Lietuvos fizikos rinkinys, XI, Nr. 1, 1971
Литовский физический сборник, XI, № 1, 1971

УДК 530.1+53 : 001.5

ФАКТОРИЗАЦИЯ ПРОЕКЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ ЮНГА СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП

А. А. Юцис

(Поступило 29.V.1970)

Проекционные операторы представлений группы S_n, приведенных относительно цепочки подгрупп $S_n \supset S_{n-1} \supset \ldots \supset S_1$, выражены в виде произведений взаимно перестановочных операторов $(r_{ik}\varepsilon + \mathbf{D}_k)$ $(i \leqslant k = 1, 2, \ldots, n)$, где ε — единичный элемент группы и $\mathbf{D}_k$ — сумма транспозиций $(\mathbf{kp})$ с $p<k$. Вещественные числа r_{ik} принимают значения, зависящие от стандартной таблицы, задающей проекционный оператор.

1. Полученные в работе [1] выражения для операторов Юнга оказались полезными при решении задач, сводящихся к отысканию матричных элементов различных операторов групповой алгебры в косо-представлениях (*skew representations* [2]) симметрических групп [3, 4, 5]. Выражение для операторов

$$\sum_{s \in S_n} (\rho \mid s \mid \rho')\, \mathbf{s} \tag{1}$$

($(\rho \mid s \mid \rho')$ — матричный элемент группового элемента $\mathbf{s}$ в представлении), следующее из результатов (3.30) и (4.16) работы [1]*, справедливо для любого косо-представления группы S_n. Неприводимое же ортогональное представление симметрической группы, приведенное относительно цепочки подгрупп $S_n \supset S_{n-1} \supset S_{n-2} \supset \ldots \supset S_1$, является частным случаем косо-представления. Поэтому можно надеяться, что существует выражение для операторов (1), учитывающее специфику этого важного частного случая косо-представления.

В случае неприводимого представления роль индексов ρ, ρ', нумерующих базис представления, играют стандартные таблицы одной и той же схемы Юнга λ [6, 7, 8]. Ниже получены выражения для операторов Юнга $\mathbf{O}_{\rho\rho'}$, т.е., операторов, отличающихся от (1) присутствием множителя $f_\lambda/n!$,

* Имеющиеся в статье [1] корректурные ошибки исправлены в последнем пункте настоящей заметки.

где f_λ — размерность неприводимого представления λ. При этом проекционные операторы $\mathbf{O}_{\rho\rho}$ (примитивные идемпотенты) факторизованы в виде, содержащем только подклассы групп S_k относительно подгрупп S_{k-1} ($k=2, 3, \ldots, n$), состоящие из транспозиций ($\mathbf{kp}$) с $p<k$. Для недиагональных операторов Юнга предлагается выражение, следующее из известного соотношения [7]

$$\mathbf{O}_{\rho\rho'} = (\rho \,|\, s \,|\, \rho')^{-1} \mathbf{O}_{\rho\rho} \, \mathbf{s} \, \mathbf{O}_{\rho'\rho'} \qquad \Big((\rho \,|\, s \,|\, \rho') \neq 0\Big). \tag{2}$$

Отметим, что для проекционных операторов

$$\varepsilon^\lambda = \sum_{\rho\in\lambda} \mathbf{O}_{\rho\rho}$$

центра групповой алгебры S_n удобные выражения в факторизованном виде, содержащем только суммы элементов циклических классов группы, получены Крамером [9].

2. Пусть ρ_k и ρ_k^+ — стандартные таблицы схем Юнга соответственно из k и $k+1$ клеток, расположение первых k чисел в которых совпадает с их распределением в стандартной таблице $\rho\equiv\rho_n$; $x_k(\rho)$ — разность номеров столбца и строки клетки с числом k в стандартной таблице ρ; $\lambda_k(\rho)$ — схема Юнга, получаемая из λ отбрасыванием клеток, занимаемых в ρ числами $r>k$.

