Matematisk Institut
Aarhus Universitet

26. oktober 1968

NATURVIDENSKABELIG EMBEDSEKSAMEN

med hovedfag i matematik

2. del

Skriftlig opgave til besvarelse i løbet af 4 uger

Stud. scient. Maren Bojen Justesen

"Bikategorien af Profunktorer"

Opgaven stillet: 26. oktober 1968

Opgaven afleveres: 23. november 1968

Svend Bundgaard

Svend Bundgaard

Anders Kock.

Anders Kock

§ 1 : 2-kategorier og bikategorier.

<u>Definition 1:</u> En <u>bikategori</u> $\mathcal{S}$ er

(i) En klasse af objekter $A, B, \ldots$, betegnet $\mathcal{S}_0$ eller $|\mathcal{S}|$.

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{S}_0$ en kategori $\mathcal{S}(A,B)$.

Objekterne i disse kategorier kaldes <u>en-celler</u> i $\mathcal{S}$, morfierne kaldes <u>to-celler</u> i $\mathcal{S}$.

(iii) $\forall A, B, C \in \mathcal{S}_0$ en funktor $\quad c(A,B,C) : \mathcal{S}(A,B) \times \mathcal{S}(B,C) \longrightarrow \mathcal{S}(A,C)$

notation: $\quad (S,T) \rightsquigarrow S * T$

(iv) $\forall A \in \mathcal{S}_0$ et udvalgt objekt $I_A \in |\mathcal{S}(A,A)|$.

(v) $\forall A, B, C, D \in \mathcal{S}_0$ en naturlig isomorfi $a(A,B,C,D)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(A,B) \times \mathcal{S}(B,D) \arrow[d, "c(A,B,D)"'] & & \mathcal{S}(A,B) \times \mathcal{S}(B,C) \times \mathcal{S}(C,D) \arrow[ll, "I \times c(B,C,D)"'] \arrow[d, "c(A,B,C) \times I"] \arrow[dll, phantom, "\Leftarrow a(A,B,C,D)"] \\
\mathcal{S}(A,D) & & \mathcal{S}(A,C) \times \mathcal{S}(C,D) \arrow[ll, "c(A,C,D)"]
\end{tikzcd}$$

(vi) $\forall A, B \in \mathcal{S}_0$ og $S \in |\mathcal{S}(A,B)|$ en morfi

$$l(A,B)_S : \ I_A * S \longrightarrow S \qquad \text{i } \mathcal{S}(A,B)$$

og en morfi

$$r(A,B)_S : \ S * I_B \longrightarrow S \qquad \text{i } \mathcal{S}(A,B),$$

således at $r(A,B)$ og $l(A,B)$ er naturlige isomorfier.

Disse data skal opfylde følgende to aksiomer:

I : $\forall A, B, C, D, E \in \mathcal{S}_0$ og

$S \in |\mathcal{S}(A,B)|$, $T \in |\mathcal{S}(B,C)|$, $U \in |\mathcal{S}(C,D)|$, $V \in |\mathcal{S}(D,E)|$

$$A \xrightarrow{S} B \xrightarrow{T} C \xrightarrow{U} D \xrightarrow{V} E$$

kommuterer diagrammet

(1.1)
$$\begin{tikzcd}
((S*T)*U)*V \arrow[rr, "a(A,B,C,D)_{S,T,U}*V"] \arrow[d, "a(A,C,D,E)_{S*T,U,V}"] & & (S*(T*U))*V \arrow[d, "a(A,B,D,E)_{S,T*U,V}"] \\
(S*T)*(U*V) \arrow[dr, "a(A,B,C,E)_{S,T,U*V}"'] & & S*((T*U)*V) \arrow[dl, "S*a(B,C,D,E)_{T,U,V}"] \\
& S*(T*(U*V)) &
\end{tikzcd}$$

hvor jeg har skrevet f.eks. $a(A,B,C,D)_{S,T,U}*V$ i stedet for $a(A,B,C,D)_{S,T,U}*I_V$; en notation, jeg også vil benytte i det følgende.

II : $\forall A, B, C \in \mathcal{S}_0$ og $S \in |\mathcal{S}(A,B)|$, $T \in |\mathcal{S}(B,C)|$

kommuterer diagrammet

(1.2)
$$\begin{tikzcd}
(S*I_B)*T \arrow[rr, "a(A,B,B,C)_{S,I_B,T}"] \arrow[dr, "r(A,B)_S*T"'] & & S*(I_B*T) \arrow[dl, "S*l(B,C)_T"] \\
& S*T &
\end{tikzcd}$$

Af definition 1 følger umiddelbart, at begrebet bikategori med ét objekt stemmer overens med begrebet monoidal kategori, som dette er defineret i [3]. Ligesom aksiomerne MC2 og MC3 for monoidale kategorier [3] medfører, at to kanoniske morfier i den monoidale kategori er identiske, hvis de har samme område og samme co-område, gælder formodentlig, at (1.1) og (1.2) medfører, at ethvert diagram, der kan dannes i en af kategorierne $\mathbb{S}(A,B)$ ved hjælp af a, r og l, er kommutativt. (Kanonisk morfi i monoidal kategori er defineret i [4])

Definition 2: En bikategori $\mathbb{S}$ kaldes en 2-kategori, hvis $a(A,B,C,D)$, $r(A,B)$ og $l(A,B)$ er identitetstransformationer for alle $A, B, C, D \in \mathbb{S}_0$

Det er klart, at en 2-kategori specielt er en kategori med $|\mathbb{S}(A,B)|$ som morfier fra A til B.

Eksempel 1: Kategorien af små kategorier kan opfattes som 2-kategori på følgende måde:

(i) $\mathbb{S}_0$ er klassen af små kategorier $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \ldots$.

(ii) $\mathbb{S}(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \mathrm{Funct}(\mathbb{A},\mathbb{B})$, d.v.s. kategorien af funktorer $\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ med transformationer som morfier.

(iii) Funktoren $c(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}) : \mathrm{Funct}(\mathbb{A},\mathbb{B}) \times \mathrm{Funct}(\mathbb{B},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Funct}(\mathbb{A},\mathbb{C})$ er på objekter sædvanlig sammensætning af funktorer. På morfier virker $c(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})$ på følgende måde:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, bend left, "S_1"] \arrow[r, bend right, "S_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \mathbb{B} \arrow[r, bend left, "T_1"] \arrow[r, bend right, "T_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$(\varepsilon,\eta)(c(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})) = \varepsilon * \eta = (\varepsilon \circ T_1)(S_2 \circ \eta) : S_1T_1 \Longrightarrow S_2T_2$, hvor $\varepsilon \circ T_1$ betegner den transformation $S_1T_1 \Longrightarrow S_2T_1$, der er givet ved $(\varepsilon \circ T_1)_A = (\varepsilon_A)T_1 : AS_1T_1 \longrightarrow AS_2T_1$ og $S_2 \circ \eta$ er den transformation $S_2T_1 \Longrightarrow S_2T_2$, der er givet ved $(S_2 \circ \eta)_A = \eta_{AS_2} : AS_2T_1 \longrightarrow AS_2T_2$ for alle $A \in |\mathbb{A}|$.

$c(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})$ er virkelig en funktor, idet $\quad I_{S_1} * I_{T_1} = I_{S_1 \cdot T_1}$
og for

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, "S_1"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] \arrow[r, "S_2"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon_1"] \arrow[r, "S_3"'] & \mathbb{B} \arrow[r, "T_1"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[r, "T_2"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta_1"] \arrow[r, "T_3"'] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

er

$$\begin{aligned} ((\varepsilon\cdot\varepsilon_1)*(\eta\cdot\eta_1))_A &= (\varepsilon\cdot\varepsilon_1)_A T_1 \cdot (\eta\cdot\eta_1)_{AS_3} \\ &= \varepsilon_A T_1 \cdot \varepsilon_{1A} T_1 \cdot \eta_{AS_3} \cdot \eta_{1AS_3} \\ &= \varepsilon_A T_1 \cdot \eta_{AS_2} \cdot \varepsilon_{1A} T_2 \cdot \eta_{1AS_3} \quad \text{, fordi } \eta \text{ er nat.} \\ &= (\varepsilon * \eta)_A \cdot (\varepsilon_1 * \eta_1)_A \end{aligned}$$

(iv) $I_{\mathbb{A}}$ er identitetsfunktoren på $\mathbb{A}$.

(v) Da sammensætning af funktorer er associativ, er diagrammet

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Funct}(\mathbb{A},\mathbb{B})\times\mathrm{Funct}(\mathbb{B},\mathbb{C})\times\mathrm{Funct}(\mathbb{C},\mathbb{D}) \arrow[r, "I\times c(\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D})"] \arrow[d, "c(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})\times I"] & \mathrm{Funct}(\mathbb{A},\mathbb{B})\times\mathrm{Funct}(\mathbb{B},\mathbb{D}) \arrow[d, "c(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D})"] \\ \mathrm{Funct}(\mathbb{A},\mathbb{C})\times\mathrm{Funct}(\mathbb{C},\mathbb{D}) \arrow[r, "c(\mathbb{A},\mathbb{C},\mathbb{D})"] & \mathrm{Funct}(\mathbb{A},\mathbb{D}) \end{tikzcd}$$

kommutativt for alle $\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D}$.

(vi) $\forall \mathbb{A},\mathbb{B}$ og $S \in |\mathrm{Funct}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$ er $\quad I_{\mathbb{A}}\cdot S = S = S\cdot I_{\mathbb{B}}$

Axiomerne I og II er klart opfyldt, når a, r og l er identiteter.

2-kategorien i eks. 1 kaldes i det følgende 2-kategorien af funktorer og betegnes $\underline{\mathcal{C}at}$.

I det følgende eksempel får jeg brug for begrebet disjunkt forening af mængder, som jeg vil definere på følgende måde:

Definition 3: Lad B være en mængde, og lad $\forall b \in B$ A_b være en mængde. Ved den disjunkte forening over B af A_b forstås:

(1.3) $$\bigcup_{\substack{\text{disj}\\ b\in B}} A_b = \{(b,a) \mid b \in B \wedge a \in A_b\}.$$

Eksempel 2: Bikategorien af profunktorer, $\underline{Prof}$, som skal være hovedbegrebet i de følgende paragraffer, består af

(i) $\underline{Prof}_0 = \underline{Cat}_0$

(ii) $\underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \underline{Funct}(\mathbb{A}^{op} \times \mathbb{B}, \mathcal{E}ns)$, hvor $\mathcal{E}ns$ betegner kategorien af mængder. Objekterne i $\underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ kaldes profunktorer fra $\mathbb{A}$ til $\mathbb{B}$. Notation $\mathbb{A} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\; \mathbb{B}$.

(iii) Lad $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ være små kategorier. S en profunktor fra $\mathbb{A}$ til $\mathbb{B}$ og T en profunktor fra $\mathbb{B}$ til $\mathbb{C}$. Vi skal definere

$$(S,T)(c(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})) = S*T \in \underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{C})$$

$\forall A \in |\mathbb{A}|$ og $C \in |\mathbb{C}|$ sættes

(1.4) $$(A,C)(S*T) = \bigcup_{\substack{\text{disj}\\ B\in|\mathbb{B}|}} \left[(A,B)S \times (B,C)T\right] \Big/ \equiv ,$$

hvor $\equiv$ er den ækvivalensrelation i $\bigcup_{\substack{\text{disj}\\ B\in|\mathbb{B}|}} [(A,B)S \times (B,C)T]$, der er frembragt af følgende relation $\sim$:

$\forall B, B' \in |\mathbb{B}|$, $\xi_1 \in (A,B)S$, $\delta_1 \in (B,C)T$, $\xi_2 \in (A,B')S$ og $\delta_2 \in (B',C)T$

(1.5) $$^{(*)}(\xi_1,\delta_1) \sim (\xi_2,\delta_2) \iff \begin{cases} \exists \beta \in \mathbb{B}(B,B'): \xi_1((I_A,\beta)S) = \xi_2 \ \wedge\ \delta_2((\beta,I_C)T) = \delta_1 \\ \text{el. } \exists \beta \in \mathbb{B}(B',B): \xi_2((I_A,\beta)S) = \xi_1 \ \wedge\ \delta_1((\beta,I_C)T) = \delta_2 \end{cases}$$

(*) Her har jeg tilladt mig at udelade det $(B,\ )$ og $(B',\ )$, som skulle med ifølge def. 3.

$\sim$ er reflexiv og symmetrisk.

Nu defineres $S * T$ på morfier.

For $a \in \mathbb{A}(A', A)$, $c \in \mathbb{C}(C, C')$, $\xi \in (A, B)S$ og $\delta \in (B, C)T$ sættes

(1.6) $$(cl(\xi, \delta))((a, c)(S * T)) = cl((\xi)((a, I_B)S), (\delta)((I_B, c)T))$$

$(a, c)(S * T)$ er veldefineret, idet der for $\xi_1 \in (A, B)S$, $\delta_1 \in (B, C)T$, $\xi_2 \in (A, B')S$, $\delta_2 \in (B', C)T$ og $\beta \in \mathbb{B}(B, B')$ gælder

$$(\xi_1)((I_{A'}, \beta)S) = \xi_2 \wedge (\delta_2)((\beta, I_C)T) = \delta_1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (\xi_2)((a, I_{B'})S) = (\xi_1)((a, \beta)S) = (\xi_1)((a, I_B)S)((I_{A'}, \beta)S) \text{ og} \\ (\delta_1)((I_B, c)T) = (\delta_2)((\beta, c)T) = (\delta_2)((I_{B'}, c)T)((\beta, I_{C'})T) \end{cases}$$

Heraf ses, at

$$(\xi_1, \delta_1) \sim (\xi_2, \delta_2) \Rightarrow ((\xi_1)((a, I_B)S), (\delta_1)((I_B, c)T)) \sim ((\xi_2)((a, I_{B'})S), (\delta_2)((I_{B'}, c)T))$$

og derfor gælder også

$$(\xi_1, \delta_1) \equiv (\xi_2, \delta_2) \Rightarrow ((\xi_1)((a, I_B)S), (\delta_1)((I_B, c)T)) \equiv ((\xi_2)((a, I_{B'})S), (\delta_2)((I_{B'}, c)T))$$

Det ses let, at $S * T$ virkelig er en funktor $\mathbb{A}^{op} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{E}ns$; altså en profunktor $\mathbb{A} \relbar\!\!\!+\!\!\!\rightarrow \mathbb{C}$.

Nu defineres $c(\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})$ på morfier i $\underline{Prof}(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \times \underline{Prof}(\mathbb{B}, \mathbb{C})$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^{op} \times \mathbb{B} \arrow[r, shift left=2, "S_1"] \arrow[r, shift right=2, "S_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & \mathcal{E}ns \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^{op} \times \mathbb{C} \arrow[r, shift left=2, "S_1 * T_1"] \arrow[r, shift right=2, "S_2 * T_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varepsilon * \mu"] & \mathcal{E}ns. \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{B}^{op} \times \mathbb{C} \arrow[r, shift left=2, "T_1"] \arrow[r, shift right=2, "T_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\mu"] & \mathcal{E}ns \end{tikzcd}$$

For $A \in |\mathbb{A}|$ og $C \in |\mathbb{C}|$ defineres $(A, C)(S_1 * T_1) \xrightarrow{(\varepsilon * \mu)_{A,C}} (A, C)(S_2 * T_2)$

ved

$$(1.7) \qquad (cl(\xi,\delta))(\varepsilon*\mu)_{A,C} = cl((\xi)\varepsilon_{A,B},(\delta)\mu_{B,C})$$

for $\xi \in (A,B)S_1$ og $\delta \in (B,C)T_1$

$(\varepsilon*\mu)_{A,C}$ er veldefineret, idet der for $\xi_1 \in (A,B)S_1$, $\xi_2 \in (A,B')S_1$, $\delta_1 \in (B,C)T_1$, $\delta_2 \in (B',C)T_1$ og $\beta \in \mathbb{B}(B,B')$ gælder

$$\begin{gathered} \xi_2 = (\xi_1)((I_A,\beta)S_1) \ \wedge \ \delta_1 = (\delta_2)((\beta,I_C)T_1) \\ \Downarrow \\ \begin{cases} (\xi_2)\varepsilon_{AB'} = ((\xi_1)((I_A,\beta)S_1))\varepsilon_{AB'} = ((\xi_1)\varepsilon_{AB})((I_A,\beta)S_2) \ \text{og} \\ (\delta_1)\mu_{BC} = ((\delta_2)((\beta,I_C)T_1))\mu_{BC} = ((\delta_2)\mu_{B'C})((\beta,I_C)T_2) \end{cases} \end{gathered}$$

på grund af naturligheden af ε og μ.

Altså $\quad (\xi_1,\delta_1)\sim(\xi_2,\delta_2) \Rightarrow ((\xi_1)\varepsilon_{AB},(\delta_1)\mu_{BC}) \sim ((\xi_2)\varepsilon_{AB'},(\delta_2)\mu_{B'C})$

og derfor gælder også $(\xi_1,\delta_1)\equiv(\xi_2,\delta_2) \Rightarrow ((\xi_1)\varepsilon_{AB},(\delta_1)\mu_{BC}) \equiv ((\xi_2)\varepsilon_{AB'},(\delta_2)\mu_{B'C})$

$(\varepsilon*\mu)_{A,C}$ er naturlig i A og C:

Lad $a \in \mathbb{A}(A',A)$ og $c \in \mathbb{C}(C,C')$. Så kommuterer diagrammet:

$$(1.8) \qquad \begin{tikzcd} (A,C)(S_1*T_1) \arrow[r, "(\varepsilon*\mu)_{A,C}"] \arrow[d, "(a,c)(S_1*T_1)"'] & (A,C)(S_2*T_2) \arrow[d, "(a,c)(S_2*T_2)"] \\ (A',C')(S_1*T_1) \arrow[r, "(\varepsilon*\mu)_{A',C'}"] & (A',C')(S_2*T_2) \end{tikzcd}$$

idet
$$\begin{aligned} (cl(\xi,\delta))(\varepsilon*\mu)_{A,C}((a,c)(S_2*T_2)) &= cl((\xi)\varepsilon_{AB}((a,I_B)S_2),(\delta)\mu_{BC}((I_B,c)T_2)) \\ &= cl((\xi)((a,I_B)S_1)\varepsilon_{A'B},(\delta)((I_B,c)T_1)\mu_{BC'}) \\ &= (cl(\xi,\delta))((a,c)(S_1*T_1))(\varepsilon*\mu)_{A'C'}. \end{aligned}$$

på grund af naturligheden af ε og μ.

Det ses let, at $c(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})$ virkelig er en funktor.

(iv) $I_{\mathbb{A}} \in \underline{\mathrm{Prof}}(\mathbb{A},\mathbb{A})$ skal være $\mathbb{A}(-,-)$

(v) $\forall \mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D} \in (\underline{\mathrm{Prof}})_0$ og

$$\mathbb{A} \overset{S}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!+\;\;\;} \mathbb{B} \overset{T}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!+\;\;\;} \mathbb{C} \overset{U}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!+\;\;\;} \mathbb{D}$$

defineres $a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D})_{S,T,U}$ ved

$$
\begin{array}{ccc}
(A,D)((S*T)*U) & \xrightarrow{(a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D})_{S,T,U})_{A,D}} & (A,D)(S*(T*U)) \\
\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(\xi,\delta),\rho) & \rightsquigarrow & \mathrm{cl}(\xi,\mathrm{cl}(\delta,\rho))
\end{array}
\quad ; \quad A \in |\mathbb{A}|,\ D \in |\mathbb{D}| \tag{1.9}
$$

Det ses let, at $(a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D})_{S,T,U})_{A,D}$ er veldefineret.

Lad $a \in \mathbb{A}(A',A)$ og $d \in \mathbb{D}(D,D')$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(\xi,\delta),\rho) \arrow[rrr, squiggly] \arrow[ddd, squiggly] & & & \mathrm{cl}(\xi,\mathrm{cl}(\delta,\rho)) \arrow[ddd, squiggly] \\
& (A,D)((S*T)*U) \arrow[r, "(a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D})_{S,T,U})_{A,D}"] \arrow[d, "(a,d)((S*T)*U)"'] & (A,D)(S*(T*U)) \arrow[d, "(a,d)(S*(T*U))"] & \\
& (A',D')((S*T)*U) \arrow[r, "(a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D})_{S,T,U})_{A',D'}"] & (A',D')(S*(T*U)) & \\
\mathrm{cl}(\mathrm{cl}((\xi)((a,I)S),\delta),(\rho)((I,d)U)) \arrow[rrr, squiggly] & & & \mathrm{cl}((\xi)((a,I)S),\mathrm{cl}(\delta,(\rho)((I,d)U)))
\end{tikzcd}
\tag{1.10}
$$

Heraf ses, at $(a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D})_{S,T,U})_{A,D}$ er naturlig i A og D.
At $a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D})_{STU}$ er naturlig i S, T og U følger direkte af (1.7) og (1.9).
Da alle $(a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D})_{S,T,U})_{A,D}$ er isomorfier, er $a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D})$ en naturlig isomorfi $(c(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})\times I)(c(\mathbb{A},\mathbb{C},\mathbb{D})) \Rightarrow (I\times c(\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D}))(c(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D}))$

(vi) $\forall \mathbb{A},\mathbb{B} \in (\underline{\mathrm{Prof}})_0$ og $\mathbb{A} \overset{S}{\longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\!+\;\;\;} \mathbb{B}$ defineres

$l(\mathbb{A},\mathbb{B})_S : \mathbb{A}(-,-) * S \longrightarrow S$ ved

(1.11)
$$(A,B)(\mathbb{A}(-,-)*S) \xrightarrow{(\ell(\mathbb{A},\mathbb{B})_S)_{A,B}} (A,B)S \qquad A\in|\mathbb{A}|,\ B\in|\mathbb{B}|$$
$$cl(\xi,\delta) \rightsquigarrow (\delta)((\xi,I_B)S)$$

$(\ell(\mathbb{A},\mathbb{B})_S)_{A,B}$ er veldefineret, idet der for $\xi_1\in\mathbb{A}(A,A_1)$, $\delta_1\in(A_1,B)S$, $\xi_2\in\mathbb{A}(A,A_2)$, $\delta_2\in(A_2,B)S$ og $\beta\in\mathbb{A}(A_1,A_2)$ gælder

$$\xi_2=\xi_1\beta \wedge \delta_1=(\delta_2)((\beta,I_B)S)$$
$$\Downarrow$$
$$(\delta_1)((\xi_1,I_B)S)=(\delta_2)((\xi_1\beta,I_B)S)$$, idet S er kontravariant på 1. plads.
$$\Downarrow$$
$$(\delta_1)((\xi_1,I_B)S)=(\delta_2)((\xi_2,I_B)S)$$

Heraf følger $(\xi_1,\delta_1)\sim(\xi_2,\delta_2) \Rightarrow (\delta_1)((\xi_1,I_B)S)=(\delta_2)((\xi_2,I_B)S)$, og derfor $(\xi_1,\delta_1)\equiv(\xi_2,\delta_2) \Rightarrow (\delta_1)((\xi_1,I_B)S)=(\delta_2)((\xi_2,I_B)S)$

Det ses let at $(\ell(\mathbb{A},\mathbb{B})_S)_{A,B}$ er naturlig i A og B; og af (1.7) og (1.11) følger

(1.12)
$$\begin{tikzcd}
cl(\xi,\delta) \arrow[rrr, squiggly] \arrow[ddd, squiggly] & & & (\delta)((\xi,I_B)S) \arrow[dd, squiggly] \\
& (A,B)(\mathbb{A}(-,-)*S) \arrow[r, "(\ell(\mathbb{A},\mathbb{B})_S)_{A,B}"] \arrow[d, "(\mathbb{A}(-,-)*\varepsilon)_{A,B}"'] & (A,B)S \arrow[d, "\varepsilon_{A,B}"] & \\
& (A,B)(\mathbb{A}(-,-)*S_1) \arrow[r, "(\ell(\mathbb{A},\mathbb{B})_{S_1})_{A,B}"] & (A,B)S_1 & (\delta)((\xi,I_B)S)\varepsilon_{A,B} \\
cl(\xi,(\delta)\varepsilon_{A'B}) \arrow[rrr, squiggly] & & & (\delta)\varepsilon_{A'B}((\xi,I_B)S_1)
\end{tikzcd}$$

for $\xi\in\mathbb{A}(A,A')$, $\delta\in(A',B)S$ og ε en naturlig transformation $S\Rightarrow S_1$

Kommutativiteten af (1.12) følger af ε's naturlighed.

$\ell(\mathbb{A},\mathbb{B})_S$ er altså naturlig i S

$(\ell(\mathbb{A},\mathbb{B})_S)_{A,B}$ er en isomorfi, idet vi for $\xi\in\mathbb{A}(A,A')$, $\delta\in(A',B)S$ har

(1.13)
$$(\xi,\delta)\sim(I_A,(\delta)(\xi,I_B)S)$$

således at $\quad (A,B)S \longrightarrow (A,B)(\mathbb{A}(-,-)*S)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \eta \rightsquigarrow cl(I_A,\eta)$

er invers til $(\ell(\mathbb{A},\mathbb{B})_S)_{A,B}$.

$\ell(\mathbb{A},\mathbb{B})$ er altså en naturlig isomorfi

$r(\mathbb{A},\mathbb{B})$ defineres analogt.

Aksiomerne:

I: Af (1.9) følger klart, at (1.1) kommuterer.

II: Lad $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ og $\mathbb{C}$ være små kategorier

$$\mathbb{A} \xrightarrow[S]{\quad+\quad} \mathbb{B} \xrightarrow[T]{\quad+\quad} \mathbb{C}$$

Lad endvidere $\xi \in (A,B)S$, $\delta \in \mathbb{B}(B,B')$ og $\rho \in (B',C)T$, så er

$$cl(\xi, cl(\delta,\rho))(S*\ell(\mathbb{B},\mathbb{C})_T)_{AC} = cl(\xi,(\rho)((\delta,I_C)T))$$
$$\|$$
$$cl(cl(\xi,\delta),\rho)(r(\mathbb{A},\mathbb{B})_S*T)_{AC} = cl(((\xi)((I_A,\delta)S),\rho)$$

d.v.s. at diagrammet

(1.14)
$$\begin{tikzcd}
(S*\mathbb{B}(-,-))*T \arrow[rr, "a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{B},\mathbb{C})_{S,I_{\mathbb{B}},T}"] \arrow[dr, "r(\mathbb{A},\mathbb{B})_S*T"'] & & S*(\mathbb{B}(-,-)*T) \arrow[dl, "S*\ell(\mathbb{B},\mathbb{C})_T"] \\
& S*T &
\end{tikzcd}$$

kommuterer.

Andre eksempler på bikategorier findes i [1].

Ligesom man kan definere adjungerede funktorer, kan man i en vilkårlig bikategori $\mathcal{S}$ definere adjungerede en-celler på flg. måde:

Definition 4: Lad $S \in \mathcal{S}(A,B)$ og $T \in \mathcal{S}(B,A)$ være en-celler i $\mathcal{S}$. Vi siger, at S er venstreadjungeret til T (betegnes $S \dashv T$), hvis der findes en morfi η i $\mathcal{S}(A,A): I_A \longrightarrow S*T$ og en morfi $\varepsilon : T * S \longrightarrow I_B$ i $\mathbb{S}(B,B)$

så at

(1.15)
$$\begin{tikzcd}
T * I_A \arrow[rr, "T*\eta"] \arrow[d, "r(B,A)_T"] & & T*(S*T) \arrow[d, "a(B,A,B,A)^{-1}_{T,S,T}"] \\
T & & (T*S)*T \arrow[dl, "\varepsilon * T"] \\
& I_B * T \arrow[ul, "l(B,A)_T"] &
\end{tikzcd}$$

er et kommutativt diagram i $\mathbb{S}(B,A)$, og

(1.16)
$$\begin{tikzcd}
I_A * S \arrow[rr, "\eta * S"] \arrow[d, "l(A,B)_S"] & & (S*T)*S \arrow[d, "a(A,B,A,B)_{S,T,S}"] \\
S & & S*(T*S) \arrow[dl, "S*\varepsilon"] \\
& S * I_B \arrow[ul, "r(A,B)_S"] &
\end{tikzcd}$$

er et kommutativt diagram i $\mathbb{S}(A,B)$.

η kaldes frontadjunktionen, ε endeadjunktionen for $S \dashv T$ (ved η, ε).

I bikategorien Cat stemmer definition 4 overens med den sædvanlige definition på adjungerede funktorer, hvilket fremgår af [2].

(Betegnelsen $S \dashv T$ burde altid følges af en forklaring på ved hvilket η og hvilket ε; undertiden vil jeg dog lade η og ε være underforstået.)

§2: Bikategorimorfier og -monader.

Lad $\mathcal{S}$ og $\overline{\mathcal{S}}$ være bikategorier.

Definition 5: En bikategorimorfi $F : \mathcal{S} \longrightarrow \overline{\mathcal{S}}$ består af følgende:

(i) En afbildning $F : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \overline{\mathcal{S}}_0$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{S}_0$ en funktor $(A,B)F : \mathcal{S}(A,B) \longrightarrow \overline{\mathcal{S}}(AF, BF)$

(iii) $\forall A \in \mathcal{S}_0$ en morfi

$$f_A : \overline{I}_{AF} \longrightarrow (I_A)((A,A)F)$$

i $\overline{\mathcal{S}}(AF, AF)$.

