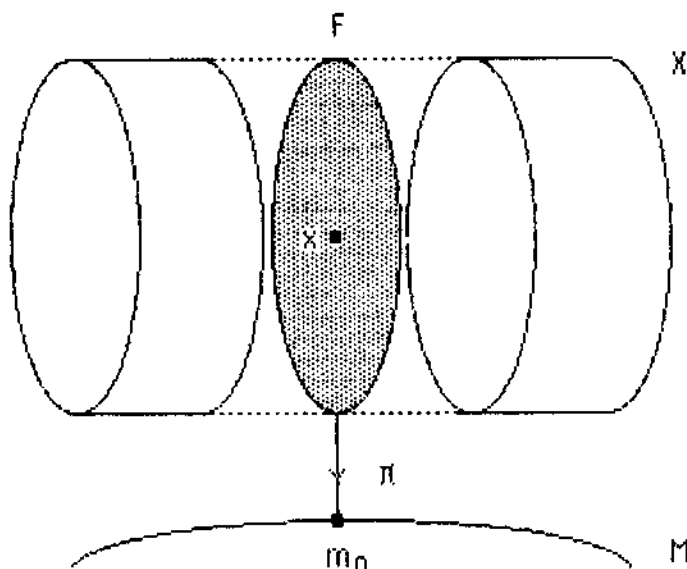


Fig. 3.1

En d'autres termes,  $\Pi$  est une fibration si l'application caractéristique  $x$  de  $\text{Mor}K_\Pi$  sur  $M \times M$  (2.1.2) est une subduction. Nous dirons encore que  $\Pi$  est un **fibré difféologique**, ou simplement un fibré si aucune confusion n'est possible, nous dirons aussi que  $X$  est fibré sur  $M$  par  $\pi$ .

$X$  sera appelé **espace total** du fibré,  $M$  sa **base**,  $\pi$  sa **projection**. Nous noterons parfois  $X = \text{tl}\Pi$ ,  $M = \text{bs}\Pi$ ,  $\pi = \text{pr}\Pi$ .

Les sous-espaces difféologiques  $X_m = \pi^{-1}(m)$ ,  $m \in M$  (1.4.2), seront appelés **fibres** du fibré  $\Pi$ ,  $X_m$  sera appelé fibre de  $\Pi$  au dessus de  $m$ .

Il est clair, puisque  $K_\Pi$  est parfait, c'est à dire:  $x$  est une subduction, que  $x$  est en particulier surjective et donc que toutes les fibres de  $\Pi$  sont



difféomorphes (du fait même de sa définition (2.5.1)). Leur type difféologique  $F$  sera appelé **fibre type** du fibré  $\Pi$ . La fibre type  $F$  sera souvent identifiée à la fibre  $X_{m_0}$  au dessus d'un point de base  $m_0$  de l'espace difféologique  $M$ .

L'énoncé 3.1.1 met en évidence le caractère essentiellement difféologique de la définition des fibrés difféologiques. Elle est toutefois peu maniable telle quelle. Une caractérisation des fibrés difféologiques est donnée par la proposition suivante:

### 3.1.2 Proposition :

Une application différentiable  $\Pi = (X, M, \pi)$  est une fibration difféologique si et seulement si il existe un espace difféologique  $F$  tel que l'image réciproque (1.4.8) de  $\Pi$  par toute plaque de  $M$  soit localement triviale de fibre type  $F$ . Cette propriété des applications différentiables sera appelée **micro-trivialité** (M.T).

□ Supposons que  $\Pi = (X, M, \pi)$  soit un fibré difféologique et soit  $\varphi$  une plaque de  $M$ ,  $\Omega = \text{def}(\varphi)$ . Soit  $m \in M$  et  $F = X_m$ .

L'application  $\Phi : r \mapsto (m, \varphi(r))$  définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $M \times M$  est évidemment une plaque de  $M \times M$ . Soit  $\chi$  l'application caractéristique du groupoïde associé  $K_\Pi$  de  $\Pi$  sur  $M \times M$ . Puisque  $\chi$  est une subduction  $\Phi$  se relève localement sur dans  $\text{Mor } K_\Pi$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \text{Sup}(\chi \circ \Phi_i) \quad \Phi_i \in D(\Omega_i, \text{Mor } K_\Pi) \\ \Omega_i = \text{def}(\Phi_i) \quad \cup_i \Omega_i = \Omega \end{array} \right.$$

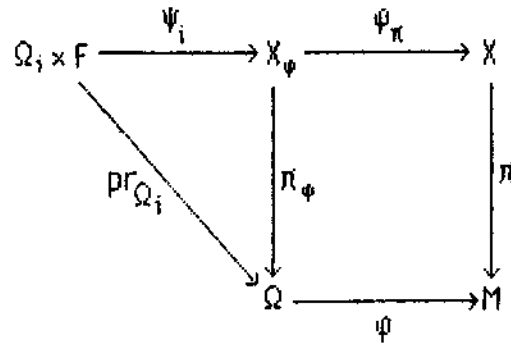
Pour tout  $r \in \Omega_i$ ,  $\text{def}(\Phi_i(r)) = F$  et  $\text{im}(\Phi_i(r)) = X_{\varphi(r)}$ , c'est à dire :

$$\forall r \in \Omega_i \quad \Phi_i(r) \in \text{Diff}(F, X_{\varphi(r)})$$

Posons alors:

$$\begin{aligned} \psi_i : \Omega_i \times F &\rightarrow X_{\varphi} \\ (r, u) &\mapsto (r, \Phi_i(r)(u)) \end{aligned}$$

$\psi_i$  est a priori à valeurs dans  $\Omega \times X$ , on vérifie immédiatement qu'elle est en fait à valeurs dans  $X_{\varphi}$  : espace total de l'image réciproque  $\Pi_{\varphi}$  de  $\Pi$  par  $\varphi$ :



(diag. 3.1)

$\psi_i$  est naturellement injective, elle est différentiable par définition de la difféologie standard du groupoïde associé  $K_\pi$  de  $\pi$ , en effet elle se factorise en:  $(r,u) \mapsto (r, \Phi_i(r), u) \mapsto (r, \Phi_i(r)(u))$ , l'application  $r \mapsto \Phi_i(r)(u)$  n'est autre que la valuation (2.5.4) qui est différentiable par définition.

$(\phi_i(r), u) \rightarrow \phi_i(r)(u)$  is the (e)valuation function

Son inverse est donné par:

$$\begin{aligned} \psi_i^{-1} : X_\psi|_{\Omega_i} &\rightarrow \Omega_i \times F \\ (r, x) &\mapsto (r, \Phi_i(r)^{-1}(x)) \end{aligned}$$

$\psi_i^{-1}$  se factorise à son tour en  $(r, x) \mapsto (r, \Phi_i(r), x) \mapsto (r, \Phi_i(r)^{-1}(x))$ , qui grâce à la différentiabilité des applications  $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$  de  $\text{Mor}K_\pi$  dans  $\text{Mor}K_\pi$  et à la valuation, est encore un produit d'applications différentiables. Donc  $\psi_i$  est un difféomorphisme de  $\Omega_i \times F$  sur  $X_\psi|_{\Omega_i}$  et vérifie  $\pi_\psi|_{\Omega_i} \circ \psi_i = pr_{\Omega_i}$ , c'est donc une équivalence entre  $\pi_\psi|_{\Omega_i}$  et l'application triviale  $pr_{\Omega_i} = (\Omega_i \times F, pr_{\Omega_i})$ ,  $\pi_\psi$  est alors localement triviale de fibre type  $F$ .

Réciproquement supposons que  $\pi = (X, M, \pi)$  vérifie la propriété MT avec comme fibre type  $F$ :

Soit  $\Phi : r \mapsto (\phi(r), \phi'(r))$  une plaque de  $M \times M$ ,  $\Omega = \text{def}(\Phi)$ , puisque les images réciproques  $\pi_\phi$  et  $\pi_{\phi'}$  de  $\pi$  par  $\phi$  et  $\phi'$  sont localement triviales choisissons deux voisinages  $U$  et  $U'$  de  $r_0 \in \Omega$  qui trivialisent respectivement  $\pi_\phi$  et  $\pi_{\phi'}$  et notons  $\Omega_0 = U \cap U'$ ,  $\Omega_0$  est encore un ouvert de trivialisations de  $\pi_\phi$  et  $\pi_{\phi'}$ . Soient:

$$\begin{aligned} \Psi : \Omega_0 \times F &\rightarrow X_\psi & \Psi' : \Omega_0 \times F &\rightarrow X_{\psi'} \\ (r, u) &\mapsto (r, \psi(r)(u)) & (r, u) &\mapsto (r, \psi'(r)(u)) \end{aligned}$$

des trivialisations de  $X_\psi$  et  $X_{\psi'}$ . au dessus  $\Omega_0$ . pour tout  $r \in \Omega_0$  on a:

$$\psi(r) \in \text{Diff}(F, X_{\psi(r)}) \quad \psi'(r) \in \text{Diff}(F, X_{\psi'(r)})$$

parce que la restriction d'un difféomorphisme à un sous espace difféologique est un difféomorphisme de ce sous espace à son image (1.2.17). Posons alors

$$\eta : r \mapsto \psi'(r) \circ \psi(r)^{-1}$$

$\eta$  est une application définie sur  $\Omega_0$  à valeurs dans  $\text{Mor}K_\Pi$ , que l'on munit de sa difféologie standard. Les espaces  $X_{\text{so}\eta}$  et  $X_{\text{bo}\eta}$  (2.5.4) sont définis par:

$$\begin{cases} X_{\text{so}\eta} = \{(r, x) \in \Omega_0 \times X \mid x \in \text{def}(\eta(r))\} \\ X_{\text{bo}\eta} = \{(r, x) \in \Omega_0 \times X \mid x \in \text{im}(\eta(r))\} \end{cases}$$

The maps  $\eta_s$  and  $\eta_b$

Ces applications se décomposent en:

$$\begin{cases} \eta_s : (r, x) \mapsto (r, \psi(r)^{-1}(x)) \mapsto (r, \psi'(r)(\psi(r)^{-1}(x))) \mapsto \psi'(r)(\psi(r)^{-1}(x)) \\ \eta_b : (r, x) \mapsto (r, \psi'(r)^{-1}(x)) \mapsto (r, \psi(r)(\psi'(r)^{-1}(x))) \mapsto \psi(r)(\psi'(r)^{-1}(x)) \end{cases}$$

C'est à dire:

$$\begin{cases} \eta_s = \psi_\Pi \circ \psi' \circ \psi^{-1} \\ \eta_b = \psi_\Pi \circ \psi \circ \psi'^{-1} \end{cases}$$

$\psi$  &  $\psi'$   
not  
 $\psi$  &  $\psi'$

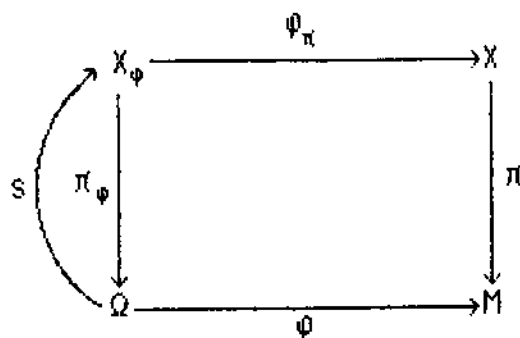
$\eta_s$  et  $\eta_b$  sont donc des produits d'applications différentiables, elle sont donc différentiables. Puisque d'autre part  $x \circ \eta$  est différentiable on déduit de la définition même de la difféologie standard de  $K_\Pi$  (2.5.4) que  $\eta$  est une plaque de  $\text{Mor}K_\Pi$ , donc  $\Phi$  se relève localement dans  $\text{Mor}K_\Pi$ ,  $x$  est alors une subduction.  $K_\Pi$  est donc un groupoïde parfait c'est à dire  $\Pi$  est une fibration difféologique.  $\square$

De cette proposition se déduisent les suivantes:

### 3.1.3 Proposition :

Toute fibration difféologique est une subduction.

□ Soit  $\varphi$  une plaque  $M$  (3.1.2) et  $\Omega$  un ouvert de trivialisat on de  $\Pi_\bullet$ . Il existe, puisque  $\Pi_\bullet|_\Omega$  est trivial, une section  $s$  de  $\Pi_\bullet$  au dessus de  $\Omega$ ; l'application  $\varphi_\pi \circ s$  est différentiable et relève  $\varphi$  au dessus de  $\Omega$  (voir diagramme 3.2)



(diag. 3.2)

Donc  $\pi$  est une subduction. □

Compte tenu des définitions 1.4.12 et 3.1.2 :

### 3.1.4 Proposition :

Toute application différentiable triviale est D-localement triviale toute application D-localement triviale est micro-triviale, ce que nous pouvons écrire :

$$T \Rightarrow L.T \Rightarrow M.T$$

□ La première affirmation est une triviale ! Soit  $\Pi = (X, M, \pi)$  une application D-localement triviale,  $\varphi$  une plaque de  $M$  et  $r \in \text{def}(\varphi)$ . Soit  $U$  un D-ouvert de trivialisat on de  $\Pi$  au voisinage de  $\varphi(r)$ ,  $\varphi$  étant D-continue (1.2.4),  $\Pi_\bullet$  est trivial au dessus de  $\varphi^{-1}(U)$  voisinage de  $r$  dans  $\text{def}(\varphi)$ . □

Nous voyons, à travers 3.1.4, en quoi la micro-trivialité peut apparaître comme une extension de la notion de triviale locale sans pour cela faire appel à une topologie des espaces difféologiques.

### 3.1.5 Proposition :

Si la base d'un fibré difféologique est une variété, il est localement trivial. Si de plus la fibre type est une variété c'est un fibré différentiel au sens de la catégorie des variétés.

□ Il suffit d'appliquer 3.1.2 aux cartes de la base. □

Cette dernière proposition montre que la notion d'espace difféologique fibré est bien une extension de celle de variété fibrée. Ces dernières peuvent donc être définies uniquement en termes de difféologie en faisant appel à la notion de groupoïde parfait, la propriété de trivialité locale, utilisée habituellement pour leur définition, apparaît ici comme la traduction de l'existence d'une subduction (3.1.1) définie sur un espace qui n'est pas une variété.

## 3.2 Catégorie des fibrés difféologiques

Nous noterons :

### **Dfib** (3.2.1)

la catégorie des fibrés difféologiques, c'est une sous catégorie de Dapp (1.4.5), ses objets sont bien entendu les fibrés difféologiques et ses flèches les morphismes d'applications différentiables. Notons qu'en vertu de (1.4.6) tout morphisme de fibré difféologique est entièrement défini par la formule (1.4.3).

Nous noterons **M-Dfib** la sous catégorie de Dfib dont les objets sont les fibrés de base M et les flèches, ou M-morphismes, les morphismes de fibrés qui se projettent sur l'identité de la base.

### 3.2.2 Proposition :

L'image réciproque d'un fibré difféologique par une application différentiable est un fibré difféologique.

□ Pour toute plaque  $\varphi$  d'un espace difféologique A, pour tout fibré difféologique  $\Pi = (X, M, \pi)$  et tout  $f \in D(A, M)$ , l'application  $(\Pi_f)_\varphi$  est équivalente à  $\Pi_{f \circ \varphi}$  (1.4.11).

Or  $f \circ \varphi$  est une plaque de  $M$ . Donc si  $\Pi$  vérifie la propriété M.T il en sera de même pour  $\Pi_r$ .  $\square$

On déduit de cette proposition le corollaire

### 3.2.3 Corollaire :

La restriction  $\Pi^A = (X^A, A, \pi^A)$  (1.4.12) d'un fibré difféologique  $\Pi = (X, M, \pi)$  à un sous espace difféologique  $A$  de sa base est encore un fibré difféologique.

### 3.2.4 Définition:

Etant donné un fibré difféologique  $\Pi = (X, M, \pi)$ , nous appellerons **sous-fibré difféologique** de  $\Pi$  toute réduction  $\Pi_Q = (Q, M, \pi_Q)$  (1.4.12) de  $\Pi$  à  $Q$  qui est encore un fibré difféologique. Une section d'un fibré difféologique est un sous fibré dont la fibre est réduite à un point.

### 3.2.5 Proposition :

Le produit  $\Pi \times \Pi' = (X \times X', M \times M', \pi \times \pi')$  de deux fibrés  $\Pi = (X, M, \pi)$  et  $\Pi' = (X', M', \pi')$  est un fibré difféologique.

$\square$  Toute plaque  $\Phi$  de  $M \times M'$  est le produit de deux plaques  $\varphi$  et  $\varphi'$  de  $M$  et  $M'$ , l'image réciproque  $(\Pi \times \Pi')_\Phi$  est alors le produit des images réciproques  $\Pi_\varphi$  et  $\Pi'_{\varphi'}$  de  $\Pi$  par  $\varphi$  et  $\varphi'$ . Si  $\Pi_\varphi$  et  $\Pi'_{\varphi'}$  sont localement triviaux de fibre type  $F$  et  $F'$ , leur produit est localement trivial de fibre type  $F \times F'$ .  $\square$

### 3.2.6 Définition:

Etant donnés deux fibrés difféologiques de même base  $\Pi = (X, M, \pi)$  et  $\Pi' = (X', M', \pi')$ , on appellera produit fibré de  $\Pi$  par  $\Pi'$  et on notera  $\Pi \times_M \Pi'$  le sous fibré de  $\Pi \times \Pi'$  au dessus de la diagonale  $\Delta$  de  $M \times M$ . On notera  $\Pi \times_M \Pi' = (X \times_M X', M, \pi \times_M \pi')$ .

### 3.3 Catégorie des fibrés difféologiques principaux

Comme nous l'avons dit, la sous catégorie la plus importante de la catégorie des fibrés difféologiques est celle des fibrés difféologiques principaux. En effet nous montrerons plus loin que tous les fibrés difféologiques s'obtiennent par un processus d'association à partir d'un fibré principal. Ils seront définis à partir de la propriété suivante:

#### 3.3.1 Proposition-Définition

Etant donné un espace difféologique  $X$  muni d'une action différentiable d'un groupe difféologique  $G$ ,  $M$  l'espace difféologique quotient de  $X$  par  $G$  et  $p$  la projection canonique de  $X$  sur  $M$ .

Nous appellerons **groupoïde caractéristique** de la  $G$ -action de  $X$ , le sous groupoïde difféologique  $K_G$  du groupoïde  $K_p$  associé à  $P=(X,M,p)$  défini par:

$$K_G = \{ f \in \text{Mor}K_p \mid \forall a \in G \quad f \circ \underline{a}_X = \underline{a}_X \circ f \}$$

où  $a \mapsto \underline{a}_X$  désigne l'action de  $G$  sur  $X$ .

Nous noterons  $\mathcal{F}$  l'application différentiable:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : X \times G &\rightarrow X \times X \\ (x, a) &\mapsto (x, \underline{a}_X(x)) \end{aligned}$$

Si  $\mathcal{F}$  est une induction alors  $K_G$  est un sous groupoïde parfait du groupoïde  $K_p$  associé à  $P$ . Par conséquent  $P$  est un fibré difféologique. Nous dirons dans ce cas que  $P$  est un **fibré difféologique principal** de groupe structural  $G$ , ou plus simplement de groupe  $G$ .

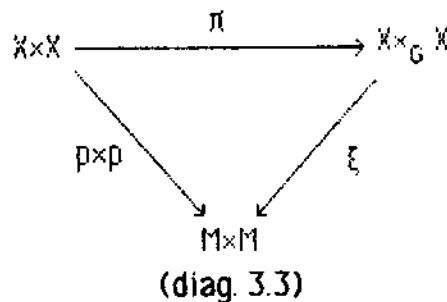
□ Nous démontrerons cette proposition en plusieurs étapes:

a) Remarquons que si  $\mathcal{F}$  est une induction cela implique que  $G$  agit librement sur  $X$  et que pour tout  $x \in X$  l'application :

$$\begin{aligned} R_x : G &\rightarrow X \\ a &\mapsto \underline{a}_X(x) \end{aligned}$$

est une induction, c'est à dire un difféomorphisme de  $G$  sur l'orbite de  $X$  munie de la difféologie de partie.

b) Considérons l'action diagonale  $\Delta$  de  $G$  sur  $X \times X$ , notons  $X \times_G X$  le quotient difféologique  $X \times X / G$  et  $\pi$  la projection de  $X \times X$  sur  $X \times_G X$ . L'application différentiable  $p \times p$  définie sur  $X \times X$  à valeurs sur  $M \times M$  se factorise sur  $X \times_G X$  en une application différentiable  $\xi$



Nous noterons:

$$\xi = (\sigma, \beta) \iff \forall \tau = \pi(x, y) \in X \times_G X \quad \sigma(\tau) = p(x) \quad \beta(\tau) = p(y)$$

Soient  $(x, y) \in X \times X$  et  $(y', z') \in X \times X$  tels que  $p(y) = p(y')$ . Il existe alors  $a \in G$  tel que  $y' = a_x(y)$  en posant  $z = a_x^{-1}(z')$  on a  $p(y', z') = p(y, z)$ . En utilisant cette remarque on définit sur  $X \times_G X$  la loi:

$$\forall \mu \in X \times_G X \quad \forall \nu \in X \times_G X : \beta(\mu) = \sigma(\nu) \iff \{\mu \nu = \pi(y, z) \iff \mu = \pi(x, y) \quad \nu = \pi(y, z)\}$$

Cette loi permet de définir un groupoïde que nous noterons  $P \times_G P$  par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Ob } P \times_G P = M \quad \mu \nu = \pi(x, z) \\
 \text{Mor } P \times_G P = X \times_G X
 \end{array} \right.$$

avec  $\xi$  pour application caractéristique:

$$\text{Mor}_{(m, m')} P \times_G P = \xi^{-1}(m, m')$$

En effet, pour tout  $m \in M : \mathbb{1}_m = \pi(x, x) \quad \forall x \in X_m$  et l'inverse de tout élément  $\mu = \pi(x, y)$  est  $\pi(y, x)$ .

c) Si  $\mathcal{F}$  est une induction alors  $P \times_G P$  est un groupoïde difféologique parfait.

En effet:



Notons  $\mathcal{L}$  l'application  $\mu \mapsto \mu^{-1}$  définie sur  $X \times_G X$  et  $\mathcal{L}$  le difféomorphisme de  $X \times X$ :  $\mathcal{L}(x,y) = (y,x)$ . Grâce à la commutativité du diagramme 3.4 et au caractère submersif de  $\pi$  on déduit que  $\mathcal{L}$  est différentiable.

$$\begin{array}{ccc}
 X \times X & \xrightarrow{\mathcal{L}} & X \times X \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 X \times_G X & \xrightarrow{\mathcal{L}} & X \times_G X
 \end{array}$$

(diag. 3.4)

Considérons maintenant la loi de groupoïde  $[(\mu, \nu) \mapsto \mu \cdot \nu]$ :

Soit  $\Phi$  une plaque de  $X \times_G X$ <sup>(2)</sup>, elle s'écrit  $\Phi : r \mapsto (\varphi(r), \varphi'(r))$ , où  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont des plaques de  $X \times_G X$  avec  $\beta(\varphi(r)) = \sigma(\varphi'(r))$ . Puisque  $\pi : X \times X \mapsto X \times_G X$  est une subduction  $\varphi$  et  $\varphi'$  se relèvent localement dans  $X \times X$ . Soient  $\Psi = [r \mapsto (\psi_1(r), \psi_2(r))]$  et  $\Psi' = [r \mapsto (\psi'_2(r), \psi'_3(r))]$  des relevés locaux de  $\varphi$  et  $\varphi'$ . La condition  $\beta(\varphi(r)) = \sigma(\varphi'(r))$  implique alors  $p \circ \psi_2(r) = p \circ \psi'_2(r)$ , pour tout  $r$  dans le domaine de définition des relevés. Puisque l'action de  $G$  est libre il existe une application  $\alpha$  à valeurs dans  $G$  telle que:  $\psi'_2(r) = \underline{\alpha(r)}_X(\psi_2(r))$ . L'application  $[r \mapsto (\psi_2(r), \psi'_2(r))]$  est différentiable et à valeurs dans l'image de l'induction  $\mathcal{F}$  donc l'application  $\alpha$  est différentiable. Posons alors  $\psi_3(r) = \underline{\alpha(r)}_X^{-1}(\psi'_3(r))$ , l'application  $\Psi'' = [r \mapsto (\psi_2(r), \psi_3(r))]$  est encore un relevé local de  $\varphi'$ , donc  $\Phi$  se relève localement dans  $(X \times X)^2$  par  $\Psi \times \Psi''$ , l'application  $[r \mapsto \varphi(r) \cdot \varphi'(r)]$  est différentiable puisqu'elle s'écrit localement  $[r \mapsto \pi(\psi_1(r), \psi_3(r))]$ . La loi de composition des flèches est donc différentiable.  $P \times_G P$  est un groupoïde difféologique. Puisque  $\pi$  est une subduction et que  $\xi$  est sa factorisation par une application différentiable, c'est une subduction. Donc  $P \times_G P$  est un groupoïde parfait.

d) Considérons l'application  $\Phi$  définie sur  $X \times X$  à valeurs dans  $\text{Mor } K_G$  par:

$$\forall (x,y) \in X \times X \quad \Phi(x,y) = f \iff f(x) = y$$

Une telle application existe, il suffit pour le vérifier d'identifier les orbites de  $x$  et  $y$  avec  $G$  par  $R_x$  et  $R_y$ . Il est immédiat de vérifier que les images réciproques de  $\text{Mor } K_G$  par  $\Phi$  sont les orbites de l'action diagonale de  $G$  sur  $X \times X$  et donc que  $\Phi$  se factorise sur  $X \times_G X$  par une application que nous noterons  $\text{fact}(\Phi)$ . Montrons que  $\Phi$  est différentiable et par conséquent  $\text{fact}(\Phi)$ .

Soit  $H = [r \mapsto (\eta(r), \eta'(r))]$  une plaque de  $X \times X$ ,  $\eta$  et  $\eta'$  sont des plaques de  $X$ . Posons  $H = \Phi \circ H$  à valeurs dans  $\text{Mor } K_G$ , les espaces  $X_{\text{so}H}$  et  $X_{\text{bo}H}$  et les applications  $H_s$  et  $H_b$  (2.5.4) sont égaux à :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{\text{so}H} = \{ (r, x) \in \text{def}(\Phi) \times X \mid p \circ \eta(r) = p(x) \} \\ X_{\text{bo}H} = \{ (r, x) \in \text{def}(\Phi) \times X \mid p \circ \eta'(r) = p(x) \} \\ H_s(r, x) = H(r)(x) \quad H_b(r, x) = H(r)^{-1}(x) \end{array} \right.$$

La propriété  $p \circ \eta(r) = p(x)$  implique :

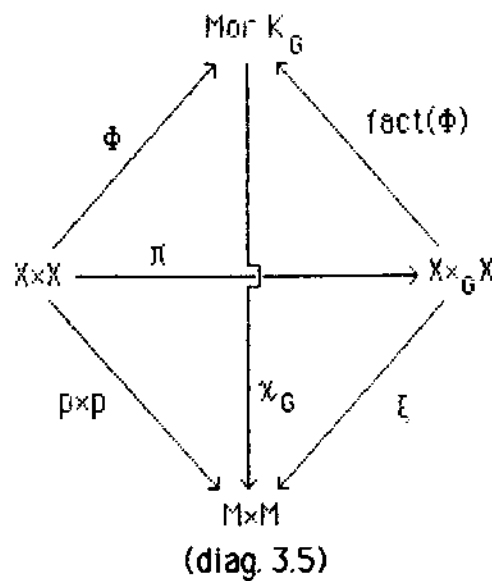
$$\exists \gamma : X_{\text{so}H} \rightarrow G \quad \forall (r, x) \in X_{\text{so}H} \quad \gamma(r, x)_x(\eta(r)) = x$$

de même pour  $\eta'$  il existe  $\gamma' : X_{\text{bo}H} \rightarrow G$ . Montrons que  $\gamma$  est différentiable :

Soit  $\psi : t \mapsto (F(t), \varphi(t))$  une plaque de  $X_{\text{so}H}$ ,  $\gamma \circ \psi(t) = \gamma(F(t), \varphi(t))$  vérifie  $\gamma(F(t), \varphi(t))_x(\eta(F(t))) = \varphi(t)$ , or les applications  $\eta \circ F$  et  $\varphi$  sont différentiables et à valeurs dans  $\text{im}(\mathcal{F})$  mais  $\mathcal{F}$  est une induction, donc l'application  $t \mapsto \gamma(F(t), \varphi(t))$  est différentiable : c'est une plaque de  $G$ , ainsi  $\gamma$  est différentiable. Il est clair qu'il en est de même pour  $\gamma'$ .

L'application  $H_s$  s'écrit alors  $H_s(r, x) = H(r)(\gamma(r, x)_x(\eta(r)))$  c'est à dire, grâce à la commutativité de  $H$  et de l'action de  $G$ ,  $H_s(r, x) = \gamma(r, x)_x(H(r)(\eta(r)))$ . Or par définition  $\Phi(x, y) = f \Leftrightarrow f(x) = y$  donc  $H(r)(\eta(r)) = \eta'(r)$  et puisque  $\eta'$  est différentiable et que l'action de  $G$  sur  $X$  est différentiable,  $H_s$  se décompose en un produit d'applications différentiables, elle est donc différentiable. La démonstration est analogue pour  $H_b$ , il faut en plus utiliser la différentiabilité de l'inversion dans  $G$ . Donc, en vertu de la définition de la difféologie standard de  $\text{Mor } K_G$  (2.5.4), on déduit que  $\Phi$  est différentiable, et par conséquent  $\text{fact}(\Phi)$  (1.2.16).

e) Le diagramme 3.5 où toutes les flèches sont des applications différentiables est commutatif.



Il est immédiat d'en déduire que  $\text{Mor } K_G$  est parfait. Rajoutons que  $\text{fact}(\Phi)$  est en fait un  $D$ -morphisme de groupoïde difféologique.  $\square$

Remarquons que le fibré principal associé à un groupoïde parfait (3.4.1) est un fibré difféologique principal. Nous dirons dorénavant **fibré principal** pour fibré difféologique principal, lorsqu'aucune confusion ne sera possible.

**3.3.2 Définition:**

Etant donnés  $P=(X,M,p)$  et  $P'=(X',M',p')$  deux fibrés difféologiques principaux de groupes structuraux, respectivement,  $G$  et  $G'$ , nous appellerons **morphisme de fibré principal** de  $P$  à  $P'$  tout couple  $(\Phi, \mathfrak{H})$  tel que:

- a)  $\mathfrak{H}$  est un  $D$ -morphisme de  $G$  à  $G'$
- b)  $\Phi$  est un morphisme de fibrés de  $P$  à  $P'$  vérifiant:

$$\forall a \in G \quad \Phi \circ a_x = \mathfrak{H}(a)_x \circ \Phi$$

Notons toutefois que la condition d'équivariance de  $\Phi$  (3.3.2) implique déjà que  $\Phi$  est un morphisme de fibré. Le couple  $(\Phi, \mathfrak{H})$  est un isomorphisme si  $\mathfrak{H}$  est un

D-isomorphisme de  $G$  à  $G'$  et  $\Phi$  un isomorphisme de fibré difféologique. La catégorie ainsi définie sera notée **PrincDiff**.

Si  $M=M'$  et  $G=G'$  un isomorphisme  $(\Phi, \mathfrak{H})$  de fibré principal sera appelé **M-équivalence de fibré principal** si  $\Phi$  est une M-équivalence de fibré et si  $\mathfrak{H}(a)=a \forall a \in G$ .

Les fibrés principaux associés, en des points différents à un groupoïde difféologique parfait (3.4.10), sont isomorphes.

Le fibré principal  $Pr_M=(M \times G, M, pr_M)$  où  $G$  agit trivialement sur  $M$  et à gauche sur  $G$  sera appelé **fibré principal trivial** de groupe  $G$  et de base  $M$ . Nous dirons alors qu'un fibré principal de groupe  $G$  est trivial s'il lui est isomorphe.

### 3.3.3 Proposition :

Etant donné un fibré difféologique principal  $P=(X, M, p)$  l'induction  $\mathfrak{F}$ (3.3.1) est surjective sur l'image réciproque de  $P$  par  $p$ , c'est une trivialisat.

□ La vérification est immédiate. □

La condition de micro-trivialité s'écrit de façon particulière pour les fibrés difféologiques principaux:

### 3.3.4 Proposition :

Etant donnée une subduction  $P=(X, M, p)$  définie par l'action différentiable d'un groupe difféologique  $G$ .  $P$  est un fibré difféologique principal de groupe  $G$  si et seulement si: pour toute plaque  $\Phi$  de  $M$ , pour tout relevé local  $\varphi$  de  $\Phi$  dans  $X$ , l'application  $\psi$  définie par:

$$\forall (r, a) \in \text{def}(\varphi) \times G = \text{def}(\psi) \quad \psi(r, a) = (r, \underline{a}_x \circ \varphi(r))$$

est une trivialisat. de  $P_\Phi|_{\text{def}(\varphi)}$

□ Supposons d'abord que  $P$  soit un fibré principal:

Doit  $\Omega = \text{def}(\varphi)$ , on a  $X_\Phi|_\Omega = X_{p \circ \varphi}$ , c'est à dire:

$$X_{p \circ \varphi} = \{ (r, x) \in \Omega \times X \mid \exists a \in G \quad \varphi(r) = \underline{a}_x(x) \}$$

L'application  $\psi$  définie plus haut est évidemment différentiable et bijective, montrons que c'est une subduction: soit  $\Xi = [t \mapsto (\rho(t), \xi(t))]$  une plaque de  $X_{\rho \circ \psi}$ :

$$\psi^{-1} \circ \Xi(t) = (\rho(t), \alpha(t)) \Leftrightarrow \underline{\alpha(t)}_x(\psi \circ \rho(t)) = \xi(t)$$

Or  $(\psi \circ \rho, \xi)$  est une plaque de  $\text{Im}(\mathcal{F})$  donc  $\alpha$  est différentiable, ce qui entraîne que  $\psi^{-1} \circ \Xi$  est une plaque de  $\text{def}(\psi) \times G$  et donc que  $\psi$  est une subduction donc un difféomorphisme. Il est évident ensuite de vérifier que c'est une trivialisations.

Réciproquement soit  $\Xi = [r \mapsto (\xi(r), \alpha(r))]$  une application définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $X \times G$  telle que  $\mathcal{F} \circ \Xi = [r \mapsto (\xi(r), \underline{\alpha(r)}_x(\xi(r)))]$  soit une plaque de  $X \times X$ . Par hypothèse l'application  $\psi : (r, a) \mapsto (r, \underline{a}_x(\xi(r)))$  est une trivialisations de  $X_{\rho \circ \xi}$ . Or  $r \mapsto (r, \underline{\alpha(r)}_x(\xi(r)))$  est une plaque de  $X_{\rho \circ \xi}$ , on déduit alors, en prenant l'image de cette plaque par  $\psi^{-1}$  que  $\alpha$  est une plaque de  $G$ .  $\square$

### 3.3.5 Proposition :

Un fibré difféologique principal  $P = (X, M, p)$  est trivial si et seulement si il admet une section globale.

$\square$  Parce que  $\mathcal{F}$  est une induction (3.3.1), l'application différentiable  $(m, a) \mapsto (\sigma(m), a) \mapsto \underline{a}_x(\sigma(m))$ ,  $(m, a) \in M \times G$ ,  $\sigma$  section de  $P$ , est une induction bijective donc un difféomorphisme, c'est une trivialisations.  $\square$

## 3.4 Fibré principal associé à un groupoïde parfait

Etant donné un groupoïde difféologique parfait  $K$ ;  $s$ ,  $b$  et  $x$  ses applications sources, but et son application caractéristique. Etant donné un point  $m_0$  de l'ensemble de ses objets  $M = \text{Ob}K$ . Nous noterons:

$$\left\{ \begin{array}{l} T = s^{-1}(m_0) \\ p : \text{sl}_T \quad b|_T \quad (3.4.1) \\ G = K_{m_0} = x^{-1}(m_0, m_0) \end{array} \right.$$

Nous noterons :

$$a \mapsto \underline{a}_T \quad (3.4.2)$$

l'action de  $G$  sur  $T$  définie par:

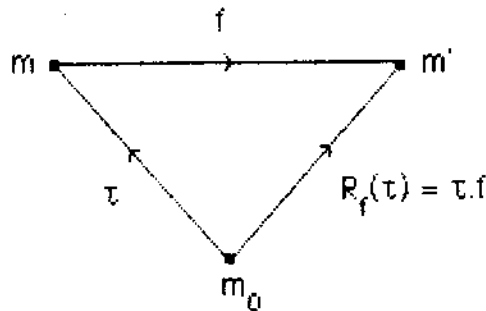
$$\forall a \in G \quad \forall \tau \in T \quad \underline{a}_\tau(\tau) = a.\tau \quad (3.4.3)$$

L'application  $P = (T, M, p)$  étant différentiable nous noterons  $K_p$  son groupoïde associé muni de sa difféologie standard et  $K_G$  le sous groupoïde respectueux de  $K_p$  défini par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ob}K_G = \text{Ob}K_p = \text{Ob}K = M \\ \text{Mor}K_G = \{ f \in K_p \mid \forall a \in G \quad f \circ \underline{a}_\tau = \underline{a}_\tau \circ f \} \end{array} \right. \quad (3.4.4)$$

Soient  $(m, m')$  et  $f \in \text{Mor}_K(m, m')$ , on définira l'application  $R_f$  de  $T_m = \text{Mor}_K(m_0, m)$  dans  $T_{m'} = \text{Mor}_K(m_0, m')$  par:

$$\forall f \in \text{Mor}_K(m, m') \quad \forall \tau \in T_m \quad R_f(\tau) = \tau.f \quad (3.4.5)$$



(diag. 3.6)

Compte tenu de ces définitions et notations :

**3.4.6 Proposition :**

Pour tout  $f \in \text{Mor}_K(m, m')$ , l'application  $R_f : T_m \rightarrow T_{m'}$  est un difféomorphisme équivariant. C'est à dire:

$$\forall f \in \text{Mor}_K(m, m') \quad R_f \in \text{Mor}K_G(m, m')$$

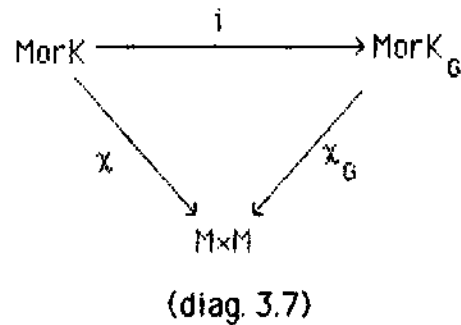
□  $R_f$  est évidemment bijective et équivariante par rapport à l'action de  $G$  sur  $T$ . Parce que la loi de composition des flèches de  $K$  est différentiable, parce que, de plus, l'application  $f \mapsto \Gamma^{-1}$  est différentiable, l'inverse  $(R_f)^{-1} = R_{f^{-1}}$  est différentiable. Et donc  $R_f$  est bien un difféomorphisme équivariant de  $T_m$  sur  $T_{m'}$ . □

Grâce à cette proposition on peut définir une application  $i$  de  $\text{Mor } K$  dans  $\text{Mor } K_G \subset \text{Mor } K_p$  par:

$$i : \text{Mor } K \rightarrow \text{Mor } K_p \quad (3.4.7)$$

$$r \mapsto R_r$$

qui vérifie évidemment:



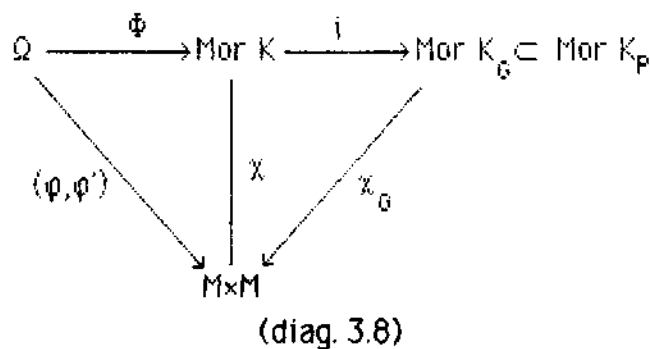
où  $x_G$  est l'application caractéristique de  $K_G$ . Avec ces nouvelles définitions nous avons la proposition suivante:

**3.4.8 Proposition :**

L'application  $i$  est un D-foncteur bien fidèle strict (§2.2) de  $\text{Mor } K$  dans  $\text{Mor } K_p$ , surjectif sur  $K_G$ , en particulier  $i$  est une induction.  $K_G$  est un sous groupoïde parfait de  $K_p$ .