Докажем, что

$$\mathbf{O}_{\rho\rho} = \prod_{k=2}^{n} \prod_{\substack{\rho_{k-1}^+ \\ (\rho_{k-1}^+ \neq \rho_k)}} \frac{\mathbf{D}_k - x_k(\rho_{k-1}^+)\,\varepsilon}{x_k(\rho) - x_k(\rho_{k-1}^+)}, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{D}_k = \sum_{p<k} (\mathbf{kp})$$

и ε — единичный элемент группы.

Рассматриваемые нами неприводимые представления группы S_n приведены относительно любой из подгрупп S_k ($k\leqslant n$), и именно схема Юнга $\lambda_k(\rho)$ указывает, по какому неприводимому представлению преобразуется базисная функция, задаваемая стандартной таблицей ρ [6, 8]. Поэтому матрица суммы ${}_kC_\beta$ элементов определенного класса (β) группы S_k ($k=2, 3, \ldots, n$) диагональна, и [6, 7, 8]

$$(\rho \,|\, {}_kC_\beta \,|\, \rho) = \frac{\chi_\beta^{\lambda_k(\rho)} h_\beta}{f_{\lambda_k(\rho)}}, \tag{4}$$

где h_β — число элементов класса (β) группы S_k и $\chi_\beta^{\lambda_k(\rho)}$ — характер этого класса в неприводимом представлении $\lambda_k(\rho)$. Для класса $(\beta)=(2)(1)^{k-2}$ имеем ([8], равенство (7–76)):

$$\frac{\chi^{\lambda_k(\rho)}_{(2)(1)^{k-2}} h_{(2)(1)^{k-2}}}{f_{\lambda_k(\rho)}}=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}\lambda_{kr}(\rho)\Big(\lambda_{kr}(\rho)+1\Big)-\sum_{r=1}^{k} r\lambda_{kr}(\rho), \tag{5}$$

где $\lambda_{kr}(\rho)$ — длина r-той строки схемы Юнга $\lambda_k(\rho)$.

Так как

$$\mathbf{D}_k={}_k\mathbf{C}_{(2)(1)^{k-2}}-{}_{k-1}\mathbf{C}_{(2)(1)^{k-3}},$$

то обозначая через r' номер строки, в которой в $\lambda_k(\rho)$ находится число k, из (4) и (5) получаем:

$$(\rho\,|\,\mathbf{D}_k\,|\,\rho)=\lambda_{kr'}(\rho)-r'=x_k(\rho). \tag{6}$$

Коэффициенты разложения любого элемента групповой алгебры по операторам Юнга равны соответствующим матричным элементам разлагаемого элемента [7]. В частности:

$$\mathbf{D}_k=\sum_{\rho'} x_k(\rho')\,\mathbf{O}_{\rho'\rho'} \tag{7}$$

и

$$\varepsilon=\sum_{\rho'}\mathbf{O}_{\rho'\rho'}, \tag{8}$$

где суммирование ведется по стандартным таблицам всех схем Юнга. Подставляя (7) и (8) в выражение на правой стороне равенства (3) и учитывая, что [7]

$$\mathbf{O}_{\rho''\rho''}\mathbf{O}_{\rho'''\rho'''}=\delta_{\rho''\rho'''}\mathbf{O}_{\rho''\rho''},$$

получаем:

$$\prod_{k=2}^{n}\ \prod_{\substack{\rho^+_{k-1}\\(\rho^+_{k-1}\neq\rho_k)}}\frac{\mathbf{D}_k-x_k(\rho^+_{k-1})\,\varepsilon}{x_k(\rho)-x_k(\rho^+_{k-1})}=$$

$$=\sum_{\rho'}\left\{\prod_{k=2}^{n}\ \prod_{\substack{\rho^+_{k-1}\\(\rho^+_{k-1}\neq\rho_k)}}\frac{x_k(\rho')-x_k(\rho^+_{k-1})}{x_k(\rho)-x_k(\rho^+_{k-1})}\right\}\mathbf{O}_{\rho'\rho'}. \tag{9}$$

Коэффициент в фигурных скобках в (9) равен единице для $\rho'=\rho$ и, как легко видеть, нулю в противном случае. Действительно, пусть $\rho'_{t-1}=\rho_{t-1}$, однако $\rho'_t\neq\rho_t$; тогда ρ'_t равен одному из $\rho^+_{t-1}\neq\rho_t$, и в числителе имеется множитель $\left(x_t(\rho')-x_t(\rho^+_{t-1})\right)=0$. Равенство (3) доказано.