(iv) $\forall A, B, C \in \mathcal{S}_0$ en transformation $f(A,B,C)$

$$f(A,B,C)_{S,T} : \quad S((A,B)F) \mathbin{\overline{*}} T((B,C)F) \longrightarrow (S * T)((A,C)F)$$

for $S \in |\mathcal{S}(A,B)|$ og $T \in |\mathcal{S}(B,C)|$

(2.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(A,C) \arrow[d, "(A,C)F"'] & & \mathcal{S}(A,B) \times \mathcal{S}(B,C) \arrow[ll, "c(A,B,C)"'] \arrow[d, "(A,B)F \times (B,C)F"] \arrow[dll, phantom, "\Leftarrow f(A,B,C)"] \\
\overline{\mathcal{S}}(AF,CF) & & \overline{\mathcal{S}}(AF,BF) \times \overline{\mathcal{S}}(BF,CF) \arrow[ll, "\overline{c}(AF,BF,CF)"]
\end{tikzcd}$$

Disse data skal opfylde følgende axiomer:

$\forall A, B, C, D \in \mathcal{S}_0$ og $S \in |\mathcal{S}(A,B)|$, $T \in |\mathcal{S}(B,C)|$, $U \in |\mathcal{S}(C,D)|$

kommuterer diagrammerne

(2.2)
$$\begin{tikzcd}
S((A,B)F) \mathbin{\overline{*}} (T((B,C)F) \mathbin{\overline{*}} U((C,D)F)) \arrow[d, "S((A,B)F) \mathbin{\overline{*}} f(B,C,D)_{T,U}"] & (S((A,B)F) \mathbin{\overline{*}} T((B,C)F)) \mathbin{\overline{*}} U((C,D)F) \arrow[l, "\overline{a}"'] \arrow[d, "f(A,B,C)_{S,T} \mathbin{\overline{*}} U((C,D)F)"'] \\
S((A,B)F) \mathbin{\overline{*}} (T * U)((B,D)F) \arrow[d, "f(A,B,D)_{S,T*U}"] & (S * T)((A,C)F) \mathbin{\overline{*}} U((C,D)F) \arrow[d, "f(A,C,D)_{S*T,U}"'] \\
(S * (T * U))((A,D)F) & ((S * T) * U)((A,D)F) \arrow[l, "(a(A,B,C,D)_{S,T,U})((A,D)F)"']
\end{tikzcd}$$

(2.3)

$$\begin{tikzcd}
I_A((A,A)F) \bar{*} S((A,B)F) \arrow[d, "f(A,A,B)_{I_A,S}"'] & \bar{I}_{AF} \bar{*} S((A,B)F) \arrow[l, "f_A \bar{*} S((A,B)F)"'] \arrow[d, "\bar{\ell}(AF,BF)_{S((A,B)F)}"] \\
(I_A * S)((A,B)F) & S((A,B)F) \arrow[l, "(\ell(A,B)_S^{-1})((A,B)F)"']
\end{tikzcd}$$

og

(2.4)

$$\begin{tikzcd}
S((A,B)F) \bar{*} I_B((B,B)F) \arrow[d, "f(A,B,B)_{S,I_B}"'] & S((A,B)F) \bar{*} \bar{I}_{BF} \arrow[l, "S((A,B)F) \bar{*} f_B"'] \arrow[d, "\bar{r}(AF,BF)_{S((A,B)F)}"] \\
(S * I_B)((A,B)F) & S((A,B)F) \arrow[l, "(r(A,B)_S^{-1})((A,B)F)"']
\end{tikzcd}$$

Enhver kategori $\mathbb{A}$ kan opfattes som 2-kategori på flg. måde

(i) $\mathbb{S}_0 = |\mathbb{A}|$

(ii) $\mathbb{S}(A_1, A_2)$ er den diskrete kategori $\mathbb{A}(A_1, A_2)$ for alle $A_1, A_2 \in |\mathbb{A}|$

(iii) $\forall A_1, A_2, A_3 \in |\mathbb{A}|$ er $c(A_1, A_2, A_3) : \mathbb{A}(A_1, A_2) \times \mathbb{A}(A_2, A_3) \longrightarrow \mathbb{A}(A_1, A_3)$ sammensætning af morfier i $\mathbb{A}$.

(iv) $I_A \in \mathbb{A}(A,A)$: identitetsmorfien på A i $\mathbb{A}$.

Specielt kan kategorien $\mathbb{1}$ med ét objekt og én morfi opfattes som 2-kategori.

<u>Definition 6</u>: Lad $\mathbb{S}$ være en vilkårlig bikategori.

Ved en <u>$\mathbb{S}$-monad</u> forstås en bikategorimorfi $\mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{S}$

En $\mathbb{S}$-monad er altså givet ved følgende data:

(i) Et objekt A i $\mathbb{S}$.

(ii) Et objekt T i $\mathcal{S}(A,A)$.

(iii) En morfi $\eta : I_A \longrightarrow T$ i $\mathcal{S}(A,A)$

(iv) En morfi $\mu : T*T \longrightarrow T$ i $\mathcal{S}(A,A)$,

så at følgende diagrammer kommuterer

(2.5)
$$\begin{tikzcd}
T*T \arrow[dr, "\mu"'] & & I_A*T \arrow[ll, "\eta*T"'] \arrow[dl, "\ell(A,A)_T"] \\
 & T \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

(2.6)
$$\begin{tikzcd}
T*T \arrow[dr, "\mu"'] & & T*I_A \arrow[ll, "T*\eta"'] \arrow[dl, "r(A,A)_T"] \\
 & T \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] &
\end{tikzcd}$$

(2.7)
$$\begin{tikzcd}
T*(T*T) \arrow[d, "T*\mu"'] & & (T*T)*T \arrow[ll, "a(A,A,A,A)_{T,T,T}"'] \arrow[d, "\mu*T"] \\
T*T \arrow[dr, "\mu"'] & \circlearrowleft & T*T \arrow[dl, "\mu"] \\
 & T &
\end{tikzcd}$$

Det er klart, at en <u>Cat</u>-monad er en sædvanlig monad, og at en monoid i en monoidal kategori er en bikategorimonad i den tilsvarende bikategori med ét objekt, jfr. side 1.2.
Lad igen $\mathcal{S}$ betegne en vilkårlig bikategori. Med $\mathcal{S}^{opp}$ betegnes følgende bikategori:

(i) $(\mathcal{S}^{opp})_0 = \mathcal{S}_0$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{S}_0 \qquad \mathcal{S}^{opp}(A,B) = (\mathcal{S}(A,B))^{opp}$

(iii) $\forall A, B, C \in \mathcal{S}_0$ er $c^{opp}(A,B,C) : \mathcal{S}^{opp}(A,B) \times \mathcal{S}^{opp}(B,C) \longrightarrow \mathcal{S}^{opp}(A,C)$

lig med $c(A,B,C)$ på objekter.

Lad $S_1, S_2 \in |\mathcal{S}^{opp}(A,B)| = |\mathcal{S}(A,B)|$, $T_1, T_2 \in |\mathcal{S}(B,C)|$,

$\varepsilon \in (\mathcal{S}^{opp}(A,B))(S_1, S_2) = (\mathcal{S}(A,B))(S_2, S_1)$ og

$\rho \in (\mathcal{S}^{opp}(B,C))(T_1, T_2) = (\mathcal{S}(B,C))(T_2, T_1)$

Så sættes

$$(\varepsilon,\rho)(c^{opp}(A,B,C)) = (\varepsilon,\rho)(c(A,B,C)) \in (\mathcal{S}(A,C))(S_2 * T_2, S_1 * T_1) =$$
$$(\mathcal{S}^{opp}(A,C))(S_1 * T_1, S_2 * T_2).$$

$c^{opp}(A,B,C)$ er virkelig en funktor.

(iv) $I_A \in |\mathcal{S}(A,A)| = |\mathcal{S}^{opp}(A,A)|$

(v) $\forall A, B, C, D \in \mathcal{S}_0$ definerer vi

$$a^{opp}(A,B,C,D) : (c^{opp}(A,B,C) \times I)\, c^{opp}(A,C,D) \longrightarrow (I \times c^{opp}(B,C,D))\, c^{opp}(A,B,D)$$

ved

$\forall S \in |\mathcal{S}(A,B)|$, $T \in |\mathcal{S}(B,C)|$, $U \in |\mathcal{S}(C,D)|$,

$$a^{opp}(A,B,C,D)_{S,T,U} = a(A,B,C,D)_{S,T,U}^{-1} \in (\mathcal{S}(A,D))(S*(T*U), (S*T)*U)$$
$$= (\mathcal{S}^{opp}(A,D))((S*T)*U, S*(T*U))$$

$a^{opp}(A,B,C,D)$ er en naturlig isomorfi, fordi $a(A,B,C,D)$ er det.

(vi) $\forall A, B \in \mathcal{S}_0$; $S \in |\mathcal{S}(A,B)| = |\mathcal{S}^{opp}(A,B)|$

sættes $l^{opp}(A,B)_S = l(A,B)_S^{\div 1} \in (\mathcal{S}^{opp}(A,B))(I_A * S, S)$

og $\quad r^{opp}(A,B)_S = r(A,B)_S^{\div 1} \in (\mathcal{S}^{opp}(A,B))(S * I_B, S)$

$l^{opp}(A,B)$ og $r^{opp}(A,B)$ er naturlige isomorfier, fordi l og $r(A,B)$ er det.

Axiomerne følger direkte af axiomerne i $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S}^{opp}$ er altså kort og godt den bikategori, der fremkommer af $\mathcal{S}$ ved at vende to-cellerne. Analogt får man en bikategori $\mathcal{S}^t$ ved at vende én-cellerne i $\mathcal{S}$ og en bikategori $\mathcal{S}^s$ ved at vende både én-celler og to-celler i $\mathcal{S}$.

$\mathbb{S}^{op}$ kaldes den konjugerede bikategori,

$\mathbb{S}^{t}$ kaldes den transponerede bikategori og

$\mathbb{S}^{s}$ kaldes den med $\mathbb{S}$ symmetriske bikategori.

<u>Definition 7</u>: Ved en <u>$\mathbb{S}$ - comonad</u> forstås en bikategorimorfi $\mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{S}^{op}$

En $\mathbb{S}$ - comonad er altså givet ved følgende data:

(i) Et objekt A i $\mathbb{S}$.

(ii) Et objekt T i $\mathbb{S}(A,A)$

(iii) En morfi $\varepsilon : T \longrightarrow I_A$ i $\mathbb{S}(A,A)$

(iv) En morfi $\delta : T \longrightarrow T * T$ i $\mathbb{S}(A,A)$

så at følgende tre diagrammer kommuterer:

(2.8)
$$\begin{tikzcd}
T * T \arrow[rr, "\varepsilon * T"] & & I_A * T \\
& T \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur, swap, "\ell(A,A)_T^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

(2.9)
$$\begin{tikzcd}
T * T \arrow[rr, "T * \varepsilon"] & & T * I_A \\
& T \arrow[ul, dash, "\delta"] \arrow[ur, swap, "r(A,A)_T^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

(2.10)
$$\begin{tikzcd}
T * (T * T) & & (T * T) * T \arrow[ll, swap, "a(A,A,A,A)_{T,T,T}"] \\
T * T \arrow[u, "T * \delta"] & & T * T \arrow[u, swap, "\delta * T"] \\
& T \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur, swap, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

Proposition 1: En bikategorimorfi fører bikategorimonad i bikategorimonad.

Bevis: Lad $\mathbb{S}$ og $\overline{\mathbb{S}}$ være bikategorier, (A,T,η,μ) en $\mathbb{S}$-monad og $(F,(\cdot,\cdot)F,f_-,f(\cdot,\cdot,\cdot))$ en bikategorimorfi $\mathbb{S} \longrightarrow \overline{\mathbb{S}}$.

Så er $(AF,\ T((A,A)F),\ \bar{\eta},\ \bar{\mu})$ en $\overline{\mathbb{S}}$-monad, når $\bar{\eta} = f_A \cdot (\eta)((A,A)F)$

(2.11)
$$\begin{tikzcd}
\overline{I}_{AF} \arrow[rr, "\bar{\eta}"] \arrow[dr, "f_A"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & T((A,A)F) \\
& (I_A)((A,A)F) \arrow[ur, "{(\eta)((A,A)F)}"'] &
\end{tikzcd}$$

og $\bar{\mu} = f(A,A,A)_{T,T} \cdot (\mu)((A,A)F)$

(2.12)
$$\begin{tikzcd}
T((A,A)F) \mathbin{\bar{*}} T((A,A)F) \arrow[rr, "\bar{\mu}"] \arrow[dr, "{f(A,A,A)_{T,T}}"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & T((A,A)F) \\
& (T*T)((A,A)F) \arrow[ur, "{(\mu)((A,A)F)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Vi mangler at efterprøve axiomerne for bikategorimonader.
Først (2.5) for $(AF,\ T((A,A)F),\ \bar{\eta},\ \bar{\mu})$ i $\overline{\mathbb{S}}$

$$\begin{tikzcd}
T((A,A)F) \mathbin{\bar{*}} T((A,A)F) \arrow[dd, "{f(A,A,A)_{T,T}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft \text{ naturlighed af } {f(A,A,A)}"] & (I_A)((A,A)F) \mathbin{\bar{*}} T((A,A)F) \arrow[l, "{(\eta)((A,A)F) \bar{*} T((A,A)F)}"'] \arrow[d, "{f(A,A,A)_{I_A,T}}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft (2.3)"] & \overline{I}_{AF} \mathbin{\bar{*}} T((A,A)F) \arrow[l, "{f_A \bar{*} T((A,A)F)}"'] \arrow[dd, "{\bar{l}(AF,AF)_{T((A,A)F)}}"] \\
& (I_A * T)((A,A)F) \arrow[dl, "{(\eta * T)((A,A)F)}"'] \arrow[dr, "{(l(A,A)_T)((A,A)F)}"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft (2.5) \text{ for } {(A,T,\eta,\mu)}"] & \\
(T*T)((A,A)F) \arrow[rr, "{(\mu)((A,A)F)}"'] & \; & T((A,A)F)
\end{tikzcd}$$

Heraf følger $(\bar{\eta} \mathbin{\bar{*}} T((A,A)F))\bar{\mu} = \bar{l}(AF,AF)_{T((A,A)F)}$, d.v.s. at (2.5) gælder for $(AF,\ T((A,A)F),\ \bar{\eta},\ \bar{\mu})$ i $\overline{\mathbb{S}}$

Analogt fås $(T((A,A)F) \mathbin{\bar{*}} \bar{\eta})\,\bar{\mu} = \bar{r}(AF,AF)_{T((A,A)F)}$, d.v.s. at (2.6) gælder.

Nu efterprøves (2.7) for $(AF, T((A,A)F), \bar{\eta}, \bar{\mu})$ i $\bar{\mathcal{S}}$.

$$
\begin{tikzcd}
T((A,A)F) \bar{*} (T((A,A)F) \bar{*} T((A,A)F)) \arrow[d, "T((A,A)F) \bar{*} f(A,A,A)_{T,T}"] & & & & (T((A,A)F) \bar{*} T((A,A)F)) \bar{*} T((A,A)F) \arrow[llll, "\bar{a}(AF,AF,AF,AF)_{T((A,A)F),T((A,A)F),T((A,A)F)}"'] \arrow[d, "f(A,A,A)_{T,T} \bar{*} T((A,A)F)"'] \arrow[dllll, phantom, "\circlearrowleft\ (2.2.)"] \\
T((A,A)F) \bar{*} (T*T)((A,A)F) \arrow[d, "T((A,A)F) \bar{*} \mu((A,A)F)"] \arrow[dr, "f(A,A,A)_{T,T*T}"] & & & & (T*T)((A,A)F) \bar{*} T((A,A)F) \arrow[dl, "f(A,A,A)_{T*T,T}"'] \arrow[d, "\mu((A,A)F) \bar{*} T((A,A)F)"] \\
T((A,A)F) \bar{*} T((A,A)F) \arrow[dr, "f(A,A,A)_{T,T}"'] \arrow[r, phantom, "(*)"] & (T*(T*T))((A,A)F) \arrow[d, "(T*\mu)((A,A)F)"] & & ((T*T)*T)((A,A)F) \arrow[ll, "(a(A,A,A,A)_{T,T,T})((A,A)F)"'] \arrow[d, "(\mu*T)((A,A)F)"'] \arrow[dll, phantom, "\circlearrowleft\ (A,A)F \text{ anv. på } (2.7)"] \arrow[r, phantom, "(\diamond)"] & T((A,A)F) \bar{*} T((A,A)F) \arrow[dl, "f(A,A,A)_{T,T}"] \\
 & (T*T)((A,A)F) \arrow[dr, "\mu((A,A)F)"'] & & (T*T)((A,A)F) \arrow[dl, "\mu((A,A)F)"] & \\
 & & T((A,A)F) & &
\end{tikzcd}
$$

$(*)$ og $(\diamond)$ kommuterer på grund af naturligheden af $f(A,A,A)$.

Vi ser altså, at (2.7) gælder for $(AF, T((A,A)F), \bar{\eta}, \bar{\mu})$

$(AF, T((A,A)F), \bar{\eta}, \bar{\mu})$ er således en $\bar{\mathcal{S}}$-monad.

Der gælder tilsyneladende ikke et resultat svarende til proposition 1 for billedet af en bikategori-comonad under en bikategorimorfi. Derimod gælder et sådant resultat, hvis vi erstatter bikategorimorfi med bikategori-comorfi, defineret på flg. måde:

Definition 8: Ved en bikategori-comorfi $F : \mathcal{S} \longrightarrow \bar{\mathcal{S}}$ forstås en bikategori-morfi $F : \mathcal{S}^{opp} \longrightarrow \bar{\mathcal{S}}^{opp}$.

En bikategori-comorfi $F : \mathcal{S} \longrightarrow \bar{\mathcal{S}}$ består altså af følgende:

(i) En afbildning $F : \mathcal{S}_0 \longrightarrow \bar{\mathcal{S}}_0$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{S}_0$ en funktor $(A,B)F \; : \; \mathcal{S}(A,B)^{opp} \longrightarrow \left(\bar{\mathcal{S}}(AF, BF)\right)^{opp}$

(iii) $\forall A \in \mathcal{S}_0$ en morfi

$$\varphi_A \; : \; (I_A)((A,A)F) \longrightarrow \bar{I}_{AF}$$

i $\bar{\mathcal{S}}(AF, AF)$

(iv) $\forall A, B, C \in \mathcal{S}_0$ en transformation $\varphi(A,B,C)$

$$(2.13) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{S}^{opp}(A,C) \arrow[d, "(A,C)F"'] & & \mathcal{S}^{opp}(A,B) \times \mathcal{S}^{opp}(B,C) \arrow[ll, "c(A,B,C)"'] \arrow[d, "(A,B)F \times (B,C)F"] \arrow[dll, phantom, "\Nwarrow \varphi(A,B,C)"] \\ \bar{\mathcal{S}}^{opp}(AF, CF) & & \bar{\mathcal{S}}^{opp}(AF, BF) \times \bar{\mathcal{S}}^{opp}(BF, CF) \arrow[ll, "\bar{c}(AF,BF,CF)"'] \end{tikzcd}$$

$$\varphi(A,B,C)_{S,T} \; : \; S((A,B)F) \mathbin{\bar{*}} T((B,C)F) \longleftarrow (S * T)((A,C)F) \quad \text{i } \bar{\mathcal{S}}(AF, CF)$$

for $S \in |\mathcal{S}(A,B)|$ og $T \in |\mathcal{S}(B,C)|$

sådes at følgende tre diagrammer i $\bar{\mathcal{S}}$ kommuterer $\forall A, B, C, D \in \mathcal{S}_0$, $S \in |\mathcal{S}(A,B)|$, $T \in |\mathcal{S}(B,C)|$ og $U \in |\mathcal{S}(C,D)|$.

$$(2.14) \qquad \begin{tikzcd} S((A,B)F) \mathbin{\bar{*}} \left(T((B,C)F) \mathbin{\bar{*}} U((C,D)F)\right) & & \left(S((A,B)F) \mathbin{\bar{*}} T((B,C)F)\right) \mathbin{\bar{*}} U((C,D)F) \arrow[ll, "\bar{a}(AF,BF,CF,DF)_{S((A,B)F),T((B,C)F),U((C,D)F)}"'] \\ S((A,B)F) \mathbin{\bar{*}} (T * U)((B,D)F) \arrow[u, "S((A,B)F) \mathbin{\bar{*}} \varphi(B,C,D)_{T,U}"'] & & (S * T)((A,C)F) \mathbin{\bar{*}} U((C,D)F) \arrow[u, "\varphi(A,B,C)_{S,T} \mathbin{\bar{*}} U((C,D)F)"] \\ (S * (T * U))((A,D)F) \arrow[u, "\varphi(A,B,D)_{S,T*U}"'] & & ((S * T) * U)((A,D)F) \arrow[ll, "(a(A,B,C,D)_{S,T,U})((A,D)F)"'] \arrow[u, "\varphi(A,C,D)_{S*T,U}"] \end{tikzcd}$$

(2.15)
$$\begin{tikzcd} I_A((A,A)F) \bar{*} S((A,B)F) \arrow[rr, "f_A \bar{*} S((A,B)F)"] & & \bar{I}_{AF} \bar{*} S((A,B)F) \arrow[d, "\bar{l}(AF,BF)_{S((A,B)F)}"] \\ (I_A * S)((A,B)F) \arrow[u, "f(A,A,B)_{I_A,S}"] \arrow[rr, "(l(A,B)_S)((A,B)F)"] & & S((A,B)F) \end{tikzcd}$$

(2.16)
$$\begin{tikzcd} S((A,B)F) \bar{*} I_B((B,B)F) \arrow[rr, "S((A,B)F) \bar{*} f_B"] & & S((A,B)F) \bar{*} \bar{I}_{BF} \arrow[d, "\bar{r}(AF,BF)_{S((A,B)F)}"] \\ (S * I_B)((A,B)F) \arrow[u, "f(A,B,B)_{S,I_B}"] \arrow[rr, "(r(A,B)_S)((A,B)F)"] & & S((A,B)F) \end{tikzcd}$$

<u>Proposition 2:</u> En bikategori-comorfi fører bikategoricomonad i bikategori-comonad.

Bevis: Lad $\mathcal{S}$ og $\bar{\mathcal{S}}$ vare bikategorier, $(A, T, \varepsilon, \delta)$ en $\mathcal{S}$-comonad og $(F, (\cdot,\cdot)F, f_-, f(\cdot,\cdot,\cdot))$ en bikategoricomorfi $\mathcal{S} \longrightarrow \bar{\mathcal{S}}$.
$(A, T, \varepsilon, \delta)$ er altså en $\mathcal{S}^{opp}$-monad og $(F, (\cdot,\cdot)F, f_-, f(\cdot,\cdot,\cdot))$ en bikategorimorfi $\mathcal{S}^{opp} \longrightarrow \bar{\mathcal{S}}^{opp}$
Ifølge proposition 1 er $(AF, T((A,A)F), \bar{\varepsilon}, \bar{\delta})$ en $\bar{\mathcal{S}}$-comonad, når $\bar{\varepsilon}$ er bestemt ved

(2.17)
$$\begin{tikzcd} \bar{I}_{AF} & & T((A,A)F) \arrow[ll, "\bar{\varepsilon}"'] \arrow[dl, "\varepsilon((A,A)F)"] \\ & I_A((A,A)F) \arrow[ul, "f_A"] & \end{tikzcd} \quad \text{i } \bar{\mathcal{S}}(AF, AF)$$

og $\bar{\delta}$ er bestemt ved

(2.18)
$$\begin{tikzcd} T((A,A)F) \bar{*} T((A,A)F) & & T((A,A)F) \arrow[ll, "\bar{\delta}"'] \arrow[dl, "\delta((A,A)F)"] \\ & (T*T)((A,A)F) \arrow[ul, "f(A,A,A)_{T,T}"] & \end{tikzcd} \quad \text{i } \bar{\mathcal{S}}(AF, AF)$$

<u>Definition 9:</u> En bikategorimorfi $(F, (\cdot,\cdot)F, f_-, f(\cdot,\cdot,\cdot)) : \mathcal{S} \longrightarrow \bar{\mathcal{S}}$ siges at være streng, såfremt $f_A : \bar{I}_{AF} \longrightarrow I_A((A,A)F)$ er en isomorfi $\forall A \in \mathcal{S}_0$ og $f(A,B,C)$ er en naturlig isomorfi $\forall A,B,C \in \mathcal{S}_0$.

Det er klart, at hvis $(F, (\cdot,\cdot)F, f_-, f(\cdot,\cdot,\cdot))$ er en streng bikategorimorfi $\mathcal{S} \longrightarrow \bar{\mathcal{S}}$, er $(F, (\cdot,\cdot)F, (f_-)^{-1}, (f(\cdot,\cdot,\cdot))^{-1})$ en bikategori-comorfi $\mathcal{S} \longrightarrow \bar{\mathcal{S}}$.

<u>Proposition 3:</u> En streng bikategorimorfi fører adjungerede én-celler i adjungerede én-celler.

Bevis: Lad $S \in |\mathcal{S}(A,B)|$, $T \in |\mathcal{S}(B,A)|$ og $S \dashv T$ med frontadjunktion η og endoadjunktion ε.

Lad endvidere $(F, (\cdot,\cdot)F, f_-, f(\cdot,\cdot,\cdot))$ være en streng bikategorimorfi $\mathcal{S} \longrightarrow \bar{\mathcal{S}}$.

$S((A,B)F) \in |\bar{\mathcal{S}}(AF,BF)|$ og $T((B,A)F) \in |\bar{\mathcal{S}}(BF,AF)|$ er én-celler i $\bar{\mathcal{S}}$. Vi skal bevise, at $S((A,B)F) \dashv T((B,A)F)$.

Vi definerer $\bar{\eta} : \bar{I}_{AF} \longrightarrow S((A,B)F) \mathbin{\bar{*}} T((B,A)F)$ i $\bar{\mathcal{S}}(AF,AF)$ ved

(2.19)
$$\begin{tikzcd}
\bar{I}_{AF} \arrow[r, "\bar{\eta}"] \arrow[d, "f_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & S((A,B)F) \mathbin{\bar{*}} T((B,A)F) \\
I_A((A,A)F) \arrow[r, "\eta((A,A)F)"] & (S*T)((A,A)F) \arrow[u, "(f(A,B,A)_{S,T})^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

og $\bar{\varepsilon} : T((B,A)F) \mathbin{\bar{*}} S((A,B)F) \longrightarrow \bar{I}_{BF}$ i $\bar{\mathcal{S}}(BF,BF)$ ved

(2.20)
$$\begin{tikzcd}
T((B,A)F) \mathbin{\bar{*}} S((A,B)F) \arrow[r, "\bar{\varepsilon}"] \arrow[d, "f(B,A,B)_{T,S}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \bar{I}_{BF} \\
(T*S)((B,B)F) \arrow[r, "\varepsilon((B,B)F)"] & I_B((B,B)F) \arrow[u, "f_B^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$\bar\eta$ og $\bar\varepsilon$ er front- og undeadjunktioner for $S((A,B)F) \dashv T((B,A)F)$, idet

(2.21)

$$
\begin{tikzcd}
T((B,A)F)\,\bar{*}\, I_A((A,A)F) \arrow[rrr, "T((B,A)F\,\bar{*}\,\eta((A,A)F)"] \arrow[ddr, "f(B,A,A)_{T,I_A}"] & & & T((B,A)F)\,\bar{*}\,(S*T)((A,A)F) \arrow[dl, "f(B,A,A)_{T,S*T}"'] \arrow[dd, "T((B,A)F)\,\bar{*}\,(f(A,B,A)_{S,T})^{\div 1}"] \\
T((B,A)F)\,\bar{*}\,\bar I_{AF} \arrow[u, "T((B,A)F)\,\bar{*}\,f_A"] \arrow[dd, "\bar r(BF,AF)_{T((B,A)F)}"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft\ (2.4)"] & & (T*(S*T))((B,A)F) \arrow[dddd, "(a(B,A,B,A)^{\div 1}_{T,S,T})((B,A)F)"'] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft\ \text{naturlighed af } f(B,A,A)"] & \\
& (T*I_A)((B,A)F) \arrow[ur, "(T*\eta)((B,A)F)"] \arrow[dl, "(r(B,A)_T)((B,A)F)"] & & T((B,A)F)\,\bar{*}\,(S((A,B)F)\,\bar{*}\,T((B,A)F)) \arrow[dd, "(\bar a(BF,AF,BF,AF)\ldots)^{-1}"] \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft\ (2.2.)"] \\
T((B,A)F) \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft\ (1.15.)"] & & & \\
& (I_B*T)((B,A)F) \arrow[ul, "(l(B,A)_T)((B,A)F)"'] & & (T((B,A)F)\,\bar{*}\,S((A,B)F))\,\bar{*}\,T((B,A)F) \arrow[dd, "f(B,A,B)_{T,S}\,\bar{*}\,T((B,A)F)"] \\
\bar I_{BF}\,\bar{*}\,T((B,A)F) \arrow[uu, "\bar l(BF,AF)_{T((B,A)F)}"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft\ (2.3.)"] & & ((T*S)*T)((B,A)F) \arrow[ul, "(\varepsilon*T)((B,A)F)"'] & \\
I_B((B,B)F)\,\bar{*}\,T((B,A)F) \arrow[u, "f_B^{-1}\,\bar{*}\,T((B,A)F)"] \arrow[uur, "f(B,B,A)_{I_B,T}"] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft\ \text{naturlighed af } f(B,B,A)"] & & & (T*S)((B,B)F)\,\bar{*}\,T((B,A)F) \arrow[lll, "\varepsilon((B,B)F)\,\bar{*}\,T((B,A)F)"] \arrow[ul, "f(B,B,A)_{T*S,T}"']
\end{tikzcd}
$$

Altså kommuterer (1.15) for $S((A,B)F)$, $T((B,A)F)$; $\bar\eta$ og $\bar\varepsilon$ i $\bar{\mathcal S}$

Analogt ses af følgende diagram, at (1.16) kommuterer for $S((A,B)F)$, $T((B,A)F)$, $\bar{\eta}$, $\bar{\varepsilon}$ i $\bar{\mathfrak{S}}$.

$$
\begin{tikzcd}
I_A((A,A)F)\,\bar{*}\,S((A,B)F) \arrow[rrr, "\eta((A,A)F)*S((A,B)F)"] \arrow[ddr, "\gamma(A,A,B)_{I_A,S}"'] & \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft\ \text{naturlighed af } \gamma(A,A,B)"] & & (S*T)((A,A)F)\,\bar{*}\,S((A,B)F) \arrow[dll, "\gamma(A,A,B)_{S*T,S}"'] \arrow[d, "(\gamma(A,B,A)_{S,T})^{-1}\bar{*}S((A,B)F)"] \\
\bar{I}_{AF}\,\bar{*}\,S((A,B)F) \arrow[u, "j_A\bar{*}S((A,B)F)"] \arrow[dd, "\bar{l}(AF,BF)_{S((A,B)F)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft\ (2.3.)"] & & ((S*T)*S)((A,B)F) \arrow[dddd, "(a(A,B,A,B)_{S,T,S})((A,B)F)"] & (S((A,B)F)\,\bar{*}\,T((B,A)F))\,\bar{*}\,S((A,B)F) \arrow[ddd, "\bar{a}(AF,BF,AF,BF)\ldots"] \\
& (I_A*S)((A,B)F) \arrow[ur, "(\eta*S)((A,B)F)"] \arrow[dl, "(l(A,B)_S)((A,B)F)"] & & \\
S((A,B)F) & \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft\ (A,B)F\ \text{anv. på } (1.16)"] & \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft\ (2.2)"] & \\
& (S*I_B)((A,B)F) \arrow[ul, "(r(A,B)_S)((A,B)F)"'] & & S((A,B)F)\,\bar{*}\,(T((B,A)F)\,\bar{*}\,S((A,B)F)) \arrow[dd, "S((A,B)F)\bar{*}\gamma(B,A,B)_{T,S}"] \\
S((A,B)F)\,\bar{*}\,\bar{I}_{BF} \arrow[uu, "\bar{r}(AF,BF)_{S((A,B)F)}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft\ (2.4)"] & \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft\ \text{naturlighed af } \gamma(A,B,B)"] & (S*(T*S))((A,B)F) \arrow[ul, "(S*\varepsilon)((A,B)F)"'] & \\
S((A,B)F)\,\bar{*}\,I_B((B,B)F) \arrow[u, "S((A,B)F)\bar{*}j_B^{-1}"] \arrow[uur, "\gamma(A,B,B)_{S,I_B}"] & & & S((A,B)F)\,\bar{*}\,(T*S)((B,B)F) \arrow[lll, "S((A,B)F)\bar{*}\varepsilon((B,B)F)"] \arrow[ul, "\gamma(A,B,B)_{S,T*S}"']
\end{tikzcd}
$$

Altså $S((A,B)F) \dashv T((B,A)F)$ med $\bar{\eta}$ som frontadjunktion og $\bar{\varepsilon}$ som endeadjunktion.

§3: Bikategorien $\underline{Prof}$.

I denne paragraf vil vi nærmere undersøge bikategorien af profunktorer fra eksempel 2 og dennes sammenhæng med 2-kategorien af funktorer fra eksempel 1.