□ Montrons que  $i$  est différentiable. Soit  $\Phi$  une plaque de  $\text{Mor } K$ , on a évidemment:

$$x_G \circ i \circ \Phi = x \circ \Phi = [r \mapsto (\varphi(r), \varphi'(r))] \in \text{DL}(\mathbb{R}^n, M \times M)$$



Posons  $\Phi = i \circ \Phi$ :

$$\forall r \in \text{def}(\Phi) \quad \Phi(r) : T_{\varphi(r)} \rightarrow T_{\varphi'(r)}$$

$$\tau \mapsto \tau.\Phi(r)$$

On a:

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{s \circ \Phi} = T_{\varphi} = \{(r, \tau) \in \Omega \times T \mid \varphi(r) = \rho(\tau)\} \\ T_{b \circ \Phi} = T_{\varphi'} = \{(r, \tau') \in \Omega \times T \mid \varphi'(r) = \rho(\tau')\} \end{array} \right.$$

Les applications  $\Phi_s$  et  $\Phi_b$  définies sur  $T_{s \circ \Phi}$  et  $T_{b \circ \Phi}$  dans  $T$  (2.5.4) sont données par:

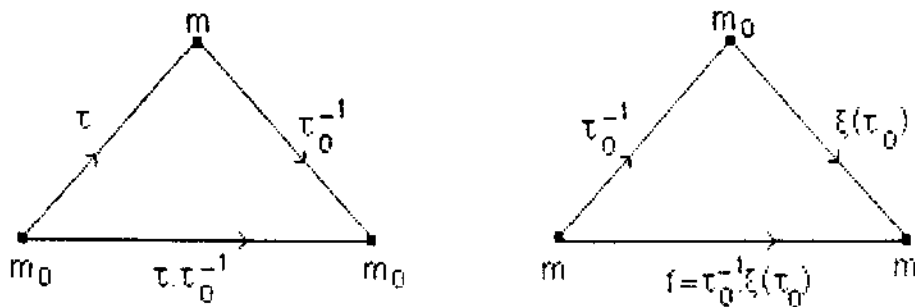
$$(A') \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall (r, \tau) \in T_{\varphi} \quad \Phi_s(r, \tau) = \tau.\Phi(r) \\ \forall (r, \tau') \in T_{\varphi'} \quad \Phi_b(r, \tau') = \tau'.\Phi(r)^{-1} \end{array} \right.$$

Par définition même des difféologies de groupoïde ces applications sont différentiables et donc  $\Phi$  est une plaque de la difféologie standard de  $\text{Mor}K_p$  prenant ses valeurs dans  $\text{Mor}K_G$  c'est donc une plaque de  $\text{Mor}K_G$ .

Il est immédiat de vérifier alors que  $i$  est injective. Montrons que  $i$  est surjective sur  $\text{Mor}K_G$ : soit  $\xi \in \text{Mor}K_G(m, m')$ :

$$\xi \in \text{Diff}(T_m, T_{m'}) \quad \xi(a.\tau) = a.\xi(\tau) \quad \forall a \in G \quad \forall \tau \in T_m$$

soit  $\tau_0 \in T_m$ , on a  $\xi(\tau) = \xi(\tau.\tau_0^{-1}.\tau_0)$ , or  $\tau.\tau_0^{-1} \in \text{Mor}K(m_0, m_0) = G$  donc  $\xi(\tau) = \tau.\tau_0^{-1}.\xi(\tau_0)$  mais  $\xi(\tau_0) \in T_{m'}$  et donc  $\tau_0^{-1}.\xi(\tau_0) \in \text{Mor}K(m, m')$ , en posant alors  $f = \tau_0^{-1}.\xi(\tau_0)$  on a  $\xi(\tau) = \tau.f = f(\tau)$ :



(diag. 3.9)

$i$  est donc surjective sur  $\text{Mor}K_G$ ,  $i$  est évidemment un foncteur:

$$\forall (f, f') \in \text{Mor}K^{(2)} \quad i(f, f')(\tau) = \tau.f.f' = i(f).i(f').(\tau) = \{(i(f).i(f'))\}(\tau)$$



On déduit immédiatement, en appliquant 1.2.16, que  $K_G$  et par conséquent  $K_p$ , sont des groupoïdes parfaits et donc que le triplet  $P=(T,M,p)$  est un fibré difféologique.

Montrons maintenant que  $i$  est une induction:

soit  $\Phi$  une application définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\text{Mor}K$ ,  $x \circ \Phi = (\varphi, \varphi')$ , telle que  $\Phi = i \circ \Phi$  soit une plaque de  $\text{Mor}K_p$  ((A) et (A') sont vérifiés). Puisque  $\varphi$  est différentiable elle se relève localement, au voisinage de tout point, dans  $\text{Mor}K$  (et plus précisément dans  $T$ ). Soit  $r \mapsto \tau(r)$  un de ces relevés, l'application  $[r \mapsto \tau(r)^{-1}]$  est aussi différentiable. Or l'application  $\Phi$  peut s'écrire:

$$r \mapsto (\tau(r)^{-1}, \tau(r). \Phi(r)) \mapsto \tau(r)^{-1} \tau(r). \Phi(r) = \Phi(r)$$

qui est un produit d'applications différentiables.  $\Phi$  est alors localement différentiable, elle est différentiable,  $i$  est donc une induction.  $\square$

Grâce à l'induction  $i$  le groupoïde initial  $K$  s'identifie avec le sous groupoïde  $K_G$ . Ainsi tout groupoïde parfait peut être considéré comme un sous groupoïde parfait du groupoïde associé à une certaine fibration  $P$ . C'est ce qui nous conduira à définir plus loin la notion de fibrés à structure dont la plus importante est sans doute celle de fibré principal. Nous avons, en utilisant toujours les notations précédentes:

### 3.4.9 Corollaire :

Le triplet  $P=(T,M,p)$  défini par (3.4.1) est un fibré difféologique principal (3.3.1). Il sera appelé **fibré principal associé** au groupoïde  $K$  au point  $m_0$ ,  $G$  sera appelé groupe structural de  $P$ .

La relation entre le fibré principal associé à  $K$  au point  $m_0$  et celui au point  $m_1$  est donné par:

**3.4.10 Proposition :**

Soient  $P_0=(T_0, M, p_0)$  et  $P_1=(T_1, M, p_1)$  les fibrés principaux associés à  $K$  aux points  $m_0$  et  $m_1$ , de groupe structuraux  $G_0$  et  $G_1$ . Il existe un D-isomorphisme  $\mathfrak{H}$  de  $G_0$  à  $G_1$ , et une M-équivalence  $\Psi$  de  $P_0$  sur  $P_1$ , tel que:

$$\forall a \in G_0 \quad \forall \tau \in T_0 \quad \Psi(a_{T_0}(\tau)) = \mathfrak{H}(a)_{T_1} \circ \Psi(\tau)$$

En d'autres termes  $P_0$  et  $P_1$  sont équivalents.

□ Il existe  $f \in \text{Mor}_K(m_0, m_1)$  puisque  $\chi$  est surjectif sur  $M \times M$ , posons alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall a \in G_0 \quad \mathfrak{H}(a) = f^{-1} \cdot a \cdot f \\ \forall \tau \in T_0 \quad \Psi(\tau) = f^{-1} \cdot \tau \end{array} \right.$$

$\Psi$  et  $\mathfrak{H}$  ainsi définis répondent à la question. □

Pour cette raison nous omettrons parfois de préciser le point de base  $m_0$ , et parlerons du fibré principal associé à un groupoïde parfait.

**3.5 Fibrés à structure**

Les fibres des fibrés difféologiques sont parfois munies de structures particulières: celle d'espaces vectoriels par exemple, d'espaces homogènes de groupe difféologique ou bien d'autres encore...

Nous introduirons ces structures dans la théorie des fibrés difféologiques grâce à la définition suivante:

**3.5.1 Définition:**

Nous appellerons **fibré à structure** tout couple  $(P, \Gamma)$  où  $P=(X, M, p)$  est un fibré difféologique et  $\Gamma$  un sous groupoïde parfait du groupoïde  $K_p$  associé à  $P$ .  $\Gamma$  sera appelé **groupoïde caractéristique** de la structure, ou parfois structure. Nous dirons aussi de  $P$  que c'est un  $\Gamma$ -fibré.

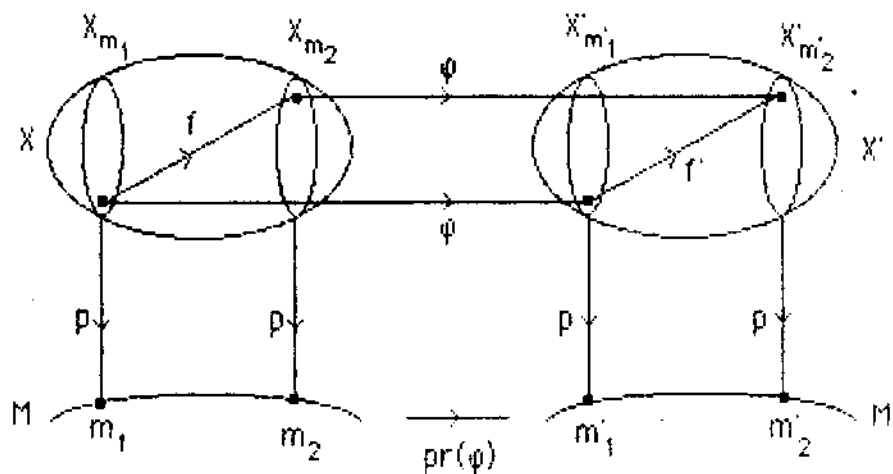
Etant donné un point  $m_0 \in M = \text{bs}P$ , le fibré principal  $K_\Gamma$  associé à  $\Gamma$  au point  $m_0$  (3.4.1) sera appelé **fibré principal structural** de  $(P, \Gamma)$  au point  $m_0$ , ou bien plus simplement fibré principal structural de  $P$  (tous ces fibrés sont équivalents (3.4.10)). Le groupe  $\Gamma_{m_0} = x_\Gamma^{-1}(m_0)$  sera appelé **groupe structural de la fibre**  $X_{m_0}$ . Le type  $G$  de  $\Gamma_{m_0}$  quand  $m_0$  parcourt  $M$  (puisque  $\Gamma$  est parfait tous les groupes  $\Gamma_m$  sont  $D$ -isomorphes) qui est le groupe structural du fibré principal structural de  $(P, \Gamma)$  sera aussi appelé **groupe structural du  $\Gamma$ -fibré**. Tout fibré  $P$  possède au moins une structure, celle définie par son groupoïde associé  $K_P$ .

Compte tenu des modifications de langage évidentes, la définition des fibrés à structure que nous proposons ici est une adaptation des  $F$ -fibrés définis en topologie [F-R]. La définition 3.5.1, en termes de sous-groupoïde parfait, évite l'introduction d'objets tels que les homéomorphismes distingués.

En particulier si  $P$  est un fibré principal de groupe structural  $G$ ,  $K_G$  (3.3.1) est le groupoïde caractéristique de sa structure de fibré principal.

Nous noterons **Stfib** la catégorie dont les objets sont les fibrés à structure et dont les morphismes  $\varphi$  (nous dirons des **St-morphismes**) de  $(P, \Gamma)$  à  $(P', \Gamma')$  sont des morphismes de fibré difféologique vérifiant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall f \in x_\Gamma^{-1}(m_1, m_2) \exists f' \in x_{\Gamma'}^{-1}(m'_1, m'_2) \quad \varphi|_{X_{m_2}} \circ f = f' \circ \varphi|_{X_{m_1}} \\ (m_1, m_2) \in M \times M \quad m'_i = \text{pr}(\varphi)(m_i) \quad i=1,2 \quad X = \text{tIP} \quad M = \text{bs}P \end{array} \right. \quad (3.5.2)$$



(Fig. 3.2)

**3.5.3 Proposition :**

Le fibré principal structural d'un fibré principal lui est équivalent. Les morphismes de fibrés principaux sont des St-morphismes.

□ Soit  $P=(X,M,p)$  le fibré principal en question, de groupe structural  $G$  et  $P \times_G P$  le groupoïde parfait défini dans (3.4.2) l'application  $\text{fact}(\Phi)$  de  $P \times_G P$  sur  $\text{Mor } K_G$  est une équivalence de groupoïde différentiable. L'espace total du fibré principal associé à  $P \times_G P$  au point  $m_0 \in M$  est égal au quotient de  $X_{m_0} \times X$  par l'action diagonale  $\Delta$  de  $G$ , c'est à dire, en identifiant  $G$  et  $X_{m_0}$  grâce à l'induction  $R_{x_0}$ ,  $x_0 \in X_{m_0}$ , au quotient de  $G \times X$  par l'action diagonale de  $G$ ,  $G$  agissant à gauche sur lui même. Or ce quotient est identifié à  $X$  grâce à la subduction  $(a,x) \mapsto \underline{a}_x^{-1}(x)$ .

Soient  $P=(X,M,p)$  et  $P'=(X',M',p')$  deux fibrés principaux de groupes  $G$  et  $G'$ . Soit  $\varphi$  un St-morphisme de  $P$  à  $P'$ . Il existe une application différentiable (parce que  $\mathcal{F}$  est une induction (3.3.1))  $h : X \times G \mapsto G'$  telle que:

$$\forall x \in X \quad \forall a \in G \quad \varphi \circ \underline{a}_x(x) = h(a, \overset{x'}{\Delta_x} \circ p(x))$$

En remplaçant  $x$  par  $f(x)$  où  $f \in \text{Mor } K_G$  et en utilisant (3.4.4) on déduit  $h(a,x) = h(a)$  de la propriété d'action de groupe, on vérifie alors que  $h$  est un homomorphisme. □

**3.5.4 Proposition :**

L'image réciproque d'un  $\Gamma$ -fibré  $P=(X,M,p)$  par une application différentiable  $f : N \mapsto M$  possède naturellement une  $\Gamma_f$  structure définie par:

$$\text{Ob } \Gamma_f = N \quad \text{Mor}_{\Gamma_f}(n,n') = \text{Mor}_{\Gamma}(f(n),f(n'))$$

□ La démonstration est immédiate. □

Cette proposition permet de définir les fibrés St-triviaux, St-localement triviaux...Ceci n'offre pas de difficultés particulières.

**3.5.5 Proposition :**

Un fibré à structure  $(P, \Gamma)$  est St-trivial si et seulement si son fibré principal structural est trivial.

□ Notons  $P=(X, M, p)$  un  $\Gamma$ -fibré trivial. Soit  $\Psi$  une trivialisation:

$$\Psi(m, u) = \psi(m)(u) \quad \forall (m, u) \in M \times F \quad F = X_{m_0} \quad m_0 \in M$$

Par définition de la difféologie standard  $\psi \in D(M, T)$  où  $T$  est l'espace total du fibré principal structural de  $P$  au point  $m_0$ . On pose alors:

$$\begin{aligned} \Psi : M \times G &\rightarrow T \\ (m, a) &\rightarrow \psi(m) \cdot a^{-1} \end{aligned}$$

$\Psi$  est une  $M$ -équivalence de fibré principal. La réciproque est tout aussi immédiate □

La traduction de la propriété M.T. aux fibrés à structure est donnée par:

**3.5.6 Proposition :**

Etant donné une application différentiable  $P=(X, M, p)$ , un point  $m_0 \in M$  et  $F = X_{m_0}$ . Soit  $\Gamma$  un sous groupoïde de son groupoïde associé.  $\Gamma$  définit une structure sur  $P$  si pour toute plaque  $\Phi$  de  $M$ , il existe un système de trivialisation locale  $\{\Psi_i\}$  de  $P_\Phi$  tel que:

$$\forall (r, u) \in \Omega_i \times F = \text{def}(\Psi_i) \quad \Psi_i(r, u) = (r, \psi_i(r)(u)) \quad \psi_i \in D(\Omega_i, \Gamma)$$

□ Ceci est une simple conséquence des définitions (3.1.2)(3.5.1). □

A part la structure de fibré principal qui a fait l'objet du paragraphe précédent citons à titre d'exemple les structures de fibrés vectoriels dont le groupoïde caractéristique est constitué des isomorphismes linéaires. Bien d'autres structures que l'on rencontre fréquemment peuvent se décrire grâce à ces propositions.

**3.6 Fibrés associés à un fibré principal.**

Nous allons montrer, dans ce paragraphe que tout fibré peut être obtenu par un processus appelé **association de fibré** à partir d'un fibré principal.

Soit  $P=(T,M,p)$  un fibré principal de groupe structural  $G$  et soit  $F$  un espace difféologique muni d'une action différentiable de  $G$ . Considérons l'action diagonale de  $G$  sur  $T \times F$ :

$$\forall (a, \tau, u) \in G \times T \times F \quad a_{T \times F}(\tau, u) = (a_T(\tau), a_F(u)) \quad (3.6.1)$$

Notons  $X$  le quotient difféologique  $X = T \times_G F = (T \times F)/G$ ,  $p_G$  la projection de  $T \times F$  sur  $X$  et  $\pi$  l'application différentiable définie par le diagramme commutatif 3.10.

$$\begin{array}{ccc} T \times F & \xrightarrow{p_G} & T \times_G F = X \\ \downarrow p_{r_T} & & \downarrow \pi \\ T & \xrightarrow{p} & M \end{array}$$

(diag. 3.10)

Compte tenu de ces notations et définitions:

### 3.6.2 Proposition :

Le triplet  $\Pi=(X,M,\pi)$  est un fibré difféologique de fibre type  $F$ . Il sera appelé **fibré associé** à  $P$  par l'action de  $G$  sur  $F$ .

□ Soit  $\varphi$  une plaque de  $M$ . Soit:

$$(a, r, \tau, u) \mapsto (r, a_T(\tau), a_F(u)) \quad (a, r, \tau, u) \in G \times \text{def}(\varphi) \times T \times F$$

l'action de  $G$  sur  $T_\varphi \times F$ . Elle permet d'identifier  $(T \times_G F)_\varphi$  avec  $T_\varphi \times_G F$ . puisque  $T_\varphi$  est localement trivial,  $T_\varphi \times F$  est aussi localement trivial et l'action de  $G$  sur  $T_\varphi \times F$  se transporte sur  $U \times G \times F$  par:

$$(a, r, k, u) \mapsto (r, a, k, a_F(u)) \quad (a, r, k, u) \in G \times U \times G \times F$$

où  $U$  est un ouvert de trivialisations de  $T_\varphi$ . Donc  $T_\varphi \times_G F$  est localement trivialisable grâce à:

$$(r, k, u) \mapsto (r, k, k_F^{-1}(u)) \quad (r, k, u) \in U \times G \times F$$

de  $U \times G \times F$  dans  $U \times F$ , d'où  $(T \times_{\mathbb{G}} F)_{\bullet}$  est localement trivial.  $\square$

Le fibré associé  $\Pi = (X, M, \pi)$  ainsi défini sera aussi noté  $P \times_{\mathbb{G}} F$ . On peut montrer que si l'action de  $G$  est effective et stricte, c'est à dire si  $[a \mapsto \underline{a}]$  est une induction de  $G$  dans  $\text{Diff}(F)$ ,  $\Pi$  est un  $P \times_{\mathbb{G}} P$ -fibré (pour la définition de  $P \times_{\mathbb{G}} P$  voir 3.3.1)

La réciproque de la proposition 3.6.2 est donnée par:

### 3.6.3 Proposition :

Etant donné un  $\Gamma$ -fibré  $\Pi = (X, M, \pi)$ ,  $P = (T, M, p)$  son fibré principal structural (§3.5) et  $G$  le groupe structural de  $\Gamma$  au point  $m_0$ ,  $m_0 \in M$ , posons  $F = X_{m_0}$  ( $G$  est un sous groupe de  $\text{Diff}(F)$  agissant naturellement sur  $F$ ).

$\Pi$  est équivalent au fibré associé  $P \times_{\mathbb{G}} F$ .

$\square$  Soit  $v$  l'application définie sur  $T \times F$  à valeurs dans  $X$  par:

$$\forall (f, u) \in T \times F \quad v(f, u) = f(u)$$

on vérifie immédiatement que  $v$  se factorise en une application bijective et différentiable sur  $T \times_{\mathbb{G}} F$ . La démonstration que  $\text{fact}(v)$  est une subduction est du même type que (3.3.1).  $\square$

Tout fibré peut donc être considéré comme le fibré associé à un certain fibré principal, c'est ce qui fait jouer en difféologie, comme dans la théorie des variétés, un rôle particulier aux fibrés principaux, bien que les variétés fibrées ne soient pas toujours associées à des variétés fibrées principales, à moins que leur groupe structural soit réduit à un groupe de Lie. Compte tenu des notations ci-dessus:

### 3.6.4 Proposition :

L'espace des sections d'un fibré associé  $P \times_{\mathbb{G}} F$ ,  $P = (T, M, p)$ , est en bijection avec l'espace des applications différentiables équivariantes de  $T$  dans  $F$ . ce qu'on notera:

$$\chi(P \times_G F) \sim \text{Eq}(T, F)$$

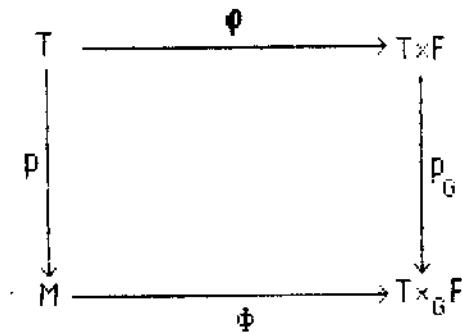
□ Soit  $\varphi \in \text{Eq}(T, F)$ , c'est à dire:

$$\forall a \in G \quad \varphi \circ a_T = a_T \circ \varphi$$

L'application  $\varphi$  définie sur  $T$  dans  $T \times F$  par:

$$\forall \tau \in T \quad \varphi(\tau) = (\tau, \varphi(\tau))$$

se factorise sur  $M$  par  $\Phi \in D(M, T \times_G F)$ :



(diag. 3.11)

Il est facile de vérifier que  $\pi \circ \Phi = \mathbb{1}_M$ , où on pose:  $P \times_G F = \Pi = (T \times_G F, M, \pi)$ .  
 Considérons alors pour tout  $\tau \in T$  l'induction  $\tau : F \rightarrow T \times_G F$  définie par restriction de la projection canonique  $p_G$  de  $T \times F$  sur  $T \times_G F$  au sous espace  $\{\tau\} \times F \sim F$ , et posons pour toute section  $\Phi$  de  $P \times_G F$ :

$$\varphi(\tau) = \tau^{-1}(\Phi \circ p(\tau))$$

$\varphi$  est équivariante et vérifie le diagramme ci-dessus. On démontre que  $\varphi$ , ainsi, définie est différentiable en utilisant explicitement la micro-trivialité de  $P$ . □

L'espace  $\text{Eq}(T, F)$  (3.6.4) ainsi que  $\chi(P \times_G F)$  possède une difféologie canonique, celle d'espace fonctionnel (1.3.6), pour cette difféologie l'application définie dans 3.6.4 est un difféomorphisme.

Considérons maintenant le groupe **Aut(P)** des automorphismes de  $P = (T, M, p)$ , c'est le sous groupe de  $\text{Diff}(T)$  défini par:

$$\text{Aut}(P) = \{ \varphi \in \text{Diff}(T) \mid \forall a \in G \quad \varphi \circ a_T = a_T \circ \varphi \} \quad (3.6.5)$$

Le groupe  $\text{Aut}(P)$  se projette naturellement dans  $\text{Diff}(M)$ , nous noterons par la projection et  $\mathfrak{L} = \ker(\text{pr})$ ,  $\mathfrak{L}$  est un sous-groupe invariant de  $\text{Aut}(P)$  appelé



**groupe de jauge** du fibré  $P$  ou **groupe des isogénies** de  $P$  [16]. On a la suite exacte:

$$0 \rightarrow \mathfrak{I} \xrightarrow{\text{in}} \text{Aut}(P) \xrightarrow{\text{pr}} \text{Diff}(M) \quad (3.6.6)$$

Le groupe  $\mathfrak{I}$  est caractérisé par:

$$\mathfrak{I} = \{ \mathcal{A} \in \text{Diff}(T) \mid \mathcal{A} \circ \underline{a}_T = \underline{a}_T \circ \mathcal{A} \text{ p.o. } \mathcal{A} = p \} \quad (3.6.7)$$

ainsi:

$$\forall \mathcal{A} \in \mathfrak{I}, \forall \tau \in T, \exists! \alpha(\tau) \in G : \mathcal{A}(\tau) = \underline{\alpha(\tau)}_T(\tau) \quad (3.6.8)$$

Compte tenu de ces dernières notations on a:

### 3.6.9 Proposition :

L'application  $[\tau \mapsto \alpha(\tau)]$  définie par 3.6.8 est différentiable et vérifie la propriété d'équivariance

$$\forall a \in G \quad \alpha(\underline{a}_T(\tau)) = \text{ad}(a)(\alpha(\tau)) = a \cdot \alpha(\tau) \cdot a^{-1}$$

Le groupe  $\mathfrak{I}$  est isomorphe au groupe  $\text{Eq}_{\text{ad}}(T, G)$  pour l'action adjointe de  $G$  dans  $G$ , lui même isomorphe à l'espace des sections du fibré associé  $P \times_{\text{ad}} G$ .

□ La propriété d'équivariance est une conséquence immédiate de la définition.

Montrons que  $\alpha$  est différentiable. Soit  $\phi$  une plaque de  $T$ , l'application:

$$\Phi : (r, a) \mapsto (r, \underline{a}_T(\phi(r))) \quad (r, a) \in \text{def}(\Phi) \times G$$

est une trivialisatoin de  $P_{\rho \circ \phi}$ . La transformation de jauge  $\mathcal{A}$  induit sur  $P_{\rho \circ \phi}$  la transformation de jauge:

$$(r, a) \mapsto (r, a \cdot \alpha(\phi(r)))$$

D'où on déduit que  $\alpha \circ \phi$  est différentiable. □

## 3.7 Espace des structures d'un espace difféologique

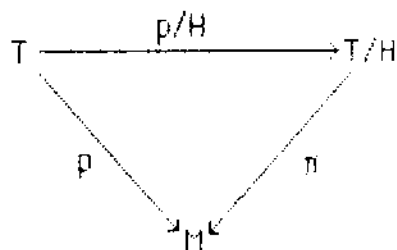
L'existence de structures particulières sur un fibré difféologique est liée aux réductions éventuelles du fibré principal de son groupoïde associé (3.4.1)

## 3.7.1 Définition:

Soit  $P=(T,M,p)$  un fibré principal de groupe  $G$  et soit  $H$  un sous groupe de  $G$ . Nous dirons que  $P$  est **réductible** à  $H$  s'il existe un sous fibré  $P_Q=(Q,M,p_Q)$  de  $P$ , principal pour l'action induite de  $H$ .

## 3.7.2 Proposition :

Soit  $P=(T,M,p)$  un fibré principal de groupe  $G$  et soit  $H$  un sous groupe de  $G$ . Soit  $p/H$  la projection de  $T$  sur le quotient différentiable  $T/H$  de  $T$  par l'action induite de  $H$  et  $\pi$  la factorisation de  $p$  sur  $T/H$ .



(diag. 3.12)

a)  $\Pi = (T/H, M, \pi)$  est un fibré différentiable de fibre type  $G/H$  et  $P/H = (T, T/H, p/H)$  un fibré principal de groupe  $H$ . De plus  $P$  est réductible à  $H$  si et seulement si  $\Pi$  admet une section différentiable globale.

b) Etant données l'action à gauche de  $H$  sur  $G$ :  $(h,a) \mapsto h.a$ ,  $(h,a) \in H \times G$ , et l'action  $(k, [a]_H) \mapsto [ka^{-1}]_H$  de  $G$  sur  $G/H$  (où  $[a]_H$  désigne la classe de  $a \in G$  par rapport à  $H$ ). Le fibré  $\Pi$  est équivalent au fibré associé  $P \times_G (G/H)$  où  $G$  agit diagonalement sur  $T \times (G/H)$ . L'espace des réductions de  $P$  à  $H$  est en bijection avec l'espace  $Eq(T, G/H)$ .

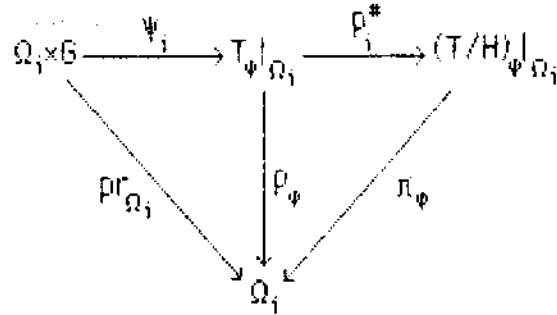
□ Considérons une plaque  $\varphi$  de  $M$ , les images réciproques de  $P$  et  $\Pi$  par  $\varphi$  sont définies par:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_\varphi = \{ (r, \tau) \in \Omega \times T \mid p(\tau) = \varphi(r) \} \\ \Omega = \text{def}(\varphi) \\ (T/H)_\varphi = \{ (r, \nu) \in \Omega \times T/H \mid \pi(\nu) = \varphi(r) \} \end{array} \right.$$

définissons  $p_\varphi^*$  de  $T_\varphi$  sur  $(T/H)_\varphi$  par:

$$p^*(r, \tau) = (r, p/H(\tau))$$

et soit  $(\psi_i)$  un système de trivialisations de  $T_\bullet$  du type:



(diag. 3.13)

$$\psi_i(r, a) = (r, \underline{a}_T \circ \phi_i(r)) \quad \text{Sup}(p \circ \phi_i) = \phi \quad \Omega_i = \text{def}(\phi_i)$$

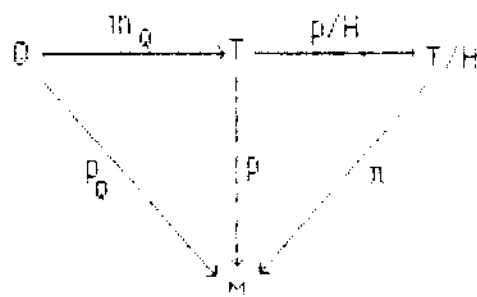
l'application  $p^* \circ \psi_i$  se factorise sur  $\Omega_i \times (G/H)$  par une bijection différentiable que nous noterons  $\psi_i^*$ , c'est une subduction car  $p^*$  est une subduction, c'est une trivialisations locale de  $(T/H)_\phi$ , donc  $\pi$  est un fibré difféologique de fibre type  $G/H$ .

Considérons maintenant la restriction  $\mathbf{F}_H$  de l'application  $\mathbf{F}$  (3.3.1), définie sur  $T \times G$  à valeurs dans  $T \times T$ , au sous espace difféologique  $T \times H$ , c'est encore une induction (2.1.15), on vérifie facilement qu'elle est à valeurs dans l'image réciproque de  $p/H : T \rightarrow T/H$  par  $p/H$ :

$$T_{p/H} = \{ (\tau, \tau') \in T \times T \mid \exists h \in H \quad \tau' = h_T(\tau) \}$$

on en déduit que  $P/H$  est un fibré principal de groupe  $H$ .

Supposons maintenant que  $P$  soit réductible à  $H$ , c'est à dire qu'il existe un sous fibré  $P_Q = (Q, M, p_Q)$  de  $P$ , principal pour l'action induite de  $H$ . Notons  $in_Q$  l'induction canonique:



(diag. 3.14)

L'application  $(p/H) \circ \text{In}_Q$  vérifie:

$$\forall q \in Q \quad \forall h \in H \quad (p/H) \circ \text{In}_Q(h_Q(q)) = (p/H)(h_T(q)) = (p/H)(q)$$

Donc  $(p/H) \circ \text{In}_Q$  se factorise sur  $M$  en une application différentiable  $\sigma$  vérifiant  $\pi \circ \sigma = \mathbb{1}_M$ ,  $\sigma$  est donc une section différentiable.

Réciproquement soit  $\sigma$  une section différentiable de  $P/H$ , posons:

$$Q = (p/H)^{-1}(\text{Im}(\sigma))$$

Munie de la difféologie de partie la restriction  $p_Q$  de  $p$  à  $Q$  est surjective grâce aux relations  $p = \pi \circ (p/H)$  et  $\pi \circ \sigma = \mathbb{1}_M$ . Montrons donc que  $P_Q$  est un fibré difféologique principal de groupe  $H$ .

Soit  $\varphi$  une plaque de  $M$ ,  $\sigma \circ \varphi$  est une plaque de  $T/H$  elle se relève donc localement dans  $T$ :

$$\text{Sup}((p/H) \circ F_i) = \sigma \circ \varphi \quad F_i \in D(\Omega_p, T) \quad \Omega_i = \text{def}(F_i)$$

Les  $F_i$  permettent de construire les trivialisations locales:

$$\psi_i(r, a) = (r, a_T \circ F_i(r)), \quad (r, a) \in \Omega_i \times G$$

Mais les  $F_i$  sont à valeurs dans  $Q$ :  $(p/H) \circ F_i(r) \in \text{Im}(\sigma)$  donc les restrictions des  $\psi_i$  à  $\Omega_i \times H$  constituent un système de trivialisations de  $Q$ .

La preuve de la dernière partie de la proposition est essentiellement algébrique et n'offre aucune difficulté particulière.  $\square$

Remarquons, avec les notations de la proposition 3.7.1, qu'étant donnée  $\varphi \in \text{Eq}(T, G/H)$ , l'espace total  $Q$  de la réduction de  $P$  à  $H$  que  $\varphi$  définit est l'image réciproque par  $\varphi$  de l'identité de  $G$ :  $Q = \varphi^{-1}(\mathbb{1}_G)$ .

Si on considère maintenant un fibré difféologique  $\Pi = (X, M, \pi)$  sans structure particulière et  $P = (T, M, p)$  le fibré principal structural de son groupoïde associé  $K$  au point  $m_0 \in M$  de groupe  $G = \text{Diff}(F)$ ,  $F = \pi^{-1}(m_0)$ . Si  $P_Q = (Q, M, p_Q)$  est une réduction de  $P$  à  $H$  sous groupe de  $G$ . Le groupoïde  $\Gamma = P_Q \times_H P_Q$  (3.3.1) est un sous groupoïde parfait de  $P \times_G P \sim K$ , et donc  $\Pi$  est un  $\Gamma$ -fibré (3.5.1). Ainsi à toute  $\Gamma$ -structure est attachée une réduction de  $P$  et réciproquement.

On déduit donc que l'espace des structures de  $\Pi$  de groupe structural  $H$ , sous groupe de  $G = \text{Diff}(F)$ , est un quotient de l'espace  $\text{Eq}(T, G/H)$ .

### 3.8 Plaques globales et micro-trivialité

Etant donné un espace difféologique  $X$  une **plaque globale** de  $X$  est un élément de  $D(\mathbb{R}^n, X)$ , c'est à dire une plaque définie sur tout  $\mathbb{R}^n$ . Nous allons montrer un résultat essentiel pour la théorie de l'homotopie: tout fibré difféologique sur  $\mathbb{R}^n$  est trivial. Il est possible en fait de démontrer un résultat plus fort, analogue d'une propriété des variétés fibrées: les images réciproques d'un fibré difféologique, de base une variété, par deux applications différentiables, définies sur une variété, homotopes l'une de l'autre sont équivalentes. Mais cette propriété n'est plus vraie lorsque la base du fibré est un espace difféologique quelconque. C'est pour cette raison qu'il semble inutile d'y avoir recours.

#### 3.8.1 Proposition :

Etant donné  $P = (X, M \times ]a, b[, p)$ , un fibré difféologique de fibre type  $F$  où  $]a, b[$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soient  $a'$  et  $b'$  tels que:  $a < b' < a' < b$ . Si  $P$  est trivial au dessus de  $M \times ]a, a'[,$  et  $M \times ]b', b[,$  alors  $P$  est trivial.

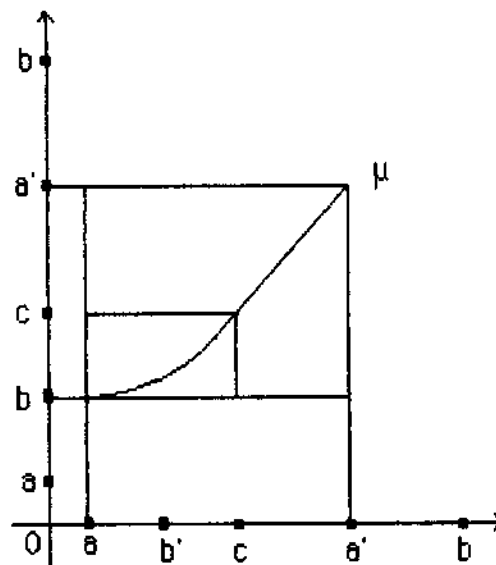
□ Grâce à (3.5.5) et (3.6.3) il suffit de démontrer que si  $\Pi = (T, M \times ]a, b[, \pi)$  est un fibré difféologique principal et s'il admet une section au dessus de  $M \times ]a, a'[,$  et une autre au dessus de  $M \times ]b', b',$  il admet alors une section globale. On appliquera alors ce résultat au fibré principal associé à  $P$ .

Soient  $s_1$  et  $s_2$  les sections de  $\Pi$  au dessus respectivement de  $M \times ]a, a'[,$  et une autre au dessus de  $M \times ]b', b',$ . Pour tout  $(m, t) \in M \times ]b', a'[,$  il existe un élément  $\alpha(m, t) \in G$ ,  $G$  groupe structural de  $\Pi$  (par exemple  $\text{Diff}(F)$ ), tel que :

$$s_1(m, t) = \alpha(m, t)_T(s_2(m, t)) \quad (m, t) \in M \times ]b', a'[,$$

Le caractère différentiable de l'application  $\alpha$  est une conséquence directe de la définition des fibrés difféologiques principaux (3.3.1):  $\alpha \in D(M \times ]b', a'[ , G)$ . Considérons alors un point  $c \in ]b', a'[$  et  $\mu$  une fonction réelle différentiable telle que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu(a) = b' \quad \mu(c) = c \quad \mu(a') = a' \\ \mu|_{]c, a'[} = \text{Id}|_{]c, a'[} \end{array} \right.$$



(fig. 3.3)

Posons alors:

$$s'_1 = \alpha(m, \mu(t)) \quad s'_2 = s_2|_{]c, a'[}$$

puisque  $\mu$  envoie  $]a, a'[$  sur  $]b', a'[$ ,  $s'_1$  est une section de  $T$  au dessus de  $M \times ]a, a'[$  et puisque  $\mu$  est l'identité sur  $]c, a'[$ :  $s'_1$  et  $s'_2$  coïncident sur leur intersection  $M \times ]c, a'[$ , donc leur prolongement commun est différentiable, c'est une section de  $T$ , donc  $T$  est trivial.  $\square$

### 3.8.2 Proposition :

Tout fibré difféologique de base  $\mathbb{R}^n$  est trivial.

$\square$  Nous allons considérer un fibré principal  $P = (T, \mathbb{R}^n, p)$  de groupe  $G$ , étant entendu que cela suffit (3.5.5) (3.6.3).

