МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ

И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО - МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Марван Михал

УДК 513.832/835

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ КОГОМОЛОГИИ С ОБЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(01.01.04. геометрия и топология)

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -

доктор физико-математических наук

Виноградов А. М.

Москва 1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Многие практически важные понятия математической физики носят когомологический характер. Классическим стал "вариационный бикомплекс", позволяющий адекватно выразить и решить некоторые общие задачи лагранжева формализма. В 70-ых годах А. М. Виноградовым [24] введена и изучена спектральная последовательность, охватывающая качественно более сложную ситуацию – лагранжев формализм со связями. В ней нашли адекватное выражение такие важные понятия математической физики, как законы сохранения [28] и "потенциалы" ("абелевы" накрытия [10]) дифференциального уравнения. Другие члены этой спектральной последовательности еще ждут своего практического применения в математической физике [29]. Важные связи с разными конструкциями алгебраической и дифференциальной топологии нашел Тсуишита [22].

Между тем, науке давно известны многие, по степени своей общности "универсальные", методы построения когомологий самых разнообразных математических объектов. Одним из них является восходящий к Годеману [8] метод стандартных конструкций, ныне включенный в так называемую "категорную теорию когомологий" [15]. Метод признан действительным средством унификации – к настоящему времени почти все известные алгебраистам теории когомологий (групп, ассоциативных алгебр, алгебр Ли) допускают описание в рамках этого подхода [1]. Кроме того, как показал Бэк в своей знаменитой диссертации [2], когомологические группы размерности 1 допускают единое описание на языке главных расслоений со структурной группой равной группе коэффициентов. Последующие результаты Даскина [5] дают интерпретацию когомологических групп размерностей

≥ 2 на языке так называемых торсоров.

Метод применим к объектам "алгебраической природы", при этом алгебраичность нужно понимать в самом широком смысле, который удается адекватно выразить лишь на категорном языке. А именно, метод применим к категориям Эйленберга-Мура [6], т.е. категориям, в основе определения которых лежит конструкция называемая монадой. Тем не менее, один из вариантов этого метода, принадлежащий Ван Осдолу [23], применим и к основывающимся на *комонаде* "коалгебраическим" объектам, каковыми являются и дифференциальные уравнения. Последний факт не является очевидным и обоснован в [17] и в настоящей работе. Этим открыт путь к введению более общих чем раньше когомологий дифференциальных уравнений. А именно, в работе введены и исследованы когомологические группы $\bar{H}^n(\mathcal{X},\mathcal{A})$, $n = 0,\ldots,m$, нелинейного дифференциального уравнения $\mathcal{X}$ с коэффициентами в линейном дифференциальном уравнении $\mathcal{A}$, с одинаковым набором m независимых переменных. Группы $\bar{H}^n(\mathcal{X},\mathcal{A})$ естественным образом обобщают группы горизонтальных когомологий $\bar{H}^n\mathcal{X}$ [28]. Геометрическое описание групп $\bar{H}^1$ здесь также возможно (см. ниже).

Обсудим теперь содержание отдельных глав диссертации. Первая глава посвящена "основаниям". Дело в том, что дифференциальные уравнения как дифференциально-геометрические объекты являются бесконечномерными гладкими многообразиями. Теория бесконечномерных многообразий сегодня представляет собой постоянно развивающуюся, начиная с учебника [13], область математики. В качестве примеров двух современных направлений можно привести статьи [4,7]. Однако, их цели и, соответственно, средства находятся далеко за пределами настоящей работы. Нами использованные определения и факты представляют собой некоторый необходимый минимум для работы, и наиболее близки по форме к "основаниям", используемым в текстах [3,30]. Новым является применение уравнителей и исследование их поведения относительно функтора j^{∞}.

Вторая глава является ключевой. В ней содержится представление дифференциальных уравнений в виде так называемых $\mathbb{J}$-коалгебр. Сегодня уже классическим является представление дифференциальных уравнений в виде подмногообразий в расслоении джетов: $\mathcal{X} \subseteq j^{r}Y$. Дифференциальное уравнение в виде $\mathbb{J}$-коалгебры можно себе представить как вложение $\mathcal{X} \subseteq j^{\infty}\mathcal{X}$, где решение уравнения $\mathcal{X}$ отображается на свой бесконечный джет. Эта конструкция нас сразу вводит в область хорошо известных специалистам комонадических категорий [15,16], что нам позволяет использовать плоды около 30-летнего развития их теории. Во второй главе, кроме того, дано теоретико-категорное изложение начал $\mathcal{C}$-дифференциального исчисления А.М.Виноградова. В целом является вторая глава диссертации естественным добавлением к исследованию категории дифференциальных уравнений А.М.Виноградовым [25,26,27].