Der findes en kanonisk bikategorimorfi $\dot{-}$ fra $\underline{Cat}^{op}$ til $\underline{Prof}$

$$\underline{Cat}^{op} \xrightarrow{\dot{-}} \underline{Prof}$$

fastlagt ved følgende

Definition 10: (i) $\dot{-}$ er identiteten på objekter. Muligt, fordi $\underline{Cat}_0 = \underline{Prof}_0$

(ii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \underline{Cat}_0$ er funktoren

$$(Funct(\mathbb{A},\mathbb{B}))^{op} \xrightarrow{\dot{-}} \underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B}) = Funct(\mathbb{A}^{op}\times\mathbb{B}, Ens)$$

(egl. er $\dot{-}$ afh. af $\mathbb{A}$ og $\mathbb{B}$)

givet ved:

(3.1) $\underline{F} = \mathbb{B}(-F, -)$ for $\mathbb{A} \xrightarrow{F} \mathbb{B}$

altså $(A,B)\underline{F} = \mathbb{B}(AF, B)$ $\forall A \in |\mathbb{A}|, B \in |\mathbb{B}|$

og $(a,b)\underline{F} = \mathbb{B}(aF, b) : \mathbb{B}(AF,B) \longrightarrow \mathbb{B}(A'F, B')$

$\forall A, A' \in |\mathbb{A}|, B, B' \in |\mathbb{B}|, a \in \mathbb{A}(A',A)$ og $b \in \mathbb{B}(B,B')$

Det er velkendt (og let at eftervise), at $\underline{F} \in |Funct(\mathbb{A}^{op}\times\mathbb{B}, Ens)|$

Lad $F, G \in |Funct(\mathbb{A},\mathbb{B})|$ og $\tau : F \Longrightarrow G$ i $Funct(\mathbb{A},\mathbb{B})$

Så er $\underline{\tau} : \underline{G} \Longrightarrow \underline{F}$ givet ved

(3.2) $\underline{\tau}_{A,B} = \mathbb{B}(\tau_A, B) : \mathbb{B}(AG, B) \longrightarrow \mathbb{B}(AF, B)$, $\forall A \in |\mathbb{A}|, B \in |\mathbb{B}|$

$\forall\, A, A' \in |\mathbb{A}|$, $B, B' \in |\mathbb{B}|$, $a \in \mathbb{A}(A', A)$ og $b \in \mathbb{B}(B, B')$
er følgende diagram kommutativt

(3.3)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}(AG, B) \arrow[r, "\underline{\tau}_{A,B} = \mathbb{B}(\tau_A, B)"] \arrow[d, "\mathbb{B}(aG, b)"'] & \mathbb{B}(AF, B) \arrow[d, "\mathbb{B}(aF, b)"] \\
\mathbb{B}(A'G, B') \arrow[r, "\underline{\tau}_{A',B'} = \mathbb{B}(\tau_{A'}, B')"] & \mathbb{B}(A'F, B')
\end{tikzcd}$$

idet $\mathbb{B}(\tau_A, B) \cdot \mathbb{B}(aF, b) = \mathbb{B}(aF \cdot \tau_A, b)$

$= \mathbb{B}(\tau_{A'} \cdot aG, b)$, idet τ_A er naturlig i A

$= \mathbb{B}(aG, b) \cdot \mathbb{B}(\tau_{A'}, B')$

Dette viser, at $\underline{\tau}$ er en naturlig transformation $\underline{G} \Longrightarrow \underline{F}$.

$\underline{\cdot}$ er virkelig en funktor : $(\text{Funct}(\mathbb{A}, \mathbb{B}))^{op} \longrightarrow \underline{\text{Prof}}(\mathbb{A}, \mathbb{B})$,
fordi

$\forall F \in |\text{Funct}(\mathbb{A}, \mathbb{B})|$ er $\underline{I_F}_{A,B} = \mathbb{B}((I_F)_A, B) = I_{\mathbb{B}(AF,B)}$, og
$\forall F, G, H \in |\text{Funct}(\mathbb{A}, \mathbb{B})|$, $\tau : F \Longrightarrow G$ og $\tau' : G \Longrightarrow H$ er

$$\underline{\tau \cdot \tau'}_{A,B} = \mathbb{B}((\tau \cdot \tau')_A, B) = \mathbb{B}(\tau_A \cdot \tau'_A, B) = \mathbb{B}(\tau'_A, B) \cdot \mathbb{B}(\tau_A, B) = \underline{\tau}'_{A,B} \cdot \underline{\tau}_{A,B}$$

(iii) $\forall \mathbb{A} \in \underline{\text{Cat}}_0$ er morfien

$$f_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}(-, \sim) \Longrightarrow \underline{I_{\mathbb{A}}} = \mathbb{A}(-, -)$$

i $\underline{\text{Prof}}(\mathbb{A}, \mathbb{A})$ lig med identitetstransformationen på $\mathbb{A}(-,-)$.

(iv) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in \underline{\text{Cat}}_0$, $F \in |\text{Funct}(\mathbb{A}, \mathbb{B})|$ og $G \in |\text{Funct}(\mathbb{B}, \mathbb{C})|$ er
$f(\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C})_{F,G}$ givet ved

(3.4)
$$\begin{tikzcd}
(A, C)(\underline{F} * \underline{G}) \arrow[r, "(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C}"] & (A, C)\,\underline{F \cdot G} \\
cl(\xi, \delta) \arrow[r, squiggly] & \xi G \cdot \delta
\end{tikzcd}$$
(· er sammensætning i $\mathbb{C}$)

for $\xi \in \mathbb{B}(AF, B)$ og $\delta \in \mathbb{C}(BG, C)$

$(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C}$ er veldefineret, idet der for $\xi_1 \in \mathbb{B}(AF,B)$, $\xi_2 \in \mathbb{B}(AF,B')$, $\delta_1 \in \mathbb{C}(BG,C)$ og $\delta_2 \in \mathbb{C}(B'G,C)$ gælder

$$\exists \beta \in \mathbb{B}(B,B') : (\xi_1)\mathbb{B}(I_{AF},\beta) = \xi_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sammensætning} \\ \text{i } \mathbb{B}}}{\cdot} \beta = \xi_2 \wedge \delta_1 = \beta G \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sammensætning} \\ \text{i } \mathbb{C}}}{\cdot} \delta_2$$

$$\Downarrow$$

$$\xi_1 G \cdot \delta_1 = \xi_1 G \cdot \beta G \cdot \delta_2 = \xi_2 G \cdot \delta_2$$

$(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C}$ er naturlig i A og C, idet diagrammet

(3.5)

$$\begin{tikzcd}
cl(\xi,\delta) \arrow[rrr, rightsquigarrow] \arrow[ddd, rightsquigarrow] & & & \xi G \cdot \delta \arrow[ddd, rightsquigarrow] \\
& (A,C)(\underline{F} * \underline{G}) \arrow[r, "(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C}"] \arrow[d, "(a,c)(\underline{F}*\underline{G})"'] & (A,C)(\underline{F \cdot G}) \arrow[d, "(a,c)\,\underline{F \cdot G}"] & \\
& (A',C')(\underline{F} * \underline{G}) \arrow[r, "(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A',C'}"] & (A',C')(\underline{F \cdot G}) & \\
cl(aF \cdot \xi, \delta \cdot c) \arrow[rrr, rightsquigarrow] & & & aFG \cdot \xi G \cdot \delta \cdot c
\end{tikzcd}$$

kommuterer for $A, A' \in |\mathbb{A}|$, $C, C' \in |\mathbb{C}|$, $a \in \mathbb{A}(A',A)$ og $c \in \mathbb{C}(C,C')$

$f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G}$ er naturlig i F og G, idet

(3.6)

$$\begin{tikzcd}
cl(\xi,\delta) \arrow[rrr, rightsquigarrow] \arrow[ddd, rightsquigarrow] & & & \xi G \cdot \delta \arrow[ddd, rightsquigarrow] \\
& (A,C)(\underline{F} * \underline{G}) \arrow[r, "(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C}"] \arrow[d, "(\underline{\varepsilon} * \underline{\tau})_{A,C}"'] & (A,C)\,\underline{F \cdot G} \arrow[d, "\mathbb{C}((\varepsilon_A)G' \cdot \tau_{AF},C)"] & \\
& (A,C)(\underline{F'} * \underline{G'}) \arrow[r, "(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F',G'})_{A,C}"] & (A,C)\,\underline{F' \cdot G'} & \\
cl(\varepsilon_A \cdot \xi, \tau_B \cdot \delta) \arrow[rrr, rightsquigarrow] & & & \varepsilon_A G' \cdot \xi G' \cdot \tau_B \cdot \delta \underset{\substack{\uparrow \\ \text{naturlighed af } \tau}}{=} \varepsilon_A G' \cdot \tau_{AF} \cdot \xi G \cdot \delta
\end{tikzcd}$$

kommuterer for $F' \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} F$ og $G' \overset{\tau}{\Longrightarrow} G$, $\xi \in \mathbb{B}(AF,B)$, $\delta \in \mathbb{C}(BG,C)$

Vi mangler nu kun at efterprøve bikategorimorfi-aksiomerne for $\dot{-}$.
$\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D} \in \underline{Cat}_0$, $F \in |\mathrm{Funct}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$, $G \in |\mathrm{Funct}(\mathbb{B},\mathbb{C})|$ og
$H \in |\mathrm{Funct}(\mathbb{C},\mathbb{D})|$ kommuterer diagrammet

$$
\begin{tikzcd}
cl(\xi, cl(\delta,\rho)) \arrow[dd, squiggly] \arrow[dr, phantom, "\ni"] & & & cl(cl(\xi,\delta),\rho) \arrow[lll, squiggly] \arrow[dl, phantom, "\ni"] \arrow[d, squiggly] \\
& (A,D)(\underline{F} * (\underline{G} * \underline{H})) \arrow[d, "(\underline{F} * f(\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D})_{G,H})_{A,D}"] & (A,D)((\underline{F} * \underline{G}) * \underline{H}) \arrow[l, "(a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},\mathbb{D})_{F,G,H})_{A,D}"'] \arrow[d, "((f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G}) * \underline{H})_{A,D}"'] & cl(\xi G \cdot \delta, \rho) \arrow[dd, squiggly] \\
cl(\xi, \delta H \cdot \rho) \in \arrow[d, squiggly] & (A,D)(\underline{F} * \underline{G \cdot H}) \arrow[d, "(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D})_{F,G\cdot H})_{A,D}"] & (A,D)(\underline{F \cdot G} * \underline{H}) \arrow[d, "(f(\mathbb{A},\mathbb{C},\mathbb{D})_{F\cdot G,H})_{A,D}"'] & \\
\xi GH \cdot \delta H \cdot \rho & (A,D)\, \underline{F \cdot G \cdot H} \arrow[r, equal] & (A,D)\, \underline{F \cdot G \cdot H} & \xi GH \cdot \delta H \cdot \rho
\end{tikzcd}
$$

for $A \in |\mathbb{A}|$ og $D \in |\mathbb{D}|$. Altså kommuterer (2.2.) for $\dot{-}$
$\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \underline{Cat}_0$, $F \in |\mathrm{Funct}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$, $A \in |\mathbb{A}|$ og $B \in |\mathbb{B}|$ kommuterer
diagrammet

$$
\begin{tikzcd}
cl(\xi,\delta) \arrow[ddd, squiggly] \arrow[dr, phantom, "\ni"] & & & cl(\xi,\delta) \arrow[dl, phantom, "\ni"] \arrow[ddd, squiggly] \\
& (A,B)(\mathbb{A}(-,-) * \underline{F}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "(f(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{B})_{I_A,F})_{A,B}"] & (A,B)(\mathbb{A}(-,-) * \underline{F}) \arrow[d, "(l(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\underline{F}})_{A,B}"'] & \\
& (A,B)(\underline{I_A \cdot F}) \arrow[r, equal] & (A,B)\, \underline{F} & \\
\xi F \cdot \delta & & & \xi F \cdot \delta = (\delta)((\xi, I_B)\underline{F})
\end{tikzcd}
$$

Altså kommuterer (2.3) for $\dot{-}$. Analogt ses, at (2.4) kommuterer
for $\dot{-}$

<u>Proposition 4:</u> $\underline{-}$ er en streng bikategorimorfi $\underline{Cat}^{op} \longrightarrow \underline{Prof}$.

Bevis: $\forall \mathbb{A} \in \underline{Cat}_0$ er $f_{\mathbb{A}}$ = identitetstransformationen på $\mathbb{A}(-,-)$ og derfor en isomorfi i $\underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{A})$.

$\forall \mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C} \in \underline{Cat}_0$, $F \in |\mathrm{Funct}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$, $G \in |\mathrm{Funct}(\mathbb{B},\mathbb{C})|$, $A \in |\mathbb{A}|$ og $C \in |\mathbb{C}|$ er $(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C} : (A,C)(\underline{F} * \underline{G}) \longrightarrow (A,C)\underline{F \cdot G}$ en isomorfi med

den inverse
$$(A,C)\,\underline{F\cdot G} \xrightarrow{(g(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C}} (A,C)(\underline{F} * \underline{G})$$
$$\eta \rightsquigarrow cl(I_{AF},\eta)$$

Det er klart, at $(\eta)(g(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C} \cdot (f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C} = \eta$ og
$(cl(\xi,\delta))(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C}(g(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C} = cl(I_{AF}, \xi G \cdot \delta) = cl(\xi,\delta)$
fordi $\xi = (I_{AF})\mathbb{B}(AF,\xi)$ og $\xi G \cdot \delta = (\delta)\mathbb{C}(\xi G, C)$.
$\underline{-}$ er altså en streng bikategorimorfi.

Der findes også en kanonisk bikategorimorfi $\overline{-}$ fra $\underline{Cat}^t$ til $\underline{Prof}$

$$\underline{Cat}^t \xrightarrow{\ \overline{-}\ } \underline{Prof}$$

fastlagt ved følgende

<u>Definition 11:</u>
(i) $\overline{-}$ er identiteten på objekter.
(ii) $\forall \mathbb{A},\mathbb{B} \in \underline{Cat}_0$ er funktoren

$$\underline{Cat}^t(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \mathrm{Funct}(\mathbb{B},\mathbb{A}) \xrightarrow{\ \overline{-}\ } \underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B})$$

givet ved

(3.7) $\overline{F} = \mathbb{A}(-,-F)$ for $\mathbb{B} \xrightarrow{F} \mathbb{A}$

altså $(A,B)\overline{F} = \mathbb{A}(A,BF) \qquad \forall A \in |\mathbb{A}|$ og $B \in |\mathbb{B}|$

og $(a,b)\overline{F} = \mathbb{A}(a,bF) : \mathbb{A}(A,BF) \longrightarrow \mathbb{A}(A',B'F)$

$\forall A,A' \in |\mathbb{A}|,\ B,B' \in |\mathbb{B}|,\ a \in \mathbb{A}(A',A)$ og $b \in \mathbb{B}(B,B')$

Det er velkendt (og let at eftervise), at $\overline{F} \in |\mathrm{Funct}(\mathbb{A}^{op} \times \mathbb{B}, \mathcal{E}ns)|$

Lad $F,G \in |\mathrm{Funct}(\mathbb{B},\mathbb{A})|$ og $F \overset{\tau}{\Longrightarrow} G$ i $\mathrm{Funct}(\mathbb{B},\mathbb{A})$

Så er $\overline{\tau} : \overline{F} \Longrightarrow \overline{G}$ bestemt ved

(3.8) $$\overline{\tau}_{A,B} = \mathbb{A}(A,\tau_B) : \mathbb{A}(A,BF) \longrightarrow \mathbb{A}(A,BG), \quad \forall A \in |\mathbb{A}|, B \in |\mathbb{B}|$$

$\forall A,A' \in |\mathbb{A}|,\ B,B' \in |\mathbb{B}|,\ a \in \mathbb{A}(A',A)$ og $b \in \mathbb{B}(B,B')$ er følgende diagram kommutativt

(3.9)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(A,BF) \arrow[r, "\overline{\tau}_{A,B} = \mathbb{A}(A,\tau_B)"] \arrow[d, "\mathbb{A}(a,bF)"'] & \mathbb{A}(A,BG) \arrow[d, "\mathbb{A}(a,bG)"] \\
\mathbb{A}(A',B'F) \arrow[r, "\overline{\tau}_{A',B'} = \mathbb{A}(A',\tau_{B'})"] & \mathbb{A}(A',B'G)
\end{tikzcd}$$

idet $\mathbb{A}(A,\tau_B) \cdot \mathbb{A}(a,bG) = \mathbb{A}(a,\tau_B \cdot bG)$

$= \mathbb{A}(a, bF \cdot \tau_{B'})$, idet τ_B er naturlig i B

$= \mathbb{A}(a,bF) \cdot \mathbb{A}(A',\tau_{B'})$.

Dette viser, at $\overline{\tau}$ er en naturlig transformation $\overline{F} \Longrightarrow \overline{G}$

$\overline{}$ er virkelig en funktor $\underline{Cat}^t(\mathbb{A},\mathbb{B}) \longrightarrow \underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B})$,

fordi

$\forall F \in |\mathrm{Funct}(\mathbb{B},\mathbb{A})|$ er $\overline{I_F}_{A,B} = \mathbb{A}(A,(I_F)_B) = I_{\mathbb{A}(A,BF)}$ og

$\forall F,G,H \in |\mathrm{Funct}(\mathbb{B},\mathbb{A})|$, $\tau : F \Longrightarrow G$ og $\tau' : G \Longrightarrow H$ er

$\overline{\tau\cdot\tau'}_{A,B} = \mathbb{A}(A,(\tau\cdot\tau')_B) = \mathbb{A}(A,\tau_B)\cdot\mathbb{A}(A,\tau'_B) = \overline{\tau}_{A,B} \cdot \overline{\tau'}_{A,B}$.

(iii) $\forall\, \mathbb{A} \in \underline{Cat}_0$ er morfien

$$f_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}(-,-) \Longrightarrow \overline{I}_{\mathbb{A}} = \mathbb{A}(-,-)$$

i $\underline{\text{Prof}}(\mathbb{A},\mathbb{A})$ lig med identitetstransformationen på $\mathbb{A}(-,-)$

(iv) $\forall\, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in \underline{Cat}_0$, $F \in |\text{Funct}(\mathbb{B},\mathbb{A})|$ og $G \in |\text{Funct}(\mathbb{C},\mathbb{B})|$ er $f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G}$ givet ved

(3.10)
$$\begin{array}{ccc} (A,C)(\overline{F} * \overline{G}) & \xrightarrow{(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C}} & (A,C)\,\overline{G\cdot F} \\ cl(\xi,\delta) & \rightsquigarrow & \xi\cdot\delta F \end{array} \qquad (\cdot \text{ er sammensætning i } \mathbb{A})$$

for $\xi \in \mathbb{A}(A, BF)$ og $\delta \in \mathbb{B}(B, CG)$

$(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C}$ er veldefineret, idet der for $\xi_1 \in \mathbb{A}(A,BF)$, $\xi_2 \in \mathbb{A}(A, B'F)$, $\delta_1 \in \mathbb{B}(B, CG)$, $\delta_2 \in \mathbb{B}(B', CG)$ og $\beta \in \mathbb{B}(B,B')$ gælder

$$\xi_2 = (\xi_1)\,\mathbb{A}(A,\beta F) = \xi_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sammensætning} \\ \text{i } \mathbb{A}.}}{\cdot} \beta F \;\wedge\; \delta_1 = (\delta_2)\,\mathbb{B}(\beta, CG) = \beta \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sammensætning} \\ \text{i } \mathbb{B}}}{\cdot} \delta_2$$

$$\Downarrow$$

$$\xi_1 \cdot \delta_1 F = \xi_1 \cdot \beta F \cdot \delta_2 F = \xi_2 \cdot \delta_2 F$$

$(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C}$ er naturlig i A og C, idet diagrammet

(3.11)
$$\begin{tikzcd}
cl(\xi,\delta) \arrow[rrr, squiggly] \arrow[ddd, squiggly] \arrow[dr, phantom, "\in"] & & & \xi\cdot\delta F \arrow[ddd, squiggly] \\
& (A,C)(\overline{F} * \overline{G}) \arrow[r, "(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C}"] \arrow[d, "(a,c)(\overline{F}*\overline{G})"'] & (A,C)\,\overline{G\cdot F} \arrow[d, "(a,c)\,\overline{GF}"] & \\
& (A',C')(\overline{F} * \overline{G}) \arrow[r, "(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A',C'}"] & (A',C')\,\overline{G\cdot F} & \\
cl(a\cdot\xi, \delta\cdot cG) \arrow[rrr, squiggly] & & & a\cdot\xi\cdot\delta F\cdot cGF
\end{tikzcd}$$

kommuterer for $A, A' \in |\mathbb{A}|$, $C, C' \in |\mathbb{C}|$, $a \in \mathbb{A}(A', A)$ og $c \in \mathbb{C}(C, C')$.

$\int(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G}$ er naturlig i F og G, idet

(3.12)

$$\begin{tikzcd}
cl(\xi,\delta) \arrow[rrr, squiggly] \arrow[ddd, squiggly] & & & \xi\cdot\delta F \arrow[ddd, squiggly] \\
& (A,C)(\overline{F}*\overline{G}) \arrow[r, "(\int(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F,G})_{A,C}"] \arrow[d, "(\overline{\varepsilon}*\overline{\tau})_{A,C}"'] & (A,C)\,\overline{G\cdot F} \arrow[d, "\mathbb{A}(A,\tau_C F\cdot\varepsilon_{CG'})"] & \\
& (A,C)(\overline{F'}*\overline{G'}) \arrow[r, "(\int(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C})_{F',G'})_{A,C}"] & (A,C)\,\overline{G'\cdot F'} & \\
cl(\xi\cdot\varepsilon_B,\delta\cdot\tau_C) \arrow[rrr, squiggly] & & & \xi\cdot\varepsilon_B\cdot\delta F'\cdot\tau_C F' = \xi\cdot\delta F\cdot\tau_C F\cdot\varepsilon_{CG'}
\end{tikzcd}$$

↑ naturlighed af ε

kommuterer for $F \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} F'$, $G \overset{\tau}{\Longrightarrow} G'$, $\xi \in \mathbb{A}(A,BF)$ og $\delta \in \mathbb{B}(B,CG)$

Vi mangler nu kun at efterprøve bikategorimorfi-axiomerne for $\overline{}$. Dette forløber analogt til beviset for bikategorimorfi-axiomerne for $\hat{}$ på side 3.4.

<u>Proposition 5:</u> $\overline{}$ er en streng bikategorimorfi $\underline{Cat}^t \longrightarrow \underline{Prof}$.

Bevis : Analogt til beviset for proposition 4, side 3.5.

<u>Proposition 6:</u> Hvis $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ og $G : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$ er adjungerede funktorer mellem små kategorier, $F \dashv G$, med frontadjunktion η og endeadjunktion ε, er $\overline{G} \dashv \overline{F}$ med frontadjunktion $\overline{\eta}\cdot\int(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F}^{-1}$ og endeadjunktion $\int(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G}\cdot\overline{\varepsilon}$, hvor $\int(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})$ og $\int(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})$ er bestemt ved (3.10).

Bevis :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathbb{B} \arrow[l, shift left, "G"]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, shift right, "\overline{G}"', "|" marking] & \mathbb{B} \arrow[l, shift right, "\overline{F}"', "|" marking]
\end{tikzcd}$$

Når $F \dashv G$ med frontadj. η og endeadj. ε i $\underline{Cat}$, er $G \dashv F$ med frontadj. η og endeadj. ε i $\underline{Cat}^t$ og så er, ifølge proposition 3, side 2.10, $\overline{G} \dashv \overline{F}$ med frontadjunktion $\overline{\eta}\cdot f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})^{-1}_{G,F}$ og indeadjunktion $f(\mathbb{A},\mathbb{B};\mathbb{A})_{F,G}\cdot\overline{\varepsilon}$.

<u>Proposition 7:</u> Lad F, G, η og ε være som i proposition 6, så er $\underline{G}\dashv\underline{F}$ med frontadjunktion $\underline{\varepsilon}\cdot f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})^{-1}_{G,F}$ og indeadjunktion $f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G}\cdot\underline{\eta}$, hvor $f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})$ og $f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})$ er givet ved (3.4)

Bevis:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathbb{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, shift left, "\underline{F}", "|"'] & \mathbb{B} \arrow[l, shift left, "\underline{G}", "|"'] \end{tikzcd}$$

Når F ⊣ G med frontadjunktion η og indeadjunktion ε i <u>Cat</u>, er G ⊣ F med frontadjunktion ε og indeadjunktion η i $\underline{\text{Cat}}^{opp}$. Resten følger nu af prop. 3.

<u>Proposition 8:</u> Hvis F er en funktor mellem små kategorier, er $\underline{F}$ og $\overline{F}$ adjungerede profunktorer, $\underline{F}\dashv\overline{F}$.

Bevis:

$$\mathbb{A}\xrightarrow{F}\mathbb{B}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, shift right, "\underline{F}"', "|"] & \mathbb{B} \arrow[l, shift right, "\overline{F}"', "|"] \end{tikzcd}$$

Vi definerer $\mathbb{A}(-,-)\overset{\eta}{\Longrightarrow}\underline{F}*\overline{F}$ ved

(3.13)
$$\begin{aligned} \mathbb{A}(A,A') &\xrightarrow{\eta_{A,A'}} (A,A')(\underline{F}*\overline{F}) \\ f &\rightsquigarrow cl(fF, I_{A'F}) \end{aligned}$$

og $\overline{F}*\underline{F}\overset{\varepsilon}{\Longrightarrow}\mathbb{B}(-,-)$ ved

(3.14)
$$\begin{aligned} (B,B')(\overline{F}*\underline{F}) &\xrightarrow{\varepsilon_{B,B'}} \mathbb{B}(B,B') \\ cl(\xi,\delta) &\rightsquigarrow \xi\cdot\delta \end{aligned}$$
(· er sammensætning i $\mathbb{B}$)

$\varepsilon_{B,B'}$ er veldefineret, idet der for $\xi_1 \in (B,A)\overline{F} = \mathbb{B}(B,AF)$,
$\xi_2 \in \mathbb{B}(B,A'F)$, $\delta_1 \in \mathbb{B}(AF,B')$, $\delta_2 \in \mathbb{B}(A'F,B')$ og $\beta \in \mathbb{A}(A,A')$
gælder

$$\xi_2 = (\xi_1)\mathbb{B}(B,\beta F) = \xi_1 \cdot \beta F \;\wedge\; \delta_1 = (\delta_2)\,\mathbb{B}(\beta F, B') = \beta F \cdot \delta_2$$
$$\Downarrow$$
$$\xi_1 \cdot \delta_1 = \xi_1 \cdot \beta F \cdot \delta_2 = \xi_2 \cdot \delta_2 .$$

$\eta_{A,A'}$ er naturlig i A og A', idet

(3.15)
$$\begin{tikzcd}
f \in \mathbb{A}(A,A') \arrow[r, "\eta_{A,A'}"] \arrow[d, "\mathbb{A}(a,a')"'] & (A,A')(\underline{E} * \overline{F}) \ni cl(fF, I_{A'F}) \arrow[d, "(a,a')(\underline{E} * \overline{F})"] \\
a\cdot f \cdot a' \in \mathbb{A}(\tilde{A},\tilde{A}') \arrow[r, "\eta_{\tilde{A},\tilde{A}'}"] & (\tilde{A},\tilde{A}')(\underline{E} * \overline{F}) \ni cl(aF\cdot fF \cdot a'F, I_{\tilde{A}'F}) = cl(aF\cdot fF, a'F)
\end{tikzcd}$$

kommuterer for $a \in \mathbb{A}(\tilde{A},A)$ og $a' \in \mathbb{A}(A',\tilde{A}')$
Analogt ses, at $\varepsilon_{B,B'}$ er naturlig i B, B'. η og ε er altså transformationer.

η bliver frontadjunktion og ε endeadjunktion for $\underline{E} \dashv \overline{F}$, idet diagrammerne (1.15) og (1.16) får følgende udseende

(3.16)
$$\begin{tikzcd}
\overline{F} * \mathbb{A}(-,-) \arrow[r, Rightarrow, "\overline{F} * \eta"] \arrow[d, Rightarrow, "r(\mathbb{B},\mathbb{A})_{\overline{F}}"'] & \overline{F} * (\underline{E} * \overline{F}) \arrow[d, Rightarrow, "a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})^{\div 1}_{\overline{F},\underline{E},\overline{F}}"] \\
\overline{F} & (\overline{F} * \underline{E}) * \overline{F} \arrow[dl, Rightarrow, "\varepsilon * \overline{F}"] \\
\mathbb{B}(-,-) * \overline{F} \arrow[u, Rightarrow, "l(\mathbb{B},\mathbb{A})_{\overline{F}}"] &
\end{tikzcd}$$

$$
(3.17)\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(-,-) * \underline{F} \arrow[rr, Rightarrow, "\eta * \underline{F}"] \arrow[d, Rightarrow, "\ell(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\underline{F}}"] & & ((\underline{F} * \bar{F}) * \underline{F}) \arrow[d, Rightarrow, "a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{\underline{F},\bar{F},\underline{F}}"] \\
\underline{F} & & \underline{F} * (\bar{F} * \underline{F}) \arrow[dl, Rightarrow, "\underline{F} * \varepsilon"] \\
& \underline{F} * \mathbb{B}(-,-) \arrow[ul, Rightarrow, "r(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\underline{F}}"] &
\end{tikzcd}
$$

(3.16) anvendes på $(B,A) \in |\mathbb{B} \times \mathbb{A}|$. Derved fremkommer følgende kommutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
cl(\xi,\delta) \arrow[rrrr, squiggly] \arrow[dd, squiggly] & & & & cl(\xi, cl(\delta F, I_{AF})) \arrow[dd, squiggly] \\
& (B,A)(\bar{F} * \mathbb{A}(-,-)) \arrow[rr, "(\bar{F} * \eta)_{B,A}"] \arrow[d, "(r(\mathbb{B},\mathbb{A})_{\bar{F}})_{B,A}"] & & (B,A)(\bar{F} * (\underline{F} * \bar{F})) \arrow[d, "(a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})^{\div 1}_{\bar{F},\underline{F},\bar{F}})_{BA}"] & \\
\xi \cdot \delta F & (B,A)\bar{F} & & (B,A)((\bar{F} * \underline{F}) * \bar{F}) \arrow[dl, "(\varepsilon * \bar{F})_{B,A}"] & cl(cl(\xi,\delta F), I_{AF}) \arrow[ddll, squiggly] \\
& & (B,A)(\mathbb{B}(-,-) * \bar{F}) \arrow[ul, "(\ell(\mathbb{B},\mathbb{A})_{\bar{F}})_{B,A}"] & & \\
& & cl(\xi \cdot \delta F, I_{AF}) \arrow[uull, squiggly] & &
\end{tikzcd}
$$

Tilsvarende fremkommer følgende kommutative diagram, når (3.17) anvendes på $(A,B) \in |\mathbb{A} \times \mathbb{B}|$

$$
\begin{tikzcd}
cl(\xi,\delta) \arrow[rrrr, squiggly] \arrow[dd, squiggly] & & & & cl(cl(\xi F, I), \delta) \arrow[dd, squiggly] \\
& (A,B)(\mathbb{A}(-,-) * \underline{F}) \arrow[rr, "(\eta * \underline{F})_{A,B}"] \arrow[d, "((\ell(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\underline{F}}"] & & (A,B)((\underline{F} * \bar{F}) * \underline{F}) \arrow[d, "(a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{\underline{F},\bar{F},\underline{F}})_{AB}"] & \\
\xi F \cdot \delta & (A,B)\underline{F} & & (A,B)(\underline{F} * (\bar{F} * \underline{F})) \arrow[dl, "(\underline{F} * \varepsilon)_{A,B}"] & cl(\xi F, cl(I,\delta)) \arrow[ddll, squiggly] \\
& & (A,B)(\underline{F} * \mathbb{B}(-,-)) \arrow[ul, "(r(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\underline{F}})_{A,B}"] & & \\
& & cl(\xi F, \delta) \arrow[uull, squiggly] & &
\end{tikzcd}
$$

Vi vil nu undersøge, hvordan $\bar{\cdot}$ og $\underline{\cdot}$ virker på monader og comonader.