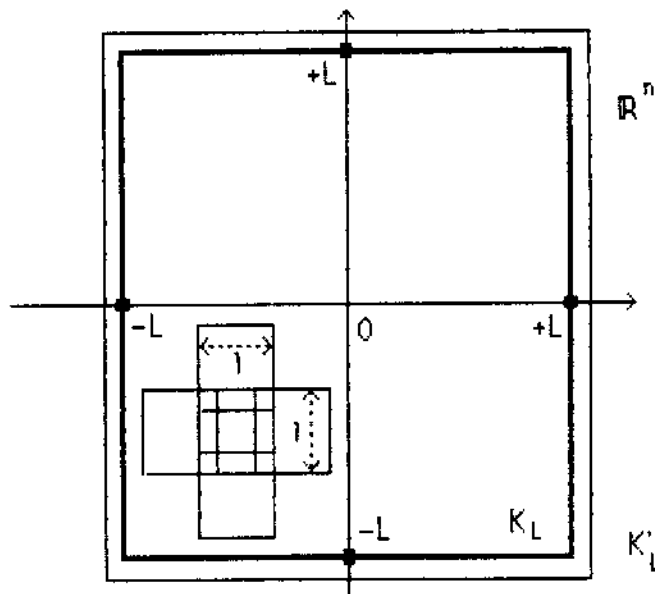
Puisque  $\mathbb{R}^n$  est une variété,  $P$  est localement trivial (3.1.5). Soit  $(s_i)_{i \in J}$  une famille de section de  $P$  telle que:

$$\text{def}(s_i) = \Omega_i \quad \bigcup_{i \in J} \Omega_i = \mathbb{R}^n \quad s_i \in D(\Omega_i, T) \quad p \circ s_i = \mathbb{1}_{\Omega_i}$$

Soit  $K_L$  le cube de coté  $L$  centré en 0:  $K_L = [-L/2, +L/2]^n$ . On considère le sous recouvrement  $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ ,  $A \subset J$ , de  $K_L$  défini par:

$$\Omega_\alpha \cap K_L \neq \emptyset$$

Il existe alors un recouvrement plus fin de  $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in A}$  constitué de  $N^n$  petits cubes de coté 1, alignés suivant un réseau dans  $K_L$  tel que chaque petit cube ne rencontre que ses  $2n$  voisins et tels que leur réunion constitue un  $n$ -cube  $K'_L$  concentrique de  $K_L$ , il suffit d'utiliser le nombre de Lebesgue du recouvrement [9] (voir figure 3.4)



(fig. 3.4)

Notons  $(C_{i_1, i_2, \dots, i_n})_{i_k=1, 2, \dots, N}$  le recouvrement en question:

$$K'_L = \bigcup_k C_{i_1, i_2, \dots, i_n}, \quad C_{i_1, i_2, \dots, i_n} \subset \Omega_\alpha \quad \alpha \in A$$

En appliquant la proposition 3.8.1 à  $C_{1,1,\dots,1}$  puis à  $C_{2,1,\dots,1}$  puis à  $C_{1,1,\dots,1} \cup C_{2,1,\dots,1}$  et  $C_{3,1,\dots,1}$  et ainsi de suite jusqu'à  $N$ , on construit une section sur  $\bigcup_{i=1,2,\dots,N} C_{1,1,\dots,1}$ . De la même façon on construit des sections au dessus de chaque ouvert du type:

$$C_{1,1,2,\dots,1_{n-1}} = \bigcup_{j=1,2,\dots,N} C_{j,1,1,2,\dots,1_{n-1}}$$

On construit ainsi par récurrence une section de  $P$  au dessus de  $K_L$ . Donc  $P$  est trivial au dessus d'un voisinage de tout cube  $K_L$  et évidemment au dessus de tout ouvert relativement compact.

Considérons alors la suite de boules ouvertes  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  centrées à l'origine et de rayons  $r_j = j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Soit  $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une famille de sections de  $P$  au dessus de chacune de ces boules. Posons:

$$\forall x \in B_j \quad s_j(x) = \alpha_j(x) \cdot s_{j+1}(x) \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \alpha_j \in D(B_j, G)$$

Soit  $(B'_j)_{j \in \mathbb{N}}$  la suite de boules ouvertes centrées à l'origine et de rayons  $r'_j = j - 1/2$ , on a  $B'_j \subset B_j$ , on pose:

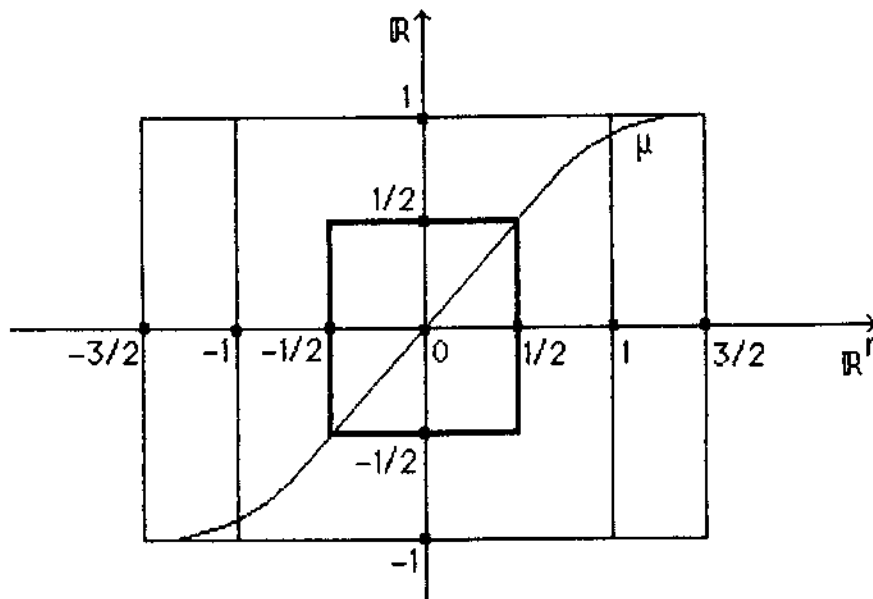
$$s'_j = s_j|_{B'_j}$$

Considérons  $s'_1$  et  $s'_2$  et posons:

$$s''_1 = s'_1 \quad s''_2(x) = \alpha_1 \circ \mu(x) \cdot s'_2(x)$$

où  $\mu$  est une application différentiable vérifiant:

$$\mu \in D(B'_2, B_1) \quad \mu(x) = x \text{ si } x \in B'_1$$



(fig. 3.5)

Alors:

$$s''_2|_{B'_1} = s''_1$$



Les deux premiers termes de la suite  $\{s''_1, s''_2, s'_3, s'_4, \dots\}$  coïncident sur l'intersection de leur domaine de définition, donc  $s''_2$  est un prolongement de  $s''_1$ . On prolonge alors de la même façon  $s''_2$  et ainsi de suite. Par récurrence, on construit une section de  $P$  au dessus de  $\mathbb{R}^n$  tout entier. Donc tout fibré différentiable principal de base  $\mathbb{R}^n$  est trivial; il s'ensuit (3.5.5) (3.6.3) que tout fibré différentiable de base  $\mathbb{R}^n$  est trivial.  $\square$

La propriété de micro-trivialité peut donc encore s'écrire:

### 3.8.3 Corollaire :

Une application différentiable  $P=(X,M,p)$  est une fibration différentiable si et seulement si l'image réciproque de l'application  $P$  par toute plaque globale de la base est triviale.

Avant d'achever ce paragraphe remarquons, comme il est apparu dans dans les démonstration précédentes, que toute trivialisatoin locale  $\Psi$  de l'image réciproque d' un fibré différentiable  $P=(X,M,p)$ , de fibre type  $F$ , par une  $n$ -plaque  $\varphi$  de la base  $M$  s'écrit:

$$\Psi(r,u)=(r,\psi(r)(u)) \quad \forall (r,u) \in \text{def}(\Psi) = \text{def}(\psi) \times F \quad \psi \in \text{DL}(\mathbb{R}^n, T) \quad \pi \circ \Psi = \varphi|_{\text{def}(\Psi)} \quad (3.8.4)$$

où  $\Pi=(T,M,\pi)$  est le fibré principal associé à la fibration différentiable  $P$ . l'application  $\psi$  apparait ici comme un relevé dans le fibré principal associé à  $P$  de la plaque  $\varphi$ . On peut alors encore déduire de la proposition 3.8.2 le corollaire suivant:

### 3.8.5 Corollaire :

Etant donnée une fibration différentiable  $P=(X,M,p)$ . Tout plaque globale  $\varphi$  de la base se relève dans  $T$ :

$$\forall \varphi \in \text{D}(\mathbb{R}^n, M) \quad \exists \Phi \in \text{D}(\mathbb{R}^n, T) \quad \pi \circ \Phi = \varphi$$

Nous verrons au chapitre 5 l'importance de cette proposition en ce qui concerne l'homotopie différentielle.

### 3.9 Quelques exemples de fibrés différentiels

Nous allons illustrer cette définition de fibré différentiel par quelques exemples qui montrent comment elle s'applique aussi bien aux espaces de dimension infinie qu'aux quotients singuliers.

#### 3.9.1 Proposition :

La projection naturelle  $G \mapsto G/H$  où  $G$  est un groupe différentiel et  $H$  un sous-groupe quelconque de  $G$  est une fibration différentielle principale.

□ Il suffit de remarquer que l'application  $\mathcal{F} : G \times H \mapsto G \times G$  définie par  $\mathcal{F}(a, h) = (a, h \cdot a)$ ,  $(a, h) \in G \times H$ , est une induction par définition même des différentiels de groupe, son inverse étant donnée par :

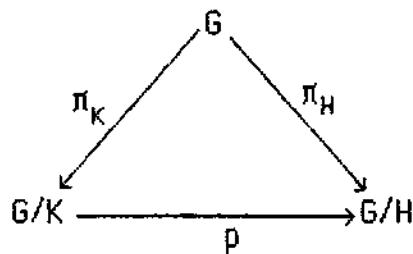
$$\forall (a, k) \in \text{im}(\mathcal{F}) \quad \mathcal{F}^{-1}(a, k) = (a, k a^{-1})$$

donc  $G \mapsto G/H$  est un fibré différentiel principal. □

De la proposition 3.7.1 on déduit :

#### 3.9.2 Proposition :

Étant donné un groupe  $G$  et deux sous-groupes  $H$  et  $K$  tels que  $K \subset H \subset G$  et en notant  $\pi_K$ ,  $\pi_H$  et  $p$  les projections :



(diag. 3.15)

$P=(G/K,G/H,p)$  est un fibré difféologique de fibre type  $H/K$ .

Cette proposition s'applique aussi bien au quotient d'un groupe de difféomorphismes d'une variété  $V$  par un de ses sous-groupes qu'au quotient d'un groupe de Lie par un sous groupe même non fermé (auquel cas l'espace quotient n'est pas une variété). Par exemple, étant donnée une variété  $V$ ,  $G=\text{Diff}(V)$ ,  $H$  le sous groupe des difféomorphismes de fibre type conservant le point  $m \in V$  et  $K$  le sous groupe de  $H$  des éléments ayant même jet d'ordre 1 en  $m$ . Le quotient  $G/H$  s'identifie naturellement à  $V$  tandis que  $G/K$  s'identifie au fibré des repères de  $V$  auquel le fibré tangent est associé.

### 3.9.3 proposition :

Soit  $G$  un groupe de Lie agissant librement et différemment sur une variété  $X$ . Soit  $M=X/G$ , le quotient difféologique de  $X$  par  $G$ . La projection naturelle  $\pi : X \rightarrow M$  est une fibration principale de groupe  $G$ .

□ Etant donnée une plaque  $\varphi$  de  $M$  et un système de relevés locaux  $\{\varphi_i\}$  de  $\varphi$  dans  $X$ , les applications:

$$\begin{aligned} \psi_i : \text{def}(\varphi_i) \times G &\rightarrow X_\varphi \\ (r,a) &\mapsto (r, \underline{a}_X(\varphi_i(r))) \end{aligned}$$

sont des difféomorphismes car l'application linéaire tangente:

$$D(\psi_i)(r,a) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ D(\underline{a}_X \circ \varphi_i)(r) & D(\varphi_i(r)^\circ)(a) \end{pmatrix}$$

(où  $x^\circ = [a \mapsto \underline{a}_X(x)]$ ) est un isomorphisme linéaire (théorème des fonctions implicites [Dieudonné]). □

S4-1

Prends ce qu'il faut, opère  
comme tu le dois et tu ob-  
tiendras ce que tu souhaites.

Leibnitz.

#### **§4-HOMOTOPIE DIFFELOGIQUE**

La théorie de l'homotopie s'étend très naturellement aux espaces difféologiques car l'ensemble des applications différentiables d'un espace difféologique dans un autre possède sa difféologie canonique d'espace fonctionnel (1.3.6) et devient à son tour un espace difféologique (récursivité de la difféologie).

A partir de la définition naturelle de connexité dans les espaces difféologiques nous construisons la catégorie **Dhomot** quotient de la catégorie **Desp** par l'homotopie, l'homotopie n'étant qu'un cas particulier de la connexité. Ses objets sont les espaces difféologiques et ses morphismes les classes d'homotopie des applications différentiables.

La théorie de l'homotopie des espaces difféologiques est l'étude de la catégorie **Dhomot**. Elle consiste le plus souvent à exhiber des invariants homotopiques comme l'est, par exemple, la série des groupes d'homotopie dont nous donnons la définition et quelques propriétés particulières dans ce chapitre.

Il ne pouvait être question, dans ce chapitre, de refaire, pour les espaces difféologiques, la théorie de l'homotopie dans toute sa généralité telle que l'on peut la trouver, en ce qui concerne les espaces topologiques, dans les ouvrages de références [12][19][26] etc... Nous présentons seulement une introduction qui peut permettre, si on le désire plus tard, d'approfondir tel ou tel aspect. Les définitions qui vont suivre ne nécessitent pas de précisions particulières tant elles sont analogues aux notions classiques de la théorie des espaces topologiques ou des variétés. Seuls quelques points techniques, utilisant en particulier les opérations de lissage, ont été détaillés lorsque cela était nécessaire aux démonstrations.

#### 4.1 Connexité et foncteur $\pi_0$

Etant donné un espace difféologique  $X$ , la relation "être joint par un arc différentiable" (1.3.8) est évidemment une relation réflexive et symétrique sur  $X$ .

L'arc constant:

$$\mathbb{1}_x : t \mapsto x \quad \forall x \in X \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.1.1)$$

est différentiable et joint  $x$  à lui même.

Etant donné deux points  $x$  et  $y$  joints par un arc  $f$ , l'arc

$$f^{-1} : t \mapsto f(1-t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.1.2)$$

est différentiable et joint  $y$  à  $x$ .

#### 4.1.3 Définition:

La relation d'équivalence associée à la relation "être joint par un arc différentiable" partage tout espace difféologique  $X$  en classe que nous appellerons **composantes connexes** par arcs de  $X$ .

Pour unifier le vocabulaire et pour des raisons qui apparaîtront évidentes plus tard, nous dirons que deux points d'un espace difféologique  $X$  sont **homotopes** s'ils appartiennent à la même composante connexe de  $X$ , nous noterons:

$$x \sim y \iff \begin{cases} \exists \{f_i\}_{i=1,2,\dots,N} \quad f_i \in \text{Arc}(X) \\ \text{or}(f_1)=x, \text{ex}(f_N)=y, \text{ex}(f_i)=\text{or}(f_{i+1}) \quad 1 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (4.1.4)$$

où pour tout arc  $f$  dans  $X$  on a noté:

$$\text{or}(f)=f(0) \quad \text{ex}(f)=f(1) \quad (4.1.5)$$

Nous dirons que  $\{f_i\}_{i=1,2,\dots,N}$  est une **chaîne finie d'arcs différentiables** joignant  $x$  à  $y$ .

## 4.1.6 Proposition :

La partition d'un espace difféologique en composantes connexes est la plus fine qui en fasse une somme de parties. Elle coïncide avec la partition en composantes connexes de la D-topologie.

□ Toute plaque  $\phi$  d'un espace difféologique  $X$  est localement à valeurs dans une composante connexe, de plus chaque composante connexe de  $\text{def}(\phi)$  s'envoie dans une composante connexe de  $X$ . Ceci indique que  $X$  est égal à la somme difféologique de ses composantes connexes.

Considérons alors une partition  $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$  de  $X$  qui en fait une somme de parties, toute plaque de  $X$  est localement à valeurs dans une partie  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , qui est elle-même la somme de ses composantes connexes. Donc la partition de  $X$  en composantes connexes est bien la plus fine qui fasse de  $X$  une somme difféologique de parties.

Considérons maintenant  $X$  muni de sa D-topologie et  $U$  une composante connexe de  $X$ ,  $U$  est évidemment un ouvert de la D-topologie puisque toute plaque de  $X$  est localement à valeurs dans une composante connexe, mais le complémentaire  $X-U$  est aussi D-ouvert puisque c'est une somme de composantes connexes. Donc chaque composante connexe est à la fois ouverte et fermée pour la D-topologie. Supposons alors que  $U$  soit égal à la somme D-topologique de deux ouverts non vides  $V$  et  $W$ , soient  $x \in V$  et  $y \in W$ , puisque  $U$  est connexe par arcs il existe une chaîne  $(f_i)_{i=1,2,\dots,N}$  d'arcs différentiables joignant  $x$  à  $y$ . Il existe alors un indice  $i$  et deux points  $x'$  et  $y'$  dans  $U$  tels que:

$$x' = \text{or}(f_i) \quad y' = \text{ex}(f_i) \quad x' \in V \quad y' \in W$$

Or toute application différentiable est D-continue donc  $f_i$  envoie  $\mathbb{R}$  dans une composante connexe de la D-topologie ce qui est en contradiction avec les hypothèses. Ainsi  $U$  est une composante connexe de la D-topologie. □

L'espace des composantes connexes d'un espace difféologique  $X$  muni de sa difféologie quotient est donc un espace difféologiquement discret nous le noterons:

$$\pi_0(X) \quad (4.1.7)$$

Nous noterons encore pour tout  $x \in X$ :

$$\text{comp}_X(x) \quad (4.1.8)$$

la composante connexe de  $x$  dans  $X$ ,  $\text{comp}_X(x)$  peut aussi être considérée comme la projection naturelle de  $X$  sur  $\pi_0(X)$ , nous noterons parfois  $\text{comp}$  lorsqu'aucune confusion ne sera possible:

$$\text{comp}_X(x) : X \rightarrow \pi_0(X) \quad (4.1.9)$$

Comme pour toute partition  $\text{comp}_X(x)$  peut être compris à la fois comme un élément de  $\pi_0(X)$  et comme une partie de  $X$ .

Etant donné un point de base  $x_0$  dans  $X$  nous noterons  $(X, x_0)$  l'**espace difféologique pointé** et:

$$\pi_0(X, x_0) = (\pi_0(X), \text{comp}_X(x_0)) \quad (4.1.10)$$

l'espace des composantes connexes de  $X$ , pointé naturellement par  $\text{comp}_X(x_0)$ .

#### 4.1.11 Définition:

Nous dirons qu'un espace difféologique  $X$  est **connexe** s'il ne possède qu'une composante connexe. Nous dirons qu'une partie  $A$  de  $X$  est connexe si, munie de la difféologie de partie, c'est un espace difféologique connexe.

#### 4.1.12 Proposition :

Toute partie connexe d'un espace difféologique  $X$  est contenue dans une composante connexe de  $X$ . La composante connexe d'un point  $x$  de  $X$  est la plus grande partie connexe qui la contient.

□ La démonstration est immédiate. □

#### 4.1.13 Proposition :

Etant donnés deux espaces difféologiques  $X$  et  $Y$  et  $f \in D(X, Y)$ ,  $f$  applique toute partie connexe de  $X$  dans une partie connexe de  $Y$ . Il existe alors une



En notant  $L_\alpha$  l'action de  $D(S^1, \mathbb{R})$  sur lui-même définie grâce à la formule (3.3), où  $f_2^* = L_\alpha(f_1^*)$ , le groupe  $H^1(\text{Gr}(\pi_\alpha), \mathbb{R})$  s'identifie avec le quotient de  $D(S^1, \mathbb{R})$  par l'action  $L_\alpha$  :

$$H^1(\text{Gr}(\pi_\alpha), \mathbb{R}) = D(S^1, \mathbb{R}) / L_\alpha \quad (3.4)$$

L'intégrale  $\oint f^*$  est un invariant naturel de cette action, en associant à  $f^*$  le couple  $(\oint f^*, f^* - \oint f^*)$ , le calcul de  $H^1(\text{Gr}(\pi_\alpha), \mathbb{R})$  se ramène à l'étude de l'équation :

$$\delta f^* = g \circ r_\alpha(1) - g \quad (g, \delta f^*) \in D(S^1, \mathbb{R})^2 \quad \oint \delta f^* = 0 \quad (3.5)$$

Sous cette forme cette équation a été étudiée par de nombreux auteurs, en particulier par V. Arnold [1][2], J. Moser [8], M.R. Hermann [6]. Pour une large classe de nombres, en particulier ceux vérifiant la condition diophantienne suivante :

$$\exists \varepsilon > 0, \exists k > 0 : |\alpha - (m/n)| > k/n^{2+\varepsilon} \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \quad (3.6)$$

l'équation (3.5) en  $g$  a toujours une solution unique si la difféologie que l'on considère est au moins la difféologie  $C^3$  [6] \*\*. Ce résultat peut alors s'interpréter en termes de difféologie :

### 3.6- Proposition :

Si  $\alpha$  est un nombre diophantien (condition 3.6) l'espace des flots libres, au dessus de  $\mathbb{T}_\alpha$ , identifié au groupe de cohomologie  $H^1(\text{Gr}(\pi_\alpha), \mathbb{R})$ , est égal à  $\mathbb{R}$ . La projection de  $Z^1(\text{Gr}(\pi_\alpha), \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}$  est donnée par :

$$\forall f^* \in Z^1(\text{Gr}(\pi_\alpha), \mathbb{R}) \sim D(S^1, \mathbb{R}) \quad f^* \rightarrow \oint f^*$$

Chaque flot libre au dessus de  $\mathbb{T}_\alpha$  est équivalent au fibré  $P_\omega = (\mathbb{T}^2, \mathbb{T}_\alpha, p_\omega)$ , avec  $\omega = \oint f^*$  muni de l'action  $\theta_\omega$  de  $\mathbb{R}$  :

$$\forall (t, z_1, z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \quad \theta_\omega(t)(z_1, z_2) = (e^{2i\pi\omega t} z_1, e^{2i\pi\omega t} z_2)$$

$\omega = 0$  caractérise le fibré trivial.

Remarquons toutefois que ce théorème est vrai si et seulement si l'équation (3.5) possède, pour tout  $f$ , une solution (nécessairement unique) en  $g$ . Dans ce cas,

\*\* La difféologie d'un espace  $X$  est  $C^k$  si elle a été définie à partir de la difféologie  $C^k$  des espaces numériques  $\mathbb{R}^n$ .

## 4.2 Homotopie d'applications-Foncteur $\mathcal{X}$

Comme nous l'avons vu les espaces d'applications différentiables sont naturellement des espaces difféologiques pour leur difféologie d'espace fonctionnel (1.3.6). La connexité dans les espaces fonctionnels est appelé homotopie.

### 4.2.1 Définition:

Etant donnés deux espaces difféologiques  $X$  et  $Y$  et  $D(X,Y)$  muni de sa difféologie d'espace fonctionnel, on dira que  $f \in D(X,Y)$  et  $g \in D(X,Y)$  sont **homotopes** si elles appartiennent à la même composante connexe, on notera:

$$f \text{ homotope à } g \Leftrightarrow f \mathcal{X} g \Leftrightarrow \text{comp}_{D(X,Y)}(f) = \text{comp}_{D(X,Y)}(g)$$

Si on considère l'homotopie de l'espace fonctionnel  $D(\mathbb{R}^0, X) \sim X$ ,  $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ , on retrouve la connexité par arcs. Ceci justifie à posteriori l'utilisation de l'adjectif homotope pour qualifier les points appartenant à une même composante connexe de  $X$  et la notation  $x \mathcal{X} y$ .

Comme nous l'avons vu l'espace  $D(X,Y)$  peut être muni d'autres difféologies que celle d'espace fonctionnel, par exemple la difféologie feuilletée par une partie  $A$  de  $X$  (1.3.5), l'espace difféologique feuilleté  $D(X,Y)_A$  possède une partition en composantes connexes:

### 4.2.2 Définition:

Etant donnés  $f \in D(X,Y)$  et  $g \in D(X,Y)$ , nous dirons que  $f$  et  $g$  sont  **$A$ -homotopes** si elles appartiennent à la même composante connexe de l'espace difféologique feuilleté  $D(X,Y)_A$  (1.3.5), nous noterons alors:

$$f \mathcal{X}_A g$$

Comme exemple de A-homotopie il y a l'**homotopie à Bouts fixes** des arcs dans un espace difféologique X.  $\text{Arc}(X)=D(\mathbb{R},X)$ , la partie A est l'ensemble  $\{0,1\}$ , deux arcs f et g sont  $\{0,1\}$ -homotopes s'il existe une chaîne finie d'arcs différentiables  $\{\varphi_i\}_{i=1,2,\dots,N}$  joignant f à g telle que:

$$\forall i=1,2,\dots,N \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \text{Bouts}(\varphi_i(s)) = \text{Bouts}(f) = \text{Bouts}(g) \quad (4.2.3)$$

où l'application **Bouts** est définie par:

$$\forall f \in \text{Arc}(X) \quad \text{Bouts}(f) = (\text{or}(f), \text{ex}(f)) = (f(0), f(1)) \quad (4.2.4)$$

**4.2.5 Proposition :**

Soient X, Y, Z trois espaces difféologiques, f et f' éléments de  $D(X,Y)$ , g et g' éléments de  $D(Y,Z)$ . Si f et f' sont homotopes et g et g' sont homotopes alors  $g \circ f$  et  $g' \circ f'$  sont aussi homotopes.

□ Supposons  $g=g'$ , soit  $\{\varphi_i\}_{i=1,2,\dots,N}$  une chaîne finie d'arcs différentiables joignant f à f'. Soit  $\{g \circ \varphi_i\}_{i=1,2,\dots,N}$  la famille d'arcs différentiables définie par:

$$g \circ \varphi_i = \{t \mapsto g(\varphi_i(t))\}$$

$\text{Or}(g \circ \varphi_1) = g \circ f$ ,  $\text{ex}(g \circ \varphi_i) = \text{or}(g \circ \varphi_{i+1})$ ,  $i=1, \dots, N-1$  et  $\text{ex}(g \circ \varphi_N) = g \circ f'$ , donc c'est une chaîne finie d'arcs différentiables joignant  $g \circ f$  à  $g \circ f'$  i.e.  $g \circ f \simeq g \circ f'$ , de même  $g \circ f' \simeq g \circ f$  et donc  $g \circ f \simeq g \circ f'$ . □

Grâce à cette proposition on peut définir la catégorie quotient [SML] de  $\text{Desp}$  par l'homotopie. Nous appellerons  $\text{Dhomot}$  cette nouvelle catégorie dont les objets sont les espaces difféologiques et les morphismes les classes d'équivalences d'applications différentiables:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ob Dhomot} = \text{Ob Desp} \\ \text{Mor}_{\text{Dhomot}}(X, Y) = \pi_0(\text{Mor}_{\text{Desp}}(X, Y)) \end{array} \right. \quad (4.2.6)$$

où  $\text{Mor}_{\text{Desp}}(X, Y) = D(X, Y)$ . Nous noterons encore  $\simeq$  le foncteur naturel de  $\text{Desp}$  sur son quotient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X} : \text{Desp} \rightarrow \text{Dhomot} \\ \mathcal{X}(X) = X \quad X \text{ espace difféologique} \\ \mathcal{X}(f) = \text{comp}_{D(X,Y)}(f) \quad \forall f \in D(X,Y) \end{array} \right. \quad (4.2.7)$$

Ceci permet de généraliser d'une façon directe le vocabulaire de la théorie topologique de l'homotopie aux espaces difféologiques:

#### 4.2.8 Définition:

Etant donnés deux espaces difféologiques  $X$  et  $Y$ , nous dirons que  $f \in D(X, Y)$  est une **équivalence homotopique** si  $\mathcal{X}(f)$  est un isomorphisme de la catégorie Dhomot. Si  $\mathcal{X}(g)$  est l'inverse de  $\mathcal{X}(f)$  nous dirons que  $f$  et  $g$  sont **homotopiquement inverses** l'une de l'autre. Nous appellerons type d'homotopie d'espace difféologique sa classe d'isomorphisme dans la catégorie Dhomot. Deux espaces ayant même type d'homotopie seront dits **homotopiquement équivalents**.

#### 4.2.9 Proposition :

Le foncteur composante  $\Pi_0$  se factorise sur Dhomot par  $\mathcal{X}$

$$\begin{array}{ccc} & \text{Desp} & \\ \mathcal{X} \swarrow & & \searrow \Pi_0 \\ \text{Dhomot} & \xrightarrow{\quad \Pi_0 \quad} & \text{Ens} \end{array}$$

(diag. 4.2)

$\Pi_0$  est le foncteur défini par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_0(X) = \Pi_0(X) \\ \Pi_0(\mathcal{X}(f)) = f_0^* \quad \forall f \in D(X, Y) \end{array} \right.$$

□ Il suffit de vérifier que si  $\mathcal{X}(f) = \mathcal{X}(g)$  alors  $f_0^* = g_0^*$  pour tous  $f$  et  $g$  éléments de  $D(X, Y)$ . Supposons  $\mathcal{X}(f) = \mathcal{X}(g)$  et soit  $(\varphi_i)_{i=1,2,\dots,N}$  une chaîne finie d'arcs

différentiables joignant  $f$  à  $g$ . Pour tout  $x \in X$  et tout indice  $i=1,2,\dots,N$  :  
 $f_0^*(\text{comp}_X(x)) = \text{comp}_Y(f(x)) = \text{comp}_Y(\varphi_i(t)(x))$  puisque  $[[t \mapsto \varphi_i(t)(x)]]_{i=1,2,\dots,N}$  est une chaîne finie d'arcs différentiables de  $Y$  passant par  $f(x)$ , donc en particulier,  
 $\text{comp}_Y(f(x)) = \text{comp}_Y(\varphi_N(1)(x)) = \text{comp}_Y(g(x)) = g_0^*(\text{comp}_X(x))$  d'où  $f_0^* = g_0^*$ . La propriété  $\pi_0(\mathcal{X}(1_X)) = \mathbb{1}_{\pi_0(X)}$  est immédiate.  $\square$

Un **invariant homotopique** est un foncteur de la catégorie  $\text{Desp}$  dans une catégorie quelconque qui se factorise sur la catégorie  $\text{Dhomot}$ . Il applique en particulier les espaces homotopiquement équivalents sur des objets du même type. La partition en composantes connexes d'un espace difféologique est donc un invariant homotopique; en d'autres termes si  $X$  et  $Y$  ont même type d'homotopie  $\pi_0(X)$  et  $\pi_0(Y)$  ont même cardinal.

#### 4.2.10 Définition:

Les objets finals de la catégorie  $\text{Dhomot}$  seront appelés **espaces contractiles**. En d'autres termes, toutes les applications différentiables, à valeurs dans un espace contractile, sont homotopes.

#### 4.2.11 Proposition :

Un espace est contractile si et seulement si il est homotopiquement équivalent à un point.

$\square$  Si  $Z$  est un espace contractile et  $z_0 \in Z$ ,  $\mathbb{1}_Z$  est homotopiquement inverse de l'application constante  $z_0^* : Z \mapsto z_0$  et donc  $Z$  est homotopiquement équivalent à  $\{z_0\}$ . Réciproquement les singletons sont les objets finals de  $\text{Desp}$  et donc des objets finals de  $\text{Dhomot}$ ; puisque les objets finals sont tous isomorphes entre eux, si  $Z$  est final il est alors homotopiquement équivalent à un point et donc contractile.  $\square$

On en déduit que les espaces contractiles sont connexes et de plus:

#### 4.2.1 proposition :

Toutes les applications différentiables, définies sur un espace contractile à valeurs dans un espace connexe, sont homotopes.

□ Etant donnés deux espaces difféologiques  $E$  et  $F$ , avec  $E$  contractile et  $F$  connexe. Soit  $x_0$  un point de  $E$ , notons  $x_0^* \in D(E,E)$  l'application constante  $[x \mapsto x_0]$ . Soient  $f \in D(E,F)$  et  $y_0 = f(x_0)$ , notons  $\rho$  une homotopie de  $\mathbb{I}_E$  à l'application constante  $x_0^*$  ( $E$  est contractile). L'application  $[s \mapsto f \circ \rho(s)]$  est une homotopie de  $f$  à l'application constante  $[x \mapsto y_0]$ . Puisque  $F$  est connexe toutes les applications constantes de ce type sont homotopes. □

#### 4.2.13 Définitions:

On appellera **rétraction** d'un espace difféologique  $X$  toute application différentiable  $p \in D(X,X)$  idempotente:  $p \circ p = p$ . Le sous espace  $A = \text{im}(p)$  sera appelé **rétracte** de  $X$ . On dira que  $p$  est une **rétraction de déformation** si elle est homotopiquement équivalente à l'identité,  $A$  sera alors appelé **rétracte de déformation** de  $X$ .

On en déduit qu'un espace difféologique est homotopiquement équivalent à tous ses rétractes de déformation.

### 4.3 Chemins faisants

Soit  $X$  un espace difféologique,  $\text{Arc}(X)$  son espace des arcs différentiables muni de sa difféologie d'espace fonctionnel et  $\text{Ar}(X)_{[0,1]}$  son espace des arcs muni de sa difféologie feuilleté par  $[0,1]$  (1.3.5): une application  $f$  à valeurs dans  $\text{Ar}(X)_{[0,1]}$  est différentiable si elle est différentiable à valeurs dans  $\text{Arc}(X)$  et si les applications  $o \circ f$  et  $e \circ f$  (c'est à dire  $\text{Bouts} \circ f$ ) (4.1.5) sont localement constantes.

## 4.3.1 Définition:

Etant donnés deux arcs différentiables  $f$  et  $g$  dans  $X$  nous dirons que  $g$  est **juxtaposable** à  $f$  si  $or(g)=ex(f)$  et si l'arc  $f \wedge g$  défini par:

$$f \wedge g(t) = \begin{cases} f(2t) & t \leq 1/2 \\ g(2t-1) & t \geq 1/2 \end{cases}$$

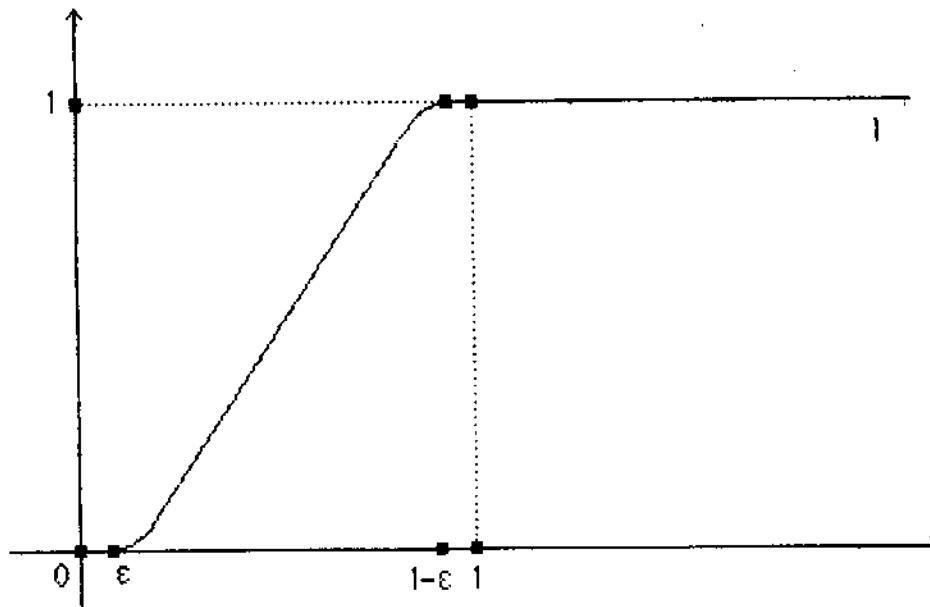
est différentiable. L'opération  $(f,g) \mapsto f \wedge g$  sera appelée **juxtaposition**, le résultat sera appelé **juxtaposé** de  $g$  à  $f$ .

On a évidemment pour tout juxtaposé  $f \wedge g$  la propriété:

$$or(f \wedge g) = or(f) \quad ex(f \wedge g) = ex(g) \quad (4.3.2)$$

## 4.3.3 Définition:

Nous dirons qu'un arc  $f$  de  $X$  est **stationnaire aux bouts** ou à **bouts stationnaires** s'il est constant sur un voisinage de  $]-\infty, 0]$  et sur un voisinage de  $[0, +\infty[$ . Nous noterons  $Starc(X)$  le sous espace de  $Arc(X)$  des arcs à bouts stationnaires.



(fig. 4.1)

Nous serons amenés à utiliser une fonction de lissage  $l$  caractérisée par:

$$l|_{]-\infty, \varepsilon]} = 0 \quad l|_{[1-\varepsilon, +\infty[} = 1 \quad 0 < \varepsilon < 1/2 \quad (4.3.4)$$

(par exemple figure 4.1).

Deux arcs  $f$  et  $g$  à bouts stationnaires et vérifiant  $ex(f) = or(g)$  sont évidemment juxtaposables en vertu de l'axiome de prolongement des applications différentiables, on a plus particulièrement:

#### 4.3.5 Proposition :

Solent  $f$  et  $g$  deux arcs d'un espace difféologique  $X$  tels que  $or(f) = ex(g)$ , il existe  $f|_{[0,1]}$ -homotope à  $f$  et  $g|_{[0,1]}$ -homotope à  $g$ , tous les deux à bouts stationnaires ( $f$  et  $g$  sont juxtaposables). De plus les espaces  $Starc(X)$  (resp.  $Starc(X)_{[0,1]}$ ) et  $Arc(X)$  (resp.  $Arc(X)_{[0,1]}$ ) sont homotopiquement équivalents.

□ Posons  $f = l^*(f) = f \circ l$ ,  $l$  = fonction de lissage (4.3.4), et  $g = l^*(g)$ , l'application:

$$s \mapsto f_s = [t \mapsto f((1-s)t + sl(t))]$$

est une  $[0,1]$ -homotopie qui joint  $f$  à  $f$ , de même on construit une  $[0,1]$ -homotopie qui joint  $g$  à  $g$ . Or  $f$  et  $g$  sont à Bouts stationnaires et vérifient  $ex(f) = or(g)$ , ils sont donc juxtaposables.

Appelons stationnarisation l'application:

$$\begin{aligned} l^* : Arc(X) &\rightarrow Starc(X) \\ f &\mapsto l^*(f) \end{aligned}$$

Montrons que  $l^*$  est différentiable:

Soit  $\varphi$  une plaque de  $Arc(X)_{[0,1]}$ :  $\varphi = [(r,t) \mapsto \varphi(r)(t)] \in D(\text{def}(\varphi) \times \mathbb{R}, X)$ . L'application  $l^* \circ \varphi$  se factorise en un produit d'applications différentiables:

$$(r,t) \mapsto (r, l(t)) \mapsto \varphi(r)(l(t))$$

Nous allons montrer maintenant que  $l^*$  et l'induction canonique  $in$  de  $Starc(X)_{[0,1]}$  dans  $Arc(X)_{[0,1]}$  sont homotopiquement inverses l'une de l'autre, c'est à dire que:

$$l^* \circ in : Starc(X)_{[0,1]} \rightarrow Arc(X)_{[0,1]} \rightarrow Starc(X)_{[0,1]}$$

et

$$in \circ l^* : Arc(X)_{[0,1]} \rightarrow Starc(X)_{[0,1]} \rightarrow Arc(X)_{[0,1]}$$



sont homotopes, respectivement, à l'identité de  $\text{Starc}(X)_{[0,1]}$  et à l'identité de  $\text{Arc}(X)_{[0,1]}$ . Considérons pour cela l'application:

$$\eta = [s \mapsto [t \mapsto (1-l(s))l(t) + l(s)t]]$$

C'est une  $\{0,1\}$ -homotopie entre  $l = \eta(0)$  et  $1_{\mathbb{R}} = \eta(1)$ , posons alors

$$\forall (s,f) \in \mathbb{R} \times \text{Arc}(X) \quad \mu(s)(f) = [t \mapsto f \circ \eta(s)(t)]$$

$\mu$  est évidemment différentiable dans  $\text{Arc}(X)$  elle est donc différentiable dans  $\text{Arc}(X)_{[0,1]}$ , de plus  $\mu(s)(f)(0) = f(0)$  et  $\mu(s)(f)(1) = f(1) \forall (s,f) \in \mathbb{R} \times \text{Arc}(X)$ . D'autre part pour tout  $f \in \text{Arc}(X)$   $\mu(0)(f) = f \circ l$  et  $\mu(1)(f) = f$ , c'est donc une homotopie dans  $D(\text{Arc}(X)_{[0,1]}, \text{Arc}(X)_{[0,1]})$  joignant  $l^* = \text{id} \circ l^*$  et  $1_{\text{Arc}(X)_{[0,1]}}$ . Pour  $l^* \circ \text{id}$ , il suffit de vérifier que si  $f$  est à bouts stationnaires,  $\mu(s)(f)$  est à bouts stationnaires, pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . Soit  $f$   $\varepsilon$ -stationnaire :

$$\forall t \leq \varepsilon' \quad f(t) = f(0), \quad \forall t \geq 1 - \varepsilon' \quad f(t) = f(1)$$

On peut supposer  $\varepsilon = \varepsilon'$  ( $\varepsilon$  relatif à  $l$  (4.3.4)) sinon on se ramène à  $\inf(\varepsilon, \varepsilon')$ . Pour tout  $t \leq \varepsilon$  :  $\mu(s)(f)(t) = f(l(s)t)$ , or  $l(s) \leq 1 \Rightarrow l(s)t \leq \varepsilon$  et donc  $\mu(s)(f)(t) = f(0)$ , de même pour  $t \geq 1 - \varepsilon$  :  $\mu(s)(f)(t) = f(1)$ . Donc  $\mu$  est une homotopie dans  $D(\text{Starc}(X)_{[0,1]}, \text{Starc}(X)_{[0,1]})$  joignant  $l^* = l^* \circ \text{id}$  et  $1_{\text{Starc}(X)_{[0,1]}}$ .