3. $\mathbf{D}_k$ является суммой элементов одного из подклассов [10] группы S_k относительно подгруппы S_{k-1}. Соответственно, все множители в факторизованном выражении (3) взаимно перестановочны.

Так как любое представление эквивалентно прямой сумме неприводимых представлений, собственные значения взаимно перестановочных операторов $\mathbf{D}_k$ в любом представлении равны возможным значениям $x_k(\rho)$. Одновременная диагонализация операторов $\mathbf{D}_k$ $(k=2, 3, \ldots, n)$ приводит к нахождению их собственных функций Ψ_ρ, характеризующихся по отношению к преобразованиям группы S_n и ее подгрупп S_k $(k<n)$ неприводимыми трансформационными свойствами, задаваемыми соответствующей стандартной таблицей ρ. Действительно, из (3) следует:

$$\mathbf{O}_{\rho\rho}\Psi_\rho=\Psi_\rho.$$

Отметим еще, что, как это следует из (3),

$$\mathbf{O}_{\rho\rho}=\mathbf{O}_{\rho_{n-1}\rho_{n-1}}\prod_{\substack{\rho^+_{n-1}\\(\rho^+_{n-1}\neq\rho)}}\frac{\mathbf{D}_n-x_n(\rho^+_{n-1})\,\varepsilon}{x_n(\rho)-x_n(\rho^+_{n-1})}, \tag{10}$$

где $\mathbf{O}_{\rho_{n-1}\rho_{n-1}}$ — проекционный оператор подгруппы S_{n-1}.

4. Пусть $\boldsymbol{\sigma}(\rho\rho')$ — перестановка, переводящая стандартную таблицу ρ' в ρ. Из равенства (4.16) работы [1] следует, что

$$\left(\rho\,|\,\sigma(\rho\rho')\,|\,\rho'\right)=\prod_{\substack{s>r\\\sigma(s)<\sigma(r)}}\left(1-\frac{1}{\left(x_s(\rho')-x_r(\rho')\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Здесь произведение взято по тем парам чисел $s>r$, вместо которых перестановкой $\boldsymbol{\sigma}(\rho\rho')$ подставляемые соответственно числа $\sigma(s)$ и $\sigma(r)$ удовлетворяют неравенство $\sigma(s)<\sigma(r)$. Вследствие стандартности таблиц ρ и ρ', матричный элемент (11) не может быть равным нулю. Подставляя в соотношение

$$\mathbf{O}_{\rho\rho'}=\prod_{\substack{s>r\\\sigma(s)<\sigma(r)}}\left(1-\frac{1}{\left(x_s(\rho')-x_r(\rho')\right)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{O}_{\rho\rho}\boldsymbol{\sigma}(\rho\rho')\mathbf{O}_{\rho'\rho'}, \tag{12}$$

полученное из равенства (2), выражения проекционных операторов $\mathbf{O}_{\rho\rho}$ и $\mathbf{O}_{\rho'\rho'}$, следующие из (3), получаем соответствующее выражение для недиагональных операторов Юнга.