Der gælder følgende

<u>Proposition 9:</u> $\bar{\cdot}$ fører $\underline{\mathrm{Cat}}$-monad i $\underline{\mathrm{Prof}}$-monad og $\underline{\mathrm{Cat}}$-comonad i $\underline{\mathrm{Prof}}$-comonad; $\underline{\cdot}$ fører $\underline{\mathrm{Cat}}$-monad i $\underline{\mathrm{Prof}}$-comonad og $\underline{\mathrm{Cat}}$-comonad i $\underline{\mathrm{Prof}}$-monad. (En $\underline{\mathrm{Prof}}$-monad kaldes også en promonad)

Bevis: 1) Lad (T, η, μ) være en monad i den lille kategori $\mathbb{A}$.

Så er $(\mathbb{A}, T, \eta, \mu)$ en $\underline{\mathrm{Cat}}^{t}$-monad og en $\underline{\mathrm{Cat}}^{op}$-comonad.

Da $\bar{\cdot}$ er en bikategorimorfi $\underline{\mathrm{Cat}}^{t} \longrightarrow \underline{\mathrm{Prof}}$, er $(\mathbb{A}, \bar{T}, \bar{\eta}, f(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{A})_{T,T} \cdot \bar{\mu})$, hvor $f(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{A})$ er bestemt ved (3.10), en promonad, ifølge proposition 1.

Da $\underline{\cdot} = (Id, \underline{\cdot}, Id, f(\cdot,\cdot,\cdot))$ er en streng bikategorimorfi $\underline{\mathrm{Cat}}^{op} \longrightarrow \underline{\mathrm{Prof}}$, er $(Id, \underline{\cdot}, Id, f(\cdot,\cdot,\cdot)^{-1})$ en bikategori-comorfi $\underline{\mathrm{Cat}}^{op} \longrightarrow \underline{\mathrm{Prof}}$. Proposition 2 viser nu, at $(\mathbb{A}, \underline{T}, \underline{\eta}, \underline{\mu} \cdot f(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{A})^{-1}_{T,T})$ er en pro-comonad, hvor $f(-,-,-)$ er bestemt ved (3.4).

2) Lad (T, ε, δ) være en comonad i den lille kategori $\mathbb{A}$.

Så er $(\mathbb{A}, T, \varepsilon, \delta)$ en $\underline{\mathrm{Cat}}^{t}$-comonad og en $\underline{\mathrm{Cat}}^{op}$-monad.

Da $\bar{\cdot} = (Id, \bar{\cdot}, Id, f(\cdot,\cdot,\cdot))$ er en streng bikategorimorfi $\underline{\mathrm{Cat}}^{t} \longrightarrow \underline{\mathrm{Prof}}$, er $(Id, \bar{\cdot}, Id, f(\cdot,\cdot,\cdot)^{-1})$ en bikategorico-morfi $\underline{\mathrm{Cat}}^{t} \longrightarrow \underline{\mathrm{Prof}}$. Derfor er $(\mathbb{A}, \bar{T}, \bar{\varepsilon}, \bar{\delta} \cdot f(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{A})^{-1}_{T,T})$ en pro-comonad, når $f(\cdot,\cdot,-)$ er bestemt ved (3.10).

$\underline{\cdot}$ er en bikategori-morfi $\underline{\mathrm{Cat}}^{op} \longrightarrow \underline{\mathrm{Prof}}$, derfor er $(\mathbb{A}, \underline{T}, \underline{\varepsilon}, f(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{A})_{T,T} \cdot \underline{\delta})$ en promonad, når $f(\cdot,\cdot,-)$ er bestemt ved (3.4.)

Proposition 9 viser bl.a., at enhver sædvanlig monad i en lille kategori ved ÷ føres i en promonad. I det følgende skal vi se, at ikke enhver promonad er fremkommet på denne måde.

Lad M være en mængde. M kan da opfattes som diskret kategori.

En promonad (M, T, η, μ) på M består af:

(i) en afbildning T af $M \times M \longrightarrow |\mathcal{E}ns|$

(ii) $\forall m \in M$ et udvalgt element $\eta_m = (I_m)\eta_{m,m}$ i $(m, m)T$

(iii) $\forall m_1, m_2 \in M$ en afbildning $\mu_{m_1, m_2} : (m_1, m_2)(T * T) \longrightarrow (m_1, m_2)T$,

således at $\left((m_1, m_2)(T * T) = \bigcup^{\text{disj}}_{m \in M} \left[(m_1, m)T \times (m, m_2)T \right] \right)$

(3.18) $$(\eta_{m_1}, x)\mu_{m_1 m_2} = x = (x, \eta_{m_2})\mu_{m_1 m_2} \quad \text{og}$$

(3.19) $$((x, y)\mu_{m_1 m_3}, z)\mu_{m_1 m_4} = (x, (y, z)\mu_{m_2 m_4})\mu_{m_1 m_4}$$

$\forall m_1, m_2, m_3, m_4 \in M$, $x \in (m_1, m_2)T$, $y \in (m_2, m_3)T$ og $z \in (m_3, m_4)T$

Med Promonad(M) betegnes den kategori, hvis objekter er promonader (M, T, η, μ) på M, og hvis morfier fra (M, T, η, μ) til $(M, \tilde{T}, \tilde{\eta}, \tilde{\mu})$ er transformationer $\tau : T \Longrightarrow \tilde{T}$ med egenskaberne

(3.20) $$(\eta_m)\tau_{m,m} = \tilde{\eta}_m \quad \text{og}$$

(3.21) $$((x)\tau_{m_1 m_2}, (y)\tau_{m_2 m_3})\tilde{\mu}_{m_1 m_3} = ((x, y)\mu_{m_1 m_3})\tau_{m_1 m_3}$$

$\forall m_1, m_2, m_3 \in M$, $x \in (m_1, m_2)T$ og $y \in (m_2, m_3)T$

Det ses let, at dette virkelig definerer en kategori.

Med $\mathcal{C}at_M$ betegnes den kategori, hvis objekter er små kategorier med M som objektmængde, og hvis morfier er funktorer, der er identiteten på objekter.

<u>Proposition 10:</u> Promonad$(M) \cong \mathcal{C}at_M$

Bevis: Vi definerer en funktor δ : Promonad$(M) \longrightarrow \mathcal{C}at_M$ ved

$(M, T, \eta, \mu)\delta$ er den kategori, der er bestemt ved

(i) $|(M, T, \eta, \mu)\delta| = M$

(ii) $(M, T, \eta, \mu)\delta\,(m_1, m_2) = (m_1, m_2)T$

(iii) I_m er $\eta_m \in (m, m)T$, $\forall m \in M$ og

(iv) $\forall m_1, m_2, m_3 \in M$, $x \in (m_1, m_2)T$ og $y \in (m_2, m_3)T$

er $x \cdot y = (x, y)\mu_{m_1 m_3} \in (m_1, m_3)T$

At dette virkelig definerer en kategori, følger af (3.18) og (3.19).

For enhver morfi τ fra (M, T, η, μ) til $(M, \tilde{T}, \tilde{\eta}, \tilde{\mu})$ defineres $(\tau)\delta$ som den funktor

$$(M, T, \eta, \mu)\delta \xrightarrow{(\tau)\delta} (M, \tilde{T}, \tilde{\eta}, \tilde{\mu})\delta ,$$

der er identiteten på objekter og sender $x \in (m_1, m_2)T$ i $(x)\tau_{m_1 m_2} \in (m_1, m_2)\tilde{T}$.

$(\eta_m)((\tau)\delta) = (\eta_m)\tau_{m,m} = \tilde{\eta}_m \quad \forall m \in M$, ifølge (3.20) og

$(x \cdot y)((\tau)\delta) = ((x, y)\mu_{m_1 m_3})\tau_{m_1 m_3} = ((x)\tau_{m_1 m_2}, (y)\tau_{m_2 m_3})\tilde{\mu}_{m_1 m_3} = (x)((\tau)\delta) \cdot (y)((\tau)\delta)$

for alle $m_1, m_2, m_3 \in M$, $x \in (m_1, m_2)T$ og $y \in (m_2, m_3)T$, ifølge (3.21).

Man ser let, at δ virkelig er en funktor $\mathrm{Promonad}(M) \longrightarrow \mathrm{Cat}_M$

Nu definerer vi en funktor $\rho : \mathrm{Cat}_M \longrightarrow \mathrm{Promonad}(M)$ ved

$\forall \mathbb{A} \in |\mathrm{Cat}_M|$: $(\mathbb{A})\rho = (M, T, \eta, \mu)$, hvor T er givet ved

$\forall m_1, m_2 \in M$ er $(m_1, m_2)T = \mathbb{A}(m_1, m_2)$,

η er givet ved $\eta_m = I_m \in \mathbb{A}(m, m)$ og

μ er givet ved $\mu_{m_1 m_3} : (x, y) \rightsquigarrow x \cdot y \in \mathbb{A}(m_1, m_3)$

for $m_1, m_2, m_3 \in M$, $x \in \mathbb{A}(m_1, m_2)$, $y \in \mathbb{A}(m_2, m_3)$

Dette bestemmer en promonad på M, fordi

$(\eta_{m_1}, x)\mu_{m_1 m_2} = I_{m_1} \cdot x = x = x \cdot I_{m_2} = (x, \eta_{m_2})\mu_{m_1 m_2} \quad \forall m_1, m_2 \in M$, $x \in \mathbb{A}(m_1, m_2)$

og $((x, y)\mu_{m_1 m_3}, z)\mu_{m_1 m_4} = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = (x, (y, z)\mu_{m_2 m_4})\mu_{m_1 m_4}$

$\forall m_1, m_2, m_3, m_4 \in M$, $x \in \mathbb{A}(m_1, m_2)$, $y \in \mathbb{A}(m_2, m_3)$ og $z \in \mathbb{A}(m_3, m_4)$.

For enhver morfi F i Cat_M fra $\mathbb{A}$ til $\tilde{\mathbb{A}}$ sætter vi $(F)\rho$

$$(\mathbb{A})\rho = (M, T, \eta, \mu) \xrightarrow{(F)\rho} (M, \tilde{T}, \tilde{\eta}, \tilde{\mu}) = (\tilde{\mathbb{A}})\rho$$

lig den transformation $T \Longrightarrow \tilde{T}$, der bestemmes ved

$$(3.22)\qquad \begin{array}{ccc} (m_1, m_2)T = \mathbb{A}(m_1, m_2) & \xrightarrow{((F)\rho)_{m_1 m_2}} & \tilde{\mathbb{A}}(m_1, m_2) = (m_1, m_2)\tilde{T} \\ x & \rightsquigarrow & (x)F \end{array}$$

$\forall m_1, m_2 \in M$.

Da M er diskret, er mængdeafbildningen (3.22) trivielt en transformation $T \Longrightarrow \tilde{T}$.

$(F)\rho$ opfylder (3.20) og (3.21), fordi F er en funktor.

$(F)\rho$ er altså en morfi mellem promonaderne $(\mathbb{A})\rho$ og $(\tilde{\mathbb{A}})\rho$.

ρ er åbenbart en funktor. Man overbeviser sig let om, at den er invers til δ.

<u>Korollar:</u> Der findes promonader, der ikke fremkommer af sædvanlige monader ved $\div$.

Bevis: Den eneste monad i en diskret kategori M er (Id, Id, Id), men der er mange promonader på M, fordi $\mathrm{Promonad}(M) \cong \mathrm{Cat}_M$.

§4: Bikategorien af cylinderkategorier

I denne paragraf defineres en ny bikategori, bikategorien af cylinderkategorier, som viser sig at være isomorf med Prof i følgende forstand.

Definition 12: To bikategorier $\mathbb{S}$ og $\overline{\mathbb{S}}$ er isomorfe, hvis der findes bikategorimorfier $F = (F, (\cdot,\cdot)F, f_-, f(\cdot,\cdot,\cdot)) : \mathbb{S} \longrightarrow \overline{\mathbb{S}}$ og $G = (G, (\cdot,\cdot)G, g_-, g(\cdot,\cdot,\cdot)) : \overline{\mathbb{S}} \longrightarrow \mathbb{S}$, så at

1) $F \cdot G$ er identitetsafb. på $\mathbb{S}_0$, $G \cdot F$ er identitetsafb. på $\overline{\mathbb{S}}_0$.

2) $\forall A, B \in \mathbb{S}_0$ er $(A,B)F \cdot (AF, BF)G$ identitetsfunktoren på $\mathbb{S}(A,B)$

$\forall \bar{A}, \bar{B} \in \overline{\mathbb{S}}_0$ er $(\bar{A},\bar{B})G \cdot (\bar{A}G, \bar{B}G)F$ identitetsfunktoren på $\overline{\mathbb{S}}(\bar{A},\bar{B})$

3) $\forall A \in \mathbb{S}_0$ er

$$I_A \xrightarrow{g_{AF}} \bar{I}_{AF}((AF,AF)G) \xrightarrow{f_A((AF,AF)G)} I_A$$

identitetsmorfien på I_A i $\mathbb{S}(A,A)$

$\forall \bar{A} \in \overline{\mathbb{S}}_0$ er

$$\bar{I}_{\bar{A}} \xrightarrow{f_{\bar{A}G}} I_{\bar{A}G}((\bar{A}G,\bar{A}G)F) \xrightarrow{g_{\bar{A}}((\bar{A}G,\bar{A}G)F)} \bar{I}_{\bar{A}}$$

identitetsmorfien på $\bar{I}_{\bar{A}}$ i $\overline{\mathbb{S}}(\bar{A},\bar{A})$.

4) $\forall A, B, C \in \mathbb{S}_0$, $S \in |\mathbb{S}(A,B)|$ og $T \in |\mathbb{S}(B,C)|$ er diagrammet

$$(4.1) \qquad \begin{tikzcd} S * T \arrow[r, "g(AF,BF,CF)_{S((A,B)F),\,T((B,C)F)}"] \arrow[dr, "I_{S*T}"'] & (S((A,B)F) \mathbin{\bar{*}} T((B,C)F))(AF,CF)G \arrow[d, "(f(A,B,C)_{S,T})((AF,CF)G)"] \\ & S * T \end{tikzcd}$$

kommutativt, og

$\forall \bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \in \overline{\mathbb{S}}_0$, $\bar{S} \in |\overline{\mathbb{S}}(\bar{A},\bar{B})|$ og $\bar{T} \in |\overline{\mathbb{S}}(\bar{B},\bar{C})|$ er diagrammet

$$
(4.2)\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\bar{S} * \bar{T} \arrow[r, "f(\bar{A}G,\, \bar{B}G,\, \bar{C}G)_{\bar{S}((\bar{A},\bar{B})G),\, \bar{T}((\bar{B},\bar{C})G)}"] \arrow[dr, "I_{\bar{S} * \bar{T}}"'] & (\bar{S}((\bar{A},\bar{B})G) * \bar{T}((\bar{B},\bar{C})G))(\bar{A}G, \bar{C}G)F \arrow[d, "(g(\bar{A},\bar{B},\bar{C})_{\bar{S},\bar{T}})(\bar{A}G,\bar{C}G)F"] \\
& \bar{S} * \bar{T}
\end{tikzcd}
$$

kommutativ.

<u>Definition 13</u>: Bikategorien af cylinderkategorier er den bikategori, der er givet ved

(i) $\mathcal{S}_0 = \underline{Cat}_0$

(ii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \underline{Cat}_0$ er $\mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ bestemt ved

1) $|\mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$ er klassen af kategorier $\mathbb{C}$ med flg. egenskaber

$|\mathbb{C}| = |\mathbb{A}| \underset{disj}{\cup} |\mathbb{B}| \overset{def.}{=} \{(0,A) \mid A \in |\mathbb{A}|\} \cup \{(1,B) \mid B \in |\mathbb{B}|\}$ og

$\mathbb{C}((0,A),(0,A')) = \mathbb{A}(A,A') \quad \forall A, A' \in |\mathbb{A}|$,

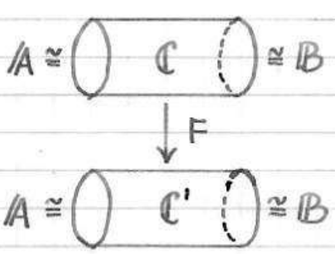
$\mathbb{C}((1,B),(1,B')) = \mathbb{B}(B,B') \quad \forall B, B' \in |\mathbb{B}|$,

$\mathbb{C}((1,B),(0,A)) = \emptyset \quad \forall A \in |\mathbb{A}|, B \in |\mathbb{B}|$,

$I_{(0,A)}$ i $\mathbb{C}$ er lig med I_A i $\mathbb{A}$ og $I_{(1,B)}$ i $\mathbb{C}$ er $I_B \in \mathbb{B}(B,B)$.

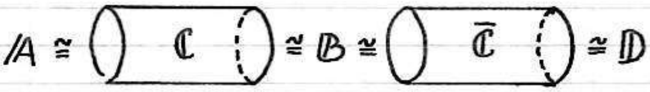
sammensætning af morfier i $\mathbb{C}$ mellem objekter af formen $(0,A)$, $A \in |\mathbb{A}|$, stemmer overens med sammens. af morfier i $\mathbb{A}$, og sammensætn. af morfier i $\mathbb{C}$ mellem obj. af formen $(1,B)$, $B \in |\mathbb{B}|$, stemmer overens med sammensætn. i $\mathbb{B}$.

2) en morfi i $\mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ fra $\mathbb{C}$ til $\mathbb{C}'$ er en funktor $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}'$,



som er identiteten på objekter, på morfier mellem objekter af formen $(0,A)$, og på morfier mellem obj. af formen $(1,B)$.

(iii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{D} \in \underline{Cat}_0$, $\mathbb{C} \in |\mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$ og $\bar{\mathbb{C}} \in |\mathcal{S}(\mathbb{B},\mathbb{D})|$



definieres $(\mathbb{C}, \bar{\mathbb{C}})\; c(\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{D}) = \mathbb{C} * \bar{\mathbb{C}} \in |\mathcal{S}(\mathbb{A}, \mathbb{D})|$ ved

1) $|\mathbb{C} * \bar{\mathbb{C}}| = |\mathbb{A}| \underset{\text{disj}}{\cup} |\mathbb{D}| = \{(0,A) \mid A \in |\mathbb{A}|\} \cup \{(1,D) \mid D \in |\mathbb{D}|\}$

2) $\forall A, A' \in |\mathbb{A}|,\ D, D' \in |\mathbb{D}|$ er

$(\mathbb{C} * \bar{\mathbb{C}})((0,A),(0,A')) = \mathbb{A}(A,A')$,

$(\mathbb{C} * \bar{\mathbb{C}})((1,D),(1,D')) = \mathbb{D}(D,D')$,

$(\mathbb{C} * \bar{\mathbb{C}})((1,D),(0,A)) = \emptyset$ og

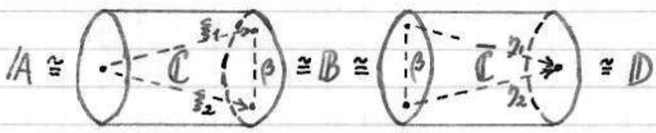
(4.3) $$(\mathbb{C} * \bar{\mathbb{C}})((0,A),(1,D)) = \underset{B \in |\mathbb{B}|}{\overset{\text{disj}}{\bigcup}} \mathbb{C}((0,A),(1,B)) \times \bar{\mathbb{C}}((0,B),(1,D)) \big/ \equiv$$, hvor

$\equiv$ er den ækvivalensrelation i $\underset{B \in |\mathbb{B}|}{\overset{\text{disj}}{\bigcup}} \left[\mathbb{C}((0,A),(1,B)) \times \bar{\mathbb{C}}((0,B),(1,D))\right]$,

der frembringes af den refleksive og symmetriske relation $\sim$:

$(\xi_1, \eta_1) \sim (\xi_2, \eta_2) \Leftrightarrow \exists\, \beta$ morfi i $\mathbb{B}$, så at

$$\xi_2 = \xi_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sammens.} \\ \text{i } \mathbb{C}}}{\cdot} \beta \wedge \eta_1 = \beta \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sammens.} \\ \text{i } \bar{\mathbb{C}}}}{\cdot} \eta_2 \text{ eller } \xi_1 = \xi_2 \cdot \beta \wedge \eta_2 = \beta \cdot \eta_1$$

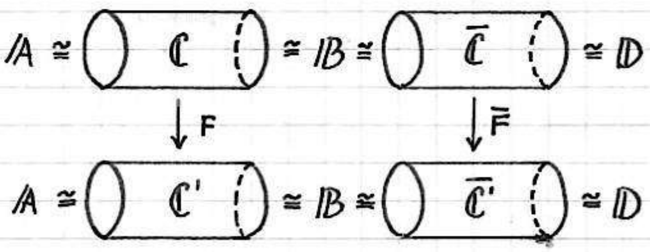


3) Det er klart, hvordan morfier i $\mathbb{C} * \bar{\mathbb{C}}$ skal sammensættes!

Nu definieres $c(\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{D})$ på morfier.

Lad $\mathbb{C}, \mathbb{C}' \in |\mathcal{S}(\mathbb{A}, \mathbb{B})|$, $\bar{\mathbb{C}}, \bar{\mathbb{C}}' \in |\mathcal{S}(\mathbb{B}, \mathbb{D})|$, $F \in (\mathcal{S}(\mathbb{A}, \mathbb{B}))(\mathbb{C}, \mathbb{C}')$

og $\bar{F} \in (\mathcal{S}(\mathbb{B}, \mathbb{D}))(\bar{\mathbb{C}}, \bar{\mathbb{C}}')$



$F * \bar{F} = (F, \bar{F})\, c(\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{D}) : \mathbb{C} * \bar{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}' * \bar{\mathbb{C}}'$ er identiteten på objekter, på morfier mellem objekter af formen $(0, A)$, $A \in |\mathbb{A}|$, og på morfier mellem objekter af formen $(1, D)$, $D \in |\mathbb{D}|$, og for $\xi \in \mathbb{C}((0,A),(1,B))$ og $\eta \in \bar{\mathbb{C}}((0,B),(1,D))$ er

$(cl(\xi,\eta))(F * \bar{F}) = cl(\xi F, \eta \bar{F}) \in (\mathbb{C}' * \bar{\mathbb{C}}')((0,A),(1,D))$

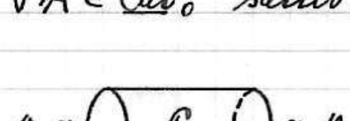
$F * \bar{F}$ er veldefineret, fordi

$$\xi_2 = \xi_1 \cdot \beta \wedge \eta_1 = \beta \cdot \eta_2$$
$$\Downarrow$$
$$\xi_2 F = \xi_1 F \cdot \beta F = \xi_1 F \cdot \beta \wedge \eta_1 \bar{F} = \beta \bar{F} \cdot \eta_2 \bar{F} = \beta \cdot \eta_2 \bar{F}$$

for $\xi_1 \in \mathbb{C}((0,A),(1,B))$, $\xi_2 \in \mathbb{C}((0,A),(1,B'))$, $\eta_1 \in \bar{\mathbb{C}}((0,B),(1,D))$, $\eta_2 \in \bar{\mathbb{C}}((0,B'),(1,D))$ og $\beta \in \mathbb{B}(B, B')$.

Man ser let, at $c(\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{D})$ er en funktor.

(iv) $\forall \mathbb{A} \in \underline{Cat}_0$ sætter vi $I_{\mathbb{A}} = \mathbb{C}_{\mathbb{A}}$ bestemt ved



$|\mathbb{C}_{\mathbb{A}}| = |\mathbb{A}| \cup_{disj.} |\mathbb{A}| = \{(0,A) \mid A \in |\mathbb{A}|\} \cup \{(1,A) \mid A \in |\mathbb{A}|\}$

$\mathbb{C}_{\mathbb{A}}((0,A),(0,A')) = \mathbb{A}(A,A') = \mathbb{C}_{\mathbb{A}}((1,A),(1,A'))$,

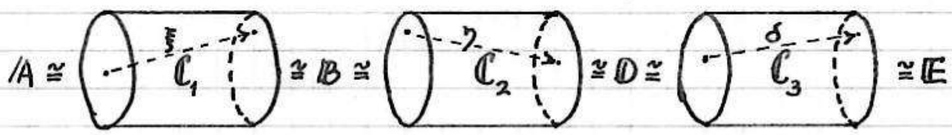
$\mathbb{C}_{\mathbb{A}}((0,A),(1,A')) = \mathbb{A}(A,A')$ og $\mathbb{C}_{\mathbb{A}}((1,A),(0,A')) = \emptyset \quad \forall A, A' \in |\mathbb{A}|$

sammensætning af morfier i $\mathbb{C}_{\mathbb{A}}$ er sammensætning af de tilsvarende morfier i $\mathbb{A}$.

(v) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{D}, \mathbb{E} \in \underline{Cat}_0$, $\mathbb{C}_1 \in |S(\mathbb{A},\mathbb{B})|$, $\mathbb{C}_2 \in |S(\mathbb{B},\mathbb{D})|$ og $\mathbb{C}_3 \in |S(\mathbb{D},\mathbb{E})|$ defineres $a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D},\mathbb{E})_{\mathbb{C}_1\mathbb{C}_2\mathbb{C}_3}$ ved

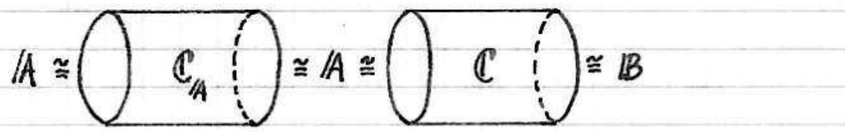
$$(\mathbb{C}_1 * \mathbb{C}_2) * \mathbb{C}_3 \xrightarrow{a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D},\mathbb{E})_{\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2,\mathbb{C}_3}} \mathbb{C}_1 * (\mathbb{C}_2 * \mathbb{C}_3).$$

er den funktor, der er identiteten på objekter, på morfier mellem objekter af formen $(0,A)$, $A \in |\mathbb{A}|$, og på morfier mellem objekter af formen $(1,E)$, $E \in |\mathbb{E}|$, og for $\xi \in \mathbb{C}_1((0,A),(1,B))$, $\eta \in \mathbb{C}_2((0,B),(1,D))$ og $\delta \in \mathbb{C}_3((0,D),(1,E))$ sender $cl(cl(\xi,\eta),\delta)$ i $cl(\xi, cl(\eta,\delta))$



Trivielle regninger viser, at $a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D},\mathbb{E})_{\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2,\mathbb{C}_3}$ er veldefineret, at $a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D},\mathbb{E})_{\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2,\mathbb{C}_3}$ er en funktor, og at $a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D},\mathbb{E})$ er en naturlig isomorfi.

(ii) $\forall\, \mathbb{A}, \mathbb{B} \in \underline{\mathrm{Cat}}_0$ og $\mathbb{C} \in |S(\mathbb{A},\mathbb{B})|$ defineres $l(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}_{\mathbb{A}} * \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$



ved

$l(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\mathbb{C}}$ er identiteten på objekter, på morfier mellem objekter af formen $(0,A)$, $A \in |\mathbb{A}|$, og på morfier mellem objekter af formen $(1,B)$, $B \in |\mathbb{B}|$, og for $\xi \in \mathbb{C}_{\mathbb{A}}((0,A),(1,A')) = \mathbb{A}(A,A')$ og $\delta \in \mathbb{C}((0,A'),(1,B))$ er

(4.4.) $(cl(\xi,\delta))(l(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\mathbb{C}}) = \xi \cdot \delta$, hvor $\cdot$ er sammensætning af morfier i $\mathbb{C}$.

Man ser let, at $l(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\mathbb{C}}$ er veldefineret, at $l(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\mathbb{C}}$ er en funktor, og at $l(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\mathbb{C}}$ er naturlig i $\mathbb{C}$.

Da $cl(\xi,\delta) = cl(I_A, \xi \cdot \delta)$ for $\xi \in \mathbb{A}(A,A')$ og $\delta \in \mathbb{C}((0,A'),(1,B))$ er

$l(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\mathbb{C}}$ er isomorfi med $l(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\mathbb{C}}^{-1}$ bestemt ved
$l(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\mathbb{C}}^{-1}$ er identiteten på objekter i $\mathbb{C}$, på morfier mellem objekter af formen $(0,A)$, $A\in|\mathbb{A}|$, og på morfier mellem objekter af formen $(1,B)$, $B\in|\mathbb{B}|$, og for $\delta\in\mathbb{C}((0,A),(1,B))$ er $\delta(l(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\mathbb{C}}^{-1}) = cl(I_{A},\delta)$.
Analogt defineres $r(\mathbb{A},\mathbb{B})$.

Det er trivielt at eftervise, at diagrammerne (1.1.) og (1.2.) kommuterer.

Lad $\mathbb{C},\mathbb{A},\mathbb{B}$ være små kategorier. Der gælder da
$\mathbb{C}\in\mathbb{S}(\mathbb{A},\mathbb{B}) \iff \exists$ funktor $F:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{2}$, så at den fulde delkategori af $\mathbb{C}$, hvis objekter ved F afbildes i 0 er $(0,\mathbb{A})$, og den fulde delkategori af $\mathbb{C}$, hvis obj. ved F afbildes i 1 er $(1,\mathbb{B})$, hvor $(i,\mathbb{A})$ betegner den kategori, hvis objekter er (i,A), $A\in|\mathbb{A}|$, og hvis morfier er morfierne i $\mathbb{A}$., $i=0,1$.

Vi definerer nu en bikategorimorfi $\phi=(\phi,(\cdot,\cdot)\phi,\phi_-,\phi(\cdot,\cdot,\cdot))$ fra $\underline{Prof}$ til $\mathbb{S}$ ved

(i) $\phi(\mathbb{A})=\mathbb{A}$ for alle små kategorier $\mathbb{A}$.