La démonstration est du même type en ce qui concerne  $\text{Arc}(X)$  et  $\text{Starc}(X)$ .  $\square$

On déduit de cette proposition:

#### 4.3.6 Proposition :

Deux points  $x$  et  $y$  d'un espace difféologique  $X$  sont homotopes (4.1.4) si et seulement si il existe un arc à bouts stationnaires les joignant.

#### 4.3.7 Proposition :

La juxtaposition dans  $\text{Starc}(X)$  respecte la  $\{0,1\}$ -homotopie, en d'autres termes si  $f$  et  $f'$  sont deux arcs  $\{0,1\}$ -homotopes de  $X$  à bouts stationnaires ainsi que  $g$  et  $g'$  et si  $\text{ex}(f) = \text{or}(g)$ , les arcs  $f \wedge g$  et  $f' \wedge g'$  sont  $\{0,1\}$ -homotopes.

□ L'application  $s \mapsto \varphi(s) \wedge \psi(s)$  est une  $[0, 1]$ -homotopie entre  $f \wedge g$  et  $f' \wedge g'$ , où  $\varphi$  et  $\psi$  sont les homotopies entre  $f$  et  $f'$ ,  $g$  et  $g'$ . □

#### 4.4 Groupeïde et groupe fondamental.

La construction que nous donnons, du groupe fondamental (ou premier groupe d'homotopie) d'un espace difféologique connexe  $X$ , utilise la construction d'un groupeïde parfait que nous appellerons groupeïde fondamental. Nous verrons plus tard que cette construction permet de définir le revêtement universel de  $X$ .

Soit  $X$  un espace difféologique et  $\text{Arc}(X)_{[0,1]}$  l'espace de ses arcs muni de la difféologie feuilleté par  $[0,1]$ . Nous noterons  $\Pi(X)$  l'ensemble de ses composantes connexes:

$$\Pi(X) = \pi_0(\text{Arc}(X)_{[0,1]}) \quad (4.4.1)$$

Nous noterons  $p$  la projection de  $\text{Arc}(X)$  sur  $\Pi(X)$  et nous noterons encore  $\text{Bouts}$ , la factorisation de  $\text{Bouts} : \text{Arc}(X) \rightarrow X \times X$ , sur  $\Pi(X)$ .

$$\begin{array}{ccc} \text{Starc}(X) & \xrightarrow{p} & \Pi(X) \\ & \searrow \text{Bouts} & \swarrow \text{Bouts} \\ & X \times X & \end{array}$$

(diag. 4.3)

#### 4.4.3 Définition:

$\Pi(X)$  (4.4.1) sera muni de la difféologie image par  $p$  de la difféologie d'espace fonctionnel de  $\text{Arc}(X)$ . Elle sera appelée difféologie standard.

En d'autres termes  $\Pi(X)$  est le quotient difféologique d' $\text{Arc}(X)$  par la  $[0,1]$ -homotopie. Puisque  $\text{Arc}(X)_{[0,1]}$  et  $\text{Starc}(X)_{[0,1]}$  sont homotopiquement équivalents et que la juxtaposition sur  $\text{Starc}(X)_{[0,1]}$  est compatible avec la  $[0,1]$ -homotopie (4.3.5) (4.3.6), nous définirons sur  $\Pi(X)$  la loi image, que nous appellerons encore **juxtaposition**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \tau=p(f) \quad \forall \sigma=p(g) \\ (f,g) \in (\text{Star}_c(X))^2 \end{array} \right. \quad \text{ex}(\tau)=\text{or}(g) \Rightarrow \tau.\sigma=p(f \wedge g) \quad (4.4.3)$$

Compte tenu de ces notations :

#### 4.4.4 Proposition :

La loi de juxtaposition (4.4.3) est une loi de groupoïde sur  $X^\pi$  défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ob } X^\pi = X \\ \text{Mor } X^\pi = \Pi(X) \end{array} \right.$$

avec Bouts pour application caractéristique :

$$\text{Mor}_{X^\pi}(x,y) = \text{Bouts}^{-1}(x,y)$$

et, avec les notations 4.1.1, 4.1.2 :

$$\forall x \in X \quad \Pi_x = p(\Pi_x) \quad \forall \tau = p(f) \quad \tau^{-1} = p(f^{-1})$$

$X^\pi$  est un groupoïde difféologique, nous l'appellerons **groupoïde fondamental** de l'espace  $X$ , si  $X$  est connexe c'est un groupoïde parfait.

Nous noterons :

$$\Pi_x = (\mathbb{H}, X, \pi_x) \quad \text{et} \quad \pi_1(X, x)$$

son fibré principal associé et son groupe structural au point  $x \in X$  (3.4.1).

$\pi_1(X, x)$  sera encore appelé **groupe fondamental ou premier groupe d'homotopie** de  $X$  au point  $x$ . Son type ( $X$  connexe) sera noté  $\pi_1(X)$ .

□ L'associativité de la juxtaposition, l'existence d'une identité pour tout objet, l'existence d'un inverse pour toute flèche résultent d'une adaptation immédiate des démonstrations standard en topologie, il suffit de vérifier qu'à chaque étape les produits envisagés sont bien définis ce qui est le cas grâce au caractère stationnaire aux Bouts des arcs. Donc  $X^\pi$  est un groupoïde.

Démontrons que c'est un groupoïde difféologique :

Comme  $p$  est une subduction et que l'application  $[f \mapsto f^{-1}]$  est un difféomorphisme de  $\text{Arc}(X)$ , l'application  $[\tau \mapsto \tau^{-1}]$  est différentiable. Considérons alors une plaque  $\Phi = [r \mapsto (\varphi(r), \varphi'(r))]$  de  $\Pi(X)^2$  telle que pour tout  $r$  :

$\text{ex}(\varphi(r)) = \text{or}(\varphi'(r))$  et soit  $\Psi$  un relevé local de  $\Phi$  dans  $\text{Starc}(X)^2$  au dessus d'un ouvert  $\Omega \in \text{def}(\Phi)$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (\text{Starc}(X))^2 & & \\
 & \nearrow \psi & \downarrow p & \searrow (\text{Bouts})^2 & \\
 \Omega & \xrightarrow{\Phi|_{\Omega}} & \Pi(X)^2 & \xrightarrow{(\text{Bouts})^2} & (X \times X)^2
 \end{array}$$

(diag.4.4)

$\Psi(r) = (\psi(r), \psi'(r))$  vérifie:

$$\text{ex}(\psi(r)) = \text{or}(\psi'(r)) \quad \forall r \in \Omega \quad \text{et} \quad \psi(r) \cdot \psi'(r) = p(\psi(r) \wedge \psi'(r))$$

Considérons alors la fonction de lissage  $l$  (4.3.4) et posons:

$$\psi_{\varepsilon} = [r \mapsto [t \mapsto \psi(r)(l(t))]] \quad \psi'_{\varepsilon} = [r \mapsto [t \mapsto \psi'(r)(l(t))]]$$

$\psi_{\varepsilon}$  et  $\psi'_{\varepsilon}$  sont différentiables dans  $\text{Starc}(X)$  et  $\Psi_{\varepsilon} = [r \mapsto (\psi_{\varepsilon}(r), \psi'_{\varepsilon}(r))]$  est encore un relevé de  $\Phi$  au dessus de  $\Omega$  car  $l$  est homotope à l'identité.

L'application  $[(r, t) \mapsto [\psi_{\varepsilon}(r) \wedge \psi'_{\varepsilon}(t)]]$  définie sur  $\Omega \times \mathbb{R}$  s'écrit:

$$(A) \quad (r, t) \mapsto \begin{cases} \psi_{\varepsilon}(r)(2t) & t \leq 1/2 \\ \psi'_{\varepsilon}(r)(2t-1) & t \geq 1/2 \end{cases}$$

$l$  est nulle sur les intervalles  $]-\infty, \varepsilon]$  et  $[1-\varepsilon, +\infty[$  (4.3.4), il existe alors un voisinage de  $\Omega \times \{1/2\}$  sur lequel  $\psi_{\varepsilon}(r)(2t) = \psi'_{\varepsilon}(r)(2t-1)$ , en vertu de l'axiome de prolongement des plaques, l'application (A) est différentiable, puisque  $p$  est une subduction  $[r \mapsto \psi(r) \cdot \psi'(r)]$  est différentiable. Ainsi la juxtaposition dans  $\Pi(X)$  est une opération différentiable. D'autre part, en utilisant le fait que l'application  $\text{in}_{\text{Starc}(X)} = [x \mapsto \mathbb{1}_x]$  est une induction de  $X$  dans  $\text{Arc}(X)$ , on vérifie que  $p \circ \text{in}_{\text{Starc}(X)}$  est une induction de  $X$  dans  $\Pi(X)$ . On conclut alors que  $X^{\Pi}$  est un groupoïde difféologique.

Montrons maintenant que si  $X$  est connexe,  $\text{Bouts} : \Pi(X) \rightarrow X \times X$  est une subduction. C'est à dire montrons que  $X^{\Pi}$  est un groupoïde parfait.

Soit  $\Phi = [r \mapsto (\varphi(r), \varphi'(r))]$  une plaque de  $X \times X$ , soit  $r_0 \in \text{def}(\Phi)$  et soit  $\gamma$  l'application:

$$\begin{aligned} \gamma : B_{r_0} &\rightarrow \text{Star}(X) \\ r &\mapsto [t \mapsto (1-t)r + t r_0] \end{aligned}$$

où  $B_{r_0}$  est une boule de centre  $r_0$  et contenue dans  $\text{def}(\Phi)$ .  $\gamma$  est évidemment différentiable et vérifie:  $\text{Bouts}(\gamma(r)) = (r, r_0)$ .  $\varphi \circ \gamma$  et  $\varphi' \circ \gamma$  sont donc des applications différentiables définies sur  $B_{r_0}$  à valeurs dans  $\text{Star}(X)$  vérifiant:

$$\text{Bouts}(\varphi \circ \gamma(r)) = (\varphi(r), \varphi(r_0)) \quad \text{Bouts}(\varphi' \circ \gamma(r)) = (\varphi'(r), \varphi'(r_0))$$

Puisque nous avons supposé  $X$  connexe il existe un arc à bouts stationnaires  $f$  joignant  $\varphi(r)$  à  $\varphi(r_0)$  posons alors:

$$\begin{aligned} \Phi_0 : B_{r_0} &\rightarrow \text{Star}(X) \\ r &\mapsto [(\varphi \circ \gamma(r)) \wedge (f) \wedge (\varphi' \circ \gamma(r))^{-1}] \end{aligned}$$

$\Phi_0$  est évidemment différentiable et vérifie:

$$\text{Bouts}(\Phi_0(r)) = (\text{or}(\varphi \circ \gamma(r)) \quad \text{ex}((\varphi' \circ \gamma(r))^{-1})) = (\varphi(r), \varphi'(r))$$

C'est donc un relevé local de  $\Phi$ . L'application  $\text{Bouts}$  est une subduction puisque  $p$  est une subduction (1.2.16).

Puisque  $X^\pi$  est un groupoïde parfait tous les groupes structuraux sont isomorphes ce qui justifie la notation  $\pi_1(X)$ .  $\square$

Par construction  $\pi_1(X, x)$  est égal, en tant qu'ensemble, à l'espace des composantes connexes de l'espace des lacets  $L(X, x)$  (1.3.9) de  $X$  au point  $x$ :

$$\pi_1(X, x) = \pi_0(L(X, x)) \quad (4.45)$$

l'élément neutre étant la classe du lacet constant  $\mathbb{1}_x$ . Comme en géométrie des variétés nous définissons la simple connexité par:

#### 4.45 Définition:

Un espace difféologique connexe  $X$  sera dit **simplement connexe** si son groupe fondamental  $\pi_1(X)$  est trivial.

### 4.5 Homotopie supérieure-foncteur $\pi_n$

La définition des groupes d'homotopie supérieurs la plus naturelle [DI] en difféologie se fait par récurrence sur les espaces de lacets:

Etant donné un espace difféologique pointé  $(X,x)$  notons:

$$L(X,x)^\circ \quad (4.5.1)$$

la composante connexe,  $\text{comp}_{D(X,x)}(\mathbb{1}_x)$ , du lacet constant  $\mathbb{1}_x$  dans  $L(X,x)$ , elle est munie de sa difféologie d'espace fonctionnel en tant que partie de  $L(X,x)$ . Ses éléments sont encore appelés **lacets homotopes à zéro** (au point  $x$ ). Posons alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{1}_x^{(n+1)} = [t \mapsto \mathbb{1}_x^{(n)}] \\ L_{n+1}(X,x) = L(L_n(X,x)^\circ, \mathbb{1}_x^{(n)}) \\ L_0(X,x) = X \\ \mathbb{1}_x^{(0)} = x \end{array} \right. \quad (4.5.2)$$

#### 4.5.3 Définition:

Nous appellerons **(n+1)-ème groupe d'homotopie** de  $X$  au point le groupe fondamental au point  $\mathbb{1}_x^{(n)}$  de l'espace difféologique connexe  $L_n(X,x)^\circ$ , nous noterons:

$$\pi_{n+1}(X,x) = \pi_1(L_n(X,x)^\circ, \mathbb{1}_x^{(n)})$$

Nous dirons aussi que  $\pi_n(X,x)$  est le  $n$ -ème groupe d'**homotopie absolue** de  $X$  au point  $x$ . En vertu de (4.4.5), en remplaçant  $(X,x)$  par  $(L_n(X,x)^\circ, \mathbb{1}_x^{(n)})$  dans (4.5.3), on a l'égalité des ensembles:

$$\pi_n(X,x) = \pi_0(L_n(X,x)) \quad (4.5.4)$$

Etant donnés  $X$  et  $Y$  deux espaces difféologiques connexes et  $f \in D(X,Y)$ , soient  $x \in X$  et  $y \in Y$  tels que  $y=f(x)$ , notons  $f_n$  l'application induite par  $f$  sur  $L_n(X,x)$  définie par récurrence:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n : L_n(X,x) \rightarrow L_n(Y,y) \\ \quad \quad \quad \psi \mapsto f_{n-1} \circ \psi \\ f_0 = f \end{array} \right. \quad (4.5.5)$$

En vertu de (4.1.13),  $f_n$  se projette sur  $\pi_0(L_n(X,x)) = \pi_n(X,x)$  en une application que nous noterons  $f_n^* = (f_n)_0^*$  (notations 4.1.13):

$$\begin{array}{ccc}
 L_n(X,x) & \xrightarrow{f_n} & L_n(Y,y) \\
 \text{comp} \downarrow & & \downarrow \text{comp} \\
 \pi_n(X,x) & \xrightarrow{f_n^*} & \pi_n(Y,y)
 \end{array}$$

(diag. 4.5)

Compte tenu de ces notations:

#### 4.5.6 Proposition :

$f_n^*$  est un homomorphisme de groupe pour  $n \geq 1$  et un morphisme d'espace pointé pour  $n=0$ .

□ En vertu de 4.5.4 et 4.5.5 il suffit de le montrer pour  $n=0$  et  $n=1$ . C'est immédiat pour  $n=0$  parce que  $y=f(x)$ . Soient  $\varphi$  et  $\psi$  des lacets à Bouts stationnaires au point  $x$ , on a:

$$f_1(\varphi \wedge \psi)(t) = \begin{cases} f \circ \varphi(2t) & t \leq 1/2 \\ f \circ \psi(2t-1) & t \geq 1/2 \end{cases} = [f_1(\varphi) \wedge f_1(\psi)](t)$$

donc  $f_n^*$  est un homomorphisme. □

Ainsi pour tout  $n \geq 1$  est défini un foncteur de la catégorie **Desp** des espaces difféologiques pointés dans la catégorie Grp des groupes, nous le noterons  $\Pi_n$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_n(X,x) = \pi_n(X,x) \quad X \text{ espace difféologique} \\ \Pi_n(f) = f_n^* \end{array} \right. \quad (4.5.7)$$

On déduit en particulier:

**4.5.8 Proposition :**

Etant donnés deux espaces difféologiques connexes  $X$  et  $Y$ , et  $f \in D(X, Y)$ , si  $f$  est une équivalence homotopique,  $f_n^\#$  est un isomorphisme: d'espace pointé si  $n=0$  et de groupe si  $n \geq 1$ . Si  $p$  est une rétraction de déformation de  $X$  sur  $A$ ,  $p_n^\#$  est un isomorphisme de  $\pi_n(X, x)$  sur  $\pi_n(A, x)$   $x \in A$ . Si  $X$  est contractile  $\pi_n(X, x) = 0 \forall n$ .

Les  $\pi_n(X, x)$  sont commutatifs si  $n \geq 2$ , ceci résulte d'une propriété des H-espaces, vraie en topologie et qui subsiste dans les espaces difféologiques.

**4.5.9 Définition:**

On appellera **H-espace difféologique** (ou plus simplement H-espace) tout espace difféologique pointé  $(X, e)$  muni d'une loi interne  $*$ , différentiable en un sens évident, compatible avec la partition en composantes connexes et qui induit sur  $\pi_0(X, e)$  une loi de groupe d'élément neutre  $1_e$ .

**4.5.10 Proposition :**

Le groupe fondamental d'un H-espace est commutatif.

□ La démonstration est une adaptation immédiate de la démonstration topologique [12], il suffit simplement de vérifier que le résultat de chaque juxtaposition est bien défini, ce qui se fait en passant aux arcs à Bouts stationnaires. □

On déduit de cette proposition la commutativité des  $\pi_n$  en remarquant que les espaces de lacets sont des H-espaces. Un autre exemple de H-espaces sont les groupes difféologiques.

En conséquence pour  $n \geq 2$ ,  $\pi_n$  (4.5.8) est un foncteur dans la catégorie des groupes abéliens.



Pour connaître réellement un objet, il faut embrasser et étudier tous ses aspects, toutes ses liaisons et "médiations". Nous n'y arriverons jamais intégralement, mais la nécessité de considérer tous les aspects nous garde des erreurs et des engourdissements.

V.I. Lénine.

**§5-SUITES EXACTES D'HOMOTOPIE**

**Certaines constructions de la théorie de l'homotopie** survivent au passage vers les espaces difféologiques. Parmi celles-ci: la **suite exacte d'homotopie d'un couple**  $(X,A)$ ,  $A$  sous espace difféologique de  $X$ . Elle est construite à partir de l'homotopie relative dont nous donnons une version difféologique au premier paragraphe.

Ensuite, l'aspect essentiel de ce chapitre est d'établir l'exactitude de la **suite d'homotopie d'un fibré difféologique**, où la propriété de micro-trivialité apparaît comme essentielle. On démontre ainsi l'analogie, pour les espaces difféologiques, d'un théorème important de la théorie des variétés fibrées qui se trouve être ainsi démontré par la voie difféologique.

Cette suite exacte peut s'appliquer à des quotients singuliers, comme , par exemple, certains quotients de groupes de Lie (ex.  $\mathbb{T}^2/[\alpha]$ ), ou bien certains quotients de variétés par des actions différentiables de groupes de Lie non compacts. Mais cette suite peut aussi s'appliquer aux fibrés difféologiques de dimension infinie, quotients de groupes de difféomorphismes, ou bien quotients d'espaces de métriques par l'actions de certains groupes de difféomorphismes etc...Il doit être noté que, nulle part, si ce n'est dans  $\mathbb{R}^n$ , une quelconque topologie (même pas la D-topologie) n'intervient dans la démonstration des théorèmes.

Il faut remarquer toutefois que les liens, usuels en théorie des variétés différentiables, qui existent entre la théorie des fibrés et la théorie de l'homotopie, ne se généralisent pas tous à la théorie des espaces difféologiques. En particulier, toute variété fibrée sur une variété contractile est triviale, cette proposition n'est plus vraie dans le cas des fibrés difféologiques, un contre exemple sera donné dans l'annexe 6.

Nous n'avons pas abordé ici les notions de  $\pi$ -suite et de cission [19], bien utiles parfois pour calculer des groupes d'homotopie. Ces définitions et les propriétés qui en découlent (factorisation des groupes d'homotopie sur des rétractes...) sont essentiellement algébriques et doivent s'étendre aux espaces difféologiques sans problèmes particuliers.

### 5.1 Homotopie relative.

Dans tout ce paragraphe nous considérons un espace difféologique  $X$  et une partie non vide  $A$  de  $X$ .  $A$  sera muni de sa difféologie de partie, nous dirons du couple  $(X,A)$  que c'est un **couple difféologique**. Nous choisirons un point  $a \in A \subset X$  et noterons:

$$\text{Arc}(X,A,a) \quad a \in A \subset X \quad (5.1.1)$$

l'espace des arcs différentiables dans  $X$  d'origine dans  $A$  et d'extrémité  $a$ .  $\text{Arc}(X,A,a)$  sera muni de sa difféologie d'espace fonctionnel, c'est à dire de la difféologie induite par  $\text{Arc}(X)$ :

$$f \in \text{Arc}(X,A,a) \Leftrightarrow f \in \text{Arc}(X) \text{ or}(f)=f(0) \in A \text{ ex}(f)=f(1)=a \quad (5.1.2)$$

Notons que pour  $A=\{a\}$  on a:

$$\text{Arc}(X,\{a\},a) = L(X,a) \quad (5.1.3)$$

#### 5.1.4 Définition:

Nous appellerons, par abus, **premier groupe d'homotopie de  $X$  relatif à  $A$**  au point  $a$ , l'espace des composantes connexes de  $\text{Arc}(X,A,a)$  à point de base le lacet constant  $\mathbb{1}_a$ .

$$\pi_1(X,A,a) = \pi_0(\text{Arc}(X,A,a), \mathbb{1}_a)$$

En effet, contrairement à  $\pi_1(X,a)$ ,  $\pi_1(X,A,a)$  ne possède pas canoniquement de structure de groupe, sauf, en particulier, si  $A$  se réduit au singleton  $\{a\}$ . Auquel cas  $\pi_1(X,A,a) = \pi_1(X,a)$ .

De façon similaire au chapitre précédent nous définirons la récurrence suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{n+1}(X,A,a) = L(L_n(X,A,a)^\circ, \mathbb{1}_a^{(n)}) \quad n \geq 1 \\ L_1(X,A,a) = \text{Arc}(X,A,a) \end{array} \right. \quad (5.1.5)$$

où  $L_n(X,A,a)^\circ$  est la composante connexe de  $\mathbb{1}_a^{(n)}$ , ( $\mathbb{1}_a^{(n)}$  défini en 4.5.2).

5.1.6 Définition:

Nous appellerons **(n+1)-ème groupe d'homotopie de X relativement à A** au point a, le groupe fondamental de la composante connexe  $L_n(X,A,a)^\circ$  de  $L_n(X,A,a)$  au point  $\mathbb{1}_a$  :

$$\pi_{n+1}(X,A,a) = \pi_1(L_n(X,A,a)^\circ, \mathbb{1}_a) \quad n \geq 1$$

En d'autres termes l'homotopie relative de X par rapport à A est défini comme l'homotopie absolue de l'espace difféologique  $\text{Arc}(X,A,a)$ :

$$n \geq 0 \quad \pi_{n+1}(X,A,a) = \pi_n(\text{Arc}(X,A,a), \mathbb{1}_a) \quad (5.1.7)$$

ce que nous pouvons encore écrire:

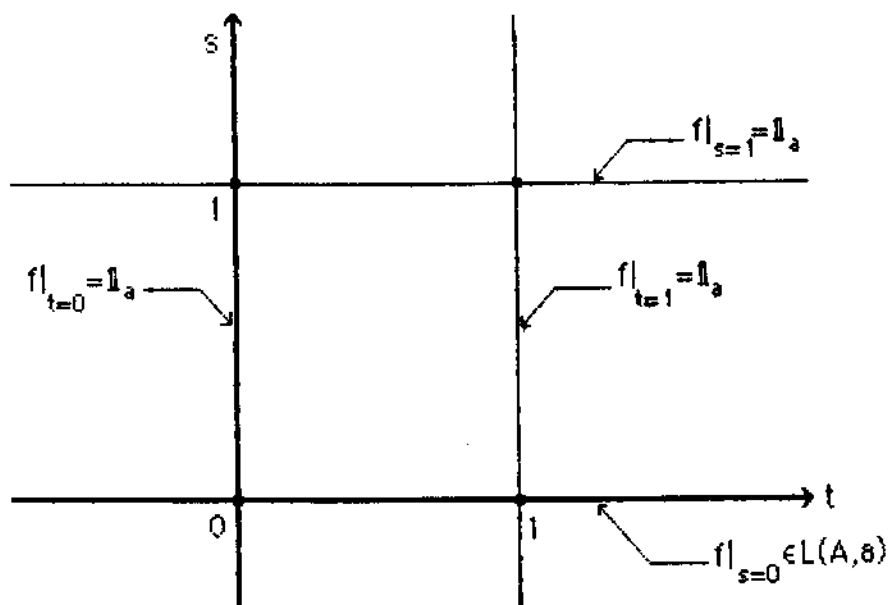
$$n \geq 0 \quad \pi_n(X,A,a) = \pi_0(L_n(X,A,a), \mathbb{1}_a) \quad (5.1.8)$$

A partir de la formule 5.1.7, on peut remarquer que  $\pi_n(X,A,a)$  est un espace pointé pour  $n=1$ , un groupe pour  $n \geq 2$  et un groupe abélien pour  $n \geq 3$ .

Nous pouvons interpréter encore différemment les espaces  $L_{n+1}(X,A,a)$ . Considérons pour commencer un élément  $f \in L_2(X,A,a) = L(\text{Arc}(X,A,a)^\circ, \mathbb{1}_a)$  c'est en particulier un élément de  $\text{Arc}(\text{Arc}(X)) \sim D(\mathbb{R}^2, X)$  (1.3.8) qui vérifie:

$$\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2 \quad f(0)(s) = a \quad f(1)(s) = a \quad f(t)(0) \in A \quad f(t)(1) = a \quad (5.1.9)$$

ce que nous pouvons schématiser par la figure:



(fig. 5.1)

Considérons alors  $f^*$  défini par permutation des variables  $s$  et  $t$ :

$$f^*(t)(s) = f(s)(t) \quad (5.1.10)$$

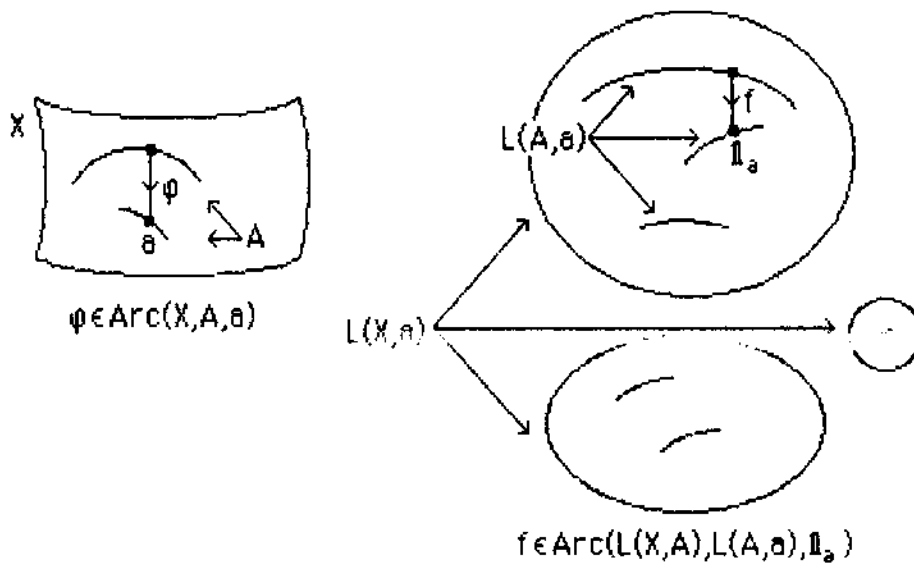
grâce à 5.1.9 on déduit:

$$f^*(0) \in L(A, a) \quad f^*(1) = \mathbb{1}_a \quad f^*(t) \in L(X, a) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (5.1.11)$$

Ce qui peut encore s'écrire, en utilisant l'immersion  $in_{A1} : L(A, a) \rightarrow L(X, a)$  induite par l'immersion canonique  $in_A : A \rightarrow X$  (4.5.5):

$$\forall f \in L(\text{Arc}(X, A, a), \mathbb{1}_a) \quad f^* \in \text{Arc}(L(X, a), L(a, a), \mathbb{1}_a) \quad (5.1.12)$$

On vérifie immédiatement, parce que  $[(t, s) \mapsto (s, t)]$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ , que l'application  $[f \mapsto f^*]$  définie sur  $L(\text{Arc}(X, A, a), \mathbb{1}_a)$  à valeurs dans  $\text{Arc}(L(X, a), L(a, a), \mathbb{1}_a)$  est un difféomorphisme.



(fig. 5.2)

De façon générale considérons l'immersion:

$$in_{An} : L_n(A, a) \rightarrow L_n(X, a) \quad (5.1.13)$$

induite par l'immersion canonique de  $A$  dans  $X$  (4.5.5), on déduit par induction sur  $n$  la proposition suivante:

**5.1.14 Proposition :**

L'application définie sur  $L_{n+1}(X,A,a)$  à valeurs dans  $\text{Arc}(L_n(X,a), L_n(A,a), \mathbb{I}_a^{(n)})$  par:

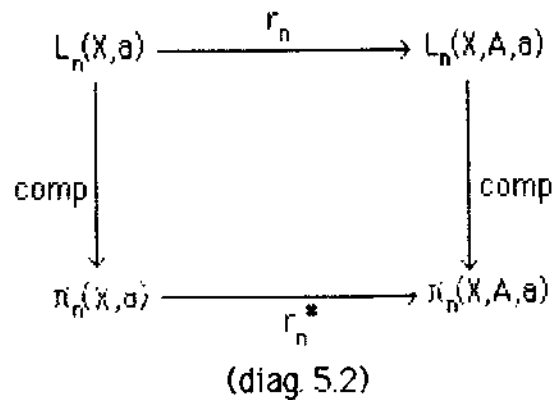
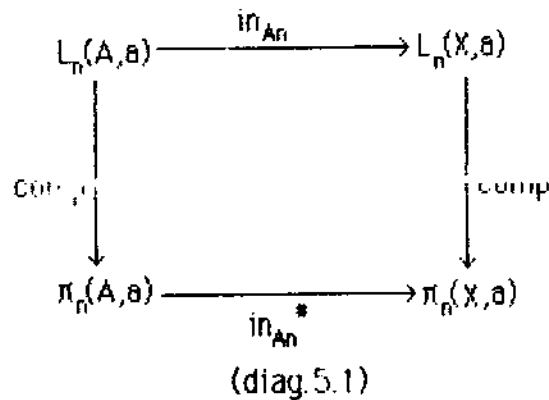
$\forall f \in L_{n+1}(X,A,a) \quad \forall (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \quad f^*(t_0)(t_1) \dots (t_n) = f(t_1) \dots (t_n)(t_0)$   
est un difféomorphisme.

Ceci permet alors d'écrire:

$$\pi_{n+1}(X,A,a) = \pi_0(\text{Arc}(L_n(X,a), L_n(A,a), \mathbb{I}_a^n), \mathbb{I}_a^n) \quad (5.1.15)$$

**5.2 Homomorphismes canoniques.**

Nous avons introduit, au paragraphe précédent, l'immersion canonique  $\text{in}_A$  de  $A$  dans  $X$ , induisant sur  $L_n(A,a)$  l'immersion  $\text{in}_{A_n}$  (4.5.5).  $\text{in}_{A_n}$  se projette sur  $\pi_n(A,a)$  par le morphisme  $\text{in}_{A_n}^*$  (diag. 5.1).



Soit  $r_1$  l'immersion canonique de  $L(X,a)$  dans  $\text{Arc}(X,A,a)$ , elle induit de la même façon une immersion, que nous noterons  $r_n$ , de  $L_n(X,a)$  dans  $L_n(X,A,a)$  qui se projette sur  $\pi_n(X,a)$  par  $r_n^*$  pour tout  $n \geq 1$  (diag. 5.2)

Considérons maintenant  $L_{n+1}(X,A,a)$  que nous identifions à l'espace  $\text{Arc}(L_n(X,a), L_n(A,a), \mathbb{R}^n)$ , on définit l'application différentiable  $\delta_n$  par:

$$\delta_n: \text{Arc}(L_n(X,a), L_n(A,a), \mathbb{R}^n) \rightarrow L_n(A,a) \quad (5.2.1)$$

$$f \mapsto \text{or}(f)$$

Cette application, se projette sur  $\pi_{n+1}(X,A,a)$  par une application que nous noterons  $\partial_n$ :

$$\begin{array}{ccc} L_{n+1}(X,A,a) & \xrightarrow{\delta_n} & L_n(A,a) \\ \text{comp} \downarrow & & \downarrow \text{comp} \\ \pi_{n+1}(X,A,a) & \xrightarrow{\partial_n} & \pi_n(A,a) \end{array}$$

(diag. 5.3)

### 5.2.5 Proposition :

$\delta_n$  est un morphisme d'espace pointé pour  $n=0$  et un homomorphisme de groupe pour  $n \geq 1$ . Il sera appelé **homomorphisme frontière**.

□ Soit  $f \in L_{n+1}(X,A,a)$ ,  $f$  peut être considéré comme un élément de  $D(\mathbb{R}^{n+1}, X)$  (1.3.8), la juxtaposition des lacets se fait sur la première variable et  $\delta_n$  agit sur la dernière. Donc la juxtaposition commute avec  $\delta_n$ . □

## 5.3 Suite exacte du couple $(X,A)$

### 5.3.1 Définition:

Etant donné un couple difféologique  $(X,A)$ , nous appellerons **suite d'homotopie du couple  $(X,A)$**  la suite de morphismes infinie à gauche:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \partial_n & & \text{in}_{A_n}^* & & r_n^* & & \partial_{n-1} & & \text{in}_{A_{n-1}}^* \\
 \dots \rightarrow & \pi_n(A,a) & \rightarrow & \pi_n(X,a) & \rightarrow & \pi_n(X,A,a) & \rightarrow & \pi_{n-1}(A,a) & \rightarrow \dots \\
 & & & & & & & & \\
 \partial_1 & & \text{in}_{A_1}^* & & r_1^* & & \partial_0 & & \text{in}_{A_0}^* \\
 \dots \rightarrow & \pi_1(A,a) & \rightarrow & \pi_1(X,a) & \rightarrow & \pi_1(X,A,a) & \rightarrow & \pi_0(A,a) & \rightarrow \pi_0(X,a)
 \end{array}$$

Toutes les flèches sauf les six dernières sont des morphismes de groupes abéliens, toutes les flèches sauf les trois dernières sont des morphismes de groupes, enfin les trois dernières flèches sont des morphismes d'espaces pointés.

**5.3.2 Proposition :**

La suite d'homotopie d'un couple difféologique  $(X,A)$  est exacte.

□ Cette proposition signifie que:

$$\ker(r_n^*) = \text{im}(\text{in}_{A_n}^*) \quad \ker(\partial_{n-1}) = \text{im}(r_n^*) \quad \ker(\text{in}_{A_{n-1}}^*) = \text{im}(\partial_{n-1}) \quad n > 1$$

pour  $n=1$ , ceci est compris au sens des morphismes d'espaces pointés.

Cette suite peut encore s'écrire en identifiant  $L_{n+1}(X,A,a)$  avec  $\text{Arc}(L_n(X,a), L_n(A,a), \mathbb{I}_a^{(n)})$ :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \partial_n & & \text{in}_{A_n}^* & & r_n^* & & \partial_{n-1} & & \text{in}_{A_{n-1}}^* \\
 \dots \rightarrow & \pi_0(L_n(A,a), \mathbb{I}_a^{(n)}) & \rightarrow & \pi_0(L_n(X,a), \mathbb{I}_a^{(n)}) & \rightarrow & \pi_0(\text{Arc}(L_n(X,a), L_n(A,a), \mathbb{I}_a^{(n)}), \mathbb{I}_a^{(n)}) & \rightarrow & \dots \\
 & & & & & & & & \\
 \partial_1 & & \text{in}_{A_1}^* & & r_1^* & & \partial_0 & & \text{in}_{A_0}^* \\
 \dots \rightarrow & \pi_0(L(A,a), \mathbb{I}_a) & \rightarrow & \pi_0(L(X,a), \mathbb{I}_a) & \rightarrow & \pi_0(\text{Arc}(X,A,a), \mathbb{I}_a) & \rightarrow & \pi_0(A,a) & \rightarrow \pi_0(X,a)
 \end{array}$$

Cette écriture fait apparaître une symétrie d'ordre trois que l'on peut schématiser ainsi:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 r^* & \partial & i^* & & r^* & \partial & i^* & & r^* & \partial & i^* \\
 \dots \rightarrow & \pi_0 & \rightarrow & \pi_0 & \rightarrow & \pi_0 & \rightarrow & \pi_0 & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \pi_0 & \rightarrow & \pi_0 & \rightarrow & \pi_0 & \rightarrow & \pi_0
 \end{array}$$



grâce à cette remarque il suffit de démontrer ces égalités pour les 5 premiers termes puisque la suite d'homotopie du couple  $(X,A)$  à laquelle on a oté les trois derniers termes est la suite d'homotopie du couple  $(L(X,A),L(A,a))$ :

$$a) \ker(\text{in}_{A_0}) = \text{im}(\partial_0).$$

cette égalité signifie que l'ensemble des composantes connexes, dans  $A$ , des origines d'arcs, de source dans  $A$  et de but  $a$ , est égal à l'ensemble des composantes connexes de  $A$  contenues dans la composante connexe, dans  $X$ , de  $a$ .

$\text{im}(\partial_0)$  est égal à l'ensemble des composantes connexes de  $A$  qui peuvent être jointes par un arc différentiable à  $a$ . Elles sont donc contenues dans la composante connexe, dans  $X$ , de  $a$ . Elles sont donc contenues dans  $\ker(\text{in}_{A_0})$ .

Considérons maintenant une composante connexe de  $A$  contenue dans la composante connexe, dans  $X$ , de  $a$ . Tout point de cette composante connexe peut donc être joint à  $a$  par un arc différentiable contenu dans la composante connexe de  $a$  dans  $X$ .

$$b) \ker(\partial_0) = \text{im}(r_1)$$

cette égalité signifie que si un arc de source dans  $A$  et de but  $a$ , a son origine dans la même composante connexe, dans  $A$ , que  $a$ ; il est homotope, relativement à  $A$ , à un lacet, dans  $X$ , au point  $a$ . Et réciproquement.