5. В статью [1] проскользнули ошибки корректурного характера (в том числе и по вине автора). Исправляем их: 1) в 15-той строке стр. 166 вместо E_α должно быь I_α; 2) в 16-той строке стр. 167 пропущен показатель степени -1 у выражения в прямых скобках; 3) в 4-той строке стр. 170 вместо $(u_s(\rho)-1)$ должно быть $(u_s(\rho)+1)$; 4) в равенстве (3.5) вместо $D^s_\eta - D^n_\eta$; 5) в равенстве (3.7) вместо первого знака Σ должно быть Π; 6) в 20-той строке стр. 172 вместо $\uparrow$ должно быть $\downarrow$; 7) в равенстве (3.30) вместо $x_s \to v_r(\rho) - u_s(\rho)$ должно быть $x_s \to v_s(\rho) - u_s(\rho)$; 8) в 17-той строке стр. 176 должно быть $I_{\sigma(\rho\rho')\bar{\nu}}$ и $I_{\bar{\nu}}$; 9) в равенстве (4.6) над D без черточки пропущен знак $\wedge$; 10) в третьей строке стр. 177 над D пропущены черточки; 11) в примере к равенству (4.16) пропущена перестановка $\sigma(\rho'\rho)=(24)(365)$; 12) в равенствах (2.14) и (2.17) вместо $p=i+1$ должно быть $p \geqslant i+1$; 13) во второй строке равенства (3.26) вместо первого $n!$ должно быть $k!$.

Институт физики и математики
Академии наук Литовской ССР

Литература

1. А. А. Юцис, Liet. fiz. rink., **VI**, 163 (1966).
2. G. de B. Robinson, Representation theory of the Symmetric group, Edinburgh, 1961.
3. А. А Юцис, Liet. fiz. rink., **VIII**, 597 (1968).
4. А. А. Юцис, Liet. fiz. rink., **IX**, 629 (1969).
5. А. А. Юцис, Liet. fiz. rink., **X**, 669 (1970)
6. D. E. Rutherford, Substitutional analysis, Edinburgh, 1948.
7. H. Boerner, Representations of groups, North-Holland publishing company, Amsterdam, 1963.
8. M. Hamermesh, Group theory and its application to physical problems, Addison-Wesley publishing company, Reading, U. S. A., (1962) (русский перевод – „Мир", М., 1966).
9. P. Kramer, Z. Naturforsch., **21a**, 657 (1966).
10. E. P. Wigner, Spectroscopic and group theoretical methods in physics. Сб. ст. под редакцией F. Bloch и др., 131, North-Holland publishing company, Amsterdam, 1968.

SIMETRINIŲ GRUPIŲ PROJEKCINIŲ JUNGO OPERATORIŲ FAKTORIZACIJA

A. A. Jucys

Reziumė

Surasta faktorizuota išraiška S_n grupės neredukuotinių atvaizdų, redukuotų atžvilgiu pogrupių sekos $S_n \supset S_{n-1} \dots \supset S_1$, projekciniams operatoriams. Kiekvienas į sandaugą įeinančių operaorių yra tokio pavidalo: $(r_{ik}\varepsilon+\mathbf{D}_k)$ $(i=k=1, 2, \ldots, n)$. Čia ε – vienetinis grupės elementas ir $\mathbf{D}_k$ – transpozicijų $(\mathbf{kp})$, kai $p<k$, suma. Realių skaičių r_{ik} skaitinės reikšmės priklauso nuo standartinių Jungo lentelių, kuriomis nusakomi projekciniai operatoriai.

Lietuvos TSR Mokslų akademijos
Fizikos ir matematikos institutas

FACTORIZATION OF YOUNG PROJECTION OPERATORS FOR THE SYMMETRIC GROUP

A. A. Jucys

Summary

The primitive idempotents of Young's „orthogonal" representation are factorized in a way involving only mutually commuting factors of the type $(r_{ik}\varepsilon+\mathbf{D}_k)$ $(i\leqslant k=1, 2, \ldots, n)$, ε denoting unity of the group and $\mathbf{D}_k$ the sum of transpositions $(\mathbf{kp})$ with $p<k$. The values of real numbers r_{ik} depend on the standard Young tableaux defining primitive idempotent (projection operator).

Institute of Physics and Mathematics
of the Academy of Sciences of the Lithuanian SSR