(ii) $\forall\,\mathbb{A},\mathbb{B}\in\underline{Cat}_0$ er funktoren $(\mathbb{A},\mathbb{B})\phi:\underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B})\longrightarrow\mathbb{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ givet ved

1) $\forall S\in|\underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$ er $S((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi)$ følgende kategori $\mathbb{C}_S$

a) $|S((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi)| = |\mathbb{C}_S| = |\mathbb{A}| \underset{disj}{\cup} |\mathbb{B}|$

b) $\mathbb{C}_S((0,A),(0,A')) = \mathbb{A}(A,A') \qquad \forall A,A'\in|\mathbb{A}|$

$\mathbb{C}_S((1,B),(1,B')) = \mathbb{B}(B,B') \qquad \forall B,B'\in|\mathbb{B}|$

$\mathbb{C}_S((1,B),(0,A)) = \emptyset \qquad \forall A\in|\mathbb{A}|, B\in|\mathbb{B}|$

$\mathbb{C}_S((0,A),(1,B)) = (A,B)S \qquad \forall A\in|\mathbb{A}|, B\in|\mathbb{B}|$

c) Identiteten på $(0,A)$ i $\mathbb{C}_S$ er $I_A\in\mathbb{A}$ og identiteten på $(1,B)$ i $\mathbb{C}_S$ er $I_B\in\mathbb{B}$, $\forall A\in|\mathbb{A}|, B\in|\mathbb{B}|$.

d) Sammensætning af morfier i $\mathbb{C}_S$ er givet ved
$\forall a\in\mathbb{A}(A,A'), a'\in\mathbb{A}(A',A''), b\in\mathbb{B}(B,B'), b'\in\mathbb{B}(B',B'')$.

og $f \in (A',B)S$ er

$a \cdot a'$ lig $a \cdot a'$ i $\mathbb{A}$

$b \cdot b'$ lig $b \cdot b'$ i $\mathbb{B}$

$a \cdot f = (f)((a, I_B)S)$ og

$f \cdot b = (f)((I_{A'}, b)S)$

Det er klart, at $I_{A'} \cdot f = f = f \cdot I_B$, og $\cdot$ er associativ.

2) $\forall S_1, S_2 \in |\underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$ og $\tau : S_1 \Longrightarrow S_2$ morfi i $\underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ er $(\tau)((\mathbb{A},\mathbb{B})\Phi)$ følgende funktor F_τ

$$\mathbb{C}_{S_1} = (S_1)((\mathbb{A},\mathbb{B})\Phi) \longrightarrow (S_2)((\mathbb{A},\mathbb{B})\Phi) = \mathbb{C}_{S_2}$$

F_τ er identiteten på objekter i $\mathbb{C}_{S_1}$, på morfier mellem objekter af formen $(0,A)$, $A \in |\mathbb{A}|$, og på morfier mellem objekter af formen $(1,B)$, $B \in |\mathbb{B}|$. For $f \in (A,B)S_1$ er $(f)F_\tau = (f)\tau_{A,B}$.

At F_τ virkelig er en funktor, ses af det kommutative diagram

$$\begin{tikzcd}
(A,B)S_1 \arrow[r, "\tau_{A,B}"] \arrow[d, "(a,b)S_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright\ (\text{nat. af } \tau)"] & (A,B)S_2 \arrow[d, "(a,b)S_2"] \\
(A',B')S_1 \arrow[r, "\tau_{A',B'}"] & (A',B')S_2
\end{tikzcd}$$

for $a \in \mathbb{A}(A',A)$ og $b \in \mathbb{B}(B,B')$.

Vi skal nu indse, at 1) og 2) gør $(\mathbb{A},\mathbb{B})\Phi$ til en funktor.

Det er klart at $(I_S)((\mathbb{A},\mathbb{B})\Phi)$ er identitetsfunktoren på $\mathbb{C}_S$ og at $(\tau_1 \cdot \tau_2)((\mathbb{A},\mathbb{B})\Phi) = F_{\tau_1 \cdot \tau_2} = F_{\tau_1} \cdot F_{\tau_2}$ for $\tau_i \in (\underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B}))(S_i, S_{i+1})$ $i = 1,2$.

(iii) $\forall \mathbb{A} \in \underline{Cat}_0$ er $(\mathbb{A}(-,-))((\mathbb{A},\mathbb{A})\phi) = \mathbb{C}_{\mathbb{A}}$ = identitetsobjektet i $\mathbb{S}(\mathbb{A},\mathbb{A})$, $\varphi_{\mathbb{A}} = \mathrm{I}_{\mathbb{C}_{\mathbb{A}}}$

(iv) $\forall \mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D} \in \underline{Cat}_0$, $S \in |\underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$ og $T \in |\underline{Prof}(\mathbb{B},\mathbb{D})|$ er

$$\mathbb{C}_{S*T}((0,A),(1,D)) = (A,D)(S*T) = \underset{B\in|\mathbb{B}|}{\overset{\cdot}{\bigcup}} \overline{(A,B)S \times (B,D)T}_{\equiv_{Prof}} ,$$

hvor $\equiv_{Prof}$ er den ækvivalensrelation i $\underset{B\in|\mathbb{B}|}{\overset{\cdot}{\bigcup}}[(A,B)S\times(B,D)T]$, der frembringes af relationen $\sim_{Prof}$, d.v.s. relationen $\sim$ fra (1.5)

$$(\mathbb{C}_S * \mathbb{C}_T)((0,A),(1,D)) = \underset{B\in|\mathbb{B}|}{\overset{\cdot}{\bigcup}} \overline{\mathbb{C}_S((0,A),(1,B))\times\mathbb{C}_T((0,B),(1,D))}_{\equiv_{\mathbb{S}}} = \underset{B\in|\mathbb{B}|}{\overset{\cdot}{\bigcup}} \overline{(A,B)S\times(B,D)T}_{\equiv_{\mathbb{S}}}$$

hvor $\equiv_{\mathbb{S}}$ er den ækvivalensrelation, der frembringes af $\sim_{\mathbb{S}}$, når $\sim_{\mathbb{S}}$ betegner relationen $\sim$ fra side 4.3.

Lad $\xi_1 \in (A,B)S$, $\xi_2 \in (A,B')S$, $\delta_1 \in (B,D)T$ og $\delta_2 \in (B',D)T$, så er

$$(\xi_1,\delta_1) \sim_{Prof} (\xi_2,\delta_2) \iff \begin{cases} \exists \beta \in \mathbb{B}(B,B') : \xi_2 = \xi_1((\mathrm{I}_A,\beta)S) \wedge \delta_1 = \delta_2((\beta,\mathrm{I}_D)T) & \text{eller} \\ \exists \beta \in \mathbb{B}(B',B) : \xi_1 = \xi_2((\mathrm{I}_A,\beta)S) \wedge \delta_2 = \delta_1((\beta,\mathrm{I}_D)T) \end{cases}$$

$$\iff \exists \beta \in \mathbb{B}(B,B') : \xi_2 = \underset{\cdot \text{ i } \mathbb{C}_S}{\xi_1 \cdot \beta} \wedge \delta_1 = \underset{\cdot \text{ i } \mathbb{C}_T}{\beta\cdot\delta_2} \text{ eller } \exists \beta\in\mathbb{B}(B',B) : \xi_1 = \underset{\cdot \text{ i } \mathbb{C}_S}{\xi_2\cdot\beta} \wedge \delta_2 = \underset{\cdot \text{ i } \mathbb{C}_T}{\beta\cdot\delta_1}$$

$$\iff (\xi_1,\delta_1) \sim_{\mathbb{S}} (\xi_2,\delta_2)$$

Altså er $\mathbb{C}_{S*T}((0,A),(1,D)) = (\mathbb{C}_S * \mathbb{C}_T)((0,A),(1,D)) \quad \forall A \in |\mathbb{A}|, D \in |\mathbb{D}|$ og derfor er $\mathbb{C}_{S*T} = \mathbb{C}_S * \mathbb{C}_T$, idet man let ser, at sammensætning af morfier i de to kategorier også stemmer overens.

$\varphi(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D})_{S,T} = \mathrm{I}_{\mathbb{C}_{S*T}}$.

Vi mangler nu kun at efterprøve bikategorimorfi-aksiomerne. Da $\varphi_{\mathbb{A}}$ er identiteten på $\mathbb{C}_{\mathbb{A}}$ $\forall \mathbb{A} \in \underline{Cat}_0$ og $\varphi(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D})_{S,T} = \mathrm{I}_{\mathbb{C}_{S*T}}$ $\forall \mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D} \in \underline{Cat}_0$ og $\mathbb{A} \xrightarrow{S} \mathbb{B} \xrightarrow{T} \mathbb{D}$, indskrænker aksiomerne sig til

I : A L (2.2) kommuterer følger direkte af (1.9) og def. på $a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D},\mathbb{E})$ side 45.

II : $l(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\mathbb{C}_S} = (l(\mathbb{A},\mathbb{B})_S)((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi) : \mathbb{C}_{\mathbb{A}} * \mathbb{C}_S \longrightarrow \mathbb{C}_S$

Dette følger af, at

$$(cl(\xi,\delta))(l(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\mathbb{C}_S}) = \xi \underset{\substack{\uparrow \\ i\mathbb{C}_S}}{\cdot} \delta = \delta((\xi, I_B)S) = (cl(\xi,\delta))(l(\mathbb{A},\mathbb{B})_S)_{A,B}$$

for $A, A' \in |\mathbb{A}|$, $B \in |\mathbb{B}|$, $\xi \in \mathbb{A}(A,A')$ og $\delta \in (A',B)S$.

III : $r(\mathbb{A},\mathbb{B})_{\mathbb{C}_S} = (r(\mathbb{A},\mathbb{B})_S)((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi) : \mathbb{C}_S * \mathbb{C}_{\mathbb{B}} \longrightarrow \mathbb{C}_S$

Bevises analogt til II.

ϕ er altså en bikategorimorfi, tilmed en streng bikategorimorfi $\underline{Prof} \longrightarrow \mathcal{S}$

Nu defineres en bikategorimorfi $\psi = (\psi, (\cdot,\cdot)\psi, \psi_-, \psi(\cdot,\cdot,\cdot)) : \mathcal{S} \longrightarrow \underline{Prof}$

(i) $\forall \mathbb{A} \in Cat_0 : (\mathbb{A})\psi = \mathbb{A}$

(ii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in Cat_0$ og $\mathbb{C} \in |\mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$ er

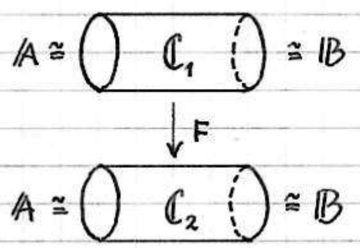
$$(\mathbb{C})((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi) : \mathbb{A} \relbar\joinrel\mapstochar\joinrel\rightarrow \mathbb{B}$$

den profunktor S, der er givet ved:

$$(A,B)S = \mathbb{C}((0,A),(1,B)) \qquad \forall A \in |\mathbb{A}|,\ B \in |\mathbb{B}|$$

$$(a,b)S = \mathbb{C}(a,b) \qquad \forall A,A' \in |\mathbb{A}|,\ B,B' \in |\mathbb{B}|,\ a \in \mathbb{A}(A',A),\ b \in \mathbb{B}(B,B')$$

Lad $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2 \in |\mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$ og $F \in \mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})(\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2)$



$S_i = (\mathbb{C}_i)((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi) \qquad i = 1,2$

$(F)((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi)$ er den transformation $S_1 \longrightarrow S_2$ der bestemmes ved

$$\begin{array}{ccc} (A,B)S_1 & \longrightarrow & (A,B)S_2 \\ f & \rightsquigarrow & (f)F \end{array} \qquad \forall A \in |\mathbb{A}|, B \in |\mathbb{B}|$$

$(F)((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi)_{A,B}$ er naturlig i A og B, idet der for $a \in \mathbb{A}(A',A)$ og $b \in \mathbb{B}(B,B')$ gælder, at

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[rrr, squiggly] \arrow[ddd, squiggly] & & & (f)F \arrow[ddd, squiggly] \\
& \in (A,B)S_1 \arrow[r, "(F)((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi)_{A,B}"] \arrow[d, "(a,b)S_1"] & (A,B)S_2 \arrow[d, "(a,b)S_2"'] & \\
& (A',B')S_1 \arrow[r, "(F)((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi)_{A',B'}"] & (A',B')S_2 & \\
a\cdot f\cdot b \arrow[rrr, squiggly] & & & a\cdot(f)F\cdot b
\end{tikzcd}$$

$(\cdot \text{ i } \mathbb{C}_1)$

kommuterer.

$(\mathbb{A},\mathbb{B})\psi$ er en funktor, idet $(I_{\mathbb{C}})((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi) = I_S$ og

$(f)(F_1\cdot F_2)((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi)_{A,B} = (f)(F_1\cdot F_2) = ((f)F_1)F_2 = (f)((F_1)((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi)\cdot(F_2)((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi))_{A,B}$

for $F_i \in \mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})(\mathbb{C}_i,\mathbb{C}_{i+1})$, $i=1,2$ og $f\in(A,B)S_1 = \mathbb{C}_1((0,A),(1,B))$.

(iii) $\forall \mathbb{A} \in Cat_0$ er profunktoren

$$(\mathbb{C}_{\mathbb{A}})((\mathbb{A},\mathbb{A})\psi) : \mathbb{A} \xrightarrow{\;\mid\;} \mathbb{A}$$

bestemt ved

$$(A,A')((\mathbb{C}_{\mathbb{A}})((\mathbb{A},\mathbb{A})\psi)) = \mathbb{C}_{\mathbb{A}}((0,A),(1,A')) = \mathbb{A}(A,A') \text{ og}$$

$$(f)((a,a')((\mathbb{C}_{\mathbb{A}})((\mathbb{A},\mathbb{A})\psi))) = (f)(\mathbb{C}_{\mathbb{A}}(a,a')) = a\cdot f\cdot a' \quad \text{for}$$

$A,A',\bar A,\bar A'\in|\mathbb{A}|$, $a\in\mathbb{A}(\bar A,A)$, $a'\in\mathbb{A}(A',\bar A')$ og $f\in\mathbb{C}_{\mathbb{A}}((0,A),(1,A')) = \mathbb{A}(A,A')$

Altså er

$$(\mathbb{C}_{\mathbb{A}})((\mathbb{A},\mathbb{A})\psi) = \mathbb{A}(-,-)$$

Vi kan derfor definere $\psi_{\mathbb{A}}$ = identitetstransformationen på $\mathbb{A}(-,-)$.

(iv) $\forall \mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D}\in Cat_0$, $\mathbb{C}\in|\mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$ og $\bar{\mathbb{C}}\in|\mathcal{S}(\mathbb{B},\mathbb{D})|$

sættes $S = (\mathbb{C})((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi)$ og $\bar S = (\bar{\mathbb{C}})((\mathbb{B},\mathbb{D})\psi)$. Så er

$(A,D)((\mathbb{C}*\bar{\mathbb{C}})((\mathbb{A},\mathbb{D})\psi)) = (\mathbb{C}*\bar{\mathbb{C}})((0,A),(1,D)) \underset{\uparrow}{=} (A,D)(S*\bar S) \quad \forall A\in|\mathbb{A}|, D\in|\mathbb{D}|.$

ifølge side 4.8.

og for $A',A\in|\mathbb{A}|$, $B\in|\mathbb{B}|$, $D,D'\in|\mathbb{D}|$, $a\in\mathbb{A}(A',A)$, $d\in\mathbb{D}(D,D')$,

$\xi\in\mathbb{C}((0,A),(1,B))$ og $\delta\in\bar{\mathbb{C}}((0,B),(1,D))$ er

$$(\mathrm{cl}(\xi,\delta))((a,d)((\mathbb{C}*\bar{\mathbb{C}})((\mathbb{A},\mathbb{D})\psi))) = (\mathrm{cl}(\xi,\delta))((\mathbb{C}*\bar{\mathbb{C}})(a,d)) = \mathrm{cl}(a\cdot\xi\ ,\ \delta\cdot d)$$

$$\updownarrow i\,\mathbb{C} \qquad \updownarrow i\,\bar{\mathbb{C}}$$

og $(\mathrm{cl}(\xi,\delta))((a,d)(S*\bar{S})) = \mathrm{cl}(((\xi)((a,I_B)S),(\delta)((I_B,d)T)) = \mathrm{cl}(a\cdot\xi\ ,\ \delta\cdot d)$

Altså er

$$(\mathbb{C}*\bar{\mathbb{C}})((\mathbb{A},\mathbb{D})\psi) = (\mathbb{C})((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi)*(\bar{\mathbb{C}})((\mathbb{B},\mathbb{D})\psi)$$

Vi kan derfor definere $\psi(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D})_{\mathbb{C},\bar{\mathbb{C}}}$ = identitetstransformationen på $(\mathbb{C}*\bar{\mathbb{C}})((\mathbb{A},\mathbb{D})\psi)$.

Ligesom ved ϕ ser man let, at ψ opfylder bikategorimorfi-aksiomerne.

Da $\psi_{\mathbb{A}} = I_{\mathbb{A}(-,-)}$ $\forall \mathbb{A}\in \underline{Cat}_0$ og $\psi(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D})_{\mathbb{C},\bar{\mathbb{C}}}$ = identitetstransf. på $(\mathbb{C}*\bar{\mathbb{C}})((\mathbb{A},\mathbb{D})\psi)$ $\forall \mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{D}\in\underline{Cat}_0$, $\mathbb{C}\in|\mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$ og $\bar{\mathbb{C}}\in|\mathcal{S}(\mathbb{B},\mathbb{D})|$, er ψ en streng bikategorimorfi $\mathcal{S} \longrightarrow \underline{Prof}$.

Vi efterprøver nu 1) – 4) i definition 12 for $F=\psi$, $G=\phi$, $\bar{\mathcal{S}} = \underline{Prof}$

1), 3) og 4) er trivielt opfyldt.

2) $\forall \mathbb{A},\mathbb{B}\in\underline{Cat}_0$ er

a) $(\mathbb{C})((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi\cdot(\mathbb{A},\mathbb{B})\phi)$ det objekt i $\mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})$, for hvilket

$(\mathbb{C})((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi\cdot(\mathbb{A},\mathbb{B})\phi)((0,A),(1,B)) = (A,B)((\mathbb{C})((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi)) = \mathbb{C}((0,A),(1,B))$.

Da sammensætning i de to kategorier også stemmer overens er

$(\mathbb{C})((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi\cdot(\mathbb{A},\mathbb{B})\phi) = \mathbb{C}$. $\quad\forall \mathbb{C}\in|\mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$

Lad $\mathbb{C}_i\in|\mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$, $i=1,2$ og $F\in\mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})(\mathbb{C}_1,\mathbb{C}_2)$, så er $(F)((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi\cdot(\mathbb{A},\mathbb{B})\phi)$ den morfi i $\mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ fra $\mathbb{C}_1$ til $\mathbb{C}_2$, der bestemmes af

$$(\xi)(F)((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi\cdot(\mathbb{A},\mathbb{B})\phi) = (\xi)((F)((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi)_{A,B} = \xi F$$

for $\xi\in\mathbb{C}_1((0,A),(1,B))$.

d.v.s. $(F)((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi\cdot(\mathbb{A},\mathbb{B})\phi) = F$.

$((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi)\cdot((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi)$ er altså identitetsfunktoren på $\mathcal{S}(\mathbb{A},\mathbb{B})$.

b) for $S\in\underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ er $(S)((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi\cdot(\mathbb{A},\mathbb{B})\psi)$ den profunktor

$\mathbb{A} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!\mapstochar\;\;\; \mathbb{B}$, for hvilken

$$(A,B)(S(((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi)\cdot((\mathbb{A},\mathbb{B})\psi))) = (S((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi))((0,A),(1,B)) = (A,B)S,\ \forall A\in|\mathbb{A}| \text{ og } B\in|\mathbb{B}|.$$

og $\forall A,A'\in|\mathbb{A}|,\ B,B'\in|\mathbb{B}|,\ a\in\mathbb{A}(A',A),\ b\in\mathbb{B}(B,B')$ og $f\in(A,B)S$ er

$$(f)((a,b)(S((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi\cdot(\mathbb{A},\mathbb{B})\psi))) = (f)((S((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi))(a,b))$$
$$= a\cdot f\cdot b \qquad \text{med} \cdot \text{ i } S((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi).$$
$$= (f)((a,b)S).$$

Altså er $S((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi\cdot(\mathbb{A},\mathbb{B})\psi) = S$

Lad nu $S_i \in |\underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B})|$, $i=1,2$, og $S_1 \xrightarrow{\tau} S_2$ en morfi i $\underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B})$, så er transformationen $(\tau)((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi\cdot(\mathbb{A},\mathbb{B})\psi)$ fra S_1 til S_2 bestemt ved

$$(A,B)S_1 \xrightarrow{(\tau)((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi\cdot(\mathbb{A},\mathbb{B})\psi)_{A,B}} (A,B)S_2$$
$$f \rightsquigarrow (f)((\tau)((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi)) = (f)\tau_{A,B}$$

Altså er

$$(\tau)((\mathbb{A},\mathbb{B})\phi\cdot(\mathbb{A},\mathbb{B})\psi) = \tau$$

$(\mathbb{A},\mathbb{B})\phi\cdot(\mathbb{A},\mathbb{B})\psi$ er altså identitetsfunktoren på $\underline{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B})$.

Dette beviser:

<u>Sætning 1:</u> $\underline{Prof}$ og Bikategorien af cylinder-kategorier er isomorfe bikategorier.

I praksis er det ofte lettere at arbejde med Bikategorien af cylinder-kategorier end med $\underline{Prof}$, fordi to-cellerne og sammensætning af to-celler i først nævnte bikategori har en direkte geometrisk betydning. Sætning 1 viser, at man kan tillade sig dette.

§5: Konstruktion af cokommakategorier ved hjælp af profunktorer.

Lad $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{A}_1$ og $\mathbb{B}$ være kategorier og F_0, F_1 funktorer

$$\mathbb{A}_0 \xrightarrow{F_0} \mathbb{B} \xleftarrow{F_1} \mathbb{A}_1$$

Definition 14: Ved kommakategorien (F_0, F_1) forstås følgende kategori.

(i) Objekterne i (F_0, F_1) er tripler (A_0, A_1, β), hvor $A_i \in |\mathbb{A}_i|$, $i = 0, 1$, og $\beta \in \mathbb{B}(A_0F_0, A_1F_1)$.

$$\begin{array}{c} A_0F_0 \\ \downarrow \beta \\ A_1F_1 \end{array}$$

(ii) En morfi fra objektet (A_0, A_1, β) til objektet (A_0', A_1', β') i (F_0, F_1) er et ordnet par (a_0, a_1), hvor $a_i \in \mathbb{A}_i(A_i, A_i')$ $i = 0, 1$, sådan at diagrammet

(5.1)
$$\begin{tikzcd} A_0F_0 \arrow[r, "a_0F_0"] \arrow[d, "\beta"] & A_0'F_0 \arrow[d, "\beta'"] \\ A_1F_1 \arrow[r, "a_1F_1"] & A_1'F_1 \end{tikzcd}$$

kommuterer

(iii) $I_{(A_0, A_1, \beta)} = (I_{A_0}, I_{A_1})$ $\forall$ objekter (A_0, A_1, β) i (F_0, F_1)

(iv) Lad (a_0, a_1) være en morfi fra (A_0, A_1, β) til (A_0', A_1', β') og (a_0', a_1') en morfi fra (A_0', A_1', β') til (A_0'', A_1'', β'') i (F_0, F_1)

(5.2)
$$\begin{tikzcd} A_0F_0 \arrow[r, "a_0F_0"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A_0'F_0 \arrow[r, "a_0'F_0"] \arrow[d, "\beta'"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_0''F_0 \arrow[d, "\beta''"] \\ A_1F_1 \arrow[r, "a_1F_1"] & A_1'F_1 \arrow[r, "a_1'F_1"] & A_1''F_1 \end{tikzcd}$$

så er $(a_0, a_1)\cdot(a_0', a_1') = (a_0\cdot a_0', a_1\cdot a_1')$

Da F_0 og F_1 er funktorer, ser vi af (5.2) at $(a_0\cdot a_0', a_1\cdot a_1')$ er en morfi i (F_0, F_1) fra (A_0, A_1, β) til (A_0'', A_1'', β'').

Kategoriaxiomerne er klart opfyldt.

Kategorien (F_0, F_1) kommer til verden udstyret med to funktorer δ_0 og δ_1 og en transformation $\lambda : \delta_0\cdot F_0 \Longrightarrow \delta_1\cdot F_1$,

(5.3)
$$\begin{tikzcd} & (F_0, F_1) \arrow[dl, "\delta_0"'] \arrow[dr, "\delta_1"] & \\ \mathbb{A}_0 \arrow[dr, "F_0"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\lambda}{\Rightarrow}"] & & \mathbb{A}_1 \arrow[dl, "F_1"] \\ & \mathbb{B} & \end{tikzcd}$$

hvor δ_i er defineret ved: $(A_0, A_1, \beta)\delta_i = A_i \quad \forall (A_0, A_1, \beta) \in |(F_0, F_1)|$

$(a_0, a_1)\delta_i = a_i$ for alle morfier (a_0, a_1) i (F_0, F_1)

for $i = 0, 1$, og λ er defineret ved

(5.4)
$$(A_0, A_1, \beta)\,\delta_0\cdot F_0 = A_0F_0 \xrightarrow{\lambda_{(A_0,A_1,\beta)} = \beta} A_1F_1 = (A_0, A_1, \beta)\,\delta_1\cdot F_1$$

Lad (a_0, a_1) være en morfi i (F_0, F_1) fra (A_0, A_1, β) til (A_0', A_1', β'), så er

(5.5)
$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] A_0F_0 \arrow[r, "\lambda(A_0, A_1, \beta) = \beta"] \arrow[d, "(a_0, a_1)\delta_0\cdot F_0 = a_0F_0"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A_1F_1 \arrow[d, "a_1F_1 = (a_0, a_1)\delta_1\cdot F_1"] \\ A_0'F_0 \arrow[r, "\lambda(A_0', A_1', \beta') = \beta'"] & A_1'F_1 \end{tikzcd}$$

kommutativt, pr. def. af morfi i (F_0, F_1). Altså er λ naturlig.

Man efterviser let, at (F_0, F_1) har følgende universelle egenskab:

(5.6)
$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{A}_0 \arrow[dr, "F_0"] \arrow[dd, phantom, "\lambda\Downarrow"] & \\
\mathbb{C} \arrow[urr, "G_0"] \arrow[drr, "G_1"'] \arrow[r, "H"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\rho\Downarrow"] & (F_0, F_1) \arrow[ur, "\delta_0"] \arrow[dr, "\delta_1"'] & & \mathbb{B} \\
 & & \mathbb{A}_1 \arrow[ur, "F_1"'] &
\end{tikzcd}$$

(*) $\left\{\begin{array}{l} \text{Hvis } \mathbb{C} \text{ er en kategori, } G_i : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{A}_i\text{, } i = 0,1\text{, er funktorer, og } \rho \text{ er} \\ \text{en transformation } G_0F_0 \xrightarrow{\rho} G_1F_1\text{, findes der netop én funktor } H: \\ \mathbb{C} \longrightarrow (F_0, F_1)\text{, således at } H\delta_i = G_i\text{, } i = 0,1\text{, og } H \circ \lambda = \rho \end{array}\right.$

Man efterviser let, at (*) bestemmer (F_0, F_1) entydigt op til isomorfi af kategorier. Det er derfor muligt at definere kommakategori i en vilkårlig 2-kategori på følgende måde:

<u>Definition 15:</u> Lad $\mathcal{S}$ være en vilkårlig 2-kategori, A_0, A_1, B objekter i $\mathcal{S}$ og $F_i \in |\mathcal{S}(A_i, B)|$ én-celler i $\mathcal{S}$ for $i = 0,1$.

Ved en kommakategori (F_0, F_1) i $\mathcal{S}$ forstås et objekt (F_0, F_1) i $\mathcal{S}$ sammen med én-celler $\delta_i \in |\mathcal{S}((F_0, F_1), A_i)|$ $i = 0,1$ og en to-celle λ i $\mathcal{S}((F_0, F_1), B)$ fra $\delta_0 * F_0$ til $\delta_1 * F_1$, således at der for ethvert objekt C i $\mathcal{S}$ med énceller $G_i \in |\mathcal{S}(C, A_i)|$ $i = 0,1$ og en tocelle $\rho \in \mathcal{S}(C, B)(G_0 * F_0, G_1 * F_1)$ findes netop én éncelle $H \in |\mathcal{S}(C, (F_0, F_1))|$, således at $H * \delta_i = G_i$ $i = 0,1$ og diagrammet

(5.7)
$$\begin{tikzcd}
H*(\delta_0 * F_0) \arrow[r, "H*\lambda"] & H*(\delta_1 * F_1) \\
G_0 * F_0 = (H*\delta_0) * F_0 \arrow[u, "a(C,(F_0,F_1),A_0,B)_{H,\delta_0,F_0}"] \arrow[r, "\rho"] & (H*\delta_1) * F_1 = G_1 * F_1 \arrow[u, "a(C,(F_0,F_1),A_1,B)_{H,\delta_1,F_1}"']
\end{tikzcd}$$

kommuterer.

Det ses let, at definition 15 bestemmer $\mathcal{S}$-kommakategorier op til isomorfi af objekter i $\mathcal{S}$. Man kunne forestille sig kommakategorier defineret i en vilkårlig bikategori ved hjælp af def. 15; men så vil de ikke længere være bestemt op til isomorfi — ikke engang op til ækvivalens — af objekter i $\mathcal{S}$. (definitionen på ækvivalens af kategorier kan naturligvis overføres til vilkårlige bikategorier.)

<u>Definition 16:</u> Ved en cokommakategori forstås en kommakategori i $\underline{Cat}^t$.

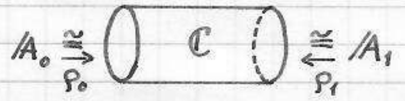
<u>Proposition 11:</u> Lad $\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1, \mathbb{B}$ være små kategorier, og lad $F_i : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}_i$, $i = 0, 1$, være funktorer. Så eksisterer cokommakategorien (F_0, F_1)

Bevis :

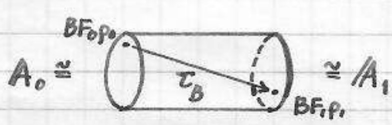
(5.8)
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{A}_0 \arrow[dr, "\rho_0"] & \\ \mathbb{B} \arrow[ur, "F_0"] \arrow[dr, "F_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & & (F_0, F_1) \\ & \mathbb{A}_1 \arrow[ur, "\rho_1"'] & \end{tikzcd}$$

Vi danner profunktorerne
$$\overline{F}_0 = \mathbb{A}_0(-, -F_0) \in \underline{Prof}(\mathbb{A}_0, \mathbb{B}),$$
$$\underline{F}_1 = \mathbb{A}_1(-F_1, -) \in \underline{Prof}(\mathbb{B}, \mathbb{A}_1),$$
$$\overline{F}_0 * \underline{F}_1 \in \underline{Prof}(\mathbb{A}_0, \mathbb{A}_1).$$

Ifølge sætning 1 svarer $\overline{F}_0 * \underline{F}_1$ entydigt til en cylinderkategori $\mathbb{C}$

(5.9)


Vi definerer : $(F_0, F_1) = \mathbb{C}$ og ρ_i = "indlægningen" af $\mathbb{A}_i$ i $\mathbb{C}$ for $i = 0, 1$.
Lad $B \in |\mathbb{B}|$. Vi skal så have fat i en morfi $\tau_B \in \mathbb{C}(BF_0\rho_0, BF_1\rho_1)$.