$\text{im}(r_1)$  est trivialement contenue dans  $\ker(\partial_0)$  puisque  $\partial_0$  associe à un arc d'origine dans  $A$  et d'extrémité  $a$  la composante connexe, dans  $A$ , de l'origine de cet arc. Mais  $\text{im}(r_1)$  est l'ensemble des classes d'homotopie des lacets, dans  $X$ , d'origine  $a$ . Or  $a$  est évidemment contenu dans sa composante connexe.

Considérons maintenant un arc d'origine dans  $A$  et d'extrémité  $a$  tel que son origine soit dans la composante connexe, dans  $A$ , de  $a$ . Il est  $[0,1]$ -homotope à un arc à bouts stationnaires  $f$  (4.3.5), posons:

$$f \in L(\text{Arc}(X,A,a)) \quad \text{or}(f) = f(0) = y \quad \text{ex}(f) = f(1) = a$$

Puisque  $a$  et  $y$  sont dans la même composante connexe de  $A$ , il existe un arc  $g$  dans  $A$ , à bouts stationnaires, les joignant:

$$g \in \text{Arc}(A) \quad \text{or}(g) = g(0) = a \quad \text{ex}(g) = g(1) = y$$

Posons:

$$\xi(s)(t) = g(s + (1-s)l(t))$$

où  $l$  est une fonction de lissage décrite en (4.3.4).  $\xi \in \text{Arc}(L(X, A, a))$  et vérifie:  $\text{ex}(\xi(s)) = \text{or}(f) = y \quad \forall s \in \mathbb{R}$ . Puisque  $\xi(s)$  et  $f$  sont tous deux à bouts stationnaires posons:

$$\gamma(s) = \xi(s) \wedge f$$

$\gamma$  est une homotopie joignant  $\gamma(0) = l^*(g) \wedge f$ , qui un lacet dans  $X$  d'origine  $a$ , à  $\gamma(1) = \mathbb{1}_y \wedge f$  homotope à  $f$ .

$$c) \ker(r_1^*) = \text{Im}(\text{in}_{A0}^*)$$

Cette égalité signifie que tout lacet dans  $X$  au point  $a$ , homotope à zéro relativement à  $A$ , est homotope à un lacet entièrement contenu dans  $A$  et réciproquement.

Soit  $f$  un lacet au point  $a$  entièrement contenu dans  $A$ :  $f \in L(A, a)$ . l'application  $\xi$  définie par:

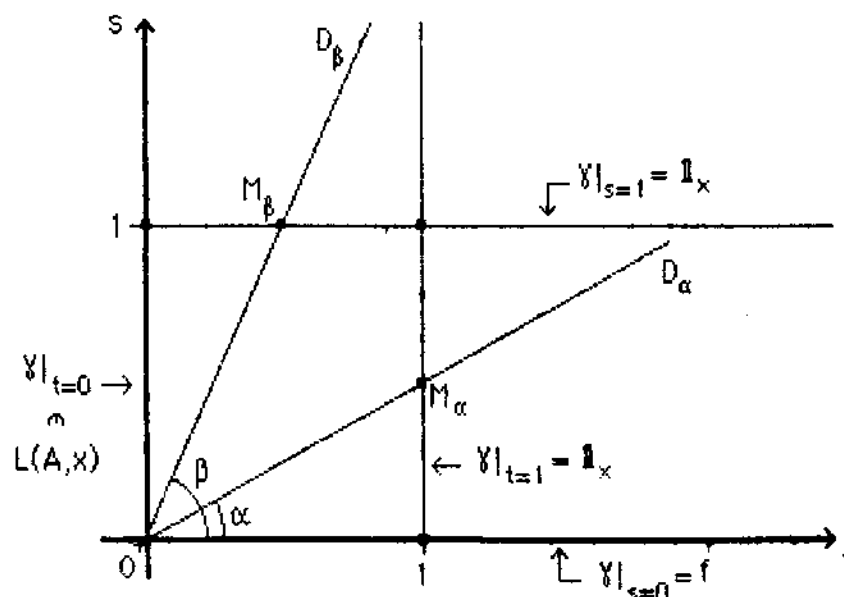
$$\xi(s)(t) = f(s + (1-s)t)$$

est une homotopie relative joignant  $f$  au lacet constant.

Considérons maintenant un lacet  $f$ , dans  $X$ , d'origine  $a$ , homotope relativement à  $A$  au lacet constant et soit  $\gamma$  l'homotopie:

$$\gamma(0) = f \quad \gamma(1) = \mathbb{1}_a \quad \gamma(s)(0) \in A \quad \gamma(s)(1) = a \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

schématisons ces propriétés par la figure suivante:



(fig. 5.3)

Considérons la droite  $D_\alpha$  d'angle  $\alpha$ , en faisant tourner cette droite autour de l'origine on décrit un arc qui joint  $f$  à  $\gamma|_{t=0}$ .

Pour cela on considère dans un premier temps l'arc dans  $L(X,a)$ :

$$\gamma_1 = [s \mapsto [t \mapsto \gamma(t)(st)]]$$

qui joint  $f$  à  $[t \mapsto \gamma(t)(t)]$ , puis l'arc:

$$\gamma_2 = [s \mapsto [t \mapsto \gamma((1-s)t)(t)]]$$

qui joint  $[t \mapsto \gamma(t)(t)]$  à  $\gamma|_{s=0}$ , ce dernier étant un lacet, au point  $a$ , contenue dans  $A$ ; Donc  $f$  est homotope à un lacet dans  $A$ .

La proposition est ainsi démontrée.  $\square$

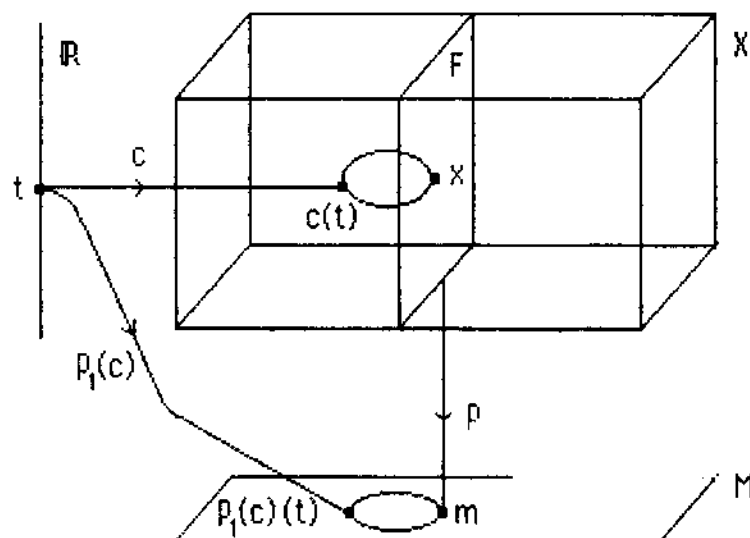
#### 5.4 Fibré des lacets associé à un fibré difféologique

Dans ce paragraphe nous considérons un fibré difféologique  $P=(X,M,p)$ , la fibre type sera identifiée à la fibre  $F$ , au dessus d'un point  $m_0$  de la base. Nous choisissons un point  $x_0$  de  $F$  pour point de base, à la fois, de  $F$  et de  $X$ :

$$m_0 \in M \quad F = X_{m_0} = p^{-1}(m_0) \quad x \in F \quad (5.4.1)$$

Nous noterons  $p_1 : L(X, x_0) \rightarrow L(M, m_0)$ , l'application différentiable induite par la projection  $p$  (4.5.5):

$$\forall c \in L(X, x) \quad p_1(c) = p \circ c \quad (5.4.2)$$



(fig. 5.4)

**5.4.3 Proposition :**

Tout lacet homotope à zéro dans  $M$ , au point  $m_0$ , se relève en un lacet dans  $X$ , au point  $x_0$ . En d'autres termes, la restriction<sup>1</sup> de  $p_1$  à  $L(M, m_0)^\circ$ , composante connexe du lacet constant  $\mathbb{1}_{m_0}$ , est surjective:

$$\forall c \in L(M, m_0)^\circ \quad \exists c' \in L(X, x_0) : p \circ c' = c$$

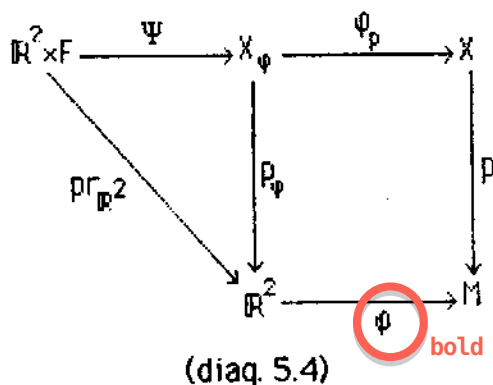
□ Soit  $\varphi$  une homotopie de  $c \in L(M, m_0)^\circ$  sur  $\mathbb{1}_{m_0}$  :

$$\varphi \in \text{Arc}(L(M, m_0)) \quad \varphi(0) = c \quad \varphi(1) = \mathbb{1}_{m_0}$$

Si on identifie  $\varphi$  avec  $\varphi \in D(\mathbb{R}^2, M)$  (1.3.7),  $\varphi(t, s) = \varphi(t)(s)$ ,  $\varphi$  vérifie:

$$\varphi|_{s=0} = \mathbb{1}_{m_0} \quad \varphi|_{s=1} = \mathbb{1}_{m_0} \quad \varphi|_{t=0} = c \quad \varphi|_{t=1} = \mathbb{1}_{m_0}$$

Considérons l'image réciproque  $P_\varphi$  du fibré difféologique  $P$  par  $\varphi$ . C'est un fibré difféologique sur  $\mathbb{R}^2$ , il est donc trivial (3.8.3):



Soit  $\Psi$  une trivialisatoin,  $\psi$  est définie par:

$$\forall (t, s; u) \in \mathbb{R}^2 \times F \quad \Psi(t, s; u) = (t, s; \psi(t)(s)(u)) \quad \psi(t)(s) \in \text{Diff}(F, X_{\varphi(t)(s)})$$

Par définition de la difféologie standard (2.5.4), l'application  $\psi$  est un relevé, dans le fibré principal  $\pi : (T, M, \pi)$ , associé à  $P$  au point  $m_0$  (3.9.5), de la plaque:  $[(t, s) \mapsto (m, \varphi(t)(s))]$  de  $M \times M$ ; c'est une application différentiable.

$$T = \{ f \in \text{Diff}(F, X_m) \mid m \in M \}$$

Puisque  $\varphi(t)(s) = m_0$  si  $t = 1$  ou  $s = 0$  ou  $s = 1$ , on a:

<sup>1</sup> au sens 1.4.12

$$\psi(t)(s) \in \text{Diff}(F) \text{ si } t=1 \text{ ou } s=0 \text{ ou } s=1$$

Donc  $\psi(0)(0)$  et  $\psi(1)(0)$  sont des difféomorphismes de  $F$ , ils appartiennent à la même composante connexe de  $\text{Diff}(F)$  puisqu'ils peuvent être joints par la famille d'arcs différentiables:  $\psi|_{s=0}, \psi|_{s=1}, \psi|_{t=1}$ . Il existe alors un arc différentiable  $\xi$  dans  $\text{Diff}(F)$  tel que  $\xi(0)=\psi(0)(0)$  et  $\xi(1)=\psi(1)(0)$  (4.3.5).

Considérons alors la restriction  $\Psi_0$  de  $\Psi$  à  $\{0\} \times \mathbb{R} \times F$ :

$$(F, X_{\{c(s)\}})$$

$$\forall (s,u) \in \mathbb{R} \times F \quad \Psi_0(s,u) = (s, \psi_0(s)(u)) \quad \psi_0(s) = \psi(0)(s) \quad \psi_0(s) \in \text{Diff}(X_{c(s)})$$

Comme précédemment  $\psi_0$  est différentiable à valeurs dans le fibré principal associé  $\Pi = (T, M, \pi)$ ; c'est un relevé de l'arc  $c$ .  $\Psi_0$  est une trivialisation de l'image réciproque de  $P$  par  $c$ , i.e.  $P_c = P_\phi|_{\{0\} \times \mathbb{R} \times F}$ , posons:

$$\forall (s,u) \in \mathbb{R} \times F \quad \Psi'(s,u) = (s, \psi'(s)(u)) \quad \psi'(s) = \psi_0'(s) \circ \xi(s)^{-1}$$

$\psi'$  est encore différentiable parce que  $\xi$  est différentiable. De plus  $\Psi'$  est une trivialisation de  $P_c$  vérifiant:

$$\Psi'|_{\{0\} \times F} = \Psi'|_{\{1\} \times F} = \mathbb{1}_F$$

On choisit alors la section  $\sigma : s \mapsto (s, x)$  et on pose  $c' = c_p \circ \Psi' \circ \sigma$ , où  $c_p$  est la deuxième projection de  $\text{tl } P_c$ :

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad c'(s) = \psi'(s)(x_0)$$

grâce aux propriétés de  $\Psi'$  on vérifie que  $c'(0) = c'(1) = x_0$  et, évidemment  $p \circ c' = c$ .  $\square$

Considérons alors la restriction de  $P_1 = (L(X, x_0), L(M, m_0), p_1)$  à  $L(M, m_0)^\circ$ , posons:

$$L^*(X, x_0) = p_1^{-1}(L(M, m_0)^\circ) \quad p^* = p_1|_{L^*(X, x_0)} \quad P^* = (L^*(X, x_0), L(M, m_0)^\circ, p^*) \quad (5.4.4)$$

compte tenu de ces notations et de celles qui précèdent, on a:

#### 5.4.5 Proposition :

$P^* = (L^*(X, x_0), L(M, m_0)^\circ, p^*)$  est un fibré difféologique de fibre type  $L(F, x_0)$ .

Il sera appelé **fibré des lacets** associé à  $P$ .

$\square$  Soit  $\Phi$  une plaque globale de  $L(M, m_0)^\circ$ , posons:

$$\forall (r,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad \Phi(r,t) = \Phi(r)(t) \quad \Phi \in D(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, M)$$

$\Phi$  vérifie  $\Phi(r,0)=\Phi(r,1)=m_0 \forall r \in \mathbb{R}^n$ . L'image réciproque de P par  $\Phi$  est trivial en vertu de 3.9.2. Soit  $\psi$  un relevé de  $\Phi$  dans le fibré principal  $\Pi = (T,M,\pi)$ , associé à P au point  $m_0$  et  $\Psi$  la trivialisation de qui lui est associée:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(r,t) \in \text{Diff}(F, X_{\Phi(r)(t)}) \quad \psi \in D(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, T) \\ T = \{f \in \text{Diff}(F, X_m) \mid m \in M\} \\ \Psi(r,t;u) = (r,t,\psi(r,t)(u)) \end{array} \right.$$

On posera :

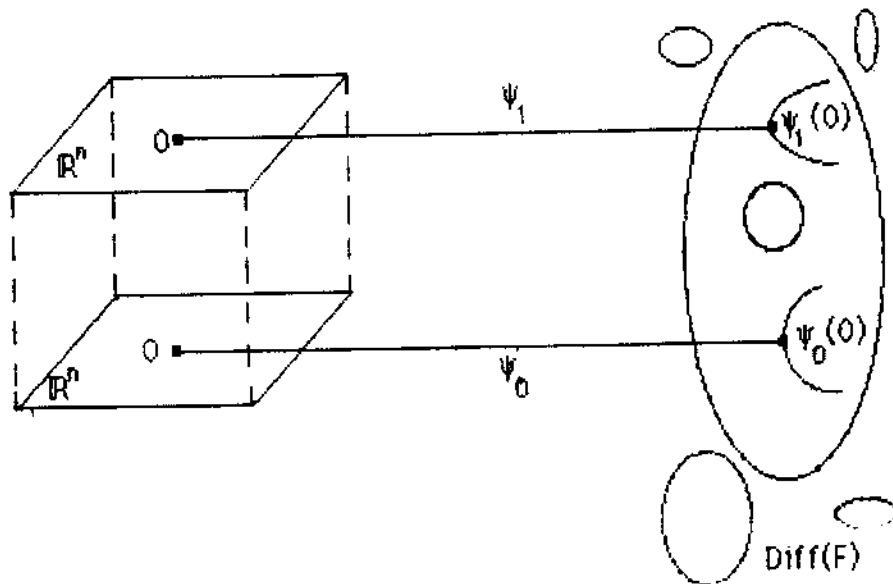
$$C^\infty(\mathbb{R}^n, \text{Diff}(F))$$

$$\psi_0 = \psi|_{\mathbb{R}^n \times \{0\}} \quad \psi_1 = \psi|_{\mathbb{R}^n \times \{1\}}$$

$\psi_0$  et  $\psi_1$  sont des éléments de  $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, F)$  car  $X_{\Phi(r)(0)} = X_{\Phi(r)(1)} = F$ . Puisque  $\mathbb{R}^n$  est connexe  $\text{im}(\psi_0)$  (ainsi que  $\text{im}(\psi_1)$ ) est contenu dans une même composante connexe de  $\text{Diff}(F)$ , mais pour tout  $r \in \mathbb{R}^n$   $\psi_0(r)$  et  $\psi_1(r)$  sont contenus dans une même composante connexe de  $\text{Diff}(F)$  car  $\Phi(r)$  est homotope à zéro pour tout  $r$  (voir démonstration 5.4.3). Donc  $\text{im}(\psi_0)$  et  $\text{im}(\psi_1)$  sont contenus dans une même composante connexe de  $\text{Diff}(F)$ .

Mais puisque  $\mathbb{R}^n$  est contractile et que  $\psi_0$  et  $\psi_1$  sont à valeurs dans la même composante connexe il existe une homotopie dans  $D(\mathbb{R}^n, \text{Diff}(F))$  joignant  $\psi_0$  à  $\psi_1$  (4.2.12), nous la noterons:

$$\xi \in \text{Arc}(D(\mathbb{R}^n, \text{Diff}(F))) \quad \xi(0) = \psi_0 \quad \xi(1) = \psi_1$$



(fig. 5.5)

Il ne nous reste plus qu'à définir:

$$\psi'(r)(t) = \psi(r)(t) \circ \xi(r)(t)^{-1}$$

qui vérifie:

$$\psi' \in D(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, T) \quad \psi'(r)(0) = \psi'(r)(1) = \mathbb{1}_F \quad \forall r \in \mathbb{R}^n$$

La trivialisations  $\Psi'$  associée vérifie alors:

$$\Psi'|_{\mathbb{R}^n \times \{0\} \times F} = \Psi'|_{\mathbb{R}^n \times \{1\} \times F} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \times F}$$

L'application  $\Xi$  définie sur  $\mathbb{R}^n \times L(F, X)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n \times \text{Arc}(X)$  par:

$$\forall (r, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times L(F, X) \quad \Xi(r, \sigma) = (r, [t \mapsto \psi'(r)(t)(\sigma(t))])$$

est une trivialisations de l'image réciproque par  $\Phi$  de l'application  $p^*$ .  $\square$

### 5.5 Suite d'homotopie d'un fibré difféologique

Etant donné un fibré difféologique  $P = (X, M, p)$  de fibre type  $F = X_{m_0}$ ,  $m_0 \in M$  et un point  $x_0 \in F$ ; tout élément  $c \in \text{Arc}(X, F, x_0)$  se projette sur  $M$  en un élément  $p_1(c) = p \circ c \in L(M, m_0)$ . Cette application induit sur  $L_n(X, F, x_0) = L_{n-1}(\text{Arc}(X, F, x_0))$  une application à valeurs dans  $L_n(M, m_0) = L_{n-1}(L(M, m_0))$  que nous noterons encore  $p_n$  (4.5.5).  $p_n$  induit à son tour une application  $p_n^*$  sur  $\pi_n(X, F, x_0)$  à valeurs dans  $\pi_n(M, m_0)$ , qui est un morphisme de groupe pour  $n \geq 2$  et un morphisme d'espace pointé pour  $n = 1$ . Compte tenu de ces remarques:

#### 5.5.1 Proposition :

Etant donné un fibré difféologique  $P = (X, M, p)$  de fibre type  $F = X_{m_0}$ ,  $m_0 \in M$  et un point  $x_0 \in F$ , soient:

$$p_n : L_n(X, F, x_0) \rightarrow L_n(M, m_0) \quad \text{et} \quad p_n^* : \pi_n(X, F, x_0) \rightarrow \pi_n(M, m_0)$$

les applications induites par  $p$ .  $p_n^*$  est un isomorphisme de groupe pour  $n \geq 2$ , d'espace pointé pour  $n = 1$ .

$\square$  Démontrons d'abord cette proposition pour  $n = 1$  :

$$p_1 : \text{Arc}(X, F, x_0) \rightarrow L(M, m_0)$$

L'image réciproque du fibré  $P$  par  $c \in L(M, m)$ , est trivial, son espace total  $X_c$  est difféomorphe à  $M \times \mathbb{R}$ , on relève alors  $c$  dans  $X$ , par  $c' \in \text{Arc}(X, F, x_0)$ , en utilisant

une section de  $X_c$  passant par  $x_0$  au point 1. Ceci prouve que l'application  $p_1$  est surjective et par conséquent  $p_1^{-1}$ .

Considérons maintenant  $c \in \text{Arc}(X, F, x_0)$  tel que sa projection  $c = p \circ c'$ , qui est un lacet dans  $M$  au point  $m_0$ , soit homotope à zéro. Soit  $\Phi$  l'homotopie de  $c$  à  $\mathbb{1}_{m_0}$ , on posera comme d'habitude :

$$\Phi \in D(\mathbb{R}^2, M) \quad \Phi(s, t) = \Phi(s)(t)$$

et  $\Psi$  une trivialisatoin de l'image réciproque  $P_\Phi$  de  $P$  par  $\Phi$ :

$$\forall (s, t, u) \in \mathbb{R}^2 \times F \quad \Psi(s, t, u) = (s, t, \psi(s)(t)(u))$$

il est clair que nous pouvons toujours choisir  $\psi$  tel que:

$$\psi(s)(1) = \mathbb{1}_F$$

en effet, puisque  $\psi(s)(t) \in \text{Diff}(F, X_{\Phi(s)(t)})$  et que  $\Phi(s)(1) = m_0 \quad \forall s$ ,  $X_{\Phi(s)(1)} = F$  et  $\psi(s)(1) \in \text{Diff}(F)$ , en posant  $\psi'(s)(t) = \psi(s)(t) \circ \psi(s)(1)^{-1}$ , on a  $\psi'(s)(1) = \mathbb{1}_F$ .

On posera :

$$\sigma(t) = \psi(0)(t)^{-1}(c'(t)) \quad \sigma \in \text{Arc}(F)$$

Définissons alors  $\Phi' \in \text{Arc}(\text{Arc}(X))$  par:

$$\Phi' = [s \mapsto [t \mapsto \psi(s)(t)(\sigma(t))]]$$

qui vérifie:

$$\Phi'(0) = c' \quad \Phi'(1) \in \text{Arc}(F) \quad \Phi'(s)(0) \in F \quad \Phi'(s)(1) = x_0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Donc  $\Phi'$  est une homotopie dans  $\text{Arc}(X, F, x_0)$  joignant  $c'$  à un arc complètement contenu dans  $A$ , or tout arc complètement contenu dans  $F$  est homotope, relativement à  $F$ , à l'arc constant (considérer  $(s, t) \mapsto c'((1-t)s+t)$ ,  $c'' = \Phi'(1)$ ).

Donc  $p_1^{-1}$  est bijective.

En utilisant alors les propriétés:

$$a) L_{n+1}(X, F, x_0) = \text{Arc}(L_n(X, x_0), L_n(F, x_0), \mathbb{1}_{x_0}^{(n)}) \quad L_{n+1}(M, m_0) = L(L_n(M, m_0), \mathbb{1}_{m_0}^{(n)})$$

$$b) \text{im}(p_n^{-1}) \subset L_n(M, m_0)^\circ$$

$$c) L^*(L_n(X, x_0)) \subset L(L_n(X, x_0)) \quad \text{notations (5.4.5)}$$

et en utilisant la proposition 5.4.5 on construit une récurrence sur  $n$  d'où on déduit que  $p_n^{-1}$  est un isomorphisme pour tout  $n$ .  $\square$

Posons alors:



$$\Delta_n : \pi_{n+1}(M, m_0) \rightarrow \pi_n(F, x_0) \quad \Delta_n = \partial_n \circ (p_{n+1}^*)^{-1} \quad (5.5.2)$$

avec les notations 5.3.1 . En remplaçant, dans la suite d'homotopie du couple  $(X, F)$ ,  $\partial_n$  par  $\Delta_n$  et  $\pi_{n+1}(X, F, x_0)$  par  $\pi_n(M, m_0)$  on construit la **suite d'homotopie du fibré difféologique P**:

$$\left. \begin{array}{ccccccc} & \text{in}_{F_n}^* & p_n^* & \Delta_{n-1} & & & \\ \dots \rightarrow & \pi_n(F, x_0) \rightarrow & \pi_n(X, x_0) \rightarrow & \pi_n(M, m_0) \rightarrow & \pi_{n-1}(F, x_0) \rightarrow & \dots & \\ & & & & & & \\ & \text{in}_{F_1}^* & p_1^* & \Delta_0 & \text{in}_{F_0}^* & p_0^* & \\ \dots \rightarrow & \pi_1(F, x_0) \rightarrow & \pi_1(X, x_0) \rightarrow & \pi_1(M, m_0) \rightarrow & \pi_0(F, x_0) \rightarrow & \pi_0(X, x_0) \rightarrow & \pi_0(M, m_0) \rightarrow 0 \end{array} \right\} (5.5.3)$$

**5.5.4 Proposition :**

La suite d'homotopie des fibrés difféologiques est exacte.

□ Il suffit de vérifier, en vertu de 5.3.2, l'exactitude de la suite :

$$\begin{array}{ccc} \text{in}_{F_0}^* & p_0^* & \\ \pi_0(F, x_0) \rightarrow & \pi_0(X, x_0) \rightarrow & \pi_0(M, m_0) \rightarrow 0 \end{array}$$

a)  $\text{im}(\text{in}_{F_0}^*) = \ker(p_0^*)$  revient à dire que si  $m$  est dans la composante connexe de  $m_0$  et si  $p(x) = m$  il existe  $y \in F$  dans la composante connexe de  $x$ , ce qui est une conséquence immédiate de la micro-trivialité.

b)  $\text{im}(p_0^*) = \pi_0(M, m_0)$  découle de la surjectivité de  $p$ . □

Donnons encore quelques propriétés élémentaires:

**5.5.5 Corollaire :**

a) Si  $F$  est contractile:  $\pi_n(X, x_0) = \pi_n(M, m_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

b) Si  $F$  est un rétracte de déformation de  $X$ :  $\pi_n(M, m_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

c) Si  $P = (X, M, p)$  est un fibré difféologique principal de groupe structural  $G$ , on peut remplacer  $F$  par  $G$ , pointé en  $1_G$ , et  $i^*$  par  $x_0^*$ , où  $x_0^* : a \mapsto a_x(x_0) \in G$ . La suite d'homotopie de  $P$  s'écrit alors:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{in}_{G_n} & & p_n & & \Delta_{n-1} \\ \dots \rightarrow & \pi_n(G, \mathbb{1}_G) & \rightarrow & \pi_n(X, x_0) & \rightarrow & \pi_n(M, m_0) & \rightarrow \pi_{n-1}(G, \mathbb{1}_G) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(M, m_0) \rightarrow \mathbb{1}_G \end{array}$$

L'application de 5.5.5 montre en particulier que le tore irrationnel  $\mathbb{T}_\alpha$  de pente  $\alpha$  a la même homotopie que  $\mathbb{T}^2$ , c'est à dire  $\pi_1(\mathbb{T}_\alpha) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ,  $\pi_n(\mathbb{T}_\alpha) = 0$   $n \geq 2$ . Le  $\pi_1$  avait été calculé directement [Annexe 3].

Nous avons découvert  
l'étrange empreinte d'un pas  
sur le rivage de l'inconnu.  
pour expliquer son origine  
nous avons bâti théories sur  
théories ...

A.S Eddington

### **§6-REVETEMENTS DIFFEOLGQUES<sup>1</sup>**

---

<sup>1</sup>une partie des résultats présentés dans ce chapitre a été obtenue en collaboration avec P. Donato [prétirage en cours de rédaction]

La définition des fibrés difféologiques et celle d'espaces difféologiques discrets, conduisent naturellement à définir les revêtements d'espaces difféologiques connexes comme des fibrés difféologiques à fibre type difféologiquement discrète. Cette définition est naturellement une extension des revêtements de variétés puisque tout espace difféologique discret est une variété discrète.

Nous montrons, dans ce paragraphe, que les propriétés essentielles des revêtements des variétés passent très bien aux espaces difféologiques. En particulier:

- a) tout espace difféologique possède un revêtement universel simplement connexe, unique à isomorphisme près.
- b) Les revêtements d'un espace difféologique sont classés par les sous-groupes de son groupe fondamental.

Ceci généralise à tous les espaces difféologiques un résultat établi pour les espaces homogènes de groupes difféologiques [6].

Nous démontrons en fin de chapitre que toute action différentiable d'un groupe difféologique connexe  $G$  sur un espace difféologique connexe  $X$  se relève par une action différentiable du revêtement universel  $\Gamma$  de  $G$  sur le revêtement universel  $\mathbb{H}$  de  $X$ , ce théorème généralise une situation connue en géométrie différentielle ordinaire. A partir de ce théorème, nous donnons une méthode de construction du revêtement universel de la base d'un fibré difféologique principal (de groupe structural connexe) à partir du revêtement universel de son espace total, cette construction est aussi la généralisation d'un théorème relatif aux espaces difféologiques homogènes [6].

Comme nous pouvons le constater encore: "ça ressemble à la géométrie différentielle, ça a la couleur de la géométrie différentielle parce que **c'est la géométrie différentielle**".

### 6.1 revêtements et action du $\pi_1$

Rappelons qu'un espace difféologique est dit **discret** si ses seules plaques sont les applications localement constantes.

#### 6.1.1 Définition:

Nous appellerons **revêtement** d'un espace difféologique connexe  $X$  toute fibré difféologique  $P=(Y,X,p)$  à fibre type discrète.  $Y$  sera appelé espace de revêtement ou, lorsqu'aucune confusion ne sera possible, revêtement. Nous dirons encore que  $P$  est un **revêtement connexe** si son espace de revêtement est connexe.

Si la fibre type du revêtement est constituée de  $N$  points nous dirons que  $P$  est un revêtement à  $N$  **feuilles**.

Si le revêtement est un fibré difféologique principal nous dirons que c'est un **revêtement Galoisien**.

$P=(Y,X,p)$  et  $P'=(Y',X,p')$  étant deux revêtements de  $X$ , nous appellerons morphisme de revêtement tout  $X$ -morphisme  $\varphi$  de  $P$  à  $P'$  (§3.2). Est définie ainsi la catégorie

**Rev X**

des revêtements de  $X$ .

A titre d'exemples citons le revêtement  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}$  est difféologiquement discret. Ou bien  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}_\alpha$ ,  $\mathbb{T}_\alpha \sim \mathbb{R}/\mathbb{Z} \oplus \alpha\mathbb{Z}$ . Ces deux revêtements sont Galoisien. De façon générale tout quotient d'une variété par un groupe difféologiquement discret est un revêtement Galoisien (3.9.3).

#### 6.1.2 Proposition :

Etant donné un revêtement  $P=(Y,X,p)$  de fibre type  $F=p^{-1}(x_0)$ ,  $x_0 \in X$  et  $\varphi \in D(\mathbb{R}^n, X)$ , une plaque globale telle que  $\varphi(0)=x_0$ . Il existe une trivialisations  $\Psi$  de l'image réciproque  $P_\varphi$  de  $P$  par  $\varphi$  telle que  $\Psi|_{\{0\} \times F} = \mathbb{1}_F$ ,

de plus si  $y_0$  est un point de  $F$  il existe un relevé unique  $\varphi^*$  de  $\varphi$  dans  $Y$  tel que  $\varphi^*(0)=y_0$ .

□ Nous avons déjà rencontré la première propriété dans la démonstration des propositions (5.5.1) (5.5.4). Considérons une trivialisatation  $\Psi$  de ce type:

$$\forall (r,y) \in \mathbb{R}^n \times F \quad \Psi(r,y) = (r, \psi(r)(y)) \quad \psi \in D(\mathbb{R}^n, T) \quad \psi(r) \in \text{Diff}(F, Y_{\pi(r)}) \quad \psi(0) = \mathbb{1}_F$$

où  $T$  est l'espace total du fibré principal associé à  $P$  (3.4.1).

L'application  $\varphi^* : r \mapsto \psi(r)(y_0)$ ,  $y_0 \in F$ , est un relevé de  $\varphi$  dans  $Y$  vérifiant  $\varphi^*(0)=y_0$ . Soit  $\xi$  un autre relevé de  $\varphi$  dans  $Y$  vérifiant  $\xi(0)=y_0$ . L'image, par  $\Psi^{-1}$  de la section  $r \mapsto \xi(r)$  de  $P_\bullet$ , s'écrit  $r \mapsto (r, \sigma(r))$  où  $\sigma \in D(\mathbb{R}^n, F)$  et vérifie  $\sigma(0)=y_0$ , or  $F$  est discret et donc  $\sigma(r)=\text{cst}=\sigma(0)=y_0$ , d'où  $\xi(r)=\psi(r)(y_0)=\varphi^*(r)$ . □

En particulier, en ce qui concerne les arcs dans  $X$ , la propriété reste vraie en imposant au relevé d'un arc  $f$  de passer par  $y_0$  pour  $t=1$ . Nous noterons dans ce cas:

$$\forall f \in \text{Arc}(X) \quad \text{rel}_{y_0}(f) = f^* \Rightarrow p \circ f^* = f \quad f^*(1) = y_0 \quad (6.1.2)$$

Considérons alors l'isomorphisme  $p_1^* : \pi_1(Y, F, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  (5.5.1). Son inverse  $[p_1^*]^{-1}$  est justement l'application qui, à la classe d'homotopie d'un lacet  $f$  dans  $X$  au point  $x_0$ , associe la classe d'homotopie du relevé  $f^*$  de  $f$  au point  $y_0$ :

$$\begin{array}{ccc}
 L(X, x_0) & \xleftarrow{p_1} & L(Y, F, y_0) \\
 \uparrow & \text{rel}_y & \uparrow \\
 \pi_1(X, x_0) & \xleftarrow{p_1^*} & \pi_1(Y, F, y_0) \\
 & \xrightarrow{p_1^{*-1}} & 
 \end{array}$$

(diag. 6.1)

Le composé  $\Delta_0 = \partial_0 \circ [p_1^*]^{-1}$  (5.5.2) associe alors à la classe d'homotopie du lacet  $f$  l'origine de son relevé  $f^*$  passant par  $y_0$ , en identifiant  $\pi_0(F, y_0)$  avec l'espace pointé  $(F, y_0)$ :

$$\begin{aligned} \Delta_0 : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow (F, y_0) \\ [f] &\mapsto \text{or}(\text{rel}_{y_0}(f)) \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

où  $[f]$  désigne la classe d'homotopie de  $f \in L(X, x_0)$ . Nous poserons alors:

$$\forall \tau \in \pi_1(X, x_0) \quad \forall y_0 \in F \quad \gamma_0(\tau) = \mathbb{I}_F(y_0) = \Delta_0(\tau) \quad (6.1.4)$$

Grâce à la définition de la juxtaposition des lacets (4.3.1), l'application  $(\tau, y_0) \mapsto \mathbb{I}_F(y_0)$  est une action de  $\pi_1(X, x_0)$  sur  $F = p^{-1}(x_0)$ . La suite d'homotopie du fibré  $P = (Y, X, p)$ , s'écrit alors en remplaçant  $y_0$  par  $y$ ,  $x_0$  par  $x$ ,  $\Delta_0$  par  $\gamma$ ,  $\pi_0(F, y)$  par  $(F, y)$  et en remarquant que  $\pi_n(F, y) = 0$  pour  $n \geq 2$ :

$$\left. \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & p_n^* & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & \pi_n(Y, y) & \rightarrow & \pi_n(X, x) & \rightarrow & 0 \quad n \geq 2 \\ & & \downarrow p_1^* & & \downarrow \gamma & & \downarrow \text{in}_{F_0}^* \\ 0 & \rightarrow & \pi_1(Y, y) & \rightarrow & \pi_1(X, x) & \rightarrow & (F, y) \rightarrow \pi_0(Y, y) \rightarrow 0 \end{array} \\ & & & & & & \end{array} \right\} (6.1.5)$$

on déduit alors de 6.1 **6:**  
5

**6.1.6 Proposition :**

- a)  $p_n^*$  est un isomorphisme pour tout  $n \geq 2$ .  $p_1^*$  est un homomorphisme injectif.
- b) L'image par  $p_1^*$  de  $\pi_1(Y, y)$  est le stabilisateur de  $y$  pour l'action de  $\pi_1(X, x)$ . Pour que  $Y$  soit connexe il faut et il suffit que  $\pi_1(X, x)$  agisse transitivement sur  $F$ .
- c) Si  $Y$  est connexe et  $p_1^*$  surjectif (donc bijectif)  $p$  est un difféomorphisme. Si  $X$  est simplement connexe tout revêtement de  $X$  est trivial.
- d) Pour que  $Y$  soit connexe et simplement connexe il faut et il suffit que  $\pi_1(X, x)$  agisse librement et transitivement sur  $F$ ,  $P$  est alors un fibré difféologique principal de groupe structural  $\pi_1(X, x)$ .

□ a) est une conséquence immédiate de la suite exacte.

b)  $\ker(\mathbf{y}) = \text{Im}(p_1^*)$  grâce à l'exactitude de la suite du fibré P, or  $\ker(\mathbf{y})$  est par définition le stabilisateur de  $y$  pour l'action de  $\pi_1(X, x)$ . Y est connexe si  $\pi_0(Y, y) = 0$  ce qui est alors équivalent, grâce à 6.1.5, à  $\text{Im}(\mathbf{y}) = F$ , or  $\text{Im}(\mathbf{y})$  est l'orbite de  $y$  par  $\pi_1(X, x)$ .

c) Si  $p_1^*$  est surjectif alors  $\ker(\mathbf{y}) = \pi_1(X, x)$  et donc  $\text{Im}(\mathbf{y}) = 0$ , si de plus Y est connexe on déduit  $(F, y) = \{y\}$ , la fibre type est réduite à un point,  $p$  est une subduction injective c'est donc un difféomorphisme. Si d'autre part X est simplement connexe alors  $(F, y) = \pi_0(Y, y)$  et  $\pi_1(Y, y) = 0$  ce qui implique que la restriction de  $p$  à chaque composante connexe est un difféomorphisme et donc que P est trivial.

d)  $\pi_1(X, x)$  agit librement et transitivement si et seulement si  $\ker(\mathbf{y}) = \mathbb{1}_x$  et  $\text{Im}(\mathbf{y}) = F$ , d'où on déduit  $\pi_1(Y, y) = 0$ ,  $\pi_0(Y, y) = 0$  (et réciproquement). □

## 6.2 Théorème de monodromie.

### 6.2.1 Proposition :

Etant donné un revêtement  $P = (Y, X, p)$ , un espace difféologique connexe M et  $f \in D(M, X)$ , soient  $f_1$  et  $f_2$  deux relevés de  $f$  dans Y. S'ils coïncident en un point ils coïncident partout.

□ Soit  $m_0 \in M$  tel que  $f_1(m_0) = f_2(m_0) = y_0$ . Soit  $m \in M$ , puisque M est connexe il existe un arc  $\varphi$  joignant  $m_0$  à  $m$  et donc  $h = f \circ \varphi$  est un arc joignant  $f(m_0)$  à  $f(m)$ . Les arcs  $f_1 \circ \varphi$  et  $f_2 \circ \varphi$  sont deux relevés de  $h$  coïncidant en 0, ils coïncident alors partout (6.1.1). D'où on déduit  $f_1(m) = f_2(m)$ . □

### 6.2.2 Proposition (théorème de monodromie) :

Etant donné un revêtement  $P = (Y, X, p)$ , un espace difféologique connexe M et  $f \in D(M, X)$ . Si M est simplement connexe il existe un relevé  $f^*$  de  $f$  dans Y.  $f^*$  est unique si on impose  $f^*(m_0) = y_0$ .



□ Soit  $P_f$  l'image réciproque de  $P$  par  $f$ .  $P_f$  est un fibré difféologique à fibre discrète, c'est donc un revêtement. puisque  $M$  est simplement connexe  $P_f$  est trivial (6.1.6). Il suffit alors de prendre une section de  $P_f$  et de la transporter dans  $Y$ . Le reste est immédiat (cf. 6.1.2). □

### 6.3 Revêtement universel.

Soit  $X$  un espace difféologique connexe et  $x_0 \in X$ . Soit  $\Pi = (\mathbb{H}, X, \pi)$  le fibré principal associé du groupoïde fondamental  $X^\Pi$  de  $X$  (4.4.4) au point  $x_0$ . C'est un fibré difféologique principal de groupe structural  $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{H}_{x_0}$ .

Par définition  $\mathbb{H}$  est l'espace des classes de  $[0, 1]$ -homotopie des arcs dans  $X$  d'origine  $x_0$ . L'action de  $\pi_1(X, x_0)$  sur  $\mathbb{H}$  s'écrit naturellement:

$$\forall (\tau, \xi) \in \pi_1(X, x_0) \times \mathbb{H} \quad \tau \cdot \xi = \tau \xi \quad (6.3.1)$$

Puisque  $\pi_1(X, x_0)$  agit librement et transitivement sur chaque fibre on déduit de 6.1.7 d) que  $\Pi$  est un revêtement connexe et simplement connexe:

#### 6.3.2 Proposition :

Tout espace difféologique connexe  $X$  possède un revêtement connexe et simplement connexe, unique à équivalence près. C'est un revêtement Galoisien de groupe structural  $\pi_1(X)$ . Il sera appelé **revêtement universel** de  $X$ .

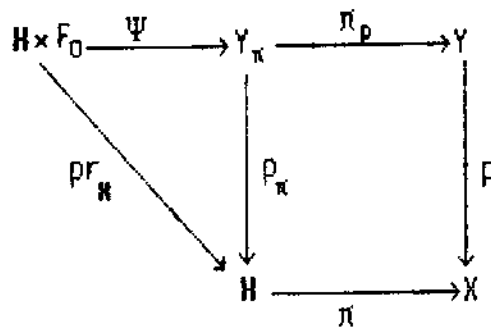
Tout autre revêtement est un quotient du revêtement universel par un sous-groupe du groupe  $\pi_1(X)$ . Les classes d'équivalence de revêtements sont en bijection avec les classes de conjugaisons des sous-groupes de  $\pi_1(X)$ . Les classes d'équivalence de revêtements Galoisien sont en bijection avec les classes de conjugaisons des sous-groupes invariants de  $\pi_1(X)$ .

□ Soit  $\Pi = (\mathbb{H}, X, \pi)$  le fibré principal de groupe structural  $\pi_1(X, x_0)$ , associé au groupoïde fondamental  $X^\Pi$  de  $X$  en un point de base quelconque  $x_0 \in X$  (4.4.4).

Puisque  $\pi_1(X, x_0)$  agit librement et transitivement sur les fibres  $\mathbb{H}$  est simplement connexe (6.1.7 d).

Soit  $P=(Y, X, p)$  un revêtement de  $X$ , de fibre type  $F_0=p^{-1}(x_0)$  et  $P_\pi=(Y_\pi, \mathbb{H}, p_\pi)$  l'image réciproque de  $P$  par  $\pi$ . Puisque  $\mathbb{H}$  est simplement connexe, en vertu de 6.1.7c),  $P_\pi$  est trivial. Soit alors  $\Psi$  une trivialisation vérifiant  $\Psi|_{\{\mathbb{H} \times_0 F_0\}} = \mathbb{1}_{F_0}$ :

$$\forall (\xi, y) \in \mathbb{H} \times F_0 \quad \Psi(\xi, y) = (\xi, \psi(\xi)(y)) \quad \psi(\xi) \in \text{Diff}(F_0, Y_{\pi(\xi)})$$



(diag. 6.2)

$\psi$  est un relevé de  $\pi$  dans le fibré principal associé à la fibration  $p$  (3.8.5).

Soit  $\xi$  la classe d'homotopie d'un arc  $f$  dans  $X$  d'origine  $x_0$ . Le relevé  $f^*$  de  $f$  dans  $\mathbb{H}$  d'origine  $\mathbb{1}_{x_0}$  est défini par:

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad f^*(s) = \text{classe}([t \mapsto f(st)])$$

l'arc

$$f^*_y : t \mapsto \psi(f^*(t))(y) \quad y \in F_0$$

est le relevé de  $f$  dans  $Y$  d'origine  $y \in F_0$ . On a noté  $\text{classe}(f)$  la classe de  $[0, 1]$ -homotopie de l'arc  $f$ .

Nous pouvons alors écrire:

$$\forall \xi \in \mathbb{H} \quad \forall y \in F_0 \quad \xi = \text{classe}(f) \Rightarrow \psi(\xi)(y) = \text{rel}_y(f)(1) = f^*_y(1)$$

On déduit alors la propriété caractéristique de  $\psi$ :

$$\forall \tau \in \pi_1(X, x_0) \quad \forall \xi \in \mathbb{H} \quad \forall y \in Y \quad \psi(\tau \cdot \xi)(y) = \psi(\xi)(\mathbb{1}_{F_0}^{-1}(y))$$

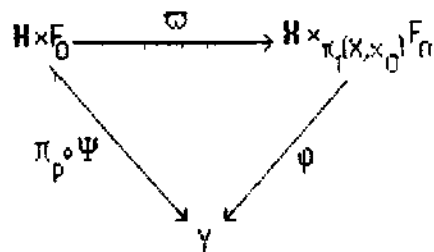
on a, en particulier:

$$\psi(\tau)(y) = \mathbb{1}_{F_0}^{-1}(y)$$

Considérons alors deux points  $(\xi, y)$  et  $(\xi', y')$  de  $\mathbb{H} \times F_0$ . Ils ont même image par  $\pi_p \circ \Psi$  si et seulement si  $\psi(\xi)(y) = \psi(\xi')(y')$ , c'est à dire, en posant  $\tau = \xi' \cdot \xi^{-1}$ ,  $\tau \in \pi_1(X, x_0)$ :

$$\exists \tau \in \pi_1(X, x_0) \quad \tau \xi = \xi' \quad \tau_{F_0}(y) = y'$$

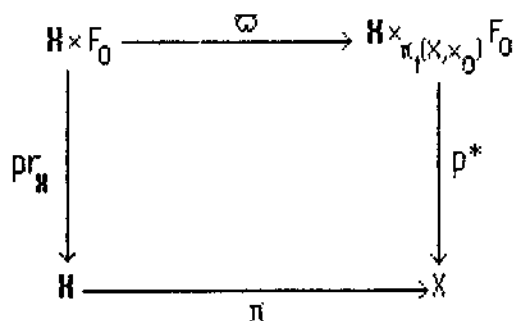
Puisque  $\pi_p \circ \Psi$  est surjective, sa factorisation  $\varphi$  sur le quotient différentiel  $\mathbb{H} \times_{\pi_1(X, x_0)} F_0$  est une application différentiable bijective, nous noterons  $\varpi$  la projection de  $\mathbb{H} \times F_0$  sur  $\mathbb{H} \times_{\pi_1(X, x_0)} F_0$ :



(diag. 6.3)

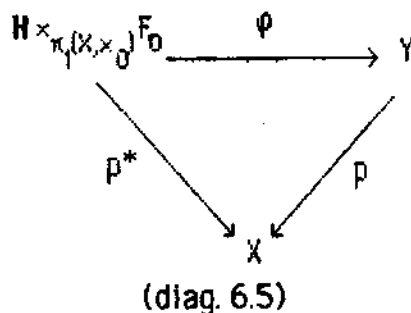
Puisque  $\pi$  et  $p$  sont des subductions il en est de même de  $\pi_p$  (1.4.8), donc  $\pi_p \circ \Psi$  est une subduction; puisque  $\varpi$  est une subduction il en est de même de  $\varphi$  (1.2.16), c'est donc une subduction bijective: c'est un difféomorphisme.

Soit  $P^* = (\mathbb{H} \times_{\pi_1(X, x_0)} F_0, X, p^*)$  le fibré associé à  $\Pi$  par l'action de  $\pi_1(X, x_0)$  sur  $F_0$  (diag. 6.4):



(diag. 6.4)

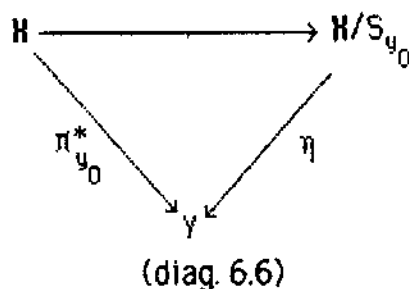
la commutativité du diagramme 6.5 achève de prouver que  $\varphi$  est une équivalence de revêtements.



Considérons maintenant un point  $y_0$  de  $F_0$  et le relevé:

$$\pi_{y_0}^* : \xi \mapsto \varphi \circ \omega(\xi, y_0)$$

de  $\pi$  dans  $Y$ .  $Y$  est connexe si et seulement si  $\pi_1(X, x_0)$  agit transitivement sur  $F_0$  (6.1.7b)), auquel cas tout points de  $Y$  s'écrit:  $\varphi \circ \omega(\xi, y_0)$   $\xi \in \mathbb{H}$ , d'où on déduit que  $\pi_{y_0}^*$  est surjective. D'autre part deux points  $\xi$  et  $\xi'$  de  $\mathbb{H}$  auront même image par  $\pi_{y_0}^*$  si et seulement si  $\xi' = \tau \cdot \xi$  et  $y_0 = \tau \cdot_{F_0}(y_0)$  avec  $\tau \in \pi_1(X, x_0)$ . C'est à dire si et seulement si  $\xi$  et  $\xi'$  appartiennent à la même orbite du stabilisateur  $S_{y_0}$  dans  $\pi_1(X, x_0)$  de  $y_0$  qui n'est autre d'ailleurs que le groupe fondamental de  $Y$  au point  $y_0$  plongé dans  $\pi_1(X, x_0)$  par  $p_1^*$ . Donc  $\pi_{y_0}^*$  se factorise en une application différentiable bijective  $\eta$  sur le quotient difféologique de  $\mathbb{H}$  par  $S_{y_0}$ :



Mais  $\pi_{y_0}^*$  est une subduction car  $\pi$  en est une et  $p^* \circ \pi_{y_0}^* = \pi$  donc  $\eta$  est une subduction c'est donc un difféomorphisme. On vérifie immédiatement que c'est une équivalence de revêtement.

Le reste est purement algébrique et se déduit de façon classique.  $\square$

**6.3.3 Proposition :**

Si  $X$  et  $Y$  sont des espaces difféologiques connexes difféomorphes leurs revêtements universels sont isomorphes.

□ La démonstration est immédiate. □

**6.3.4 Proposition :**

Le revêtement universel d'un produit difféologique est le produit difféologique des revêtements universels.

□ Il suffit de constater que le produit d'espaces simplement connexe est encore simplement connexe et que la fibre type du produit des revêtements universels est encore discrète. □

On peut vérifier, que si  $X$  est une variété son revêtement universel construit dans ce paragraphe est une variété et coïncide avec son revêtement universel au sens des variétés, les espaces difféologiques discrets possédant une structure canonique de variété de dimension zéro. Remarquons encore que tout espace topologique muni de sa topo-difféologie [6] possède un revêtement universel difféologique, la projection sur la base pouvant ne pas être un homéomorphisme local pour la  $D$ -topologie.

**6.4 Revêtement et actions de groupes.**

La construction que nous avons décrite au paragraphe précédent s'applique en particulier aux groupes difféologiques:

Soit  $G$  un groupe difféologique connexe,  $\mathbb{1}_G$  son identité et  $P=(\Gamma, G, p)$  son revêtement universel, identifié au fibré principal associé à son groupoïde fondamental en l'identité (4.4.4).  $\Gamma$  est naturellement muni d'une loi de groupe induite par la multiplication, point par point, des arcs dans  $G$  d'origine  $\mathbb{1}_G$ , groupe de courant que nous noterons  $\text{Arc}(G, \mathbb{1}_G)$ . Par définition même de la difféologie d'espace de courant  $\text{Arc}(G, \mathbb{1}_G)$  muni de sa loi de groupe naturelle est un groupe difféologique. Il s'ensuit que  $\Gamma$ , quotient difféologique de  $\text{Arc}(G, \mathbb{1}_G)$  par la

$[0,1]$ -homotopie, est encore un groupe difféologique, par compatibilité de la multiplication dans  $\text{Arc}(G, \mathbb{I}_G)_{[0,1]}$  avec la partition en composantes connexes. La projection  $p : \Gamma \rightarrow G$  est un D-morphisme de groupe difféologique:

$$\forall (\gamma, \gamma') \in \Gamma \times \Gamma \quad p(\gamma \cdot \gamma') = p(\gamma) \cdot p(\gamma') \quad (6.4.1)$$

On retrouve de cette façon la construction des revêtements universels des groupes difféologiques [23].

Considérons maintenant un espace difféologique  $X$  muni d'une action différentiable de  $G$ ,  $G$  connexe. Nous allons construire une action naturelle du revêtement universel  $\Gamma$  de  $G$  sur le revêtement universel  $\mathbb{H}$  de  $X$ . Nous poserons  $\pi : \mathbb{H} \rightarrow X$  la projection du revêtement universel sur sa base.

Solent  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux points de  $\Gamma$ , ce sont les classes d'homotopie de deux arcs  $\phi$  et  $\phi'$  d'origine  $\mathbb{I}_G$ . Le produit  $\gamma \cdot \gamma'$  est la classe d'homotopie de l'arc  $\phi \cdot \phi'$  défini par:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi \cdot \phi'(t) = \phi(t) \cdot \phi'(t) \quad (6.4.2)$$

$\Pi = (\mathbb{H}, X, \pi)$  sera identifié au fibré principal associé au groupoïde fondamental de  $X$  au point  $x_0 \in X$ . L'action de  $G$  sur  $X$  sera noté  $\rho$ :

$$\rho \in D(G \times X, X) \quad \forall (a, a') \in G \times G \quad \forall x \in X \quad \rho(a, a', x) = \rho(a, \rho(a', x)) \quad (6.4.3)$$

Le revêtement universel de  $G \times X$  est le produit  $\Gamma \times \mathbb{H}$  avec la projection  $\rho \times \pi$  (6.3.4). L'application  $\rho \circ (\rho \times \pi)$  se relève dans  $\mathbb{H}$  (théorème de monodromie), le relevé est unique si on impose sa valeur au point  $(\mathbb{I}_\Gamma, \mathbb{I}_{x_0})$ . Nous noterons  $\rho^*$  le relevé défini par:

$$\rho^*(\mathbb{I}_\Gamma, \mathbb{I}_{x_0}) = \mathbb{I}_{x_0} \quad (6.4.4)$$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \times \mathbb{H} & \xrightarrow{\rho^*} & \mathbb{H} \\ \rho \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ G \times X & \xrightarrow{\rho} & X \end{array}$$

(diag. 6.7)

Compte tenu de ces notations:

#### 6.4.4 Proposition :

$\rho^*$  est une action différentiable de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}$ , nous dirons qu'elle relève  $\rho$ .  
En d'autres termes, toute action différentiable d'un groupe difféologique connexe  $G$  sur un espace difféologique connexe  $X$  se relève en une action différentiable du revêtement universel  $\Gamma$  de  $G$  sur le revêtement universel  $\mathbb{H}$  de  $X$ .

□ Soit  $(\gamma, \xi) \in \Gamma \times \mathbb{H}$ . Par définition  $\rho^*(\gamma, \xi)$  est l'extrémité du relevé, d'origine  $\mathbb{1}_{x_0}$ , dans  $X$  de  $\rho \circ (\rho \times \pi) \circ f$  où  $f$  est un arc d'origine  $(\mathbb{1}_\Gamma, \mathbb{1}_{x_0})$  et d'extrémité  $(\gamma, \xi)$ . posons  $(a, x) = (\rho(\gamma), \pi(x))$  et  $f(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ .

$\rho^*(\gamma, \xi)$  est aussi égal à l'extrémité du relevé d'origine  $\xi$  dans  $\mathbb{H}$  de l'arc:

$$x^*(\rho \circ \varphi) : t \mapsto (\rho(\rho(\varphi(t))), x) \quad x = \pi(\xi)$$

Il suffit en effet de décomposer, à homotopie près,  $f$  en la juxtaposition de deux arcs, le premier joignant  $(\mathbb{1}_\Gamma, \mathbb{1}_{x_0})$  à  $(\mathbb{1}_\Gamma, \xi)$ , le second joignant  $(\mathbb{1}_\Gamma, \xi)$  à  $(\gamma, \xi)$ .

Si  $(\gamma, \gamma') \in \Gamma \times \Gamma$ , l'arc  $x^*(\rho \circ \varphi, \varphi')$  où  $\varphi$  et  $\varphi'$  joignent  $\mathbb{1}_G$  à  $\gamma$  et  $\gamma'$  s'écrit encore:

$$t \mapsto \rho(\rho \circ \varphi(t), \rho(\rho \circ \varphi'(t), x))$$

Cet arc peut encore se décomposer, à homotopie près, en la juxtaposition de deux arcs: le premier joignant  $x$  à  $\rho(a', x)$  le second joignant  $\rho(a', x)$  à  $\rho(a, \rho(a', x))$  où  $(a, a') = \rho(\gamma, \gamma')$ . On déduit alors la loi d'action de groupe de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{H}$ . Le caractère différentiable de cette action est une conséquence du théorème de monodromie. □

Compte tenu des hypothèses et notations précédentes, soit  $K$  le noyau de l'action  $\rho^*$ ,  $\Gamma$  n'agit sur  $\mathbb{H}$  que par l'intermédiaire de  $\Gamma/K$  que nous noterons  $G^*$ :

$$G^* = \Gamma/K \quad K = \ker(\rho^*) \quad (6.4.5)$$

Soit  $Q = (X, M, q)$  un fibré difféologique principal de groupe structural  $G$  ( $G$  et  $X$  toujours connexes). Notons  $N = \mathbb{H}/\Gamma = \mathbb{H}/G^*$  et  $\omega$  la projection de  $\mathbb{H}$  sur  $N$ . Puisque  $\rho^*$  relève  $\rho$  il existe une projection canonique  $\zeta$  de  $N$  sur  $M$  telle que le diagramme 6.8 commute:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{H} & \xrightarrow{\pi} & X \\
 \omega \downarrow & & \downarrow q \\
 \mathbb{H}/\Gamma = N & \xrightarrow{\zeta} & M = X/G
 \end{array}$$

(diag. 6.8)

Compte tenu de ces notations:

#### 6.4.6 Proposition :

La projection  $\omega : \mathbb{H} \rightarrow \Gamma$  est une fibration principale de groupe structural  $G^*$ . Le triplet  $Z=(N,M,\zeta)$  réalise le revêtement universel de  $M$ .

□ Soit  $\xi \in \mathbb{H}$  et  $\gamma \in S_\xi$  stabilisateur de  $\xi$  dans  $\Gamma$ .  $\gamma$  est la classe d'homotopie d'un arc  $\varphi$  dans  $G$  d'origine  $\mathbb{1}_G$ .  $\rho^*(\gamma, \xi) = \gamma_\#(\xi)$  est défini comme l'extrémité du relevé de l'arc  $x^+(\varphi) = [t \mapsto \varphi(t)_x(x)]$ , où  $x = \pi(\xi)$ . Puisque  $\gamma_\#(\xi) = \xi$  on a  $\varphi(1)_x(x) = x$  et puisque l'action de  $G$  sur  $X$  est libre ceci implique que  $\varphi(1) = \mathbb{1}_G$  donc  $\varphi$  est un lacet dans  $G$  d'origine  $\mathbb{1}_G$ . Donc, en utilisant l'application  $x^*$  (5.5.5) on a:

$$S_\xi = \ker(x^*)$$

Montrons que  $\ker(x^*) = \ker(x'^*) \quad \forall (x, x') \in X \times X$  :

Puisque  $X$  est connexe, il existe un arc à bouts stationnaires  $f$  joignant  $x'$  à  $x$ . Soit  $f^s = [t \mapsto f(s, l(t))]$ , où  $l$  est une fonction de lissage du type 4.3.4.  $f^s$  est un arc à bouts stationnaires, l'application  $\eta$ :

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \eta(s) = [f^s \wedge \{f(s)^+(\varphi)\}] \wedge (f^s)^{-1}$$

est une homotopie joignant le lacet  $x^+(\varphi)$  au lacet  $[f \wedge \{x^+(\varphi)\}] \wedge f^{-1}$ . Donc si  $x^+(\varphi)$  est homotope à zéro il en est de même de  $x^+(\varphi)$  et réciproquement. Donc si  $\nu \in \pi_1(G, \mathbb{1}_G)$ :  $x^*(\nu) = 0 \iff x'^*(\nu) = 0$ . C'est à dire:  $\ker(x^*) = \ker(x'^*)$ .

On déduit donc immédiatement que l'action de  $G^* = \Gamma/K$  sur  $\mathbb{H}$  est libre, tous les stabilisateurs des points  $\xi \in \mathbb{H}$ , pour l'action  $\rho^*$  de  $\Gamma$ , étant égaux entre eux et



donc égaux au noyau  $K$  de  $p^*$ . La partie purement difféologique de la preuve que  $\omega$  est une fibration est relativement standard (difféologiquement parlant).

Considérons maintenant  $\Omega=(N,M,\omega)$  le revêtement universel de  $M$ . Soit  $x_0 \in X$ ,  $m_0=q(x_0) \in M$  et  $n_0$  un point de  $N_{m_0}$  identifié à  $\pi_1(M,m_0)$ .

L'image réciproque  $\Omega_q$  de  $\Omega$  par  $q$ , est un revêtement de  $X$ .  $N$  s'identifie donc au quotient de  $N_q = \pi_1(\Omega_q)$  par l'action  $(a;x,n) \mapsto (a_x(x),n)$  avec  $(a;x,n) \in G \times X \times N$ .

$$N = N_q / G$$

D'autre part  $N_q$  est connexe, il suffit pour s'en assurer d'utiliser les suites exactes d'homotopie de  $\Omega_q$  et  $\Omega$ , qui s'écrivent:

$$\begin{array}{ccccccc} & & r_q^* & & p_1^* & & i \\ 0 \rightarrow & \pi_1(N_q, (x_0, n_0)) & \rightarrow & \pi_1(X, x_0) & \rightarrow & \pi_1(M, m_0) & \rightarrow \pi_0(N_q, (x_0, n_0)) \rightarrow 0 \\ & & & x_0^* & & p_1^* & \\ \dots \rightarrow & \pi_1(G, \mathbb{1}_G) & \rightarrow & \pi_1(X, x_0) & \rightarrow & \pi_1(M, m_0) & \rightarrow 0 \end{array}$$

En vertu de 6.3.2, on déduit que  $N_q$  est équivalent au quotient de  $\mathbb{H}$  par  $\text{im}(r_q^*)$ .

Mais  $\text{im}(r_q^*) = \ker(p_1^*) = \text{im}(x_0^*)$  donc:

$$N_q = \mathbb{H} / \text{im}(x_0^*)$$

Or, de la définition de  $G^* = \Gamma / \ker(x_0^*)$  et de la suite exacte:

$$0 \rightarrow \pi_1(G, \mathbb{1}_G) \rightarrow \Gamma \rightarrow G \rightarrow 0$$

on déduit la suite exacte:

$$0 \rightarrow \pi_1(G, \mathbb{1}_G) / \ker(x_0^*) \rightarrow G^* \rightarrow G \rightarrow 0$$

Mais  $\pi_1(G, \mathbb{1}_G) / \ker(x_0^*) = \text{im}(x_0^*)$  donc:

$$0 \rightarrow \text{im}(x_0^*) \rightarrow G^* \rightarrow G \rightarrow 0$$

d'où on déduit:  $N = N_q / G = [\mathbb{H} / \text{im}(x_0^*)] / G = \mathbb{H} / G^*$ .  $\square$

L'application de ce théorème permet de retrouver la construction des revêtements des espaces difféologiques homogènes [6]. Dans ce cas:  $X$  groupe difféologique,  $G$  sous-groupe difféologique de  $X$ , le groupe  $G^*$  est égal à la compo-

sante connexe de l'image réciproque de  $G$  par  $p$ , on choisit  $x_0$  élément neutre de  $X$ .

**-Annexe 1-****HOMOLOGIE ET COHOMOLOGIE D'UN GROUPOÏDE****A1.1-Homologie d'un groupoïde difféologique K**

Nous définirons les **espaces de chaînes** d'un groupoïde difféologique K, comme les groupes abéliens libres de base  $S_n$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_0(K) = \text{Ob } K \\ S_1(K) = \text{Mor } K \\ S_n(K) = \{(Y_1, \dots, Y_n) \in [S_1(K)]^n \mid b(Y_i) = s(Y_{i+1})\} \end{array} \right. \quad (1)$$

où b et s sont les applications but et source de K. Les  $S_n(K)$  sont munis de leur difféologie naturelle de partie de produit.

Les opérateurs **bord**  $\partial_i$ ,  $i=0, 1, \dots, n$ ; définis sur  $S_n$  à valeurs dans  $S_{n-1}$  sont donnés par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall Y \in \text{Mor } K \quad \partial_0 Y = b(Y) \quad \partial_1 Y = s(Y) \\ \forall (Y_1, \dots, Y_n) \in S_n(K) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_0(Y_1, \dots, Y_n) = (Y_2, \dots, Y_n) \\ \partial_i(Y_1, \dots, Y_n) = (Y_1, \dots, Y_i, Y_{i+1}, \dots, Y_n) \quad i=1, \dots, n-1 \\ \partial_n(Y_1, \dots, Y_n) = (Y_1, \dots, Y_{n-1}) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2)$$

Les **n-chaînes**, éléments de  $C_n(K)$ , seront notées:

$$\psi = \sum_{\alpha \in A} n_\alpha \sigma_\alpha \quad \sigma_\alpha \in S_n(K) \quad (3)$$

où A est un ensemble fini d'indices et  $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ . Les  $C_n(K)$  possèdent un difféologie naturelle qui en font des groupes difféologiques.

L'**opérateur bord**  $\partial$ , défini sur  $C_n(K)$  à valeurs dans  $C_{n-1}(K)$ , est entièrement donné par son action sur les éléments de la base  $S_n(K)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K) \\ \forall (Y_1, \dots, Y_n) \in S_n(K) \quad \partial(Y_1, \dots, Y_n) = \sum_{i=0, \dots, n} (-1)^i \partial_i(Y_1, \dots, Y_n) \end{array} \right. \quad (4)$$

Nous conviendrons que toute 0-chaine a un bord nul.  $\partial$  est un D-morphisme de groupe difféologique abélien libre et vérifie la propriété des opérateurs bords, c'est à dire:

$$\partial \circ \partial = 0 \quad (5)$$

Les groupes d'homologie de K sont alors définis naturellement par:

$$H_n(K) = Z_n(K) / B_n(K) \quad (6)$$

où  $Z_n(K)$  est l'espace des **n-cycles** ( $\partial\varphi = 0$   $\varphi \in C_n(K)$ ) et  $B_n(K)$  l'espace des **n-bords** ( $\varphi = \partial\psi$   $\psi \in C_{n-1}(K)$ ).  $H_n(K)$  sera appelé **n-ème groupe d'homologie de K**, muni de la difféologie quotient de  $Z_n(K)$  par  $B_n(K)$  c'est un groupe difféologique abélien ( $Z_n(K)$  et  $B_n(K)$  étant munis de la difféologie de partie de  $C_n(K)$ ).

### A1.2-Cohomologie de K

Etant donné un groupe difféologique abélien G. L'espace des cochaînes de K à valeurs dans G, noté  $C^n(K, G)$ , est défini par:

$$C^n(K, G) = D\text{-hom}(C_n(K), G) \quad (1)$$

Tout homomorphisme de groupe abélien libre est entièrement défini par ses valeurs sur éléments d'une base, nous pouvons noter:

$$C^n(K, G) \sim D(S_n(K), G) \quad (2)$$

comme espace de courant  $C^n(K, G)$  possède une difféologie canonique. L'opérateur **cobord** est défini par dualité:

$$\left\{ \begin{array}{l} d : C^n(K, G) \rightarrow C^{n+1}(K, G) \quad d \circ d = 0 \\ \forall \varphi \in C_n(K) \quad \forall f \in C^n(K, G) \quad df(\varphi) = f(\partial\varphi) \end{array} \right. \quad (3)$$

Ceci permet donc de définir les groupes de cohomologie de K à valeur dans G, naturellement par:

$$H^n(K) = Z^n(K) / B^n(K) \quad (4)$$

$H^n(K)$  est appelé le **n-ème groupe de cohomologie** de K à valeurs dans G, de même que pour  $H_n(K)$ ,  $H^n(K)$  est un groupe difféologique.

En identifiant  $f \in C^n(K, G)$  avec l'élément de  $D(S_n(K), G)$  qui le définit, l'opérateur  $d$  s'écrit:

$$\begin{cases} f \in C^0(K, G) & df(\gamma) = f(b(\gamma)) - f(s(\gamma)) \\ f \in C^1(K, G) & df(\gamma_0, \gamma_1) = f(\gamma_1) - f(\gamma_0, \gamma_1) + f(\gamma_0) \\ f \in C^n(K, G) & df(\gamma_0, \dots, \gamma_n) = f(\gamma_1, \dots, \gamma_n) + \sum_{i=1, \dots, n} (-1)^i f(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_1, \dots, \gamma_n) + (-1)^{n+1} f(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}) \end{cases} \quad (5)$$

### A1.3-Interprétation des premiers groupes de cohomologie

La suite de l'opérateur  $d$  s'écrit schématiquement:

$$0 \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow C^2 \rightarrow C^3 \dots \quad (1)$$

où on a convenu que  $B^0(K, G) = 0$ . On a donc:

$$H^0(K, G) = Z^0(K, G) \quad (2)$$

Un 0-cocycle de  $K$  à valeur dans  $G$  est une application différentiable  $f$  définie sur  $\text{Ob } K$  à valeurs dans  $G$  vérifiant:

$$\forall \gamma \in \text{Mor } K \quad f(b(\gamma)) = f(s(\gamma)) \quad (3)$$

$\text{Mor } K$  est muni d'une relation d'équivalence:

$$\forall (x, y) \in \text{Ob } K \quad x \sim y \Leftrightarrow \exists \gamma \in \text{Mor } K \quad x = s(\gamma) \quad y = b(\gamma) \quad (4)$$

si on pose alors  $M_K = \text{Ob } K / \sim$ ,  $M_K$  muni de sa difféologie quotient, on a:

$$H^0(K, G) = D(M_K, G) \quad (5)$$

En dimension 1, on a:

$$\begin{cases} Z^1(K, G) = D\text{-fonct}(K, G) \\ B^1(K, G) = \{ \varphi \in Z^1(K, G) \mid \varphi(\gamma) = f(b(\gamma)) - f(s(\gamma)) \} \end{cases} \quad (6)$$

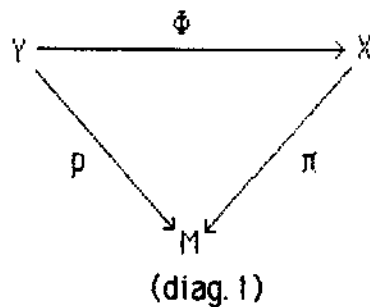
où  $D\text{-fonct}$  désigne l'espace des foncteurs différentiables (S2)

**MORPHISMES DE FIBRES**

**A2.1 Morphismes d'un fibré à un fibré principal**

Soient  $P=(Y,M,\rho)$  et  $\Pi=(X,M,\pi)$  deux fibrés difféologiques,  $\Pi$  fibré difféologique principal de groupe structural  $G$ .

Soit  $\Phi$  un  $M$ -morphisme de  $P$  à  $\Pi$ :



Pour tout  $m \in M$  et tout couple  $(y,y') \in Y_m$  il existe un unique  $a \in G$  tel que  $\Phi(y') = a_x \cdot \Phi(y)$  où  $[(a,x) \mapsto a_x(x)]$  désigne l'action de  $G$  sur  $X$ . On peut donc définir une application  $\varphi$  sur le graphe  $Gr(\mathcal{R}_\rho)$  de la relation d'équivalence  $\mathcal{R}_\rho$  attachée à  $\rho$  et à valeurs dans  $G$  par:

$$\forall (y,y') \in Gr(\mathcal{R}_\rho) \quad a = \varphi(y,y') \iff \Phi(y') = a_x \cdot \Phi(y) \quad (1)$$

**2 Proposition :**

L'application  $\varphi$  définie par (1) est différentiable et vérifie:

$$\forall (y,y') \in Gr(\mathcal{R}_\rho) \quad \forall (y',y'') \in Gr(\mathcal{R}_\rho) \quad \varphi(y,y'') = \varphi(y,y') \cdot \varphi(y',y'')$$

□ Soit  $Gr(\mathcal{R}_\pi)$  le graphe de la relation d'équivalence attachée à  $\pi$ . L'application  $\varphi$  se factorise en:

$$\forall (y,y') \in Gr(\mathcal{R}_\rho) \quad (y,y') \mapsto (\Phi(y), \Phi(y')) \mapsto \varphi(y,y')$$

où  $(\Phi(y), \Phi(y')) \in Gr(\mathcal{R}_\pi)$ , or l'application  $[(x,x') \mapsto a]$  tel que  $x' = a_x \cdot x$ , est différentiable par définition même des fibrés difféologiques principaux (3.4.1).

Les deux facteurs sont donc différentiables,  $\phi$  est aussi différentiable. le reste est une conséquence immédiate de la loi d'action de groupe.  $\square$

La propriété énoncée dans (2) signifie que  $\phi$  est un D-foncteur (2.2.2) de  $\text{Gr}(\mathcal{R}_p)$  dans  $G$ . Par analogie avec (A1.3.5) nous dirons que  $\phi$  est un 1-cocycle de  $\text{Gr}(\mathcal{R}_p)$  dans  $G$ . Nous l'appellerons le **cocycle caractéristique** du M-morphisme  $\Phi$ . Notons que le noyau (2.1.11) de  $\phi$  est donné par:

$$\ker(\phi) = \{ (y, y') \in \text{Gr}(\mathcal{R}_p) \mid \Phi(y) = \Phi(y') \} \quad (3)$$

Nous avons donc défini une application de l'espace des morphismes, d'un fibré sans structure  $P$  dans un fibré principal  $\Pi$ , dans l'espace  $Z^1(\text{Gr}(\mathcal{R}_p), G)$ . Nous allons inverser cette application. Définissons la relation d'équivalence associée à  $\phi$  sur  $Y \times G$ :

$$\forall (y, a) \in Y \times G \quad \forall (y', a') \in Y \times G \quad (y, a) \sim (y', a') \iff p(y) = p(y') \quad a' = a \cdot \phi(y, y') \quad (4)$$

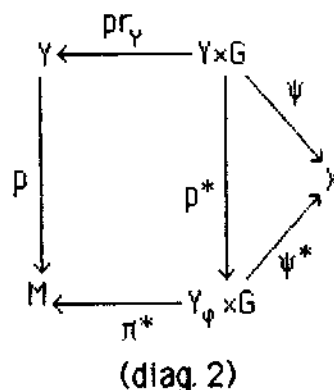
et soit<sup>1</sup>:

$$\Pi^* = (Y \times_{\phi} G, M, \pi^*) \quad (5)$$

le fibré associé à cette relation d'équivalence. Posons d'autre part  $\psi$  l'application définie sur  $Y \times G$  à valeurs dans  $X$  par:

$$\forall (y, a) \in Y \times G \quad \psi(y, a) = a_x \circ \Phi(y) \quad (6)$$

on a alors le diagramme commutatif suivant:



où  $\psi^*$  est la factorisation de  $\psi$  sur  $Y \times_{\phi} G$

<sup>1</sup> la notation  $Y \times_{\phi} G$  est utilisé pour désigner le quotient  $(Y \times G) / \sim$ . Quant à  $\pi^*$  c'est évidemment la factorisation de la projection  $(y, a) \mapsto p(y)$ .

**7 Proposition :**

$\psi$  est une M-équivalence de fibré principal où  $G$  agit sur  $Y \times_{\varphi} G$  par

$$\forall (a, y, b) \in G \times Y \times G \quad (a, p^*(y, b)) \mapsto p^*(y, a, b)$$

L'image du morphisme  $\Phi$  par  $\psi^*$  s'écrit:

$$\psi^{*-1} \circ \Phi(y) = p^*(y, \mathbb{1}_G)$$

□  $\psi^*$  est immédiatement bijective et différentiable, montrons que c'est une subduction.

Soit  $F$  une  $n$ -plaque de  $de$ , posons  $f = \pi \circ F$ , puisque  $p$  est une subduction il existe localement en tout point un relevé  $F'$  dans  $Y$  tel que  $p \circ F' = f|_{\text{def}(F)}$ , ceci permet alors de relever  $F$  dans  $Y \times_{\varphi} G$  par:  $[r \mapsto p^*(F'(r), \mathbb{1}_G)]$ . □

Donc tout cocycle  $\varphi \in Z^1(\text{Gr}(\mathcal{R}_p))$  est le cocycle caractéristique d'un fibré principal de groupe structural  $G$ , M-équivalent à  $\Pi^*$ , nous noterons alors  $\Pi^* = P \times_{\varphi} G$ .

**8 Proposition :**

Etant donné un fibré difféologique  $P = (Y, M, p)$  et deux cocycles  $\varphi$  et  $\varphi'$  éléments de  $Z^1(\text{Gr}(\mathcal{R}_p))$ . Les fibrés associés  $P \times_{\varphi} G$  et  $P \times_{\varphi'} G$  sont M-équivalents si et seulement si  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont cohomologues:

$$\exists h \in D(Y, G) \quad \varphi'(y, y') = h(y)^{-1} \cdot \varphi(y, y') \cdot h(y) \quad \forall (y, y') \in \text{Gr}(\mathcal{R}_p)$$

□ Supposons que  $\varphi$  et  $\varphi'$  soient cohomologues et soit  $\eta$  le difféomorphisme de  $Y \times G$  :

$$\eta(y, a) = (y, a \cdot h(y)) \quad (y, a) \in Y \times G$$

notons  $\sim_{\varphi}$  et  $\sim_{\varphi'}$  les relations d'équivalences attachées à  $\varphi$  et  $\varphi'$ , on a

$$(y, a) \sim_{\varphi} (y', a') \Rightarrow \eta(y, a) \sim_{\varphi'} \eta(y', a')$$

donc  $\eta$  se factorise en un difféomorphisme de  $Y \times_{\varphi} G$  sur  $Y \times_{\varphi'} G$ , on vérifie immédiatement que c'est une équivalence.

L'application

$$(y, a) \mapsto (y, p^*(y, a))$$



définie sur  $Y \times G$  à valeurs dans l'image réciproque de  $P \times_{\varphi} G$  par  $p$ , est une  $M$ -équivalence, donc si  $P \times_{\varphi} G$  et  $P \times_{\varphi'} G$  sont  $M$ -équivalents ils définissent une  $M$ -équivalence du fibré trivial  $Y \times G$  sur lui-même, qui s'écrit alors:

$$(y, a) \mapsto (y, g.h(a))$$

on vérifie immédiatement que  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont liés par la formule en question.  $\square$

Cette proposition nous permet d'interpréter  $H^1(\text{Gr}(\mathcal{R}_p))$ :

### 9 Proposition :

Soient  $P=(Y, M, p)$  un fibré difféologique,  $\Pi = (X, M, \pi)$  un fibré difféologique principal de groupe structural  $G$  et  $\Phi$  un morphisme de  $P$  à  $\Pi$ . La classe de  $M$ -équivalence de  $\Pi$  est entièrement caractérisé par la classe de cohomologie du cocycle caractéristique de  $\Phi$ . L'espace  $H^1(\text{Gr}(\mathcal{R}_p), G)$  est en bijection avec l'ensemble des classes de  $M$ -équivalence des fibrés difféologiques principaux de groupe structural  $G$  (et de base  $M$ ) sur lesquels la projection  $p$  se factorise en un  $M$ -morphisme. C'est encore l'ensemble des classes de  $M$ -équivalence des fibrés difféologiques principaux de groupe structural  $G$  tels que l'image réciproque par  $p$  soit triviale.