(5.10)


Pr. def. er $\mathbb{C}(BF_0\rho_0, BF_1\rho_1) = (BF_0, BF_1)(\overline{F}_0 * \underline{E}_1)$

$$= \bigcup_{\substack{disj \\ X\in|\mathbb{B}|}} \mathbb{A}_0(BF_0, XF_0)\times \mathbb{A}_1(XF_1, BF_1) .$$

Vi sætter $\tau_B = cl(\underset{i\,\mathbb{A}_0}{I_{BF_0}}, \underset{i\,\mathbb{A}_1}{I_{BF_1}})$.

τ_B er naturlig i B, idet der for $b \in \mathbb{B}(B, B')$ gælder, at diagrammet

(5.11)
$$\begin{tikzcd}
BF_0\rho_0 \arrow[r, "\tau_B"] \arrow[d, "bF_0 = bF_0\rho_0"'] & BF_1\rho_1 \arrow[d, "bF_1\rho_1 = bF_1"] \\
B'F_0\rho_0 \arrow[r, "\tau_{B'}"] & B'F_1\rho_1
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Dette følger direkte af definitionen på sammensætning af morfier i $\mathbb{C}$ (side 4.7)

Vi skal nu overbevise os om, at $\mathbb{C}, \rho_0, \rho_1, \tau$ har den universelle egenskab.

Lad $\mathbb{D}$ være en lille kategori, $G_i : \mathbb{A}_i \longrightarrow \mathbb{D}$, $i=0,1$, funktorer og $\gamma : F_0\cdot G_0 \Longrightarrow F_1\cdot G_1$ en transformation

(5.12)
$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{A}_0 \arrow[dr, "\rho_0"] \arrow[drrr, "G_0"] & & & \\
\mathbb{B} \arrow[ur, "F_0"] \arrow[dr, "F_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & {} & \mathbb{C} \arrow[r, "H"] & {} \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \mathbb{D} \\
 & \mathbb{A}_1 \arrow[ur, "\rho_1"'] \arrow[urrr, "G_1"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Hvis $H : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$ opfylder betingelserne: $\rho_i \circ H = G_i$, $i=0,1$, og $\tau \circ H = \gamma$, er følgende ligninger nødvendigvis opfyldt:

1) $\forall A_0 \in |\mathbb{A}_0| \ : \ ((A_0)\rho_0)H = A_0 G_0$

2) $\forall A_1 \in |\mathbb{A}_1| \ : \ ((A_1)\rho_1)H = A_1 G_1$

3) $\forall A_0 \in |\mathbb{A}_0|,\ A_1 \in |\mathbb{A}_1|,\ B \in |\mathbb{B}|,\ \xi \in (A_0, B)\overline{F}_0 = \mathbb{A}_0(A_0, BF_0)$ og

$\delta \in (B, A_1)\underline{F}_1 = \mathbb{A}_1(BF_1, A_1)$ er

$(cl(\xi,\delta))H = (\xi \cdot cl(I_{BF_0}, I_{BF_1}) \cdot \delta)H = \xi G_0 \cdot \tau_B H \cdot \delta G_1 = \xi G_0 \cdot \gamma_B \cdot \delta G_1$

4) $\forall A_0, A_0' \in |\mathbb{A}_0|$ og $a_0 \in \mathbb{A}_0(A_0, A_0') = \mathbb{C}(A_0\rho_0, A_0'\rho_0)$ er

$((a_0)\rho_0)H = (a_0)H = (a_0)G_0$

5) $\forall A_1, A_1' \in |\mathbb{A}_1|$ og $a_1 \in \mathbb{A}_1(A_1, A_1') = \mathbb{C}(A_1\rho_1, A_1'\rho_1)$ er

$((a_1)\rho_1)H = (a_1)H = (a_1)G_1$.

Heraf ser vi, at der findes højst én funktor $H : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$, der opfylder de stillede betingelser.

Vi definerer nu H på objekter i $\mathbb{C}$ ved 1) og 2) og på morfier i $\mathbb{C}$ ved 3), 4) og 5).

H er veldefineret, idet der for $\xi \in (A_0, B)\overline{F}_0$, $\xi' \in (A_0, B')\overline{F}_0$, $\delta \in (B, A_1)\underline{F}_1$, $\delta' \in (B', A_1)\underline{F}_1$ og $\beta \in \mathbb{B}(B, B')$ gælder

(5.13)
$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "\delta"] \arrow[dd, "\beta"] & \\
A_0 \arrow[ur, "\xi"] \arrow[dr, "\xi'"'] & & A_1 \\
 & B' \arrow[ur, "\delta'"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\mathbb{A}_0 \;{}^{\overline{F}_0}\; \mathbb{B} \;{}^{\underline{F}_1}\; \mathbb{A}_1$$

$$(\xi)((I_{A_0}, \beta)\overline{F}_0) = \xi \cdot \beta F_0 = \xi' \ \wedge \ (\delta')((\beta, I_{A_1})\underline{F}_1) = \beta F_1 \cdot \delta' = \delta$$

$\Downarrow$

$$(cl(\xi,\delta))H = \xi G_0 \cdot \gamma_B \cdot \delta G_1 = \xi G_0 \cdot \gamma_B \cdot \beta F_1 G_1 \cdot \delta' G_1$$

$$= \xi G_0 \cdot \beta F_0 G_0 \cdot \gamma_{B'} \cdot \delta' G_1 \qquad \text{, fordi } \gamma_B \text{ er naturlig i } B$$

$$= \xi' G_0 \cdot \gamma_{B'} \cdot \delta' G_1 = (cl(\xi', \delta'))H.$$

H er en funktor, idet

$\forall A_0 \in |\mathbb{A}_0| : \quad (I_{A_0})H = (I_{A_0})G_0 = I_{A_0 G_0} = I_{A_0 \varrho_0 H}$ og

$\forall A_1 \in |\mathbb{A}_1| : \quad (I_{A_1})H = (I_{A_1})G_1 = I_{A_1 G_1} = I_{A_1 \varrho_1 H}$

At H kommuterer med sammensætning af morfier, følger af side 4.7. og definitionen på H.

Hermed er prop. 11 bevist.

§6: Adjungerede profunktorer og promonader.

Det er velkendt, f.eks. fra [9], [2] og [8], at adjungerede én-celler i 2-kategorien af funktorer giver anledning til en Cat-monad, og at enhver Cat-monad giver anledning til et par (oftest endda mange par) adjungerede én-celler i Cat, som på denne måde frembringer den givne Cat-monad.
Vi skal nu vise, at noget tilsvarende gælder i Prof.

Lad $\mathbb{A}$ og $\mathbb{B}$ være små kategorier, og lad $F \in \mathrm{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{B})$ og $G \in \mathrm{Prof}(\mathbb{B},\mathbb{A})$ være adjungerede profunktorer, $F \dashv G$ (ved η, ε)

$T = F * G \in \mathrm{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{A})$

Lad η være frontadjunktionen for $F \dashv G$, så er η en transformation $\mathbb{A}(-,-) \Longrightarrow T$ i $\mathrm{Prof}(\mathbb{A},\mathbb{A})$

Hvis vi yderligere sætter

$$(6.1) \qquad \mu = a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})_{F,G,T} \cdot (F * a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})^{-1}_{G,F,G}) \cdot (F*(\varepsilon * G)) \cdot (F * l(\mathbb{B},\mathbb{A})_G)$$

hvor ε er endeadjunktionen for $F \dashv G$, (d.v.s. μ er bestemt ved, at diagrammet

$$(6.2) \qquad \begin{tikzcd}
T*T = (F*G)*(F*G) \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] \arrow[d, "{a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})_{F,G,T}}"] & F*G = T \\
F*(G*(F*G)) \arrow[d, "{F*a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})^{-1}_{G,F,G}}"] & \\
F*((G*F)*G) \arrow[r, Rightarrow, "F*(\varepsilon*G)"] & F*(\mathbb{B}(-,-)*G) \arrow[uu, "{F*l(\mathbb{B},\mathbb{A})_G}"']
\end{tikzcd}$$

kommuterer), gælder følgende:

Sætning 2: (T, η, μ) er en promonad i $\mathbb{A}$.

Bevis: Vi mangler kun at efterprøve, at diagrammerne (2.5), (2.6) og (2.7) kommuterer.

At (2.5) kommuterer, ses af følgende diagram

(6.3)
$$\begin{tikzcd}
(F*G)*(F*G) \arrow[dd, "a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})_{F,G,F*G}"'] & \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft\ (\text{nat. af } a(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A}))"] & & \mathbb{A}(-,-)*(F*G) \arrow[lll, "\eta*(F*G)"'] \arrow[dl, "a(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})^{-1}_{\mathbb{A}(-,-),F,G}"'] \arrow[dd, "l(\mathbb{A},\mathbb{A})_{F*G}"] \\
& ((F*G)*F)*G \arrow[ul, "a(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F*G,F,G}"'] \arrow[dd, "a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{F,G,F}*G"] & (\mathbb{A}(-,-)*F)*G \arrow[l, "(\eta*F)*G"'] \arrow[dr, "l(\mathbb{A},\mathbb{B})_F*G"] \arrow[r, phantom, "(\diamond)"] & \\
F*(G*(F*G)) \arrow[dd, "F*a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})^{-1}_{G,F,G}"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft\ (1.1)"] & \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft\ (1.16)"] & & F*G \\
& (F*(G*F))*G \arrow[r, "(F*\varepsilon)*G"] \arrow[dl, "a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G*F,G}"] & (F*\mathbb{B}(-,-))*G \arrow[ur, "r(\mathbb{A},\mathbb{B})_F*G"'] \arrow[dr, "a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{B},\mathbb{A})^{+1}_{F,\mathbb{B}(-,-),G}"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft\ (1.2)"] & \\
F*((G*F)*G) \arrow[rrr, "F*(\varepsilon*G)"] & \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft\ (\text{nat. af } a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{B},\mathbb{A}))"] & & F*(\mathbb{B}(-,-)*G) \arrow[uu, "F*l(\mathbb{B},\mathbb{A})_G"']
\end{tikzcd}$$

$(\diamond)$: $\forall A, A', A'' \in |\mathbb{A}|$, $B \in |\mathbb{B}|$, $\xi \in \mathbb{A}(A,A')$, $\delta \in (A',B)F$ og $\rho \in (B,A'')G$ gælder

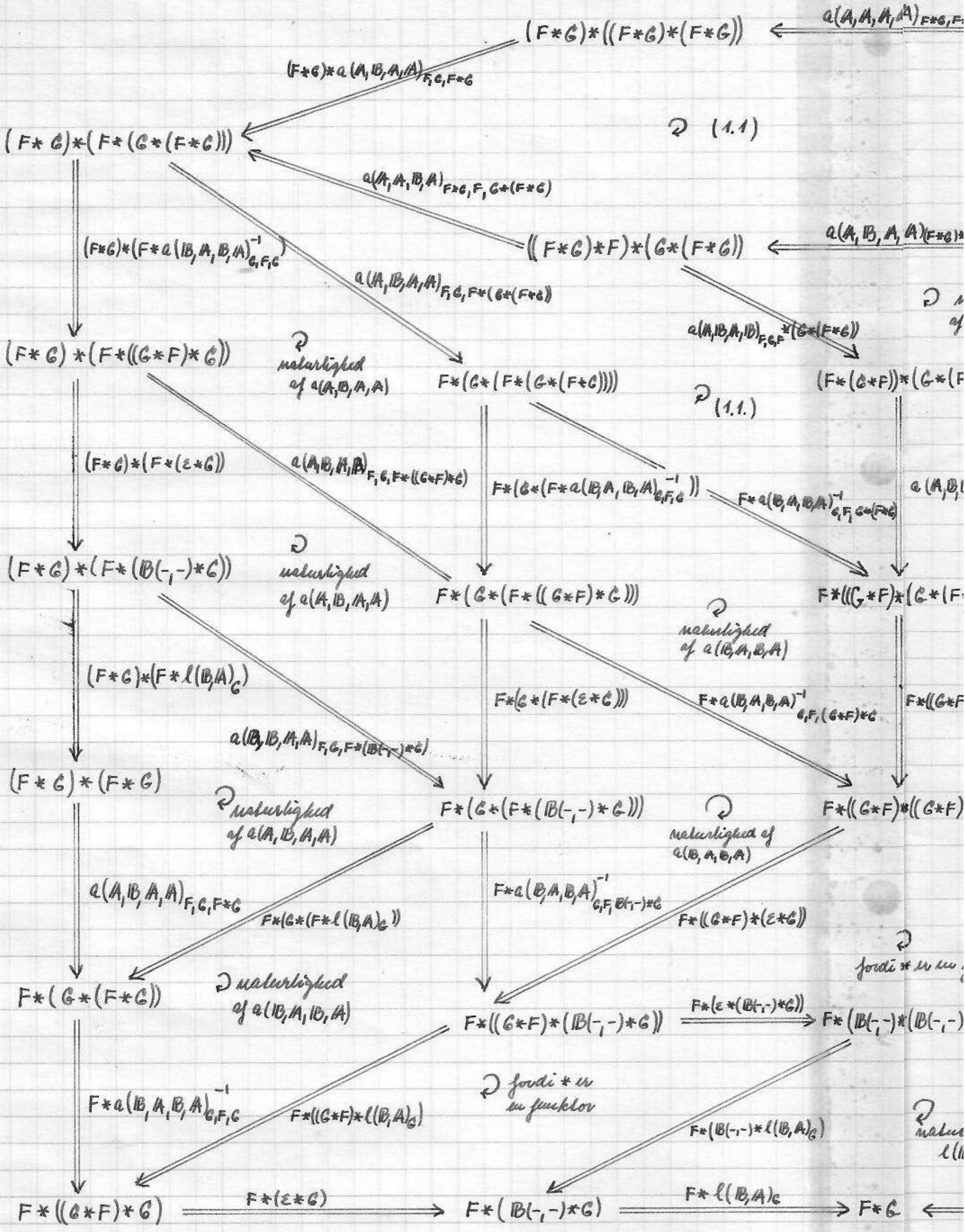
$$\begin{aligned}
&(cl(\xi, cl(\delta,\rho)))\left(a(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})^{-1}_{\mathbb{A}(-,-),F,G} \cdot (l(\mathbb{A},\mathbb{B})_F * G)\right)_{A,A''} \\
&= (cl(cl(\xi,\delta),\rho))\,(l(\mathbb{A},\mathbb{B})_F * G)_{A,A''} \\
&= cl(\delta((\xi, I_B)F), \rho) \\
&= (cl(\delta,\rho))((\xi, I_{A''})F*G) \\
&= (cl(\xi, cl(\delta,\rho)))\,(l(\mathbb{A},\mathbb{A})_{F*G})_{A,A''} \quad ,
\end{aligned}$$

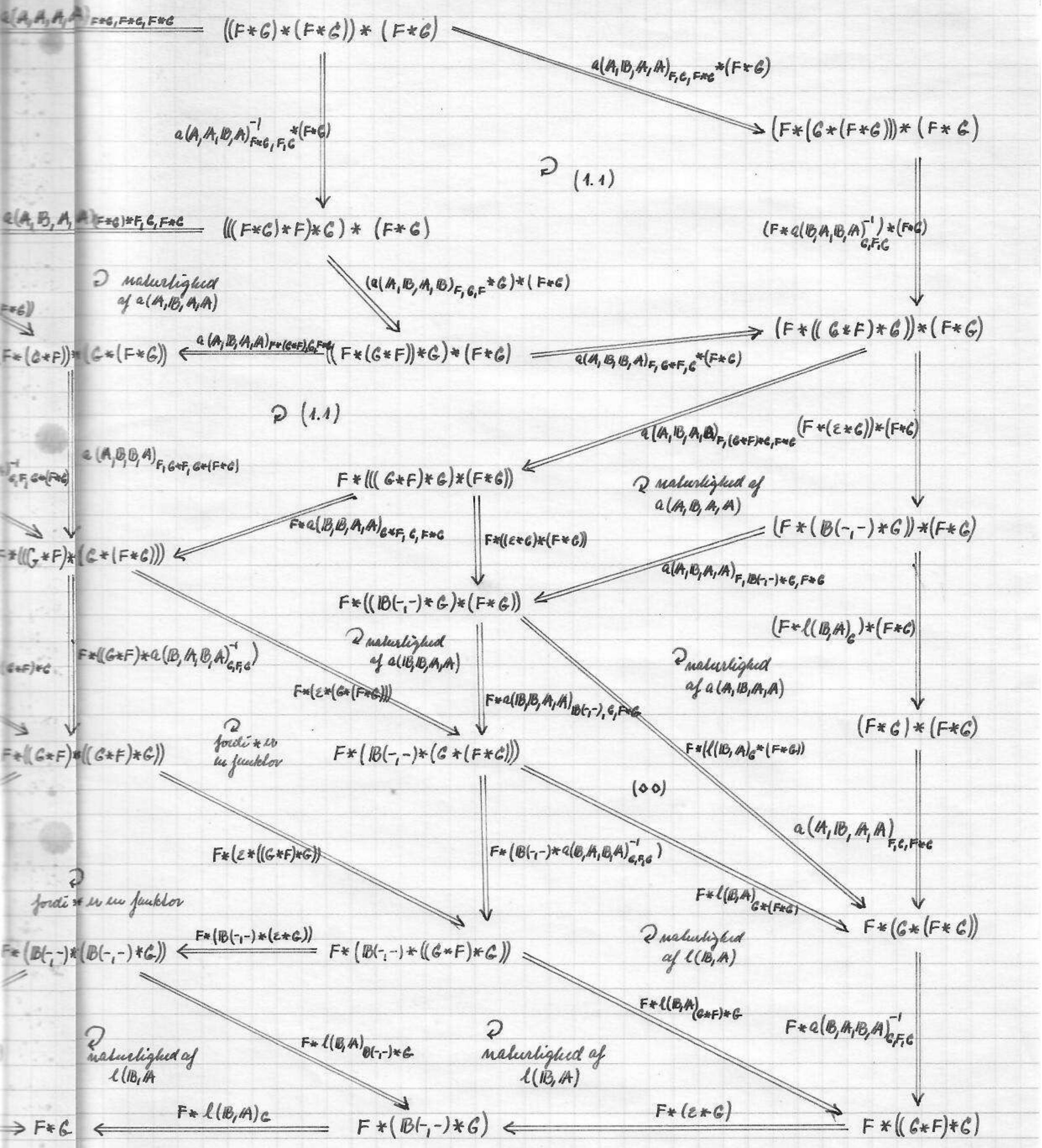
altså er $(\diamond)$ kommutativ.

At (2.6) kommuterer, ser man analogt.

At (2.7) kommuterer, ses af følgende diagram:

(6.4)


(F*G)*((F*G)*(F*G))
a(A,A,A,A)
(F*G)*a(A,B,A,A)F,G,F*G
(F*G)*(F*(G*(F*G)))
(1.1)
a(A,A,B,A)F*G,F,G*(F*G)
((F*G)*F)*(G*(F*G))
a(A,B,A,A)
(F*G)*(F*a(B,A,B,A)^{-1}G,F,G)
a(A,B,A,A)F,G,F*(G*(F*G))
a(A,B,A,B)F,G,F*(G*(F*G))
(F*G)*(F*((G*F)*G))
naturlighed af a(A,B,A,A)
F*(G*(F*(G*(F*G))))
(1.1.)
(F*(G*F))*(G*(F
(F*G)*(F*(ε*G))
a(A,B,A,B)F,G,F*((G*F)*G)
F*(G*(F*a(B,A,B,A)^{-1}G,F,G))
F*a(B,A,B,A)^{-1}G,F,G*(F*G)
(F*G)*(F*(B(-,-)*G))
naturlighed af a(A,B,A,A)
F*(G*(F*((G*F)*G)))
F*((G*F)*(G*(F
naturlighed af a(B,A,B,A)
(F*G)*(F*l(B,A)G)
F*(G*(F*(ε*G)))
F*a(B,A,B,A)^{-1}G,F,(G*F)*G
a(B,B,A,A)F,G,F*(B(-,-)*G)
(F*G)*(F*G)
naturlighed af a(A,B,A,A)
F*(G*(F*(B(-,-)*G)))
naturlighed af a(B,A,B,A)
F*((G*F)*((G*F)
a(A,B,A,A)F,G,F*G
F*(G*(F*l(B,A)G))
F*a(B,A,B,A)^{-1}G,F,B(-,-)*G
F*((G*F)*(ε*G))
fordi * er en
F*(G*(F*G))
naturlighed af a(B,A,B,A)
F*((G*F)*(B(-,-)*G))
F*(ε*(B(-,-)*G))
F*(B(-,-)*(B(-,-)
F*a(B,A,B,A)^{-1}G,F,G
F*((G*F)*l(B,A)G)
fordi * er en funktor
F*(B(-,-)*l(B,A)G)
F*((G*F)*G)
F*(ε*G)
F*(B(-,-)*G)
F*l(B,A)G
F*G



$a(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{A})_{F*G,F*G,F*G}$
$((F*G)*(F*G))*(F*G)$
$a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})_{F,G,F*G}*(F*G)$
$(F*(G*(F*G)))*(F*G)$
$a(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})^{-1}_{F*G,F,G}*(F*G)$
(1.1)
$a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})_{(F*G)*F,G,F*G}$
$(((F*G)*F)*G)*(F*G)$
$(F*a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})^{-1}_{G,F,G})*(F*G)$
naturlighed af $a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})$
$(a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{F,G,F}*G)*(F*G)$
$F*(G*F))*(G*(F*G))$
$a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})_{F*(G*F),G,F*G}$
$((F*(G*F))*G)*(F*G)$
$(F*((G*F)*G))*(F*G)$
$a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G*F,G}*(F*G)$
(1.1)
$a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G*F,G*(F*G)}$
$a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{F,(G*F)*G,F*G}$
$(F*(\varepsilon*G))*(F*G)$
$F*(((G*F)*G)*(F*G))$
naturlighed af $a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})$
$F*a(\mathbb{B},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})_{G*F,G,F*G}$
$F*((\varepsilon*G)*(F*G))$
$(F*(\mathbb{B}(-,-)*G))*(F*G)$
$F*((G*F)*(G*(F*G)))$
$a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})_{F,\mathbb{B}(-,-)*G,F*G}$
$F*((\mathbb{B}(-,-)*G)*(F*G))$
$(F*l(\mathbb{B},\mathbb{A})_G)*(F*G)$
naturlighed af $a(\mathbb{B},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})$
$F*((G*F)*a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})^{-1}_{G,F,G})$
naturlighed af $a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})$
$F*(\varepsilon*(G*(F*G)))$
$F*a(\mathbb{B},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})_{\mathbb{B}(-,-),G,F*G}$
$(F*G)*(F*G)$
fordi * er en funktor
$F*((G*F)*((G*F)*G))$
$F*(\mathbb{B}(-,-)*(G*(F*G)))$
$F*(l(\mathbb{B},\mathbb{A})_G*(F*G))$
(◇◇)
$a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})_{F,G,F*G}$
$F*(\varepsilon*((G*F)*G))$
$F*(\mathbb{B}(-,-)*a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})^{-1}_{G,F,G})$
fordi * er en funktor
$F*l(\mathbb{B},\mathbb{A})_{G*(F*G)}$
$F*(G*(F*G))$
$F*(\mathbb{B}(-,-)*(\varepsilon*G))$
$F*(\mathbb{B}(-,-)*(\mathbb{B}(-,-)*G))$
$F*(\mathbb{B}(-,-)*((G*F)*G))$
naturlighed af $l(\mathbb{B},\mathbb{A})$
$F*l(\mathbb{B},\mathbb{A})_{(G*F)*G}$
$F*a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})^{-1}_{G,F,G}$
naturlighed af $l(\mathbb{B},\mathbb{A})$
$F*l(\mathbb{B},\mathbb{A})_{\mathbb{B}(-,-)*G}$
naturlighed af $l(\mathbb{B},\mathbb{A})$
$F*G$
$F*l(\mathbb{B},\mathbb{A})_G$
$F*(\mathbb{B}(-,-)*G)$
$F*(\varepsilon*G)$
$F*((G*F)*G)$

$(\Diamond\Diamond)$ kommuterer, idet der for $B, B' \in |\mathbb{B}|$, $A, A' \in |\mathbb{A}|$, $\xi \in \mathbb{B}(B, B')$, $\delta \in (B', A')G$ og $\rho \in (A', A)(F * G)$ gælder

$$(cl(cl(\xi, \delta), \rho))\left(a(\mathbb{B}, \mathbb{B}, \mathbb{A}, \mathbb{A})_{\mathbb{B}(-,-), G, F*G} \cdot l(\mathbb{B}, \mathbb{A})_{G*(F*G)}\right)_{B,A}$$

$$= (cl(\xi, cl(\delta, \rho))(l(\mathbb{B}, \mathbb{A})_{G*(F*G)})_{B,A}$$

$$= (cl(\delta, \rho))((\xi, I_A)(G*(F*G)))$$

$$= cl(\delta((\xi, I_{A'})G), \rho((I_{A'}, I_A)(F*G)))$$

$$= cl(\delta((\xi, I_{A'})G), \rho) = (cl(cl(\xi, \delta), \rho))(l(\mathbb{B}, \mathbb{A})_G * (F*G))_{B,A}$$

Hermed er beviset for sætn. 2 fuldført.

<u>Bemærkning:</u> I ovenstående bevis er der kun benyttet alm. bikategoriegenskaber bortset fra bevis for, at $(\Diamond)$, $(\Diamond\Diamond)$ og det tilsvarende diagram fra (2.6) kommuterer. Da disse diagrammer kun indeholder a, r og l, gælder sætn. 2 i en vilkårlig bikategori, såfremt forudsætningen øverst side 1.3 holder stik.

Lad nu $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ og $G : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$ være adjungerede én-celler i 2-kategorien af funktorer, $F \dashv G$, med frontadjunktion η og endeadjunktion ε. Ifølge proposition 6 er $\bar{G} \dashv \bar{F}$ med frontadjunktion $\bar{\eta} \cdot f(\mathbb{B}, \mathbb{A}, \mathbb{B})_{G,F}^{-1}$ og endeadjunktion $f(\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{A})_{F,G} \cdot \bar{\varepsilon}$, hvor $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ er bestemt ved (3.10). $\bar{G} \dashv \bar{F}$ giver ifølge sætn. 2 anledning til promonaden

(6.5) $$(T_1, \eta_1, \mu_1) = (\bar{G} * \bar{F}, \bar{\eta} \cdot f(\mathbb{B}, \mathbb{A}, \mathbb{B})_{G,F}^{-1}, \mu_1)$$

i $\mathbb{A}$, hvor μ_1 er bestemt ved, at følgende diagram kommuterer

$$
(6.6)\qquad
\begin{tikzcd}
(\bar G * \bar F) * (\bar G * \bar F) \arrow[rr, Rightarrow, "\mu_1"] \arrow[d, Rightarrow, "a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})_{\bar G, \bar F, \bar G * \bar F}"] & & \bar G * \bar F \\
\bar G * (\bar F * (\bar G * \bar F)) \arrow[d, Rightarrow, "\bar G * a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})^{-1}_{\bar F, \bar G, \bar F}"] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \bar G * (\mathbb{B}(-,-) * \bar F) \arrow[u, Rightarrow, "\bar G * l(\mathbb{B},\mathbb{A})_{\bar F}"'] \\
\bar G * ((\bar F * \bar G) * \bar F) \arrow[rr, Rightarrow, "\bar G * (f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G} * \bar F)"] & & \bar G * (\overline{G \cdot F} * \bar F) \arrow[u, Rightarrow, "\bar G * (\bar\varepsilon * \bar F)"']
\end{tikzcd}
$$

På den anden side giver $F \dashv G$ anledning til <u>Cat</u>-monaden $(F\cdot G,\ \eta,\ F\circ\varepsilon\circ G)$ i $\mathbb{A}$ (jfr. [9] og [10]), som ifølge proposition 9 side 3.12 ved $\bar{\ }$ føres i promonaden $(\overline{F\cdot G},\ \bar\eta,\ f(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{A})_{F\cdot G, F\cdot G}\cdot \overline{F\circ\varepsilon\circ G})$ i $\mathbb{A}$.

Vi sætter

$$(6.7)\qquad (T_2, \eta_2, \mu_2) = (\overline{F\cdot G},\ \bar\eta,\ f(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{A})_{F\cdot G, F\cdot G}\cdot \overline{F\circ\varepsilon\circ G})$$

Der gælder da

<u>Proposition 12:</u> (T_1, η_1, μ_1) og (T_2, η_2, μ_2) er isomorfe promonader i $\mathbb{A}$.

Når isomorfi mellem bikategorimonader defineres ved

<u>Definition 17:</u> Lad $\mathcal{S}$ være en vilkårlig bikategori og A et vilkårligt objekt i $\mathcal{S}$.

To $\mathcal{S}$-monader (T_1, η_1, μ_1) og (T_2, η_2, μ_2) i A siges at være isomorfe, såfremt der findes en isomorfi

$\sigma : T_1 \longrightarrow T_2$ i $\mathcal{S}(A,A)$,

så at $\eta_2 = \eta_1 \cdot \sigma$ og $(\sigma * \sigma)\mu_2 = \mu_1 \cdot \sigma$.

Det er klart, at isomorfi mellem $\mathcal{S}$-monader er en ækvivalensrelation.

Bevis for prop. 12: Ifølge prop. 5, side 3.8, er $\bar{\ }$ en streng bikategori-morfi.

$$\overline{G} * \overline{F} \xrightarrow{f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F}} \overline{F\cdot G} \qquad \text{fra } (3.10)$$

er altså en naturlig isomorfi $T_1 \Longrightarrow T_2$.

$\eta_1 \cdot f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F} = \bar\eta \cdot f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F}^{-1} \cdot f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F} = \bar\eta = \eta_2$ og

$(f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F} * f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F})\cdot \mu_2$

$= (f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F} * f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F})\cdot f(\mathbb{A},\mathbb{A},\mathbb{A})_{F\cdot G,F\cdot G}\cdot \overline{F\circ\varepsilon\circ G}$, mens

$\mu_1 \cdot f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F} =$

$$a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})_{\overline{G},\overline{F},\overline{G}*\overline{F}}\cdot(\overline{G} * a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})^{-1}_{\overline{F},\overline{G},\overline{F}})\cdot(\overline{G}*(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G} * \overline{F}))\cdot$$
$$\cdot(\overline{G}*(\overline{\varepsilon}*\overline{F}))\cdot(\overline{G}*l(\mathbb{B},\mathbb{A})_{\overline{F}})\cdot f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F}$$

For $A, A', A'' \in |\mathbb{A}|$, $B, B' \in |\mathbb{B}|$, $\xi \in (A,B)\overline{G} = \mathbb{A}(A, BG)$,
$\delta \in (B,A')\overline{F} = \mathbb{B}(B, A'F)$, $\xi' \in (A',B')\overline{G} = \mathbb{A}(A', B'G)$ og
$\delta' \in (B',A'')\overline{F} = \mathbb{B}(B', A''F)$ er

$$(cl(cl(\xi,\delta), cl(\xi',\delta')))(f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F} * f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F})_{A,A''}\cdot \mu_{2_{A,A''}}$$

$$= (cl(\xi\cdot\delta G, \xi'\cdot\delta' G))\mu_{2_{A,A''}} \qquad \text{, ifølge } (3.10)$$

$$= (\xi\cdot\delta G\cdot((\xi'\cdot\delta' G)(F\cdot G)))\ \overline{F\circ\varepsilon\circ G}_{A,A''}$$

(6.8) $$= \xi\cdot\delta G\cdot\xi'(F\cdot G)\cdot\delta'(G\cdot F\cdot G)\cdot\varepsilon_{A''F}G$$

og

$$(cl(cl(\xi,\delta), cl(\xi',\delta')))(\mu_1\cdot f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F})_{A,A''}$$

$$= (cl(\xi, cl(cl(\delta,\xi'),\delta')))((\overline{G}*(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G}*\overline{F}))\cdot(\overline{G}*(\overline{\varepsilon}*\overline{F}))\cdot(\overline{G}*l(\mathbb{B},\mathbb{A})_{\overline{F}})$$
$$\cdot f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F})_{A,A''}$$

$$= (cl(\xi, cl(\delta\cdot\xi' F, \delta')))((\overline{G}*(\overline{\varepsilon}*\overline{F}))\cdot(\overline{G}*l(\mathbb{B},\mathbb{A})_{\overline{F}})\cdot f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F})_{A,A''}$$

$$= (cl(\xi, cl(\delta\cdot\xi' F\cdot\varepsilon_{B'}, \delta')))((\overline{G}*l(\mathbb{B},\mathbb{A})_{\overline{F}})\cdot f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{G,F})_{A,A''}$$

$$= \left(cl\left(\xi, \delta \cdot \xi' F \cdot \varepsilon_{B'} \cdot \delta'\right)\right)\left(f(\mathbb{B}, \mathbb{A}, \mathbb{B})_{G,F}\right)_{A,A''}$$

(6.9) $$= \xi \cdot \delta G \cdot \xi' FG \cdot \varepsilon_{B'} G \cdot \delta' G$$

På grund af ε's naturlighed er $\varepsilon_{B'} \cdot \delta' = \delta' GF \cdot \varepsilon_{A''F}$, altså (6.8) lig (6.9).