Remarquons que tous les morphismes de  $P$  à  $P \times_{\varphi} G$  s'écrivent:  $[y \mapsto p^*(y, h(y))]$  où  $h \in D(Y, G)$  à cause de la trivialité de  $\Pi_p$ . Notons encore que si  $P$  admet une section globale  $s$  alors  $H^1(\text{Gr}(\mathcal{R}_p), G) = 0$  pour tout  $G$ , car  $\Phi \circ s$  est une section de  $\Pi$  qui est alors trivial (3.4.5).

### A2.2 Flots libres sur les quotients de variétés.

Nous appellerons **flot libre** au dessus d'un espace difféologique  $M$  tout  $\mathbb{R}$ -fibré principal  $\Pi = (X, M, \pi)$ . Lorsque  $M$  est une variété tout flot libre es trivial, ceci est un résultat classique de la théorie des variétés fibrés [5].

**1 Proposition :**

Soit  $P=(Y,M,p)$  une subduction tel que  $Y$  soit une variété. L'espace  $H^1(\text{Gr}(\mathcal{R}_p),\mathbb{R})$  est en bijection avec l'espace des classes de  $M$ -équivalence de flots libres au dessus de  $M$ .

□ Conséquence immédiate de A1.9.□

Donc, dans ce cas  $H^1(\text{Gr}(\mathcal{R}_p),\mathbb{R})$  ne dépend de  $p$  que par l'intermédiaire de  $M$ .  
Nous noterons alors:

$$H^1(\text{Gr}(\mathcal{R}_p),\mathbb{R}) = \text{Flots}(M) \quad (2)$$

**EHEMPLES DE GROUPES DIFFEOLOGIQUES:  
FLOTS IRRATIONNELS SUR LE TORE**

Paul DONATO \*

Patrick IGLESIAS\*\*

Centre de Physique Théorique  
CNRS - Luminy - case 907  
F- 13288 Marseille Cedex 9

**Titre anglais:** An example of diffeological group: the irrational flow on the Torus.

**Abstract:** Using The J.-M.Souriau's theory of "diffeological groups", we define a differential on the irrational torus  $T_\alpha$  which allows us to compute its universal covering, equal to  $\mathbb{R}$ , and its first homotopy group equal to  $\mathbb{Z}^2$ . We prove that two such torus  $T_\alpha$  and  $T_\beta$  are diffeomorphic iff  $\alpha \sim \beta$  modulo  $Gl(2, \mathbb{Z})$ , finally we compute  $Diff(T_\alpha)$ . A significant difference appears between the quadratic irrational and the other cases.

**Résumé:** Nous illustrons la technique des "espaces et groupes difféologiques" de J.-M.Souriau dans le cas du quotient  $T_\alpha$  du tore standard par le flot irrationnel de pente  $\alpha$ . Le calcul du revêtement universel et du groupe fondamental de  $T_\alpha$ , respectivement  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{Z}^2$ , permet de classer difféologiquement ces tores:  $T_\alpha$  et  $T_\beta$  sont difféomorphes si et seulement si  $\alpha \sim \beta$  modulo  $Gl(2, \mathbb{Z})$ ; de plus le calcul de  $Diff(T_\alpha)$  fait apparaître une différence entre les irrationnels quadratiques et les autres.

July 1983 (revised march 85)  
CPT-83/P.1524

\*Université de Provence, département de mathématiques.

\*\*CNRS, Centre de Physique Théorique (Laboratoire propre)  
Luminy - case 907 - 13288 Marseille Cedex 9

## I. INTRODUCTION

Nous considérons le tore standard  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  muni de sa structure différentielle  $C^\infty$ . La projection sur  $\mathbb{T}^2$  d'une droite  $y=\alpha x$  de  $\mathbb{R}^2$  définit un sous-groupe à un paramètre de  $\mathbb{T}^2$  noté  $[\alpha]$ . Le groupe quotient est noté  $\mathbb{T}_\alpha = \mathbb{T}_\alpha^2/[\alpha]$ , sa topologie quotient est grossière. L'étude d'objets singuliers dont  $\mathbb{T}_\alpha$  est l'exemple le plus connu, a suscité le développement de différentes techniques, algébriques ou géométriques, citons parmi d'autres: les  $C^*$ -algèbres [3] [7], les  $Q$ -variétés [1], les schémas analytiques [2]. Nous voulons illustrer ici la technique des **espaces difféologiques**, initialement développée par J.-M.Souriau pour l'étude des groupes de dimension infinie, mais qui s'applique à tous les quotients (éventuellement singuliers) des groupes de Lie.  $\mathbb{T}_\alpha$  peut être muni d'une structure de groupe difféologique (nous renvoyons aux références [8] et [4] pour les détails concernant cette notion). Cette structure coïncide avec la structure canonique de groupe de Lie si  $\alpha$  est rationnel. Ici cette structure est caractérisée par la définition suivante [8]:

$f \in DL(\mathbb{R}^n, \mathbb{T}_\alpha)$  si et seulement si  $f$  est définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{T}_\alpha$  et vérifie: pour tout  $x$  dans  $\Omega$  il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $x$  et une application  $F \in C^\infty(V, \mathbb{T}^2)$  relevant  $f$ , i.e. on a dans  $V$  la relation:  $P_\alpha \circ F = f$ .

$P_\alpha$  est l'épimorphisme canonique de  $\mathbb{T}^2$  sur  $\mathbb{T}_\alpha$ ,  $DL(\mathbb{R}^n, \mathbb{T}_\alpha)$  est par définition la famille des applications différentiables d'ouverts de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{T}_\alpha$  (appelées aussi "n-plaques" de  $\mathbb{T}_\alpha$ ). L'ensemble des n-plaques, quand  $n$  parcourt  $\mathbb{N}$ , caractérise la structure difféologique de  $\mathbb{T}_\alpha$ .

Les applications différentiables de  $\mathbb{T}_\alpha$  à valeurs dans un "espace difféologique"  $E$ , sont les applications  $\phi: \mathbb{T}_\alpha \rightarrow E$  telles que pour toute plaque  $f$

de  $T_\alpha$ ,  $\varphi \circ f$  est une plaque de  $E$ . En particulier les difféomorphismes de  $T_\alpha$  à  $E$  sont les bijections bi-différentiables.

Pour tout groupe difféologique et pour tout espace homogène (quotient d'un groupe difféologique par un sous-groupe quelconque) sont définies les notions de connexité puis de simple connexité. Dans le cas connexe sont aussi définis le revêtement universel et le groupe fondamental qui ne dépendent que de la structure difféologique [4] [8].

Nous illustrons ces techniques dans le cas précis des enroulements irrationnels du tore. Le passage au revêtement universel de ces quotients nous permet d'en donner une classification difféologique complète; nous pouvons également expliciter le groupe des difféomorphismes de  $T_\alpha$ . En ce qui concerne la classification, il y a coïncidence des résultats avec ceux obtenus par la théorie des  $C^*$ -algèbres (cf. [3] et [7]); on trouve aussi une classification similaire faite à partir des schémas de variétés [2].

## II. REVETEMENT ET GROUPE FONDAMENTAL

Nous indiquons brièvement la construction du revêtement universel d'un espace difféologique homogène:

**Définition:** Soit  $G$  un groupe difféologique connexe et  $p: \tilde{G} \rightarrow G$  son revêtement universel. Soit  $H$  un sous-groupe quelconque de  $G$ ; on notera  $\tilde{H} = p^{-1}(H)$  et  $\tilde{H}^\circ$  sa composante neutre, on a le diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{G} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{G}/\tilde{H}^\circ \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G & \xrightarrow{\quad} & G/H
 \end{array}$$

$G/H^\circ$  est alors le revêtement universel de  $G/H$  et  $G/H^\circ$  son groupe fondamental. D'autre part tous les revêtements connexes de  $G/H$  sont donnés par les quotients  $G/K$  où  $K$  est un sous-groupe intermédiaire  $H^\circ \subset K \subset H$ .

Dans le cas particulier qui nous occupe, en notant  $D_\alpha$  la droite  $y = \alpha x$  et  $\xi$  le vecteur  $(0,1)$ , on a:

$$G = \mathbb{R}^2 \quad \mathfrak{G} = \mathbb{R}^2 \quad H = \{\alpha\} \quad H = D_\alpha + (\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})\xi$$

La connexité coïncide avec la connexité par arcs différentiables, un calcul facile montre alors que:

$$(3) \quad \mathbb{T}_\alpha = \mathbb{R} \quad \text{et que :} \quad \Pi_1(\mathbb{T}_\alpha) = \mathbb{Z}^2$$

Quelques commentaires: le revêtement universel difféologique de  $\mathbb{T}_\alpha$  est donc la projection  $\pi_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$ ; la fibre-type  $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$  est difféologiquement discrète, c.à.d. que les seules applications différentiables à valeurs dans la fibre sont les constantes. Enfin l'action de  $\Pi_1(\mathbb{T}_\alpha)$  sur  $\mathbb{R}$  est donnée par:  $(n,m)(x) = x + n + \alpha m$ . Les autres revêtements connexes de  $\mathbb{T}_\alpha$  sont du type :

$$(4) \quad \mathbb{R}/(k\mathbb{Z} + \alpha p\mathbb{Z}) \quad \text{où } (k,p) \in \mathbb{Z}^2$$

Le nombre de feuillet, quand  $k.p \neq 0$ , est égal  $k.p$ .

### III CLASSIFICATION DES $\mathbb{T}_\alpha$

Solent  $\mathbb{T}_\alpha$  et  $\mathbb{T}_\beta$  deux tores irrationnels, tout difféomorphisme  $\varphi \in \text{Diff}(\mathbb{T}_\alpha, \mathbb{T}_\beta)$ , se relève en un isomorphisme  $f$  de leurs revêtements universels:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
 \pi_\alpha \downarrow & & \downarrow \pi_\beta \\
 \mathbb{T}_\alpha & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{T}_\beta
 \end{array}$$

l'égalité  $\pi_\alpha \circ f = \varphi \circ \pi_\beta$  se traduit par : pour tout  $x$  réel et  $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ , il existe  $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$  tels que:

$$f(x+n+\alpha m)=f(x)+p+\beta q$$

où  $(x,n,m) \rightarrow (p,q)$  est une application de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}^2$  à  $\mathbb{Z}^2$  constante en  $x$  car différentiable en  $x$ . De plus  $f$  induit un isomorphisme de  $\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$  à  $\mathbb{Z}+\beta\mathbb{Z}$ ; il existe donc une matrice de  $Gl(2,\mathbb{Z})$  telle que:

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

avec  $a, b, c, d$  entiers tels que:  $ad-bc=\pm 1$ .

la différentiabilité de  $f$  implique  $f'(m+\alpha n)=f'(0)$ , et ce pour tous  $m,n$  entiers; on a donc, par densité de  $\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x)=f'(0)$ ,  $f$  est donc affine:  $f(x)=\lambda x + r$ ,  $\lambda \neq 0$ . Appliqué à  $x=n+\alpha m$ , il vient  $\lambda=c+\beta d$  et  $\alpha=(a\beta+b)/(c\beta+d)$ ;  $\alpha$  et  $\beta$  sont donc équivalents modulo  $Gl(2,\mathbb{Z})$ , dont l'action sur  $\mathbb{R}$  est donnée par:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} (x) = (ax+b)/(cx+d)$$

Réciproquement, on vérifie que si  $\alpha \sim \beta$  modulo  $Gl(2,\mathbb{Z})$  alors l'application  $f(x)=(c+\beta d)x+r$ , avec  $c$  et  $d$  premiers entre eux, se projette sur un difféomorphisme de  $T_\alpha$  à  $T_\beta$ .

**Théorème:** Deux tores irrationnels  $T_\alpha$  et  $T_\beta$  sont difféomorphes si et seulement si  $\alpha \sim \beta$  modulo  $Gl(2,\mathbb{Z})$ .

Remarque: ce théorème est trivialement vérifié pour des "tores rationnels".

## 10 DIFFÉOMORPHISMES DE $T_\alpha$

On a vu au paragraphe précédent que les seuls difféomorphismes d'un tore irrationnel à un autre sont les projections d'applications affines du type  $f(x)=(c+\beta d)x+r$ ,  $r$  réel et  $c,d$  entiers premiers entre eux. Si l'on impose à  $f$  de se projeter sur un difféomorphisme de  $T_\alpha$  dans lui-même il faut de plus qu'il existe  $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$  vérifiant:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \text{Stab}(\alpha)$$

où  $\text{Stab}(\alpha)$  est le groupe d'isotropie de  $\alpha$  sous l'action de  $\text{Gl}(2, \mathbb{Z})$ , cette condition (6) est la traduction de  $\alpha = (a\beta + b)/(c\beta + d)$  pour  $\alpha = \beta$ ; ces applications constituent un sous-groupe du groupe affine de  $\mathbb{R}$ . En caractérisant leurs projections on détermine tous les difféomorphismes de  $\mathbb{T}_\alpha$  dans lui-même. Deux applications affines du type ci-dessus se projettent sur un même difféomorphisme si et seulement si

$$\begin{cases} (c, d) = (c', d') \\ \pi_\alpha(r) = \pi_\alpha(r') \end{cases}$$

Définissons sur  $\text{Stab}(\alpha) \times \mathbb{T}_\alpha$  la loi affine :

$$(8) \quad (M, \rho) \cdot (M', \rho') = (MM', M.\rho' + \rho) \\ M.\rho = \pi_\alpha[(c + \alpha d)x] \text{ si } \pi_\alpha(x) = \rho$$

où  $M$  est une matrice de  $\text{Gl}(2, \mathbb{Z})$  de coefficients  $(a, b, c, d)$ . C'est une loi de groupe difféologique pour laquelle:

$$(9) \quad (M, \pi_\alpha(x)) \rightarrow \{ \pi_\alpha(x) \rightarrow \pi_\alpha[(c + \alpha d)x] \}$$

est un isomorphisme différentiable de  $\text{Stab}(\alpha) \times \mathbb{T}_\alpha$  à  $\text{Diff}(\mathbb{T}_\alpha)$ .

L'action de  $\text{Gl}(2, \mathbb{Z})$  sur un réel se traduit par la modification de ses premiers coefficients dans sa décomposition en fractions continues; ainsi deux réels sont équivalents modulo  $\text{Gl}(2, \mathbb{Z})$  si et seulement si ils ont même décomposition à partir d'un certain rang (qui n'est pas nécessairement le même pour les deux). Les irrationnels quadratiques sont les réels dont la suite des coefficients devient périodique; ainsi enlever ou ajouter des périodes à la suite laissera le nombre inchangé (cf. [9] pour ces questions). A partir de ces remarques on peut établir que:



$$(10) \quad \text{Stab}(\alpha) = \mathbb{Z}_2 = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } \alpha \text{ est irrationnel non} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{quadratique} \end{cases}$$

$$\text{Stab}(\alpha) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \quad \text{si } \alpha \text{ est irrationnel quadratique}$$

d'où l'énoncé:

**Théorème:** La composante neutre du groupe  $\text{Diff}(\mathbb{T}_\alpha)$  est égal au groupe des translations de  $\mathbb{T}_\alpha$ . Le groupe de ses composantes est égal à:

- a)  $\mathbb{Z}_2$  si  $\alpha$  est irrationnel non quadratique
- b)  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$  si  $\alpha$  est irrationnel quadratique

C'est à notre connaissance la première fois qu'une classification des  $\mathbb{T}_\alpha$  distingue les nombres quadratiques. La différence entre les nombres diophantiens et les nombres de Liouville, qui apparaît dans l'étude cohomologique des variétés feuilletées [5], se retrouve également dans la classification des fibrés  $\mathbb{R}$ -principaux au-dessus de  $\mathbb{T}_\alpha$  (cf [6])

Les discussions que nous avons eues avec J. Bellissard et J.-M. Souriau nous ont été précieuses; nous les en remercions.

#### Bibliographie:

- [1] R. Barre: "De quelques aspects de la théorie des  $\mathbb{Q}$ -variétés différentielles et analytiques", Ann. Inst. Fourier, 23 (1973), 227-312.
- [2] L.G. Bouma - W.T. van Est: "Manifold schemes and foliations on the 2-Torus and the Klein bottle", Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. series A, 81 (1978), 313-347
- [3] A. Connes: "An analogue of the cross products of  $C^*$ -algebras", Adv. in Math. vol 39 (1981), 31-55
- [4] P. Donato: "Revêtements et groupe fondamental des espaces différentiels homogènes" Thèse de doctorat d'état, Université de Provence (1984).
- [5] J.L. Heitsch: A cohomology for foliated manifolds, Commentarii Math. Helvetici, 50, 1975, p. 197-218
- [6] P. Iglesias: "Classification des fibrés principaux de groupe  $(\mathbb{R}, +)$  sur les tores de Denjoy-Poincaré", prepublication CPT84/P.1690

- [7] M.A. Rieffel: "  $C^*$ -algebras associated with irrational rotations", Pacific J. of Math. 93 2 (1981) 415–429
- [8] J.-M. Souriau: "Groupes Différentiels", Lect. Notes in Math. vol 836, Springer Verlag (1981), 91–128
- [9] H.M. Stark: " An introduction to Number Theory " , Markham Publish. Chicago 1970

**Annexe 4**

**Difféologie d' espace singulier et petits diviseurs**

Patrick Iglesias

Centre de Physique théorique\*  
CNRS-Luminy-Case 907  
F-13288 MARSEILLE Cedex 9 (France)

**Résumé:** On montre comment apparaît, dans la théorie des fibrés différentiels, la question des petits diviseurs, en particulier dans l'étude du tore irrationnel  $T_\alpha$ .

**Abstract:** We show how appears, in the theory of diffeological spaces, the question of small divisors, in particular in the study of the irrational torus  $T_\alpha$ .

août 85

\*Laboratoire propre. Centre National de la Recherche Scientifique.

CPT-85/P.1803

A moins d'être définis explicitement, les objets dont il est question dans cette note: difféologie, applications différentiables, subduction, induction... doivent être compris au sens de la catégorie des espaces difféologiques [4][7][9].

## 1- Fibrés difféologiques principaux

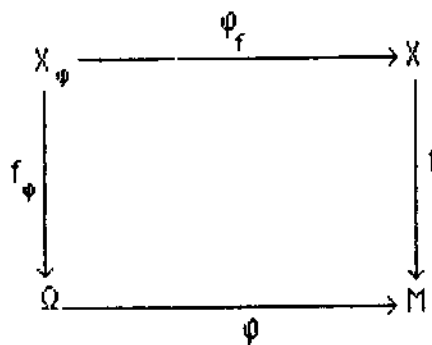
La notion de fibration se généralise aux espaces difféologiques, elle fait appel à une propriété des applications que nous avons appelée micro trivialité [7]:

### 1.1 Définition:

Une application différentiable  $f \in D(X, M)$ ,  $X$  et  $M$  espaces difféologiques, sera dite **micro triviale** si, pour toute plaque  $\varphi$  de  $M$ , l'image réciproque  $f_\varphi$  (de  $f$  par  $\varphi$ ) de base  $\text{def}(\varphi)$  (ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ) est localement triviale.

Rappelons que l'image réciproque d'une application différentiable  $f : X \rightarrow M$  par une application différentiable  $\varphi : \Omega \rightarrow M$  est définie par:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_\varphi = \{(r, x) \in \Omega \times X \mid \varphi(r) = f(x)\} \\ f_\varphi = \text{pr}_\Omega \mid_{X_\varphi} \quad \text{ou } \text{pr}_\Omega \text{ est la projection sur } \Omega \end{array} \right. \quad (1.2)$$



Le diagramme précédent est évidemment commutatif, Les applications  $f_\varphi$  et  $\varphi_f$  désignent, respectivement, les restrictions des projections  $\text{pr}_\Omega$  et  $\text{pr}_X$  à  $X_\varphi$ . Ce sont des subductions parce que  $f$  et  $\varphi$  sont des subductions [7].

La propriété de micro trivialité s'exprime en termes purement géométriques en utilisant la notion de **groupoïde associé** à une application différentiable (voir

[7]). Si  $p : X \rightarrow M$  est une fibration, c'est en particulier une subduction, toutes les **fibres**  $X_m = p^{-1}(m)$ ,  $m \in M$ , munies de la difféologie de partie, sont diffeomorphes [7] leur type difféologique est appelé **fibre type**.

Si  $p : X \rightarrow M$  est une fibration le triplet  $P = (X, M, p)$  sera aussi appelé fibré (difféologique),  $X$  sera l'**espace total**,  $M$  la **base** et  $p$  la **projection**, du fibré (la fibre type  $F$  est souvent identifiée avec une fibre  $X_{m_0} = p^{-1}(m_0)$ ,  $m_0 \in M$ ).

La définition des **fibres difféologiques principaux** est donnée grâce à la proposition suivante:

### 1.3 Proposition:

Etant donné: un espace difféologique  $X$ , un groupe difféologique  $G$  et une action différentiable de  $G$  sur  $X$ , notée  $(a, x) \mapsto a_x(x)$  avec  $(a, x) \in G \times X$ . Si l'application  $\mathcal{F}$  définie par:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : X \times G &\rightarrow X \times X \\ (x, a) &\mapsto (x, a_x(x)) \end{aligned}$$

est une induction alors La projection canonique  $\pi$  de  $X$  sur son quotient difféologique  $M = X/G$  est une fibration difféologique nous dirons alors que  $\Pi = (X, M, \pi)$  muni de l'action de  $G$  est une **fibration difféologique principale**.

□ voir [7] □

### 1.4 proposition :

a) Si la base d'un fibré difféologique principal est une variété, il est localement  $D$ -trivial. Si la fibre type est aussi une variété l'espace total est une variété.

b) L'image réciproque d'un fibré difféologique (principal) par une application différentiable est encore un fibré difféologique (principal).

c) Si  $G$  est un groupe difféologique et  $H$  un sous groupe de  $G$ . La projection canonique de  $G$  sur son quotient  $G/H$  est une fibration difféologique.

□ voir [7] □

### 1.5 Définition :

Deux fibrés difféologiques principaux de même base et de même groupe seront **équivalents** s'il existe un difféomorphisme équivariant de leurs espaces totaux se projetant sur l'identité de la base.

## 2- Flots libres sur les tores de Denjoy-Poincaré

Nous appelons **flot libre** au dessus d'un espace difféologique  $M$  tout fibré difféologique principal de groupe structural  $(\mathbb{R}, +)$  de base  $M$  [3].

Nous appelons **tore irrationnel**  $\mathbb{T}_\alpha$  le quotient oblique du tore  $\mathbb{T}^2$  par la droite de pente irrationnelle  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . Difféologiquement cet espace s'identifie avec le quotient du cercle  $S^1$  par l'action  $r_\alpha$  de  $\mathbb{Z}$ :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in S^1 \quad r_\alpha(n)(z) = z \cdot e^{2i\pi n \alpha} \quad (2.1)$$

$S^1$  est en fait un revêtement de  $\mathbb{T}_\alpha$  [4] [5] [7]. Notons  $\pi_\alpha$  la projection canonique de  $S^1$  sur son quotient  $\mathbb{T}_\alpha = S^1/\mathbb{Z}$ . Et notons  $Gr(\pi_\alpha)$  le graphe de la relation d'équivalence associé à  $\pi_\alpha$ .

$$Gr(\pi_\alpha) = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1 \mid \pi_\alpha(z_1) = \pi_\alpha(z_2)\} \quad (2.2)$$

$Gr(\pi_\alpha)$  est l'image de  $S^1 \times \mathbb{Z}$  par  $\mathcal{F}$  (1.3), il est donc difféomorphe à  $S^1 \times \mathbb{Z}$  puisque  $\mathcal{F}$  est une induction.

$Gr(\pi_\alpha)$  est en fait l'espace des flèches du groupoïde difféologique associé à la relation d'équivalence définie par la projection  $\pi_\alpha$  [7]. Son application caractéristique  $x = (s, b)$ , où les applications  $s$  et  $b$  sont les applications sources et but du groupoïde, est donnée, dans la trivialisation définie par  $\mathcal{F}$ , par:

$$\forall (z, n) \in S^1 \times \mathbb{Z} \quad x(z, n) = (z, z \cdot e^{2i\pi n \alpha}) \quad (2.3)$$

On utilise alors le théorème suivant, reliant les classes d'équivalence de flots libres au dessus des quotients de variétés et le premier groupe de cohomologie de  $Gr(\pi_\alpha)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  [7]:

### 2.4 Proposition :

Soit  $P=(X,M,p)$  une subduction telle que  $X$  soit une variété. Le premier groupe de cohomologie:  $H^1(\text{Gr}(p),\mathbb{R})$ , du graphe\* de la projection  $p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , est en bijection avec l'espace des classes de  $M$ -équivalence de flots libres au dessus de  $M$ :

$$H^1(\text{Gr}(p),\mathbb{R}) = \text{Flots}(M)$$

Dans le cas précis du tore  $\mathbb{T}_\alpha$ , parce que  $\pi_\alpha$  est une fibration difféologique principale ( $\mathcal{F}$  est une trivialisatoin du graphe de  $\pi_\alpha$ ) les cocycles et les cobords sont donnés, par:

$$\begin{cases} Z^1(\text{Gr}(\pi_\alpha),\mathbb{R}) = \{f \in D(S^1 \times \mathbb{Z}, \mathbb{R}) \mid \forall (z,n,m) \in S^1 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad f(z,n+m) = f(z,n) + f(z, e^{2i\pi n\alpha}, m)\} \\ B^1(\text{Gr}(\pi_\alpha),\mathbb{R}) = \{f \in D(S^1 \times \mathbb{Z}, \mathbb{R}) \mid \exists g \in D(S^1, \mathbb{R}) \quad \forall (z,n) \in S^1 \times \mathbb{Z} \quad f(z,n) = g(z, e^{2i\pi n\alpha}) - g(z)\} \end{cases} \quad (2.5)$$

### 3- Flots libres sur $\mathbb{T}_\alpha$ et petits diviseurs

L'équation de cocycle se ramène à:

$$\begin{cases} f(z,n) = \sum_{k=0, \dots, n-1} f^*(z, e^{2i\pi k\alpha}) & n > 0 \\ f(z,-n) = -\sum_{k=0, \dots, n-1} f^*(z, e^{2i\pi(k-n)\alpha}) & n > 0 \\ f(z,0) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $f^*$  est une application différentiable quelconque,  $f$  et  $f^*$  sont reliées par:

$$f^* \in D(S^1, \mathbb{R}) \quad f^*(z) = f(z,1) \quad (3.2)$$

La relation de cohomologie entre  $f_1 \in Z^1(\text{Gr}(\pi_\alpha), \mathbb{R})$  et  $f_2 \in Z^1(\text{Gr}(\pi_\alpha), \mathbb{R})$  se traduit sur  $f_1^*$  et  $f_2^*$  par:

$$f_2^* = f_1^* + g \circ r_\alpha(1) - g \quad g \in D(S^1, \mathbb{R}) \quad (3.3)$$

\* Nous appelons graphe d'une application différentiable, aussi bien son graphe au sens usuel du terme, que le graphe de la relation d'équivalence qu'elle engendre sur son espace de définition.

En notant  $L_\alpha$  l'action de  $D(S^1, \mathbb{R})$  sur lui-même définie grâce à la formule (3.3), où  $f_2^* = L_\alpha(f_1^*)$ , le groupe  $H^1(\text{Gr}(\pi_\alpha), \mathbb{R})$  s'identifie avec le quotient de  $D(S^1, \mathbb{R})$  par l'action  $L_\alpha$  :

$$H^1(\text{Gr}(\pi_\alpha), \mathbb{R}) = D(S^1, \mathbb{R}) / L_\alpha \quad (3.4)$$

L'intégrale  $\oint f^*$  est un invariant naturel de cette action, en associant à  $f^*$  le couple  $(\oint f^*, f^* - \oint f^*)$ , le calcul de  $H^1(\text{Gr}(\pi_\alpha), \mathbb{R})$  se ramène à l'étude de l'équation :

$$\delta f^* = g \circ r_\alpha(1) - g \quad (g, \delta f^*) \in D(S^1, \mathbb{R})^2 \quad \oint \delta f^* = 0 \quad (3.5)$$

Sous cette forme cette équation a été étudiée par de nombreux auteurs, en particulier par V. Arnold [1][2], J. Moser [8], M.R. Hermann [6]. Pour une large classe de nombres, en particulier ceux vérifiant la condition diophantienne suivante :

$$\exists \varepsilon > 0, \exists k > 0 : |\alpha - (m/n)| > k/n^{2+\varepsilon} \quad \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \quad (3.6)$$

l'équation (3.5) en  $g$  a toujours une solution unique si la difféologie que l'on considère est au moins la difféologie  $C^3$  [6] \*\*. Ce résultat peut alors s'interpréter en termes de difféologie :

### 3.6- Proposition :

Si  $\alpha$  est un nombre diophantien (condition 3.6) l'espace des flots libres, au dessus de  $\mathbb{T}_\alpha$ , identifié au groupe de cohomologie  $H^1(\text{Gr}(\pi_\alpha), \mathbb{R})$ , est égal à  $\mathbb{R}$ . La projection de  $Z^1(\text{Gr}(\pi_\alpha), \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}$  est donnée par :

$$\forall f^* \in Z^1(\text{Gr}(\pi_\alpha), \mathbb{R}) \sim D(S^1, \mathbb{R}) \quad f^* \rightarrow \oint f^*$$

Chaque flot libre au dessus de  $\mathbb{T}_\alpha$  est équivalent au fibré  $P_\omega = (\mathbb{T}^2, \mathbb{T}_\alpha, p_\omega)$ , avec  $\omega = \oint f^*$  muni de l'action  $\theta_\omega$  de  $\mathbb{R}$  :

$$\forall (t, z_1, z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \quad \theta_\omega(t)(z_1, z_2) = (e^{2i\pi\omega t} z_1, e^{2i\pi\omega t} z_2)$$

$\omega = 0$  caractérise le fibré trivial.

Remarquons toutefois que ce théorème est vrai si et seulement si l'équation (3.5) possède, pour tout  $f$ , une solution (nécessairement unique) en  $g$ . Dans ce cas,

\*\* La difféologie d'un espace  $X$  est  $C^k$  si elle a été définie à partir de la difféologie  $C^k$  des espaces numériques  $\mathbb{R}^n$ .



comme nous pouvons le constater, modulo la vitesse d'enroulement, il n'existe qu'un flot libre au dessus de  $T_\alpha$  c'est le tore  $T^2$  muni de l'enroulement irrationnel. Il est possible que cette situation soit la cause de la stabilité des "tores non-résonnants" lors de petites perturbations des systèmes mécaniques complètement intégrables (théorème Kolmogorov-Arnold-Moser).

### Conclusion :

L'axiomatique des espaces difféologiques à été proposée initialement pour l'étude des espaces de dimension infinie [9] [4]. Il s'avère qu'elle est aussi pertinente dans l'étude des quotients singuliers (voir aussi [5]).

### Bibliographie

- [1] V.Arnold— Small denominators; mapping of the circumference onto itself. *Izvestia A.N. SSSR. série Math.* 25.1 (1965)
- [2] V.Arnold— Chapitres supplémentaires à la théorie des équations différentielles. Edition MIR (Moscou) (1980)
- [3] J.Dieudonné— *Éléments d'analyse III.* Gauthiers-Villars, Paris 1970
- [4] P.Donato— Revêtements et groupe fondamental des espaces différentiels homogènes. Thèse Université de Provence. Marseille (1984)
- [5] P.Donato P.Iglesias— Exemple de groupes difféologiques: Flots Irrationnels sur le tore. *C.R. Acad. Sc. Paris, t. 301, Série I, N° 4, 1985.*
- [6] M.R.Hermann— Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. Thèse Publication Mathématiques, N° 49, I.H.E.S. Bures sur Yvette 1979
- [7] P.Iglesias— Fibrés difféologiques et homotopie. Thèse (à paraître)
- [8] J.Moser— A rapidly convergent iteration method, part II, *Ann. Scuola Norm. di Pisa, Ser. III, 20 (1966)*
- [9] J.M.Souriau— Groupes différentiels et physique mathématique. Feuilletage et quantification géométrique. pp75-79. Collection travaux en cours. éd. Hermann Paris (1984)

## -Annexe 5-

**ESPACE DES CONNEXIONS D'UN FIBRE PRINCIPAL**

Certaines propositions ne sont pas démontrées ici, ce sont des démonstrations différentielles de type standard. Elles trouveront leurs places dans une publication ultérieure consacrée exclusivement à la théorie différentielle des connexions.

Appliquant les propriétés usuelles des fibrés (suite exacte d'homotopie, section=trivialisation), à l'espace de dimension infinie des connexions d'un fibré principal ordinaire, I.M. Singer montre l'inexistence d'un choix continu de jauge globale (au sens d'une topologie  $C^\infty$ ) [20].

Grâce à une formulation différentielle des connexions sur les fibrés principaux (qui est évidemment une extension de la définition en dimension finie), l'espace des connexions est canoniquement muni d'une différentielle. Nous montrons alors que la projection canonique de cet espace des connexions sur son quotient par l'action naturelle du groupe des transformations de jauge conservant un point est une fibration principale.

On peut donc appliquer nos résultats concernant la suite exacte d'homotopie et les critères de non trivialité, établissant ainsi certains des résultats principaux de I.M. Singer. Notons qu'il n'intervient nulle part la nécessité d'introduire une métrique Riemannienne

**A5.1-Difféologie de l'espace des connexions d'une variété fibrée principale.**

Considérons un fibré principal  $P=(X,M,p)$  de groupe structural  $G$ , avec  $G$  groupe de Lie,  $X$  et  $M$  variétés.

Soit  $[x_i \rightarrow H_x]$  une connexion sur  $P$ , de forme  $\omega$  [14]. A tout arc  $c$  dans  $M$  et tout point  $x \in X_{c(0)}$ , nous savons associer le **relevé horizontal** (relativement à  $\omega$ )  $c'$  de  $c$  dans  $X$  d'origine  $x$ . Nous noterons:

$$\text{rel}_\omega(c,x)=c' \quad (1)$$

$\text{rel}_\omega(c,x)$  est entièrement défini par:

$$\text{rel}_\omega(c,x)=c' \Leftrightarrow p \circ c' = c' \quad c'(0)=x \quad \omega(dc/dt|_{t=0})=0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2)$$

et vérifie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rel}_\omega(c, a_x(x)) = a \cdot \text{rel}_\omega(c,x) \quad \forall a \in G \\ \forall m \in M \quad \forall x \in X_m \quad \text{rel}_\omega(\mathbb{1}_m, x) = \mathbb{1}_x \end{array} \right. \quad (2)$$

où  $\mathbb{1}_m$  et  $\mathbb{1}_x$  désignent respectivement les arcs constants en  $m$  et  $x$  et  $(a,x) \mapsto a_x(x)$ ,  $(a,x) \in G \times X$ , désigne l'action de  $G$  sur  $X$ .

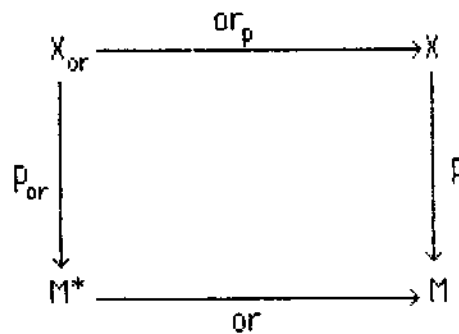
Nous noterons alors, respectivement,  $X^*$  et  $M^*$  les espaces des arcs différentiables dans  $X$  et  $M$  munis de leur difféologie d'espaces fonctionnels (1.3.6) et  $p^*$  la projection de  $X^*$  sur  $M^*$  définie par:

$$\forall c \in X^* \quad p^*(c) = p \circ c \quad (3)$$

**4 Proposition :**

$P^* = (X^*, M^*, p^*)$  est un fibré difféologique principal de groupe structural  $G^*$ , où  $G^*$  agit sur  $X^*$  par:

$$\forall \gamma \in G^* \quad \forall c \in X^* \quad \gamma \cdot c = [t \mapsto \gamma(t)_x(c(t))]$$



(diagramme 1)

Définissons l'application  $or$  de  $M^*$  sur  $M$  par:

$$or : M^* \rightarrow M \quad (5)$$

$$c \mapsto c(0)$$

et considérons l'image réciproque  $P_{or} = (X_{or}, M^*, p_{or})$  de  $P$  par  $or$  (diagramme 1):

$$(c,x) \in X_{or} \Leftrightarrow c \in M^* \text{ et } x \in X_{c(0)} \quad (6)$$

L'application  $\text{rel}$  est évidemment différentiable (c'est même une subduction).

Compte tenu de ces notations:

### 7 Proposition :

L'application  $\text{rel}_\omega : X_{\text{or}} \rightarrow X^*$  est différentiable pour toute connexion  $\omega$  sur  $P$ .

□ Indiquons seulement que la démonstration est basée sur le théorème de différentiabilité des solutions d'équations différentielles ordinaires par rapport aux paramètres. □

En remarquant que  $M^*$  est le quotient de  $X_{\text{or}}$  par l'action induite de  $G$  on déduit grâce à (2) que  $\text{rel}_\omega$  se projette sur une application différentiable que nous noterons  $\psi$ , définie sur  $M^*$  à valeurs dans le quotient différentiel  $X^*/G$ :

$$\begin{array}{ccc}
 X_{\text{or}} & \xrightarrow{\text{rel}} & X^* \\
 p_{\text{or}} \downarrow & & \downarrow \pi \\
 M^* & \xrightarrow{\psi} & X^*/G
 \end{array}$$

(diag. 2)

Notons alors  $X^* = X^*/G$  et  $p^*$  la projection de  $X^*$  sur  $M^*$  définie par factorisation de  $p^*$  (diagramme 3).

$$\begin{array}{ccc}
 X^* & \xrightarrow{\pi} & X^* \\
 p^* \searrow & & \swarrow p^* \\
 & M^* &
 \end{array}$$

(diag. 3)

Compte tenu de ces notations:

**8 Proposition :**

L'application  $\psi$  définie par le diagramme 2 est une section différentiable de  $P^*=(X^*,M^*,p^*)$ .

□ Nous avons vu que  $\psi$  est différentiable. Soit  $c \in M$ ,  $c=p^*(c,x) \quad x \in X_{c(0)}$  :  
 $\psi(c)=\psi \circ p_{\alpha^*}(c,x) \Rightarrow \psi(c)=\pi \circ \text{rel}(c,x)$ .