Hermed er beviset for propositionen fuldført.

Lad F, G, η, ε være som på side 6.1

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[r, shift left, "F"] & \mathbb{B} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd} ,$$

og lad T betegne profunktoren $G * F \in \underline{\text{Prof}}(\mathbb{B}, \mathbb{B})$.

Der gælder da

Sætning 3: (T, ε, δ) er en procomonad i $\mathbb{B}$, når δ er bestemt ved, at diagrammet

(6.10)
$$\begin{tikzcd}
T = G * F \arrow[rr, Rightarrow, "\delta"] \arrow[d, Rightarrow, "G * l(\mathbb{A},\mathbb{B})^{-1}_F"'] & & (G*F)*(G*F) = T*T \\
& & G*(F*(G*F)) \arrow[u, Rightarrow, "a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{B})^{-1}_{G,F,G*F}"'] \\
G*(\mathbb{A}(-,-)*F) \arrow[rr, Rightarrow, "G*(\eta*F)"] & & G*((F*G)*F) \arrow[u, Rightarrow, "G*a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{F,G,F}"']
\end{tikzcd}$$

kommuterer.

Bevis: Analogt til beviset for sætn. 2.

Lad nu igen $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ og

$$G : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$$

være adjungerede én-celler i 2-kategorien af funktorer, $F \dashv G$, med fonladjunktion η og udadjunktion ε.
De adjungerede profunktorer $\overline{G} \dashv \overline{F}$ giver ifølge sætning 3 anledning til procomonaden

(6.11) $$(T', \varepsilon', \delta') = (\overline{F} * \overline{G},\ f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G} \cdot \overline{\varepsilon},\ \delta')$$

i $\mathbb{B}$, hvor δ' er bestemt ved, at følgende diagram kommuterer

(6.12)
$$\begin{tikzcd}
T' = \overline{F} * \overline{G} \arrow[rr, Rightarrow, "\delta'"] \arrow[d, Rightarrow, "\overline{F} * l(\mathbb{A},\mathbb{B})^{-1}_{\overline{G}}"] & & (\overline{F} * \overline{G}) * (\overline{F} * \overline{G}) = T' * T' \\
\overline{F} * (\mathbb{A}(-,-) * \overline{G}) \arrow[d, Rightarrow, "\overline{F} * (\overline{\eta} * \overline{G})"] & & \overline{F} * (\overline{G} * (\overline{F} * \overline{G})) \arrow[u, Rightarrow, "a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{B})^{-1}_{\overline{F},\overline{G},\overline{F} * \overline{G}}"'] \\
\overline{F} * (\overline{F \cdot G} * \overline{G}) \arrow[rr, Rightarrow, "\overline{F} * (f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})^{-1}_{G,F} * \overline{G})"] & & \overline{F} * ((\overline{G} * \overline{F}) * \overline{G}) \arrow[u, Rightarrow, "\overline{F} * a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{\overline{G},\overline{F},\overline{G}}"']
\end{tikzcd}$$

$f(-,-,-)$ er givet ved (3.10).
På den anden side giver $F \dashv G$ anledning til comonaden $(G \cdot F, \varepsilon, G \circ \eta \circ F)$ i $\mathbb{B}$, som ifølge proposition 9 side 3.12 ved $\overline{}$ føres i procomonaden

(6.13) $$(T'', \varepsilon'', \delta'') = (\overline{G \cdot F},\ \overline{\varepsilon},\ \overline{G \circ \eta \circ F} \cdot f(\mathbb{B},\mathbb{B},\mathbb{B})^{-1}_{G \cdot F, G, F}) \quad \text{i } \mathbb{B}.$$

Proposition 13: $(T', \varepsilon', \delta')$ og $(T'', \varepsilon'', \delta'')$ er isomorfe procomonader(*) i $\mathbb{B}$.

Bevis: $f(\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{A})_{F,G} : \bar{F} * \bar{G} \Longrightarrow \overline{G \cdot F}$ fra (3,10)

er ifølge proposition 5 side 3.8 en naturlig isomorfi $T' \Longrightarrow T''$

$$f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G} \cdot \varepsilon'' = f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G} \cdot \bar{\varepsilon} = \varepsilon' ,$$

og for $B, B' \in |\mathbb{B}|$, $A \in |\mathbb{A}|$, $\xi \in (B,A)\bar{F} = \mathbb{B}(B, AF)$ og $\rho \in (A, B')\bar{G}$

er

$$(\mathrm{cl}(\xi, \rho))(\delta' \cdot (f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G} * f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G}))_{BB'}$$

$$= (\mathrm{cl}(\xi, \mathrm{cl}(I_A, \rho)))((\bar{F} * (\bar{\eta} * \bar{G})) \cdot (\bar{F} * (f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})^{-1}_{G,F} * \bar{G})) \cdot (\bar{F} * a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{\bar{G},\bar{F},\bar{G}}) \cdot$$
$$\cdot a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{B})^{-1}_{\bar{F},\bar{G},\bar{F}*\bar{G}} \cdot (f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G} * f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G}))_{B,B'}$$

$$= (\mathrm{cl}(\xi, \mathrm{cl}(\eta_A, \rho)))((\bar{F} * (f(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})^{-1}_{G,F} * \bar{G})) \cdot (\bar{F} * a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{\bar{G},\bar{F},\bar{G}}) \cdot a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{B})^{-1}_{\bar{F},\bar{G},\bar{F}*\bar{G}} \cdot$$
$$\cdot (f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G} * f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G}))_{B,B'}$$

$$= (\mathrm{cl}(\xi, \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(\eta_A, I_{AF}), \rho)))((\bar{F} * a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B})_{\bar{G},\bar{F},\bar{G}}) \cdot a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{B})^{-1}_{\bar{F},\bar{G},\bar{F}*\bar{G}} \cdot$$
$$\cdot (f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G} * f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G}))_{BB'}$$

$$= (\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(\xi, \eta_A), \mathrm{cl}(I_{AF}, \rho)))(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G} * f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G})_{B,B'}$$

(6.14) $$= \mathrm{cl}(\xi \cdot \eta_A F, \rho F) \quad \text{og}$$

$$(\mathrm{cl}(\xi, \rho))(f(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{F,G} \cdot \delta'')_{B,B'} = (\xi \cdot \rho F)\delta''_{B,B'}$$

$$= (\xi \cdot \rho F \cdot \eta_{B'G} F)(f(\mathbb{B},\mathbb{B},\mathbb{B})^{-1}_{G \cdot F, G \cdot F})_{B,B'}$$

(6.15) $$= \mathrm{cl}(\xi \cdot \rho F \cdot \eta_{B'G} F, I_{B'GF})$$

På grund af η's naturlighed er $\rho \cdot \eta_{B'G} = \eta_A \cdot \rho F G$. Dette medfører, at (6.14) er lig (6.15).

(*) At to S-comonader er isomorfe betyder, at de to tilsvarende S^{op}-monader er isomorfe.

Der gælder naturligvis regler analoge til propositionerne 12 og 13 for $\dot{-}$.

Vi tager nu fat på den modsatte opgave – altså at konstruere adjungerede profunktorer, der giver anledning til en given promonad.
En idé om, hvordan sådanne profunktorer kan konstrueres, får man ved at betragte præordnede mængder, d.v.s. mængder med en refleksiv og transitiv relation.
Lad Θ betegne kategorien af præordnede mængder med præordensbevarende afbildninger som morfier
Lad A og $B \in |\Theta|$, så skal $A^{op} \times B$ betegne mængden $A \times B$ med præordningen

(6.16) $$(a_1, b_1) \leqq (a_2, b_2) \iff \underset{\substack{\uparrow \\ \text{præordn. i } A}}{a_2 \leqq a_1} \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ \text{præordn. i } B}}{b_1 \leqq b_2}$$

En Θ-profunktor fra A til B er en ordensbevarende afbildning $A^{op} \times B \longrightarrow 2$, hvor 2 er mængden $\{0, 1\}$ med den sædvanlige ordning $\leqq$.
Bikategorien af Θ-profunktorer er givet ved:
(i) Objekter: præordnede mængder.
(ii) En-celler fra A til B: Θ-profunktorer fra A til B.
For to Θ-profunktorer f_1, f_2 fra A til B er der netop én to-celle fra f_1 til f_2, hvis $\quad (a,b)f_1 = 1 \implies (a,b)f_2 = 1 \quad \forall a \in A$ og $b \in B$
ellers ingen.
(iii) Lad f være en Θ-profunktor fra A til B og g en Θ-profunktor fra B til C
$f * g$ er den Θ-profunktor fra A til C, der er givet ved:

(6.17) $$(a,c)(f*g) = \begin{cases} 1, \text{ hvis } \exists b \in B : (a,b)f = (b,c)g = 1 \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

Lad f_1, f_2 være Θ-profunktorer fra A til B og g_1, g_2 Θ-profunktorer fra B til C.
Hvis

$$(a,b)f_1 = 1 \Longrightarrow (a,b)f_2 = 1 \text{ og } (b,c)g_1 = 1 \Longrightarrow (b,c)g_2 = 1$$

gælder det også, at

$$(a,c)(f_1 * g_1) = 1 \Longrightarrow (a,c)(f_2 * g_2) = 1$$

D.v.s., hvis der er en to-celle $f_1 \Rightarrow f_2$ og en to-celle $g_1 \Rightarrow g_2$, er der også en to-celle $f_1 * g_1 \Rightarrow f_2 * g_2$.

$*$ kan derfor defineres på to-celler.

(iv) For enhver præordnet mængde A er identitets-to-cellen på A flg. afb. I_A

(6.18) $$(a,a')I_A = \begin{cases} 1, \text{ hvis } a \leqq a' \\ 0 \text{ ellers} \end{cases}$$

(v) Af definitionen på $*$ følger, at $*$ er associativ.

(vi) Lad f være en Θ-profunktor fra A til B, så er

$$(a,b)(I_A * f) = \begin{cases} 1, \text{ hvis } \exists\, a' \in A : a \leqq a' \wedge (a',b)f = 1 \\ 0 \text{ ellers} \end{cases}$$

$$= (a,b)f$$

Analogt ser man, at

$$f * I_B = f.$$

Θ-profunktorerne udgør altså en bikategori, endda en 2-kategori.

Lad f være en Θ-profunktor $A \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\; B$ og g en Θ-profunktor $B \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\; A$.
Vi siger, at f er venstreadjungeret til g, $f \dashv g$, såfremt

(6.19) $$a \leqq a' \Longrightarrow (a,a')(f*g) = 1 \quad \text{og}$$

(6.20) $$(b,b')(g*f) = 1 \Longrightarrow b \leqq b'$$

En Θ-promonad i A er en Θ-profunktor t fra A til A med følgende egenskaber:

(6.21) $$a \leqq a' \Longrightarrow (a,a')t = 1$$

(6.22) $$(a,a')(t*t) = 1 \Longrightarrow (a,a')t = 1$$

Hvis $f*g$ betragtes – f og g som udvist side 6.11 – fås (6.21) af (6.19) og (6.22) af (6.20) på flg. måde:

$$(a,a')(f*g*f*g) = 1 \iff \exists\, b_1, b_2 \in B \text{ og } a_1 \in A : 1 = (a,b_1)f = (b_1,a_1)g = (a_1,b_2)f = (b_2,a')g$$

$$\iff \exists\, b_1, b_2 \in B : (a,b_1)f = (b_1,b_2)(g*f) = (b_2,a')g = 1$$

$$\Longrightarrow \exists\, b_1, b_2 \in B : b_1 \leqq b_2 \wedge (a,b_1)f = (b_2,a')g = 1$$

$$\Longrightarrow \exists\, b_2 \in B : (a,b_2)f = (b_2,a')g = 1$$

$$\Longrightarrow (a,a')(f*g) = 1$$

Altså giver adjungerede Θ-profunktorer anledning til en Θ-promonad.
Omvendt! Lad t være en Θ-promonad i A. Vi skal konstruere en præordnet mængde A_t og Θ-profunktorer $f_t : A \nrightarrow A_t$ og $g_t : A_t \nrightarrow A$, således at $f_t \dashv g_t$ og $f_t * g_t = t$

A_t skal være mængden A med følgende præ-ordning

$$a \leqq_t a' \iff (a,a')t = 1$$

$\leqq_t$ er transitiv, fordi

$$a \leqq_t a' \wedge a' \leqq_t a'' \Rightarrow (a,a')t = (a',a'')t = 1 \Rightarrow (a,a'')(t*t) = 1$$
$$\Rightarrow (a,a'')t = 1 \Rightarrow a \leqq_t a''$$

$\leqq_t$ er refleksiv ifølge (6.21)

$A \xrightarrow{f_t} A_t$ defineres ved : $(a,\bar{a})f_t = (a,\bar{a})t \quad \forall a \in A, \bar{a} \in A_t$

$A_t \xrightarrow{g_t} A$ defineres ved : $(\bar{a},a)g_t = (\bar{a},a)t \quad \forall \bar{a} \in A_t, a \in A$

At f_t og g_t er ordensbevarende følger af (6.22)

$$(a,a')(f_t * g_t) = 1 \iff \exists \bar{a} \in A_t : (a,\bar{a})t = (\bar{a},a')t = 1$$

$$\iff (a,a')t = 1 \quad , \text{ifølge (6.21) og (6.22)}$$

Altså $f_t * g_t = t$

$f_t \dashv g_t$, fordi

$$(\bar{a},\bar{a}')(g_t * f_t) = 1 \Rightarrow \exists a \in A : (\bar{a},a)g_t = (a,\bar{a}')f_t = 1$$

$$\Rightarrow \exists a \in A : (\bar{a},a)t = (a,\bar{a}')t = 1$$

$$\Rightarrow (\bar{a},\bar{a}')t = 1 \Rightarrow \bar{a} \leq_t \bar{a}'$$

altså er (6.20) opfyldt. (6.19) er trivielt opfyldt.

Nu forsøger vi at oversætte ovenstående til profunktorer og promonader.

Lad $(\mathbb{A}, T, \eta, \mu)$ være en promonad

$$\mathbb{A} \overset{T}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} \mathbb{A} \quad , \quad \mathbb{A}(-,-) \overset{\eta}{\Longrightarrow} T \quad , \quad T * T \overset{\mu}{\Longrightarrow} T$$

$\mathbb{B}$ skal være den kategori, der er bestemt ved

(i) $|\mathbb{B}| = |\mathbb{A}|$

(ii) $\forall A_1, A_2 \in |\mathbb{A}| \; : \; \mathbb{B}(A_1,A_2) = (A_1,A_2)T$

(iii) $\forall A_1, A_2, A_3 \in |\mathbb{A}| \;, x \in \mathbb{B}(A_1,A_2)$ og $y \in \mathbb{B}(A_2,A_3)$:

$$(6.23) \qquad x \cdot y = (cl(x,y))\mu_{A_1 A_3} \in (A_1,A_3)T = \mathbb{B}(A_1,A_3)$$

(iv) $\forall A \in |\mathbb{A}|$ er identiteten på A i $\mathbb{B}$

$$(6.24) \qquad (I_A)\eta_{A,A}$$

hvor I_A er identiteten på A i $\mathbb{A}$.

$\forall\, A, A' \in |\mathbb{A}|$ er $(I_A)\eta_{AA} \bullet x = (cl((I_A)\eta_{AA}, x))\mu_{AA'} = (cl(I_A, x))((\eta * T)\cdot\mu)_{AA'}$

$= x \qquad \forall\, x \in \mathbb{B}(A, A')$, ifølge (2.5).

Analogt følger af (2.6) at $x \bullet (I_{A'})\eta_{A'A'} = x$.

$\bullet$ er associativ, idet der $\forall\, A_1, A_2, A_3, A_4 \in |\mathbb{A}|$, $x \in \mathbb{B}(A_1, A_2)$, $y \in \mathbb{B}(A_2, A_3)$ og $z \in \mathbb{B}(A_3, A_4)$ gælder

$$x \bullet (y \bullet z) = (cl(x, (cl(y,z))\mu_{A_2,A_4}))\mu_{A_1,A_4} = (cl((cl(x,y))\mu_{A_1,A_3}, z))\mu_{A_1,A_4}$$
$$= (x \bullet y) \bullet z \quad \text{, ifølge (2.7)}$$

$\mathbb{B}$ er altså en kategori.

F skal være den profunktor $\mathbb{A} \xrightarrow{\ \shortmid\ } \mathbb{B}$, der er bestemt ved

(i) $\forall\, A \in |\mathbb{A}|$ og $B \in |\mathbb{B}| = |\mathbb{A}|$ er $(A,B)F = (A,B)T \quad \in |\mathcal{E}ns|$

(ii) $\forall\, A, A' \in |\mathbb{A}|$, $B, B' \in |\mathbb{B}|$, $a \in \mathbb{A}(A', A)$ og $b \in \mathbb{B}(B, B') = (B, B')T$ er $(a,b)F$ givet ved

$$(6.25) \qquad \begin{array}{ccc} (A,B)T & \xrightarrow{(a,b)F} & (A',B')T \\ x & \rightsquigarrow & (x)((a, I_B)T) \bullet b \end{array}$$

Lad $A \in |\mathbb{A}|$, $B \in |\mathbb{B}|$ og $x \in (A,B)T$, så er

$(x)((I_A, (I_B)\eta_{B,B})F) = (x)((I_A, I_B)T) \bullet (I_B)\eta_{B,B} = x$. Altså $(I_A, (I_B)\eta_{BB})F = I_{(A,B)T}$

Lad $A, A', A'' \in |\mathbb{A}|$ og $B, B', B'' \in |\mathbb{B}|$, $a' \in \mathbb{A}(A'', A')$, $a \in \mathbb{A}(A', A)$, $b \in \mathbb{B}(B, B')$ og $b' \in \mathbb{B}(B', B'')$. Så er

$$(x)((a'\cdot a, b \bullet b')F) = (x)((a'\cdot a, I_B)T) \bullet b \bullet b'$$
$$= (cl((x)((a'\cdot a, I_B)T), b))\mu_{A'',B'} \bullet b'$$
$$= (cl((x)((a, I_B)T, b))((a', I_{B'})(T * T))\mu_{A'',B'} \bullet b'$$
$$= (cl((x)((a, I_B)T, b))\mu_{A',B'} \cdot ((a', I_{B'})T) \bullet b'$$

på grund af μ's naturlighed.

$$= (x)((a,b)F \cdot (a',b')F) \qquad \text{for } x \in (A,B)T$$

Altså $(a'\cdot a, b \bullet b')F = (a,b)F \cdot (a',b')F$.

F er således virkelig en profunktor fra $\mathbb{A}$ til $\mathbb{B}$.

G skal være den profunktor $\mathbb{B} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\; \mathbb{A}$, der er bestemt ved

(i) $\forall B \in |\mathbb{B}|,\ A \in |\mathbb{A}|$ er $(B,A)G = (B,A)T \in |\mathcal{E}ns|$

(ii) $\forall B, B' \in |\mathbb{B}|,\ A, A' \in |\mathbb{A}|,\ b \in \mathbb{B}(B',B)$ og $a \in \mathbb{A}(A,A')$ er $(b,a)G$ givet ved

$$(6.26)\qquad \begin{aligned} (B,A)T &\xrightarrow{(b,a)G} (B',A')T \\ x &\rightsquigarrow b \bullet (x)((I_B, a)T) \end{aligned}$$

$\forall A \in |\mathbb{A}|,\ B \in |\mathbb{B}|$ og $x \in (B,A)T$ er

$(x)(((I_B)\eta_{BB}, I_A)G) = (I_B)\eta_{BB} \bullet (x)((I_B, I_A)T) = x$. Altså $((I_B)\eta_{BB}, I_A)G = I_{(B,A)T}$

Lad $A, A', A'' \in |\mathbb{A}|$, $B, B', B'' \in |\mathbb{B}|$, $a \in \mathbb{A}(A,A')$, $a' \in \mathbb{A}(A', A'')$, $b \in \mathbb{B}(B',B)$ og $b' \in \mathbb{B}(B'',B')$. Så er

$$\begin{aligned}
(x)((b' \bullet b, a \cdot a')G) &= b' \bullet b \bullet (x)((I_B, a \cdot a')T) \\
&= b' \bullet (cl(b, (x)((I_B, a\cdot a')T)))\mu_{B',A''} \\
&= b' \bullet (cl(b, (x)((I_B, a)T)))((I_{B'}, a')(T * T))\mu_{B',A''} \\
&= b' \bullet (cl(b, (x)((I_B, a)T)))\mu_{B',A'}((I_{B'}, a')T) \\
&\qquad\qquad \text{på grund af } \mu\text{'s naturlighed} \\
&= (x)((b,a)G \cdot (b',a')G)
\end{aligned}$$

Altså $(b' \bullet b, a \cdot a')G = (b,a)G \cdot (b',a')G$

G er således virkelig en profunktor.

<u>Proposition 14:</u> F og G er adjungerede profunktorer, $F \dashv G$, med frontadjunktion $\hat{\eta}$ og udadjunktion ε bestemt ved

$$(6.27)\qquad \begin{aligned} \mathbb{A}(A,A') &\xrightarrow{\hat{\eta}_{AA'}} (A,A')(F*G) \\ a &\rightsquigarrow cl((I_A)\eta_{AA}, (a)\eta_{AA'}) = cl((a)\eta_{AA'}, (I_{A'})\eta_{A'A'}) \end{aligned}$$

$$(6.28)\qquad \begin{aligned} (B,B')(G*F) &\xrightarrow{\varepsilon_{BB'}} \mathbb{B}(B,B') = (B,B')T \\ cl(\xi, \delta) &\rightsquigarrow (cl(\xi,\delta))\mu_{BB'} \end{aligned}$$

Bevis : På side 6.19 skal vi se, at prop. 14 er en konsekvens af prop. 8 side 3.9. Derfor udelades beviset her.

Sætning 4: (T, η, μ) og $(F*G, \hat{\eta}, \hat{\mu})$ er isomorfe promonader, når $\hat{\mu}$ betegner transformationen μ fra (6.1)

Bevis : Vi betragter den transformation $T \overset{\sigma}{\Longrightarrow} F*G$, der er bestemt ved

(6.29)
$$\begin{aligned} (A,A')T &\xrightarrow{\sigma_{AA'}} (A,A')(F*G) \\ a &\rightsquigarrow cl((I_A)\eta_{AA'}, a) \end{aligned}$$

$\sigma_{AA'}$ er naturlig i A og A', idet følgende diagram kommuterer $\forall A, A', \tilde{A}, \tilde{A}' \in |\mathbb{A}|$, $a \in \mathbb{A}(\tilde{A}, A)$ og $a' \in \mathbb{A}(A', \tilde{A}')$.

(6.30)
$$\begin{tikzcd}
f \arrow[rr, squiggly] \arrow[dd, squiggly] & & cl((I_A)\eta_{AA'} f) \arrow[dd, squiggly] \\
\in (A,A')T \arrow[r, "\sigma_{AA'}"] \arrow[d, "(a,a')T"] & (A,A')(F*G) \arrow[d, "(a,a')(F*G)"] & \\
(\tilde{A},\tilde{A}')T \arrow[r, "\sigma_{\tilde{A}\tilde{A}'}"] & (\tilde{A},\tilde{A}')(F*G) & \\
(f)((a,a')T) \arrow[r, squiggly] & cl((I_{\tilde{A}})\eta_{\tilde{A}\tilde{A}}, (f)((a,a')T)) & cl(((I_A)\eta_{AA})((a,I_A)T), (f)((I_A, a')T))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} cl((I_{\tilde{A}})\eta_{\tilde{A}\tilde{A}}, (f)((a,a')T)) &= cl((a)\eta_{\tilde{A}A}, (f)((I_A, a')T)), \text{ ifølge nedenstående diagram} \\ &= cl(((I_A)\eta_{AA})((a,I_A)T), (f)((I_A, a')T)), \text{ ifølge } \eta\text{'s naturlighed} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{A} \arrow[dr, "(f)((a,a')T)"] \arrow[dd, "(a)\eta_{\tilde{A}A}"] & \\
\tilde{A} \arrow[ur, "(I_{\tilde{A}})\eta_{\tilde{A}\tilde{A}}"] \arrow[dr, "(a)\eta_{\tilde{A}A}"'] & \cdot \qquad \cdot & \tilde{A}' \\
 & A \arrow[ur, "(f)((I_A, a')T)"'] & \\
\mathbb{A} & \mathbb{B} & \mathbb{A}
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{A} \quad F \quad \mathbb{B} \quad G \quad \mathbb{A}$

(diagrammet skal opfattes cylinderkategorisk, jfr. §4)

σ er iso: Lad $B \in |\mathbb{B}|$, $\xi \in (A,B)F$ og $\delta \in (B,A')G$. Så viser cylinderkategori-diagrammet

(6.31)
$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "\delta"] & \\
A \arrow[ur, "\xi"] \arrow[dr, "(I_A)\eta_{AA}"'] & & A' \\
 & A \arrow[uu, "\xi"] \arrow[ur, "\xi \bullet \delta"'] &
\end{tikzcd}$$
($\bullet$ er sammensætning i $\mathbb{B}$)

$\mathbb{A} \quad F \quad \mathbb{B} \quad G \quad \mathbb{A}$

at $cl(\xi,\delta) = cl((I_A)\eta_{AA}, \xi \bullet \delta)$ i $(A,A')(F * G)$. Heraf ses, at $\sigma_{AA'}$ er på.

Lad nu $B, B' \in |\mathbb{B}|$, $\xi_1 \in (A,B)F$, $\xi_2 \in (A,B')F$, $\delta_1 \in (B,A')G$ og $\delta_2 \in (B',A')G$

Hvis β er en morfi fra B til B' i $\mathbb{B}$, så at

$(\xi_1)((I_A,\beta)F) = \xi_2$ og $(\delta_2)((\beta, I_{A'})G) = \delta_1$, er $\xi_1 \bullet \beta = \xi_2 \wedge \delta_1 = \beta \bullet \delta_2$

pr. def. af F og G.

Altså er $\xi_2 \bullet \delta_2 = \xi_1 \bullet \beta \bullet \delta_2 = \xi_1 \bullet \delta_1$

(6.32)
$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dd, "\beta"] \arrow[dr, "\delta_1"] & \\
A \arrow[ur, "\xi_1"] \arrow[dr, "\xi_2"'] & & A' \\
 & B' \arrow[ur, "\delta_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{A} \quad F \quad \mathbb{B} \quad G \quad \mathbb{A}$

Dette viser, at $\sigma_{AA'}$ er en-entydig.

$\sigma_{AA'}$ er altså en isomorfi med
(6.33)
$$(A,A')(F * G) \xrightarrow{\sigma_{AA'}^{-1}} (A,A')T$$
$$cl(\xi,\delta) \rightsquigarrow \xi \bullet \delta$$

$\eta\cdot\sigma = \hat{\eta}$, idet der for $A, A' \in |\mathbb{A}|$ og $a \in \mathbb{A}(A,A')$ gælder

$(a)(\eta\cdot\sigma)_{AA'} = ((a)\eta_{AA'})\sigma_{AA'} = cl((I_A)\eta_{AA'}, (a)\eta_{AA'}) = (a)\hat{\eta}_{AA'}$.

$(\sigma * \sigma)\hat{\mu} = \mu\cdot\sigma$, idet

(6.34)

$$\begin{tikzcd}
cl(cl((I_A)\eta_{AA}, \xi), cl((I_{\tilde{A}})\eta_{\tilde{A}\tilde{A}}, \delta)) \arrow[ddddd, squiggly] & & & cl(\xi,\delta) \arrow[lll, squiggly] \arrow[ddd, squiggly] \\
& (A,A')((F*G)*(F*G)) \arrow[d, "(a(\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{A})_{F,G,F*G})_{AA'}"] & (A,A')(T*T) \arrow[l, "(\sigma*\sigma)_{AA'}"'] \arrow[dd, "\mu_{AA'}"] & \\
& (A,A')(F*(G*(F*G))) \arrow[d, "(F*a(\mathbb{B},\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{A})_{G,F,G}^{-1})_{AA'}"] & & \\
& (A,A')(F*((G*F)*G)) \arrow[d, "(F*(\varepsilon*G))_{AA'}"] & (A,A')T \arrow[d, "\sigma_{AA'}"] & ((cl(\xi,\delta))\mu_{AA'}) \arrow[dd, squiggly] \\
& (A,A')(F*(\mathbb{B}(-,-)*G)) \arrow[r, "(F*\ell(\mathbb{B},\mathbb{A})_G)_{AA'}"] & (A,A')(F*G) & \\
cl((I_A)\eta_{AA}, cl(\xi,\delta)) \arrow[rrr, squiggly] & & & cl((I_A)\eta_{AA}, \xi\cdot\delta) = cl((I_A)\eta_{AA'}, (cl(\xi,\delta))\mu_{AA'})
\end{tikzcd}$$

for $\tilde{A} \in |\mathbb{A}|$, $\xi \in (A,\tilde{A})T$ og $\delta \in (\tilde{A},A')T$.

σ er altså en promonad-isomorfi.

Studerer vi det konstruerede $\mathbb{B}$ og profunktorerne F og G fra side 6.13 - 6.15 lidt nøjere, finder vi, at der gælder lidt mere end sætning 4, nemlig

Sætning 4': Til en vilkårlig promonad $(\mathbb{A}, T, \eta, \mu)$ findes der en lille kategori $\mathbb{B}$ og en funktor $\mathbb{A} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{B}$, sådan at det adjungerede par $\underline{\Phi} \dashv \overline{\Phi}$ bestemmer den givne promonad (op til promonadisomorfi.)

Bevis: Vi konstruerer funktoren $\phi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ på følgende måde:

(i) $\forall A \in |\mathbb{A}| : (A)\phi = A$

(ii) $\forall A, A' \in |\mathbb{A}|$ og $a \in \mathbb{A}(A, A') : (a)\phi = (a)\eta_{AA'} \in (A, A')T = \mathbb{B}(A, A')$

ϕ er en funktor, fordi 1) $\forall A \in |\mathbb{A}|$ er $(I_A)\phi = (I_A)\eta_{AA}$ identiteten på A i $\mathbb{B}$,
og 2) $\forall A, A', A'' \in |\mathbb{A}|$, $a \in \mathbb{A}(A, A')$ og $a' \in \mathbb{A}(A', A'')$ er

$$(a \cdot a')\phi = (a \cdot a')\eta_{AA''} = (I_A)\eta_{AA} \bullet (a \cdot a')\eta_{AA''} = (a)\eta_{AA'} \bullet (a')\eta_{A'A''} = (a)\phi \bullet (a')\phi$$

↑ ifølge nedenstående cylinderkateg. diagram

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[dr, "(a')\eta_{A'A''}"] & \\
A \arrow[ur, "(a)\eta_{AA'}"] \arrow[dr, "(I_A)\eta_{AA}"'] & & A'' \\
 & A \arrow[uu, "(a)\eta_{AA'}"] \arrow[ur, "(a \cdot a')\eta_{AA''}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{A} \qquad F \qquad \mathbb{B} \qquad G \qquad \mathbb{A}$

$$(A, B)\underline{\Phi} = \mathbb{B}(A\phi, B) = \mathbb{B}(A, B) = (A, B)T = (A, B)F \qquad \forall A \in |\mathbb{A}|, B \in |\mathbb{B}|$$

$$(x)((a, b)\underline{\Phi}) = (x)(\mathbb{B}(a\phi, b)) = (a)\phi \bullet x \bullet b = (a)\eta_{A'A} \bullet x \bullet b$$

$$= (cl((a)\eta_{A'A}, x))\mu_{A'B} \bullet b = (x)((a, I_B)T) \bullet b \text{, ifølge (2.5)}$$

$$= (x)((a, b)F) \text{, ifølge (6.25)}$$

for alle $A, A' \in |\mathbb{A}|$, $B, B' \in |\mathbb{B}|$, $a \in \mathbb{A}(A', A)$, $b \in \mathbb{B}(B, B')$ og $x \in (A, B)T$

Altså er $\underline{\Phi} = F$

Analogt ses $\overline{\Phi} = G$

Proposition 14 på side 6.15 er altså en følge af proposition 8 side 3.9

Definition 18: Lad $(\mathbb{A}, T, \eta, \mu)$ være en promonad. Kategorien $\mathbb{B}$ fra side 6.13 og profunktorerne $\underline{\Phi}$ og $\overline{\Phi}$ kaldes Kleisli-resolutionen af $(\mathbb{A}, T, \eta, \mu)$

Sætning 4' knytter til enhver promonad en funktor, der er identiteten på objekter. Nu forsøger vi at gå den modsatte vej.

Lad $\mathbb{A}$ og $\tilde{\mathbb{B}}$ være små kategorier med samme objektmængde, og lad $\mathbb{A} \xrightarrow{\psi} \tilde{\mathbb{B}}$ være en funktor, så at $\forall A \in |\mathbb{A}| : (A)\psi = A$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, shift left, "\psi"] & \tilde{\mathbb{B}} \arrow[l, shift left, "\overline{\psi}"]
\end{tikzcd}$$

Ifølge proposition 8 er $\underline{\psi} \dashv \overline{\psi}$.

Lad (T,η,μ) være den tilsvarende promonad i $\mathbb{A}$.

$T = \underline{\psi} * \overline{\psi}$, η er frontadjunktionen for $\underline{\psi} \dashv \overline{\psi}$ altså givet ved (3.13).

(6.35)
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}(A,A') & \xrightarrow{\ \eta_{A,A'}\ } & (A,A')(\underline{\psi} * \overline{\psi}) \\ f & \rightsquigarrow & cl(f\psi, I_{A'\psi}) \end{array}$$

og μ er bestemt ved, at diagrammet

(6.36)
$$\begin{tikzcd}
(\underline{\psi} * \overline{\psi}) * (\underline{\psi} * \overline{\psi}) \arrow[rr, Rightarrow, "\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "a(\mathbb{A},\tilde{\mathbb{B}},\mathbb{A},\mathbb{A})_{\underline{\psi},\overline{\psi},(\underline{\psi}*\overline{\psi})}"] & & \underline{\psi} * \overline{\psi} \\
\underline{\psi} * (\overline{\psi} * (\underline{\psi} * \overline{\psi})) \arrow[d, Rightarrow, "\underline{\psi} * a(\tilde{\mathbb{B}},\mathbb{A},\tilde{\mathbb{B}},\mathbb{A})^{-1}_{\overline{\psi},\underline{\psi},\overline{\psi}}"] & & \\
\underline{\psi} * ((\overline{\psi} * \underline{\psi}) * \overline{\psi}) \arrow[rr, Rightarrow, "\underline{\psi} * (\varepsilon * \overline{\psi})"] & & \underline{\psi} * (\tilde{\mathbb{B}}(-,-) * \overline{\psi}) \arrow[uu, Rightarrow, "\underline{\psi} * l(\tilde{\mathbb{B}},\mathbb{A})_{\overline{\psi}}"']
\end{tikzcd}$$

kommuterer, når ε er endeadjunktionen for $\underline{\psi} \dashv \overline{\psi}$, altså ifølge (3.14)

(6.37)
$$\begin{array}{ccc} (B,B')(\overline{\psi} * \underline{\psi}) & \xrightarrow{\ \varepsilon_{BB'}\ } & \tilde{\mathbb{B}}(B,B') \\ cl(\xi,\delta) & \rightsquigarrow & \xi \cdot \delta \end{array} \quad (\cdot \text{ sammensætning i } \tilde{\mathbb{B}})$$

Vi laver nu Kleisli-resolutionen af (T,η,μ). Det giver os en lille kategori $\mathbb{B}$ og en funktor $\phi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$.

$\mathbb{B}$ er bestemt ved :

(i) $|\mathbb{B}| = |\mathbb{A}| = |\tilde{\mathbb{B}}|$

(ii) $\forall A, A' \in |\mathbb{A}|$ er $\mathbb{B}(A,A') = (A,A')T = (A,A')(\underline{\psi} * \overline{\psi})$

(iii) $\forall A \in |\mathbb{A}|$ er $(I_A)\eta_{AA} = cl(I_{A\psi}, I_{A\psi})$ identiteten på A

(iv) $\forall A, A', A'' \in |\mathbb{A}|$, $x \in \mathbb{B}(A,A')$ og $y \in \mathbb{B}(A',A'')$ er

$$x \bullet y = (cl(x,y))\mu_{AA''} = cl(\xi, \underset{\text{i } \tilde{\mathbb{B}}}{\delta \cdot \rho \cdot \gamma})$$

$$\text{for } x = cl(\xi,\delta) \in (A,A')(\underline{\psi} * \overline{\psi}) \text{ og } y = cl(\rho,\gamma) \in (A',A'')(\underline{\psi} * \overline{\psi})$$

Φ er bestemt ved :

(i) Φ er identiteten på objekter i $\mathbb{A}$.

(ii) $\forall A, A' \in |\mathbb{A}|$ og $a \in \mathbb{A}(A,A')$ er $(a)\Phi = (a)\eta_{AA'} = cl(a\psi, I_{A'\psi})$ i $(A,A')(\underline{\psi} * \overline{\psi}) = \mathbb{B}(A,A')$.

$\mathbb{B} \cong \tilde{\mathbb{B}}$, idet vi kan definere en isomorfi $\tau : \mathbb{B} \longrightarrow \tilde{\mathbb{B}}$ på følgende måde :

(i) τ er identiteten på objekter.

(ii) $\forall A, A' \in |\mathbb{B}|$ og $x = cl(\xi,\delta) \in (A,A')(\underline{\psi} * \overline{\psi}) = \mathbb{B}(A,A')$ er $(x)\tau = (cl(\xi,\delta))\tau = \xi \bullet \delta$, hvor $\bullet$ er sammens. i $\tilde{\mathbb{B}}$.

τ er veldefineret :

Lad $\xi_1 \in (A,B)\underline{\psi} = \tilde{\mathbb{B}}(A\psi, B) = \tilde{\mathbb{B}}(A,B)$, $\xi_2 \in (A,B')\underline{\psi}$, $\delta_1 \in (B,A')\overline{\psi}$, $\delta_2 \in (B',A')\overline{\psi} = \tilde{\mathbb{B}}(B',A')$ og $\beta \in \tilde{\mathbb{B}}(B,B')$

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "\delta_1"] \arrow[dd, "\beta"] & \\ A \arrow[ur, "\xi_1"] \arrow[dr, "\xi_2"'] & & A' \\ & B' \arrow[ur, "\delta_2"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathbb{A} \quad \underline{\psi} \quad \tilde{\mathbb{B}} \quad \overline{\psi} \quad \mathbb{A}$

$$\xi_2 = \xi_1((I_A,\beta)\underline{\psi}) \wedge \delta_1 = \delta_2((\beta, I_{A'})\overline{\psi})$$
$$\Downarrow$$
$$\xi_2 = \xi_1 \cdot \beta \wedge \delta_1 = \beta \cdot \delta_2$$
$$\Downarrow$$
$$\xi_1 \bullet \delta_1 = \xi_2 \bullet \delta_2$$

hvor $\bullet$ er sammens. i $\tilde{\mathbb{B}}$

τ er en funktor :

Lad $x = cl(\xi,\delta) \in (A,A')(\underline{\psi} * \overline{\psi}) = \mathbb{B}(A,A')$ og $y = cl(\rho,\gamma) \in \mathbb{B}(A',A'')$

Så er $(\underset{\text{i } \mathbb{B}}{x \bullet y})\tau = (((cl(x,y))\mu_{AA''})\tau) = (cl(\xi, \delta\cdot\rho\cdot\gamma))\tau = \xi\cdot\delta\cdot\rho\cdot\gamma$

$$= (x)\tau \cdot (y)\tau$$

og $((I_A)\eta_{AA})\tau = I_{A\psi} \cdot I_{A\psi} = I_{A\psi} = I_A = I_{A\tau}$

Det ses let, at τ er invertibel med $\tau^{-1} : \tilde{\mathbb{B}} \longrightarrow \mathbb{B}$ givet ved

(i) τ^{-1} er identiteten på objekter i $\tilde{\mathbb{B}}$

(ii) $\forall A, A' \in |\tilde{\mathbb{B}}|$ og $\delta \in \tilde{\mathbb{B}}(A,A')$ er $(\delta)\tau^{-1} = cl(I_A, \delta) \in (A,A')(\underline{\psi} * \overline{\psi})$

Vi ser nu, at diagrammet

(6.38)
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{B} \arrow[dd, "\tau", "\cong"'] \\ \mathbb{A} \arrow[ur, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \\ & \tilde{\mathbb{B}} \end{tikzcd}$$

kommuterer, idet $\forall A \in |\mathbb{A}|$ er $A\phi\tau = A = A\psi$

$\forall A, A' \in |\mathbb{A}|$ og $a \in \mathbb{A}(A,A')$ er $(a)\phi\tau = a\psi \cdot I_{A'\psi} = a\psi$

Definition 19: Vi siger, at to funktorer $\psi : \mathbb{A} \longrightarrow \tilde{\mathbb{B}}$ og $\psi' : \mathbb{A} \longrightarrow \tilde{\mathbb{B}}'$ er ækvivalente, såfremt der findes en isomorfi ς, så at

(6.39)
$$\begin{tikzcd} & \tilde{\mathbb{B}} \arrow[dd, "\varsigma", "\cong"'] \\ \mathbb{A} \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dr, "\psi'"'] & \\ & \tilde{\mathbb{B}}' \end{tikzcd}$$

kommuterer.

Struktursætning for promonader:

Der er en én-entydig korrespondance mellem isomorfiklasser af promonader i $\mathbb{A}$ og ækvivalensklasser af funktorer ψ fra $\mathbb{A}$ til små kategorier med samme objektmængde som $\mathbb{A}$, således at ψ er identiteten på objekter.

Bevis: Lad (T,η,μ) og (T',η',μ') være profunktorer i $\mathbb{A}$ og $(\mathbb{B}, \underline{\Phi}, \bar{\Phi})$ være Kleisli-resolutionen af (T,η,μ). Tilsvarende $(\mathbb{B}', \underline{\Phi}', \bar{\Phi}')$.

Lad endvidere $\sigma : (T,\eta,\mu) \Rightarrow (T',\eta',\mu')$ være en promonadisomorfi

Vi kan så definere $\varsigma : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}'$ på følgende måde:

(i) ς er identiteten på objekter.

(ii) $\forall B, B' \in |\mathbb{B}|$ og $b \in \mathbb{B}(B,B') = (B,B')T$ er

$$b\varsigma = b\,\sigma_{BB'} \in (B,B')T' = \mathbb{B}'(B,B').$$

$\forall\, B \in |\mathbb{B}|$ er $\quad \underset{i\mathbb{B}}{(I_B)}\zeta = \underset{i\mathbb{A}}{(I_B)}\eta_{BB}\sigma_{BB} = \underset{i\mathbb{A}}{(I_B)}\eta'_{BB} = \underset{i\mathbb{B}'}{I_B}$

$\forall\, B, B', B'' \in |\mathbb{B}|$, $b \in \mathbb{B}(B,B')$ og $b' \in \mathbb{B}(B', B'')$ er

$$(b \underset{i\mathbb{B}}{\cdot} b')\zeta = (b\cdot b')\sigma_{BB''} = (cl(b,b'))\mu_{BB''}\sigma_{BB''} = (cl(b,b'))(\sigma*\sigma)_{BB''}\mu'_{BB''}$$
$$= (cl(b\sigma_{BB'}, b'\sigma_{B'B''}))\mu'_{BB''} = b\zeta \underset{i\mathbb{B}'}{\cdot} b'\zeta$$

ζ er en isomorfi med ζ^{-1} givet ved $b\zeta^{-1} = b\sigma^{-1}_{BB'}$, $\forall\, B, B' \in |\mathbb{B}'|$, $b \in \mathbb{B}'(B,B')$

$\phi\zeta = \phi'$, idet $(a)\phi\zeta = (a)\eta_{AA'}\sigma_{AA'} = (a)\eta'_{AA'} = (a)\phi'$, $\forall A, A' \in |\mathbb{A}|$, $a \in \mathbb{A}(A,A')$

Vi kan altså afbilde den isomorfiklasse af promonader i $\mathbb{A}$, der indeholder (T, η, μ) i den ækvivalensklasse af funktorer, der er identiteten på objekter, som indeholder ϕ.

Lad nu ψ og ψ' være funktorer, der er identiteten på objekter og ζ en isomorfi mellem små kategorier, så at (6.39) kommuterer.

$\underline{\Psi} \dashv \overline{\Psi}$ giver anledning til en promonad (T, η, μ) og $\underline{\Psi}' \dashv \overline{\Psi}'$ giver anledning til en promonad (T', η', μ') i $\mathbb{A}$.

Vi kan definere $\sigma : T \Longrightarrow T'$ ved

(6.40) $$\begin{array}{c} (A,A')T = (A,A')(\underline{\Psi} * \overline{\Psi}) \xrightarrow{\sigma_{AA'}} (A,A')(\underline{\Psi}' * \overline{\Psi}') = (A,A')T' \\ cl(\xi, \delta) \rightsquigarrow cl((\xi)\zeta, (\delta)\zeta) \end{array}$$

$\sigma_{A,A'}$ er veldefineret. Dette følger direkte af, at ζ er en funktor.

$\sigma_{A,A'}$ er naturlig i A og A', idet der for $a \in \mathbb{A}(\bar{A}, A)$ og $a' \in \mathbb{A}(A', \bar{A}')$ gælder

$$\begin{aligned}(cl(\xi,\delta))\sigma_{AA'} \cdot (a,a')(\underline{\Psi}' * \overline{\Psi}') &= (cl((\xi)\zeta, (\delta)\zeta))(a,a')(\underline{\Psi}' * \overline{\Psi}') \\ &= cl((a)\psi' \cdot (\xi)\zeta, (\delta)\zeta \cdot (a')\psi') \\ &= (cl(\xi,\delta))(a,a')(\underline{\Psi} * \overline{\Psi})\, \sigma_{\bar{A},\bar{A}'} \quad \text{, ifølge (6.39)}\end{aligned}$$

$\forall\, A, A' \in |\mathbb{A}|$ og $a \in \mathbb{A}(A,A')$ er

$(a)\eta_{AA'}\,\sigma_{AA'} = (cl(a\psi, I_{A'}))\sigma_{AA'} = cl(a\psi', I_{A'}) = (a)\eta'_{AA'}$ og

$\forall\, A, A' \in |\mathbb{A}|$ og $cl(cl(\xi,\delta), cl(\rho,\gamma)) \in (A,A')((\underline{\psi} * \overline{\psi}) * (\underline{\psi} * \overline{\psi}))$ er

$$\begin{aligned}(cl(cl(\xi,\delta), cl(\rho,\gamma)))\mu_{AA'}\,\sigma_{AA'} &= (cl(\xi, \delta\cdot\rho\cdot\gamma))\sigma_{AA'} \quad \text{, ifølge (6.36)}\\ &= (cl((\xi)\zeta, (\delta)\zeta\cdot(\rho)\zeta\cdot(\gamma)\zeta))\\ &= (cl(cl((\xi)\zeta,(\delta)\zeta), cl((\rho)\zeta,(\gamma)\zeta)))\mu'_{AA'}\\ &= (cl(cl(\xi,\delta), cl(\rho,\gamma)))(\sigma * \sigma)_{AA'}\,\mu'_{AA'}\,.\end{aligned}$$

σ er en naturlig isomorfi med σ^{-1} bestemt ved

(6.41)
$$\begin{array}{ccc} (A,A')(\underline{\psi}' * \overline{\psi}') & \xrightarrow{\ \sigma^{-1}_{AA'}\ } & (A,A')(\underline{\psi} * \overline{\psi}) \\ cl(\xi,\delta) & \rightsquigarrow & cl((\xi)\zeta^{-1}, (\delta)\zeta^{-1}) \end{array}$$

Altså er (T,η,μ) og (T',η',μ') isomorfe promonader.

Vi kan altså afbilde den ækvivalensklasse af funktorer, der er identiteten på objekter, der indeholder ψ i den isomorfiklasse af promonader, der indeholder (T,η,μ).

Den således etablerede korrespondance mellem isomorfiklasser af promonader i $\mathbb{A}$ og ækvivalensklasser af funktorer fra $\mathbb{A}$ til små kategorier, så at ψ er id. på obj., er en-entydig ifølge siderne 6.18 til 6.22.

Hermed er struktursætningen bevist.

<u>Definition 20:</u> Lad (T,η,μ) og (T',η',μ') være promonader i $\mathbb{A}$.

En promonadtransformation $p : (T,\eta,\mu) \Longrightarrow (T',\eta',\mu')$ er en transformation $p : T \Rightarrow T'$, så at diagrammerne:

(6.42)
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{A}(-,-) \arrow[dl, Rightarrow, "\eta"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\eta'"] & \\ T \arrow[rr, Rightarrow, "p"] & & T' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T * T \arrow[r, Rightarrow, "p*p"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] & T' * T' \arrow[d, Rightarrow, "\mu'"'] \\ T \arrow[r, Rightarrow, "p"] & T' \end{tikzcd} \tag{6.43}$$

kommuterer

Ved sammenligning med def. 17 ses, at en promonadisomorfi er en promonadtransformation, der er iso.

På side 3.13 har vi benyttet promonadtransformation mellem promonader i en diskret kategori.

Proposition 15: Lad (T, η, μ) og (T', η', μ') være promonader i $\mathbb{A}$; og lad $\psi : \mathbb{A} \longrightarrow \tilde{\mathbb{B}}$ og $\psi' : \mathbb{A} \longrightarrow \tilde{\mathbb{B}}'$ være repræsentanter for de tilsvarende ækvivalensklasser af funktorer.

Der findes da en én-éntydig forbindelse mellem promonadtransformationer $p : (T, \eta, \mu) \Longrightarrow (T', \eta', \mu')$ og funktorer $\tilde{P} : \tilde{\mathbb{B}} \longrightarrow \tilde{\mathbb{B}}'$, for hvilke diagrammet

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{A} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi'"] & \\ \tilde{\mathbb{B}} \arrow[rr, "\tilde{P}"] & & \tilde{\mathbb{B}}' \end{tikzcd} \tag{6.44}$$

kommuterer.

Bevis: Lad p være en promonadtransformation $(T, \eta, \mu) \Longrightarrow (T', \eta', \mu')$.
Lad $(\mathbb{B}, \underline{\Phi}, \bar{\Phi})$ være Kleisli-resolutionen af (T, η, μ) og $(\mathbb{B}', \underline{\Phi}', \bar{\Phi}')$ være Kleisli-resolutionen af (T', η', μ').
Vi kan da definere en funktor $P : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}'$ på følgende måde:

(i) $\forall B \in |\mathbb{B}| = |\mathbb{A}| = |\mathbb{B}'| \ : BP = B$

(ii) $\forall B, B' \in |\mathbb{B}|$ og $b \in \mathbb{B}(B,B') = (B,B')T$ er $(b)P = (b)p_{BB'} \in \mathbb{B}'(B,B')$

Beviset for, at P er en funktor, er analogt til beviset for, at ζ er en funktor øverst side 6.23. Tilsvarende for beviset for $\phi P = \phi'$.

Der findes en isomorfi $\tau : \mathbb{B} \longrightarrow \check{\mathbb{B}}$ og en isomorfi $\tau' : \mathbb{B}' \longrightarrow \check{\mathbb{B}}'$, så at $\phi \cdot \tau = \psi$ og $\phi' \cdot \tau' = \psi'$, idet ϕ og ψ tilhører samme æko. klasse, og ϕ' og ψ' tilhører samme æko. klasse.

Vi sætter $\check{P} = \tau^{-1} \cdot P \cdot \tau' : \check{\mathbb{B}} \longrightarrow \check{\mathbb{B}}'$. Så kommuterer (6.44).

Lad nu omvendt funktoren $\check{P} : \check{\mathbb{B}} \longrightarrow \check{\mathbb{B}}'$ være givet, så at (6.44) kommuterer.

$\underline{\psi} \dashv \bar{\psi}$ giver anledning til promonaden $(\underline{\psi} * \bar{\psi}, \eta_\psi, \mu_\psi)$ med η_ψ bestemt ved (6.35) og μ_ψ bestemt ved (6.36) og (6.37). Tilsvarende giver $\underline{\psi}' \dashv \bar{\psi}'$ anledning til $(\underline{\psi}' * \bar{\psi}', \eta_{\psi'}, \mu_{\psi'})$.

Vi kan konstruere $q : (\underline{\psi} * \bar{\psi}, \eta_\psi, \mu_\psi) \Longrightarrow (\underline{\psi}' * \bar{\psi}', \eta_{\psi'}, \mu_{\psi'})$ på følgende måde:

$$(6.45) \quad \begin{array}{ccc} (A,A')(\underline{\psi} * \bar{\psi}) & \xrightarrow{\quad q_{AA'} \quad} & (A,A')(\underline{\psi}' * \bar{\psi}') \\ cl(\xi, \delta) & \rightsquigarrow & cl(\xi \check{P}, \delta \check{P}) \end{array}$$

At q virkelig er en promonadtransformation, bevises analogt til beviset side 6.23 og 6.24 for σ.

Ifølge det givne findes der promonadisomorfier σ og σ'

$\sigma : (\underline{\psi} * \bar{\psi}, \eta_\psi, \mu_\psi) \Longrightarrow (T, \eta, \mu)$

$\sigma' : (\underline{\psi}' * \bar{\psi}', \eta_{\psi'}, \mu_{\psi'}) \Longrightarrow (T', \eta', \mu')$

Vi sætter $p = \sigma^{-1} \cdot q \cdot \sigma' : (T, \eta, \mu) \Longrightarrow (T', \eta', \mu')$. Så er p virkelig en promonadtransformation.

En-entydighed:

Lad $\tilde{P} : \check{\mathbb{B}} \longrightarrow \check{\mathbb{B}}'$ være givet.

Vi danner q bestemt ved (6.45) og derefter $P : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}'$ som øverst side 6.26 med p erstattet med q.

Nu betragtes funktoren

$$\tau^{-1} \cdot P \cdot \tau' : \check{\mathbb{B}} \longrightarrow \check{\mathbb{B}}' ,$$

hvor τ er isomorfien i (6.38) og τ' den tilsvarende isomorfi $\mathbb{B}' \longrightarrow \check{\mathbb{B}}'$.

$\tau^{-1} \cdot P \cdot \tau'$ er identiteten på objekter.

$\forall\, B, B' \in |\check{\mathbb{B}}|$ og $b \in \check{\mathbb{B}}(B, B')$ er

$$\begin{aligned}
(b)(\tau^{-1} \cdot P \cdot \tau') &\underset{i\,\check{\mathbb{B}}}{\overset{}{=}} (cl(I_B, b))(P \cdot \tau') = ((cl(I_B, b))q_{BB'})\tau' \\
&= (cl(I_{B\tilde{P}}, b\tilde{P}))\tau' \\
&= b\tilde{P}
\end{aligned}$$

Altså $\tau^{-1} \cdot P \cdot \tau' = \tilde{P}$.

Lad omvendt $p : (T, \eta, \mu) \Longrightarrow (T', \eta', \mu')$ være givet.

Vi danner funktoren $P : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}'$ som øverst side 6.26, og derefter promonadtransformationen

$$q : (\underline{\Phi} * \bar{\Phi}, \eta_\Phi, \mu_\Phi) \Longrightarrow (\underline{\Phi}' * \bar{\Phi}', \eta_{\Phi'}, \mu_{\Phi'})$$

ved (6.45) med ψ erstattet med ϕ, ψ' erstattet med ϕ' og $\tilde{P}$ erstattet med P.

Nu betragtes promonadtransformationen

$$\sigma^{-1} \cdot q \cdot \sigma' : (T, \eta, \mu) \Longrightarrow (T', \eta', \mu') ,$$

hvor σ^{-1} er transformationen σ fra (6.29) og σ' har en tilsvarende betydning.

$\forall\, A, A' \in |\mathbb{A}|$ og $a \in (A, A')T$ er

$$
\begin{aligned}
(a)(\sigma^{-1}\cdot q\cdot \sigma')_{AA'} &= (cl((I_A)\eta_{AA'}, a))\, q_{AA'}\, \sigma'_{AA'} \\
&= (cl((I_A)\eta'_{AA'}, aP))\, \sigma'_{AA'} \\
&= (a)P \\
&= (a)\, p_{AA'}
\end{aligned}
$$

Altså er $\sigma^{-1}\cdot q\cdot\sigma' = p$.
Heraf følger, at den etablerede forbindelse mellem funktorer $\tilde{P}$ og promonadtransformationer er én-éntydig.

Vi vil til slut undersøge sammenhængen mellem Kleisli-resolution af promonader og Kleisli-resolution af sædvanlige monader, som denne er defineret i [8].

Lad $\mathbb{A}$ være en lille kategori og (T, η, μ) en monad i $\mathbb{A}$.
Kleisli-resolutionen af (T, η, μ) består af den lille kategori $\mathbb{B}$ og funktorerne ϕ og ψ bestemt ved:

$\mathbb{B}$:
(i) $|\mathbb{B}| = |\mathbb{A}|$
(ii) $\mathbb{B}(A, A') = \mathbb{A}(A, A'T) \qquad \forall A, A' \in |\mathbb{A}|$
(iii) $\forall A, A', A'' \in |\mathbb{A}|$, $x \in \mathbb{B}(A, A')$ og $y \in \mathbb{B}(A', A'')$ er
$$x\cdot y = x\cdot yT\cdot \mu_{A''}$$
(iv) $\forall A \in |\mathbb{A}|$ er $\eta_A \in \mathbb{B}(A, A)$ identiteten på A i $\mathbb{B}$.

$\phi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$:
(i) $\forall A \in |\mathbb{A}|$ er $A\phi = A$
(ii) $\forall A, A' \in |\mathbb{A}|$ og $a \in \mathbb{A}(A, A')$ er $a\phi = a\cdot\eta_{A'}$.

$\psi : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$:
(i) $\forall B \in |\mathbb{B}|$ er $B\psi = BT$
(ii) $\forall B, B' \in |\mathbb{B}|$ og $b \in \mathbb{B}(B, B') = \mathbb{A}(B, B'T)$ er $b\psi = bT\cdot\mu_{B'}$

Fra [8] ved vi, at $\phi \dashv \psi$ med frontadjunktion η og endeadjunktion

ε, bestemt ved:

$\forall B \in |\mathbb{B}|$ er $\varepsilon_B = I_{BT} \in \mathbb{B}(BT, B) = \mathbb{B}(B\psi\phi, B)$

Desuden er

$$(T, \eta, \mu) = (\phi \cdot \psi, \eta, \phi \circ \varepsilon \circ \psi)$$

Ifølge proposition 9 fører $\bar{\ }$ monaden (T, η, μ) i promonaden

$$(\bar{T}, \bar{\eta}, f(\mathbb{A}, \mathbb{A}, \mathbb{A})_{T,T} \cdot \bar{\mu})$$

i $\mathbb{A}$, med $f(\mathbb{A}, \mathbb{A}, \mathbb{A})_{T,T}$ bestemt ved (3.10).

Af definitionen på Kleisli-resolution af promonad følger nu, at $(\mathbb{B}, \underline{\Phi}, \bar{\Phi}) = (\mathbb{B}, \bar{\psi}, \bar{\phi})$ er Kleisli-resolutionen af $(\bar{T}, \bar{\eta}, f(\mathbb{A}, \mathbb{A}, \mathbb{A})_{T,T} \cdot \bar{\mu})$.

Hermed har vi bevist følgende:

<u>Proposition 16:</u> Kleisli-resolutionen af billedet af monaden (T, η, μ) ved $\bar{\ }$ er billedet af Kleisli-resolutionen af (T, η, μ).

Bibliografi.

[1] Bénabou, J.: Introduction to bicategories, Reports of the Midwest Category Seminar, Springer-Verlag, 1967, 1–77.

[2] Eilenberg, S. og J. C. Moore: Adjoint functors and triples, Ill. J. Math., 9 (1966), 381–398.

[3] Eilenberg, S. og G. M. Kelly: Closed Categories, Proc. of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965. Springer-Verlag 1966.

[4] Bénabou, J.: Catégories avec multiplication, C. R. Acad. Sci., Paris, 256 (1963), 1887–1890.

[5] Bénabou, J.: Algèbre élémentaire dans les catégories avec multiplication, C. R. Acad. Sc., Paris, 258, (1964), 771–774.

[6] Bénabou, J.: Catégories relatives, C. R. Acad. Sc., Paris, 260, (1965), 3824–3827.

[7] Lawvere, W.: The Category of Categories as a Foundation for Mathematics, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965. Springer-Verlag 1966.

[8] Kleisli: Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors, Proc. Amer. Math. Soc. 16, (1965), 544–546.

[9] Huber, P. J.: Homotopy theory in general categories, Math. Ann., 144 (1961), 361–385.

[10] Kock, Anders: Monader og universel algebra, Aarhus Universitet, 1968.

[11] Freyd, Peter: Abelian Categories, Harper and Row, New York, 1966.

November 1968.

Hans Bjørn Justesen.