Donc  $p^* \circ \psi(c)=p^* \circ \pi \circ \text{rel}(c,x)=P^* \circ \text{rel}(c,x)$ . Mais grâce à (3) on a  $P^* \circ \text{rel}(c,x)=c$ , donc  $p^* \circ \psi(c)=c$ . □

Nous venons donc d'associer à toute connexion  $\omega$  de  $P$  une section de  $P^*=(X^*,M^*,p^*)$ , c'est à dire une réduction de  $P^*=(X^*,M^*,p^*)$  (voir 3.7.2).  $P^*$  est alors un fibré difféologique de fibre type:

$$G^*=G^*/G \sim \text{Arc}(G, \mathbb{I}_G) \quad (9)$$

l'identification de  $G^*$  avec  $\text{Arc}(G, \mathbb{I})$  est réalisée grâce à la projection:

$$\forall \gamma \in G \quad \gamma \mapsto \gamma \cdot \gamma(0)^{-1} \quad (10)$$

où nous avons noté, abusivement  $\gamma \cdot \gamma(0)^{-1}$  l'arc  $[t \mapsto \gamma(t) \cdot \gamma(0)^{-1}]$ . Ceci permet d'écrire l'action induite de  $G$  sur  $G^*$  :

$$\forall \varepsilon \in G^* \quad \forall \gamma \in G^* \quad \varepsilon_G(\gamma) = \varepsilon \cdot \gamma \cdot \varepsilon(0)^{-1} \quad (11)$$

Nous noterons alors:

$$\text{Eq}(X^*, G^*) = \{ \Psi \in D(X^*, G^*) \mid \forall \gamma \in G^* \quad \forall c \in X^* \quad \Psi(\gamma \cdot c) = \gamma \cdot \Psi(c) \cdot \gamma(0)^{-1} \} \quad (12)$$

L'application  $\Psi$  associée (3.6.4) à la section  $\psi$ , définie par le diagramme 2, est alors un élément de  $\text{Eq}(X^*, G^*)$ , plus précisément  $\Psi$  vérifie:

$$\Psi \in \text{Eq}(X^*, G^*) \quad \forall x \in X \quad \Psi(\mathbb{1}_x) = \mathbb{1}_{G^*} \quad (13)$$

La connexion  $\omega$  est entièrement définie par  $\Psi$ . Le sous fibré de  $P^*$  réduit par  $\Psi$  est défini par:

$$X^*_{\Psi} = \Psi^{-1}(\mathbb{1}_{G^*}) \quad (14)$$

**15 Proposition :**

$X^*_{\Psi} = \Psi^{-1}(\mathbb{1}_{G^*})$  est l'espace des chemins horizontaux relativement à la connexion  $\omega$ . La forme de connexion  $\omega$  est liée à  $\Psi$  par la formule suivante:

$$\forall c \in X^* \quad \omega(dc(t)/dt) = d\{\Psi(c)(t)\}/dt$$

Réciproquement, soit  $\Psi \in D(X^*, G^*)$  tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \gamma \in G^* \quad \forall c \in X^* \quad \Psi(\gamma, c) = \gamma \cdot \Psi(c) \cdot \gamma(0)^{-1} \\ \forall x \quad \Psi(\mathbb{1}_x) = \mathbb{1}_{G^*} \end{array} \right.$$

La forme  $\omega$  définie par:

$$\forall c \in X^* \quad \omega(dc(t)/dt) = d[\Psi(c)(t)]/dt$$

est une forme de connexion sur  $P$  dont les chemins horizontaux constituent l'ensemble:

$$X^*_{\Psi} = \Psi^{-1}(\mathbb{1}_{G^*})$$

## A5.2 Connexions sur les fibrés difféologiques principaux.

A partir des résultats du premier paragraphe nous sommes naturellement amenés à étendre la définition des connexions aux fibrés principaux difféologiques:

### 1 Définition:

Soit  $P=(X, M, p)$  un fibré difféologique principal de groupe structural  $G$ . Soit  $P^*=(X^*, M^*, p^*)$  son fibré principal des arcs de groupe structural  $G^* = \text{Arc}(G)$ . Nous appellerons connexion sur  $P$  toute réduction, contenant les arcs constants, de  $P^*$  au sous-groupe  $G \subset G^*$ .

Les connexions sur  $P$  sont en bijection avec l'espace:

$$\mathcal{C}(P) = \{ \psi \in D(X^*, G^*) \mid \forall \gamma \in G^* \quad \forall c \in X^* \quad \psi(\gamma, c) = \gamma \cdot \psi(c) \cdot \gamma(0)^{-1}, \forall x \in X \quad \psi(\mathbb{1}_x) = \mathbb{1}_{G^*} \}$$

qui sera muni de sa difféologie d'espace fonctionnel et sera appelé **espace des connexions** de  $P$ .

Nous noterons :

$$X^*_{\psi} = \psi^{-1}(\mathbb{1}_{G^*})$$

dont les éléments seront appelés arcs (chemins) horizontaux (relativement à  $\psi$ ).

Compte tenu de ces notations:

**2 Proposition :**

Soit  $\psi$  une connexion sur  $P=(X,M,p)$ . Soit  $c \in X^*$ , il existe un élément unique  $\gamma \in G^*$  et un chemin horizontal unique  $c^*$  dans  $X$  tel que:

$$c = \gamma \cdot c^* \quad c^*(0) = c(0)$$

En particulier, à tout chemin  $c$  dans  $M$  et à tout point  $x \in X_{c(0)}$  peut être associé un chemin  $c'$  horizontal dans  $X$  d'origine  $x = c'(0)$  entièrement défini par:

$$p \circ c' = c \quad c' \in X^*_{\psi}, \quad c'(0) = x$$

Si  $c = \gamma \cdot c^*$  avec  $c \in X^*$ ,  $\gamma \in G^*$  et  $c^* \in X^*_{\psi}$ ,  $\gamma$  et  $c^*$  sont explicitement donnés par:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad c^*(t) = \psi(c)(t) = \psi_x(c(t)) \quad \gamma = \psi(c) \quad (3)$$

Ceci permet de définir  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} \Psi : X^* &\rightarrow G^* \times X^*_{\psi} & (4) \\ c &\rightarrow (\gamma, c^*) \end{aligned}$$

Compte tenu de ces notations:

**5 Proposition :**

L'application  $\Psi$  définie par (4) est une trivialisation du fibré difféologique principal  $X^* \rightarrow X^*$  de groupe structural  $G^*$ . On a:

$$X^*/G^* \sim X_{or} \sim X^*_{\psi}$$

(où  $X_{or}$  est défini au paragraphe 1). La projection de  $X^*$  sur  $X_{or}$  est donnée par:

$$\forall c \in X^* \quad c \mapsto (p \circ c, c(0))$$

L'espace des connexions de  $P$  est difféomorphe à l'espace des sections  $\sigma$  de  $X^*$  au dessus de  $X_{or}$  vérifiant:

$$\forall a \in G \quad \forall (c, x) \in X_{or} \quad \sigma(c, a_X(x)) = a \cdot \sigma(c, x)$$

Et donc si  $\mathcal{C}(P)$  est non vide c'est un espace affine<sup>1</sup> du groupe:

$$\mathcal{K} = \{ \varepsilon \in D(X_{or}, G^*) \mid \forall a \in G \quad \varepsilon(c, a_X(x)) = a \cdot \varepsilon(c, x) \cdot a^{-1} \}$$

<sup>1</sup>On appelle espace affine d'un groupe  $G$  tout espace homogène de ce groupe sur lequel il agit librement.

Ceci est une conséquence de la décomposition de  $G^*$  en produit semi-direct de  $G$  par  $G^*$  défini grâce à  $\gamma \mapsto (\gamma(0), \gamma \cdot \gamma(0)^{-1})$ .

### A5.3 Action du groupe de jauge de $P$ sur $\mathcal{C}(P)$

Nous noterons  $\mathcal{J}$  le groupe de jauge (3.6.6) du fibré  $P$  (notations précédentes), il agit naturellement sur  $X^*$  par:

$$\forall A \in \mathcal{J} \quad \forall c \in X^* \quad \Delta_{X^*}(c) = [t \mapsto A(c(t))] \quad (1)$$

Cette action vérifie:

$$\forall A \in \mathcal{J} \quad \forall a \in G \quad \Delta_{X^*} \circ a_{X^*} = a_{X^*} \circ \Delta_{X^*} \quad (2)$$

car pour tout  $t \in \mathbb{R}$   $A(a_X(c(t))) = a_X(A(c(t))) \quad \forall c \in X^* \quad \forall a \in G \quad \forall A \in \mathcal{J}$ . Nous savons qu'à tout élément  $A$  de  $\mathcal{J}$  est associé une application différentiable  $\alpha \in \text{Eq}_{\text{loc}}(X, G)$  de telle sorte que:

$$\forall x \in X \quad A(x) = \underline{\alpha(x)}_X(x) \quad (3)$$

C'est pour cette raison que nous identifierons  $\mathcal{J}$  avec  $\text{Eq}_{\text{loc}}(X, G)$ :

$$\mathcal{J} \sim \text{Eq}_{\text{loc}}(X, G) \quad (4)$$

L'action de  $\mathcal{J}$  sur  $X^*$  s'écrit:

$$\forall \alpha \in \mathcal{J} \quad \forall c \in X^* \quad \alpha_{X^*}(c) = [t \mapsto \underline{\alpha(c(t))}_X(c(t))] \quad (4)$$

$\mathcal{J}$  agit alors sur l'espace des connexions  $\mathcal{C}(P)$  de  $P$  par:

$$\psi \in \mathcal{C}(P) \quad \forall \alpha \in \mathcal{J} \quad \alpha_{\mathcal{C}(P)}(\psi) = [c \mapsto [t \mapsto \alpha(c(t)) \cdot \psi(c)(t) \cdot \alpha(c(0))^{-1}]] \quad (5)$$

Considérons alors un point  $x_0$  de  $X$ , nous poserons:

$$\mathcal{J}_{x_0} = \{\alpha \in \mathcal{J} \mid \alpha(x_0) = 1\} \quad (6)$$

$\mathcal{J}_{x_0}$  est le stabilisateur dans  $\mathcal{J}$  du point  $x_0$ .

Le stabilisateur dans  $\mathcal{J}$  d'une connexion  $\psi$  de  $P$  s'écrit:

$$\text{St}_{\mathcal{J}}(\psi) = \{\alpha \in \mathcal{J} \mid \forall c \in X^*, \alpha(c(t)) = \alpha(c(0)) \quad \forall t \in \mathbb{R}\} \quad (7)$$

et donc  $\alpha$  est constant sur les nappes horizontales de  $X$ , une nappe horizontale étant définie par:

$$N \text{ nappe horizontale} \iff \forall (x, x') \in N \times N \quad \exists c \in X^*, c(0) = x \quad c(1) = x' \quad (8)$$



en fait si la base de  $P$  est connexe chaque nappe horizontale définit une réduction de  $P$  dont le groupe structural est appelé groupe d'holonomie de  $\psi$ . Les nappes horizontales constituent une partition de  $X$ .

Nous dirons que  $P$  est **irréductible** si et seulement si  $X$  ne possède qu'une nappe horizontale quelle que soit la connexion considérée. On a immédiatement:

**7 Proposition :**

Si  $P$  est un fibré principal irréductible alors:

$$\forall \psi \in \mathcal{C}(P) \quad \text{St}_{\mathcal{J}}(\psi) = C(G), \quad C(G) = \text{centre de } G$$

Dans tous les cas si la base de  $P$  est connexe

$$\forall \psi \in \mathcal{C}(P) \quad \text{St}_{\mathcal{J}_{x_0}}(\psi) = \mathbb{1}$$

L'action de  $\mathcal{J}_{x_0}$  sur  $\mathcal{C}(P)$  est donc libre.

**A5.3 Fibré principal des connexions.**

Soit  $P=(X,M,p)$  un fibré principal de groupe structural  $G$ , avec:

- a)  $G$  groupe de Lie
- b)  $X$  variété connexe (et donc  $M$ ).
- c)  $x_0 \in X$  et  $m_0 = p(x_0)$

**1 Proposition :**

Soit  $[r \rightarrow \psi_r]$  une plaque de  $\mathcal{C}(P)$  et  $[r \rightarrow x_r]$  une plaque de  $X$  définies toutes deux sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe, pour tout  $r_0 \in \Omega$ , un voisinage  $V$  de  $r_0$  et une plaque  $[r \rightarrow c'_r]$  de  $X^*$  définie sur  $V$  telle que:

$$c'_r(r) \in X_{m_0} \quad c'_r(1) = \times \quad \psi_r(c'_r) = \mathbb{1}$$

□ Puisque  $X$  est connexe on sait que la projection  $[c \rightarrow (c(0), c(1))]$  est une subduction de  $X^*$  sur  $X$  (4.4.4). Donc la plaque  $[r \rightarrow x_r]$  se relève localement dans  $X^*$  en une plaque  $[r \rightarrow c_r]$  vérifiant:

$$c_r(0) = x_0 \quad c_r(1) = \times$$

Posons alors:

$$c'_r(t) = [\psi_r(c_r)(t)^{-1}]_X(c'_r(t))$$

Par construction  $c'_r$  est horizontal relativement à  $\psi_r$  pour tout  $r$ , il est clair que c'est une plaque de  $X^*$ . Posons alors:

$$a_r = \psi_r(c'_r(1))$$

$[r \mapsto a_r]$  est évidemment une plaque de  $G$ . On a:

$$c'_r(0) = c_r(0) = x_0 \quad a_r^{-1}(x_r) = c'_r(1)$$

Définissons alors  $[r \mapsto c''_r]$  par:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad c''_r(t) = a_r^{-1} \chi(c'_r(t))$$

$[r \mapsto c''_r]$  est encore une plaque de  $X^*$  et vérifie :

$$\psi_r(c''_r) = \mathbb{1} \quad c''_r(0) = a_r^{-1} \chi(x_0) \in X_{m0} \quad c''_r(1) = x_r$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

On déduit alors de cette proposition:

## 2 Proposition :

Soit  $P=(X,M,p)$  un fibré principal de groupe  $G$ , avec  $G$  groupe de Lie et  $X$  variété connexe. La projection  $\mathcal{C}(P) \rightarrow \mathcal{C}(P)/\mathcal{J}_{x_0}$ , où  $\mathcal{J}_{x_0}$  est le groupe des transformations de jauge de  $P$  laissant fixe le point  $x_0$ , est une fibration difféologique de groupe structural  $\mathcal{J}_{x_0}$ .

$\square$  Il faut montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : \mathcal{J}_{x_0} \times \mathcal{C}(P) &\rightarrow \mathcal{C}(P) \times \mathcal{C}(P) \\ (\alpha, \psi) &\mapsto (\alpha_{\mathcal{C}(P)}(\psi), \psi) \end{aligned}$$

est une induction.

Soit  $\varphi = [r \mapsto (\alpha_r, \psi_r)]$  une application définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathcal{J}_0 \times \mathcal{C}(P)$  telle que  $\mathbf{F} \circ \varphi$  soit différentiable. C'est à dire:

$$[r \mapsto (\psi_r, \alpha_r \mathcal{C}(P)(\psi_r))] \text{ différentiable}$$

rappelons que:

$$\forall c \in X^* \quad \alpha_r \mathcal{C}(P)(\psi_r) = [t \mapsto \alpha_r(c(t)), \psi_r(c)(t), \alpha_r(c(0))^{-1}]$$

$[r \mapsto \alpha_r \mathcal{C}(P)(\psi_r)]$  différentiable signifie alors que:

$$\Phi : (r, t, c) \mapsto \alpha_r(c(t)), \psi_r(c)(t), \alpha_r(c(0))^{-1}$$

est différentiable.

Soit alors une plaque  $[\xi \mapsto (r_\xi, x_\xi)]$  de  $X$ , grâce à la proposition 1 il existe une plaque  $[\xi \mapsto c_\xi]$  de  $X^*$  telle que:

$$c_\xi(1) = x_\xi \quad c_\xi(0) \in X_{m_0} \quad \text{et} \quad \psi_{r_\xi}(c_\xi) = \mathbb{1}$$

L'application  $\lambda : (\xi, t) \mapsto (r_\xi, t, c_\xi)$  est différentiable et donc  $\Phi \circ \lambda$  est différentiable.

Or  $\lambda \circ \Phi$  est donné par:

$$\Phi \circ \lambda : (\xi, t) \mapsto \alpha_{r_\xi}(c_\xi(t)) \cdot \psi_{r_\xi}(c_r)(t) \cdot \alpha_{r_\xi}(c_\xi(0))^{-1} = \alpha_{r_\xi}(c_\xi(t))$$

car  $\alpha_r(x_0) = \mathbb{1} \Rightarrow \alpha_r(a_{rX}(x_0)) = \mathbb{1}$  où  $a_{rX}(x_0) = c_r(0)$  et  $[r \mapsto a_r]$  est différentiable. Donc l'application  $[\xi \mapsto \alpha_{r_\xi}(c_\xi(1))]$  est différentiable c'est ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

### A5.5-Cas de non trivialité du fibré $\mathcal{C}(P) \rightarrow \mathcal{C}(P)/\mathcal{J}_{x_0}$

Comme nous l'avon vu (A5.2.5) l'espace des connexions d'un fibré principal s'il n'est pas vide est difféomorphe au groupe

$$\mathcal{K} = \{ \varepsilon \in D(X_{or}, G^{\mathbb{R}}) \mid \forall a \in G \quad \varepsilon(c, a_X(x)) = a \cdot \varepsilon(c, x) \cdot a^{-1} \}$$

or ce groupe est contractile, il suffit pour s'en assurer de considérer la rétraction de déformation:

$$(s, \varepsilon) \mapsto \varepsilon_s \quad \text{avec} \quad \varepsilon_s(c, x)(t) = \varepsilon(c, x)(st) \quad \forall s, \varepsilon \in \mathbb{R} \times \mathcal{K} \quad (c, x) \in X_{or} \quad t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

#### 2 Proposition :

Soit  $P=(X, M, p)$  un fibré principal, de groupe structural  $G$ , vérifiant (A5.4.2).

Si  $G$  est connexe et si  $\mathcal{J}_{x_0}$  n'est pas homotopiquement trivial la fibration

$\mathcal{C}(P) \rightarrow \mathcal{C}(P)/\mathcal{J}_{x_0}$  n'est pas triviale.

$\square$  Puisque  $\mathcal{C}(P)$  est contractile, si on suppose que  $\mathcal{C}(P) \rightarrow \mathcal{C}(P)/\mathcal{J}_{x_0}$  est triviale, on a:

$$\pi_n(\mathcal{C}(P)/\mathcal{J}_{x_0}) \oplus \pi_n(\mathcal{J}_{x_0}) = 0$$

ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.  $\square$

Ce théorème s'applique en particulier aux cas envisagés dans l'article de I.M. Singer [20] où on a  $M=S^3$  ou  $S^4$ ,  $G=SU(N)$ ,  $N \geq 2$ . Et l'on obtient les mêmes résultats sur la non-trivialité du fibré  $\mathcal{C}(P) \rightarrow \mathcal{C}(P)/\mathcal{J}_{x_0}$ .

### Un fibré difféologique non trivial sur un espace contractile

Comme nous l'avons vu tout au long de ce travail, un grand nombre de constructions de la géométrie différentielle ordinaire se généralisent, modulo une extension adéquate des définitions, aux espaces difféologiques. En ce qui concerne les relations entre les fibrés difféologiques et l'homotopie nous devons noter une différence essentielle. Alors qu'un fibré, au sens de la catégorie des variétés, au dessus d'un espace contractile est trivial, il existe des fibrés difféologiques non triviaux au dessus d'espaces difféologiques contractiles. Nous allons en donner un exemple; à partir de la remarque évidente que tout sous-fibré d'un fibré trivial est trivial nous exhibons un fibré au dessus d'un espace contractile pour lequel un de ses sous-fibrés est non trivial.

Soit  $\mathbb{C}$  muni de l'action suivante de  $\mathbb{Z}$ :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \Delta_n(z) = e^{2i\pi n} z \quad (1)$$

où  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ . Nous noterons  $p_\alpha$  la projection de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ , et  $\mathbb{C}_\alpha$  le quotient  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ .

$$p_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \quad (2)$$

On sait que tout fibré principal de groupe structural  $(\mathbb{Z}, +)$  sur  $\mathbb{C}_\alpha$  est défini par un cocycle du graphe de la projection  $p_\alpha$  de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$  (voir Annexe 2 §2). Un calcul élémentaire nous donne le cocycle  $F$  suivant:

$$F(z, z') = f(z, n) \text{ si } z \neq 0 \text{ et } z' = \Delta_n(z) \text{ et } F(0, 0) = f(0, 0) = 0 \quad (3)$$

Choisissons alors le cocycle défini par la fonction suivante:

$$f(z, z') = \|z\|^2 \cdot n \text{ avec } z' = \Delta_n(z) \quad (4)$$

le fibré principal associé à cette fonction est le quotient difféologique  $X$  de  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  par l'action de  $\mathbb{Z}$  suivante:

$$\forall (z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \Delta_{\mathbb{C} \times \mathbb{R}}(z, t) = (e^{2i\pi n} z, t + \|z\|^2 \cdot n) \quad (5)$$

la projection canonique de  $X = \mathbb{C} \times \mathbb{R} / \mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{C}_\alpha$  est donnée par factorisation de  $(z, t) \mapsto p_\alpha(z)$ .

On peut alors constater que la restriction du fibré ainsi construit, à l'image par  $p_\alpha$  du cercle unité  $S^1$ , est égale à la fibration canonique du tore  $\mathbb{T}^2$  au dessus de  $\mathbb{T}_\alpha$  (voir annexes 3 et 4). Puisque cette dernière fibration est non triviale il en est de même de la fibration  $X \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ .

D'autre part l'espace  $\mathbb{C}_\alpha$  est contractile, la contraction de  $\mathbb{C}$  définie par  $(z, \lambda) \mapsto \lambda.z$ , où  $(z, \lambda) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ , passe au quotient  $\mathbb{C}_\alpha$  et définit une contraction de  $\mathbb{C}_\alpha$ .

## HOMOTOPIE ET SPHEROIDES. k-CONNEXITE

### A7.1- Cuboïdes sphéroïdes et homotopie

Il existe au moins deux autres façons de décrire l'homotopie, équivalentes à celle que nous avons proposée. Elles font appel aux notions de cuboïdes et sphéroïdes.

Soit  $X$  un espace difféologique. Soit  $I^n$  le  $n$ -cube plongé dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $I=[0,1]$ , on notera  $Fr(I^n)$  sa "frontière" définie par:

$$Fr(I^n) = \{ r \in \mathbb{R}^n \mid \exists i \in \{1, \dots, n\} \ r_i = 0 \text{ ou } 1 \} \quad (1)$$

#### 2- Définition

On appellera  **$n$ -cuboïde** de  $X$  au point  $x$  toute  $n$ -plaque globale  $\varphi$  de  $X$  telle que:

$$\varphi(Fr(I^n)) = x$$

On notera  $Cub_n(X, x)$  l'espace des  $n$ -cuboïdes muni de sa difféologie d'espace fonctionnel. On dira que le cuboïde est **stationnaire au bord** si il existe un voisinage  $V$  de  $\mathbb{R}^n - \text{int}(I^n)$  sur lequel  $\varphi$  est constant.

$\text{int}(I^n)$  désigne l'intérieur du cube  $I^n$ .

#### 3 - Définition

On appellera **stationnarisation** des  $n$ -cuboïdes l'opération qui associe à tout  $n$ -cuboïdes  $\varphi$  de  $x$  au point  $x$ , le cuboïde  $I_n^*(\varphi)$  défini par<sup>1</sup>:

$$I_n^*(\varphi)(r_1, \dots, r_n) = \varphi(I(r_1), \dots, I(r_n))$$

<sup>1</sup>  $I$  est la fonction de lissage définie en 4.3.4.

**4 - Proposition :**

la stationnarisation est différentiable. Les espaces des n-cuboïdes et des n-cuboïdes à bord stationnaires sont homotopiquement équivalents.

□ Ceci est une simple adaptation de 4.3.5. □

**5 - Proposition :**

L'application définie sur  $L_n(X, x)$  par :

$$\varphi \rightarrow \Phi = [(r_1, \dots, r_n) \rightarrow \varphi(r_1)(r_2) \dots (r_n)]$$

est à valeurs dans  $\text{Cub}_n(X, x)$ . C'est un difféomorphisme.

□ En effet :

Supposons que la première propriété énoncée soit vraie pour n, soit  $\varphi$  un élément de  $L_{n+1}(X, x) = L(L_n(X, x)^\circ, \mathbb{1}_x^{(n)})$  on a :

$$\Phi(r_0, r_1, \dots, r_n) = \varphi(r_0)(r_1) \dots (r_n)$$

pour tout  $i = 1, \dots, n$  on a, par hypothèse :

$$\forall r_0 \quad \forall r_i = 0 \text{ ou } 1 \quad \Phi(r_0, \dots, r_n) = x$$

soit alors  $r_0 = 0$  ou  $1$ ,  $\varphi(r_0) = \mathbb{1}_x^{(n)}$  puisque  $\varphi$  est un lacet au point  $\mathbb{1}_x^{(n)}$ , or  $\mathbb{1}_x^{(n)} = [(r_1, \dots, r_n) \rightarrow x]$  donc  $\Phi(\text{Fr}(\mathbb{I}^n)) = x$ . Il est immédiat de vérifier ensuite que cette propriété est vraie pour  $n = 1$ . Le reste est une application directe de (1.3.7). □

La juxtaposition des lacets de  $L_{n-1}(X, x)$  au point  $\mathbb{1}_x^{(n)}$  se traduit immédiatement sur les cuboïdes par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi \in L_n(X, x) \quad \forall \psi \in L_n(X, x) \quad \varphi \wedge \psi = \varphi \wedge \psi \\ \varphi \wedge \psi = [(r_1, \dots, r_n) \rightarrow \left. \begin{array}{l} \varphi(2r_1, \dots, r_n) \quad r_1 \leq 1/2 \\ \psi(2r_{1-1}, \dots, r_n) \quad r_1 \geq 1/2 \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (6)$$

On déduit de 5 et 6 :

**7 - Proposition :**

$$\pi_n(X, X) \sim \pi_0(\text{Cub}_n(X, X))$$

Soit  $S^n$  la sphère de dimension  $n$  et  $N$  le pôle nord  $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ .

**8 - Définition :**

On appellera  **$n$ -sphéroïde** de  $x$  au point,  $x \in X$  toute application différentiable de  $S^n$  dans  $X$  appliquant le pôle nord sur  $x$ . On notera  $\text{Sph}_n(X, n)$  l'espace de ces  $n$ -sphéroïdes muni de la difféologie d'espace fonctionnel.

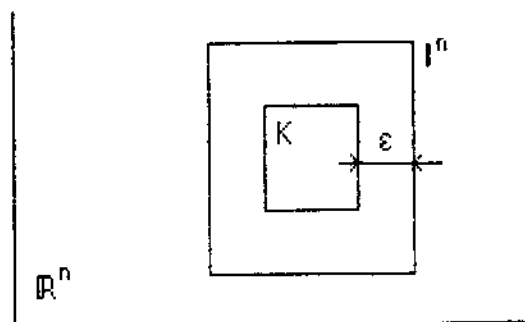
**9 - Proposition :**

Les espaces  $\text{Cub}_n(x, X)$  et  $\text{Sph}_n(x, n)$  sont homotopiquement équivalents.

□ En effet :

nous démontrerons cette proposition par étape :

i) L'espace  $\text{Cub}_n(x, n)$  est homotopiquement équivalent au sous espace de ses éléments stationnaires sur le complémentaire de tout cube  $K$  concentrique à  $I^n$ , contenu dans  $I^n$  est d'intérieur non vide. Ceci s'obtient en utilisant 3 et 4 et la démonstration de 4.3.5. Nous noterons  $\text{Cub}_n^K(X, n)$  l'espace que nous venons de décrire.



ii) L'espace  $\text{Sph}_n(X, n)$  est homotopiquement équivalent au sous espace  $\text{Sph}_n^B(X, n)$  de ses éléments stationnaires sur toute boule  $B$  différente de  $S^n$  centrée en  $N$ .



Soit  $F_S : (r_1, \dots, r_n) \rightarrow x$  la carte stéréographique de  $S^n$  attaché au pôle sud  $S$ ,  $\text{im}(F_S) = S^n - S$ ,  $F_S(0) = N$ . Soit  $h$  une fonction de lissage, nulle sur  $]-\infty, \varepsilon]$  et égale à 1 sur  $[\nu, +\infty[$   $\nu > \varepsilon > 0$ . Soit  $\varphi \in \text{Sph}_n(X, n)$  et  $\varphi_S = \varphi \circ F_S$ ,  $\varphi_S \in D(\mathbb{R}^n, x)$  et applique 0 sur  $x$ .

Posons pour tout  $r \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_S(r) = \varphi_S(h(\|r\|).r)$$

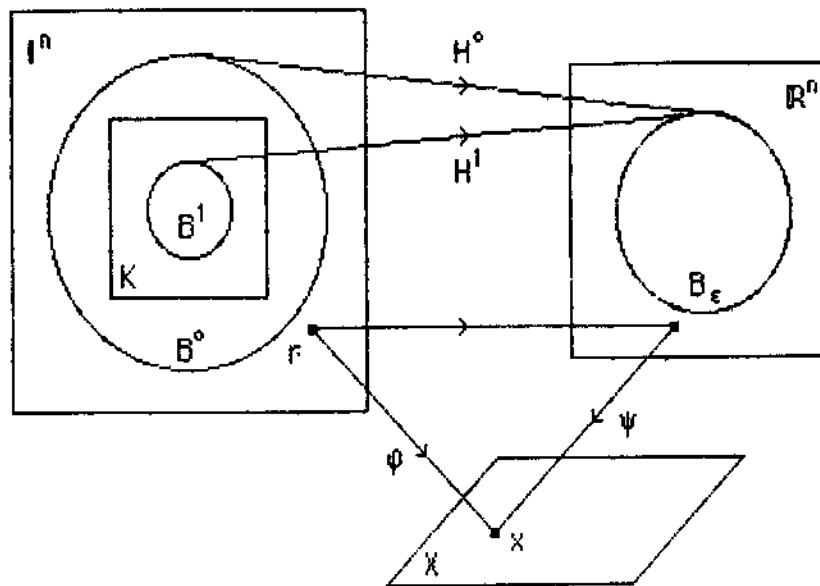
L'application  $[r \rightarrow h(\|r\|)]$  est différentiable,  $\varphi_S$  est égale à  $\varphi_S(0) = N$  sur la boule centrée en 0 de rayon  $\varepsilon$  dont nous noterons  $B$  l'image par  $F_S$ . L'application  $x \rightarrow \varphi_S \circ F_S^{-1}$  défini sur  $S^n - S$  égale à  $x$  sur  $B$ , coïncide avec  $\varphi$  sur un voisinage de  $S$ , elle se prolonge au point  $S$  par  $\varphi(S)$  en un sphéroïde stationnaire sur  $B$ , nous noterons  $\text{prl}(\varphi_S \circ F_S^{-1})$  son prolongement. L'application :

$$\left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow [\varphi \rightarrow \text{prl}(\varphi_S^t \circ F_S^{-1})] \\ \varphi_S^t(r) = \varphi_S((1-l(t))h(\|r\|).r + l(t).t) \end{array} \right.$$

est une équivalence homotopique entre  $\text{Sph}_n(X, x)$  et  $\text{Sph}_n^B(X, x)$ . Il suffit de vérifier que pour tout  $t$  l'application  $[\varphi_S^t \rightarrow \text{prl}(\varphi_S^t \circ F_S^{-1})]$  est différentiable et que si  $\varphi$  est stationnaire sur  $B$ , pour tout  $t$ ,  $\text{prl}(\varphi_S^t \circ F_S^{-1})$  est stationnaire sur  $B$ .

iii) Du caractère différentiable de l'application  $[\varphi_S \rightarrow \text{prl}(\varphi_S \circ F_S^{-1})]$  on déduit que  $\text{Sph}_n^B(X, x)$  est difféomorphe à l'espace  $\Omega_\varepsilon(X, x)$  des applications différentiables définies sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $X$  égales à  $x$  sur le complémentaire de la boule de rayon  $1/\varepsilon^2$  entrée en 0.

iv) Les espaces  $\text{Cub}_n^K(x, n)$  et  $\Omega_\varepsilon(x, n)$  sont homotopiquement équivalents. Choisissons  $K$  suffisamment petit pour être contenu dans une boule  $B^\circ$  entièrement contenue dans  $\mathbb{I}^n$  et centrée en 0. Soit  $B^1$  une boule entièrement contenue dans  $K$  et centrée en 0 :  $B^1 \subset K \subset B^\circ \subset \mathbb{I}^n$ . Soit  $[t \rightarrow H_t]$  un arc différentiable dans  $\text{Diff}(\text{int}(\mathbb{I}^n), \mathbb{R}^n)$  tel que  $H_0$  applique  $B^\circ$  sur  $B_\varepsilon$  la boule de rayon  $\varepsilon$  centrée en zéro et  $H_1$  applique  $B^1$  sur  $B_\varepsilon$  :



Soit  $\varphi \in \text{Cub}_n^K(X, x)$ ,  $H_0^*(\varphi) = \varphi \circ H_0^{-1} \in \Omega_\epsilon(x, n)$ ,  $H_0^*$  est évidemment différentiable. Soit  $\psi \in \Omega_\epsilon(X, x)$ ,  $H_1^*(\psi) = \psi \circ H_1$  est défini sur  $I^n$  et vaut  $x$  pour tout  $r$  appartenant au complémentaire de  $K^0$ , on peut donc prolonger  $\psi \circ H_1$  par  $x$  sur  $R^n - I^n$  en un élément de  $\text{Cub}_n^K(X, x)$ ; parce que  $K$  est fixé, l'application  $\psi \circ H_1 \rightarrow \text{prl}(\psi \circ H_1)$  est différentiable.

On a donc

$$\begin{cases} H_0^* : \text{Cub}_n^K(x, n) \rightarrow \Omega_\epsilon(x, n) \\ \text{prl} \circ H_1^* : \Omega_\epsilon(x, n) \rightarrow \text{Cub}_n^K(X, x) \end{cases}$$

ces deux applications sont homotopiquement inverses l'une de l'autre :

$H_0^* \circ \text{prl} \circ H_1^* = (H_1^{-1} \circ H_0)^*$  et  $\text{prl} \circ H_1^* \circ H_0^* = \text{prl} \circ (H_0 \circ H^{-1})^*$ , l'équivalence homotopique s'obtient alors en considérant  $H(0) \circ H(t)^{-1}$  et  $H(t)^{-1} \circ H_0$ .

Ainsi la proposition est démontrée.  $\square$

**10 Corollaire :**

$$\pi_n(X, x) \sim \pi_0(\text{Sph}_n(X, x))$$

## A7-2 Notion de k-connexité

La k-connexité ainsi que certaines propriétés qui lui sont associées s'étendent naturellement aux espaces difféologiques :

**↳ Définition :**

Un espace difféologique  $X$  sera dit k-connexé si les espaces  $D(S^q, X)$   $q \leq k$  sont connexes.

La 0-connexité coïncide avec la connexité quand on identifie  $D(S^0, X)$  avec  $X \times X$ .

**2- Proposition :**

Soit  $f \in D(S^q, X)$ , les propositions suivantes sont équivalentes :

- a)  $f$  est homotope à l'application constante
- b)  $f$  est prolongeable à  $\mathbb{R}^{q+1}$
- c)  $f$  est  $[N]$ -homotope à l'application constante.

□ En effet :

Nous démontrerons  $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a$ .

Soit  $\varphi$  une homotopie entre l'application constante  $\mathbb{1}_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow X_0$  et  $f$  :

$$\varphi(0)(\xi) = x_0 \quad \varphi(1)(\xi) = f(\xi)$$

définissons sur  $\mathbb{R}^{q+1} - \{0\}$  l'application  $\mathbf{f}$  :

$$\forall r = t\xi, (t, \xi) \in ]0, +\infty[ \times S^q \quad \mathbf{f}(r) = \varphi(1(t))(\xi)$$

où  $1$  est définie en 4.3.4. Puisque  $\mathbf{f}$  est constante sur un voisinage de zéro elle peut être prolongée en zéro par  $\mathbf{f}(0) = x_0$ .  $\mathbf{f}$  est évidemment différentiable et prolonge  $f$  sur  $\mathbb{R}^{q+1}$ . Elle est stationnaire au voisinage de  $S^q \subset \mathbb{R}^{q+1}$ .

Considérons alors l'application définie sur  $\mathbb{R} \times S^q, S^q \subset \mathbb{R}^{q+1}$  par :

$$(t, (r_1, \dots, r_n)) \rightarrow f((1-t)r_1, \dots, (1-t)r_n, t + (1-t)r_{n+1})$$

elle définit une homotopie  $\eta$  dans  $D(S^q, X)$  telle que :

$$\eta(0)(r) = f(r) \quad \eta(1)(r) = f(N) \quad \eta(t)(N) = f(N)$$

c'est donc une  $\{N\}$  - homotopie joignant  $f$  à  $\mathbb{I}_{f(N)}$ .

L'implication  $c \Rightarrow a$  est évidente.  $\square$

On a alors :

### 3- Corrolaire :

$X$  est  $k$ -connexe si et seulement si  $\pi_q(X) = 0 \quad \forall q \leq k$ .

La 1-connexité coïncide avec la simple connexité.

A partir de b) on peut montrer, utilisant le théorème de Stokes et la définition des formes différentielles sur les espaces difféologiques [22], que si un espace  $X$  est  $k$ -connexe l'intégrale de toute  $q$ -forme  $\omega$  sur les cycles  $\varphi \in D(S^q, X)$ :  $\int_{\varphi} \omega = \int_{S^q} \varphi^*(\omega) \quad q \leq k$ , est nulle. Ce qui peut se déduire aussi de l'existence d'un opérateur chaine-homotopie défini sur les espaces  $\Lambda^q(X)$  des  $q$ -formes d'un espace  $X$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] **D.Arnold** -Chapitres supplémentaires à la théorie des équations différentielles, Edition MIR, Moscou (1980)
- [2] **R.Barre** -De quelques aspects de la théorie des  $Q$ -variétés différentielles et analytiques, Ann. Inst. Fourier, 23 (1973),227-312
- [3] **L.S.Bouma-W.T.van Est** -Manifold schemes and foliation on the 2-torus an the Klein bottle, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. serie A,8(1978),313-347
- [4] **A.Connes** -An analogue of the Thom isomorphism for the cross product of  $C^*$ -algebras,Adv. notes in Math. vol 39 1 (1981)
- [5] **J.Dieudonné** -Eléments d'analyse Tome 3, Gauthiers-Villars, Paris 1970
- [6] **P.Donato** -Thèse,Université de Provence, Octobre 1984
- [7] **C.Duval** -Einstein-Yang-Mills-Higgs General Covariance and Mass Formulas. International Meeting on Geometry and Physics. Florence 1982. Pitagora Editrice Bologna. (1983)pp. 239-251
- [8] **C.Ehresmann** -Catégories topologiques et catégories différentiables. Coll. Géom. Diff. Glob. Bruxelles CBRM (1959)pp. 139-150
- [9] **C.Godbillon** -Elements de topologie algébrique,Hermann, Paris.(1971)
- [10] **C.Godbillon** -Feuilletages ayant la propriété de relèvement des homotopies, Annales de l'institut Fourier, Grenoble, t.17, 2 (1967) pp. 216-260
- [11] **M.R.Hermann** -Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Pub. Sc. de l'I.H.E.S n° 49 (1979)
- [12] **S.T.Hu** -Homotopie theory, Academic Press, New-York (1959)
- [13] **P.Iglesias** -Classification des fibrés différentiels principaux de groupe structural  $(\mathbb{R},+)$  sur les tores de Denjoy-Poincaré, Preprint, CPT-84/P.1690(1984)
- [14] **Kobayashi-Nomizu** -Foundations of differential geometry. Interscience Publishers 1963

- [15] **S.M.Lane** -Catégories for the working mathematician, Graduate texts in Math. 5, Springer Verlag (1971)
- [16] **Palais** -The classification of G-spaces. Mem. Amer. Math. Soc. N° 36 (1960)
- [17] **J.Prodines**-Théorie de Lie pour les groupoides différentiables. C.R.A.S. 263pp907-910(1966)
- [18] **M.A.Rieffel** - $C^*$ -algebras associated with irrational rotations, Pacific J. of Math., 93 2(1981)pp 415-429
- [19] **D.Rohlin-D.Fuchs** -Premier cours de topologie, Edition MIR, Moscou(1981)
- [20] **I.MSinger**-Some remarks on the Gribov Ambiguity, Comm. in Math. Phys., 60, pp 7-12 (1978)
- [21] **J.M.Souriau** -Groupes différentiels, Lect. notes in Math., Springer Verlag, 836(1981)
- [22] **J.M.Souriau** -Un algorithme générateur de structures quantiques, Preprint, CPT-84/PE.1694(1984)
- [23] **J.M.Souriau** -Groupes différentiels et physique mathématique in "Feuilletage et quantification géométrique", pp 75-79, Colection Travaux en cours, Hermann, Paris (1984)
- [24] **J.M.Souriau**-Modèle de particule à Spin dans le champ électromagnétique et gravitationnel. Ann. Inst. Henri Poincaré. XX A(1974)
- [25] **N.Steenrod** -The topolgy of fiber bundles, Priceton University Press, Princeton(1951)
- [26] **G.W.Whitehead**-Elements of Homotopy Theorie, Graduate texts in Math. 61, Springer Verlag (1978)