Основные результаты диссертации, касающиеся когомологических групп $\bar{H}^{n}(\mathcal{X},\mathcal{A})$, содержатся в третьей главе. Группы сначала вводятся конструкцией Ван Осдола [23] как так называемые группы $\mathbb{J}$-комологий. Их исследование ведется в работе преимущественно с целью отыскать эффективные способы вычисления. Первым применен метод резольвент. Вычисление группы $\bar{H}^{n}(\mathcal{X},\mathcal{A})$ становится возможным, как только найдена ацикличная резольвента уравнения $\mathcal{A}$, а ею является например построенная Поммаре [20] *последовательность Жане* (Р-комплекс в первоначальной терминологии) уравнения $\mathcal{A}$. Связь групп $\bar{H}^{n}(\mathcal{X},\mathcal{A})$ с последовательностью Жане можно сравнить с отношением классических горизонтальных когомологий к комплексу де Рама. Получаемая аналогия помогает перенести на случай нетривиальной группы коэффициентов многие известные факты о группах $\bar{H}^n\mathcal{X}$, в частности, построить спектральную последовательность $Ш_r^{p,q}$, которая, наподобие $\mathcal{C}$-спектральной последовательности А. М. Виноградова, позволяет вычислить группы $\bar{H}^n(\mathcal{X},\mathcal{A})$ для широкого класса уравнений $\mathcal{A}$.

В самом деле, модифицируя "вариационный бикомплекс", первой спектральной последовательностью которого является $\mathcal{C}$-спектральная последовательность, мы строим бикомплекс, строки которого, вместо с последовательностью де Рама, ассоциированы с последовательностью Жане. Для первой спектральной последовательности этого бикомплекса затем удается доказать в принципе такие же утверждения, какие доказаны для $\mathcal{C}$-спектральной последовательности. А именно, для важного класса уравнений коэффициентов $\mathcal{A}$, обладающих так называемым *формально сопряженным уравнением*, удается выразить строку $Ш_0^{1,q}$ в виде коядра некоторого, определенного представлением уравнения $\mathcal{X}$, преобразования комплексов типа Спенсера, и затем связать ее гомологии $Ш_1^{1,q}$ с гомологиями ядра этого преобразования (со сдвигом на 2). Этого результата уже достаточно для доказательства таких важных теорем, как теоремы о двух строках (столбцах в нашем обозначении), так как все необходимые шаги ее доказательства уже проведены в работе [28] в достаточной общности. По той причине эти вопросы уже не включены в настоящую диссертацию. Рассмотрена лишь вторая спектральная последовательность $E_r^{p,q}$ бикомплекса и доказано, что вычисление "полных" гомологий бикомплекса локально сводится к вычислению когомологий Жане [20] Уравнения $\mathcal{A}$.

Приступим к геометрическому описанию групп $\bar{H}^1(\mathcal{X},\mathcal{A})$. Этот вопрос не рассматривается в тексте диссертации и тесно связан с проблемой "псевдопотенциалов". Потенциалом дифференциального уравнения $\mathcal{X}$ уместно назвать величину, скажем a, определяемую уравнением $\mathcal{D}_i a = b_i$, где вектор-функция b_i удовлетворяет условиям совместимости $\mathcal{D}_i b_j = \mathcal{D}_j b_i$, которые должны выполняться как следствие самого уравнения $\mathcal{X}$. При этом вектор b_i следует считать тривиальным, если $b_j = \mathcal{D}_j g$ для некоторой функции g (грубо говоря, когда потенциал удается вычислить ничего не интегрируя).

Естественное обобщение этой картины состоит в замене операторов $\mathcal{D}_j$ общим линейным дифференциальным оператором, скажем Δ, т.е. в рассмотрении определяющего уравнения $\Delta A = B$, где A, B - вектор-функции. Матричный оператор Δ, однако, следует выбирать переопределенным (число строк больше числа столбцов), чтобы дать возникнуть условиям совместимости, в виде некоторого матричного уравнения $\nabla B = 0$. Операторы Δ, ∇ вместе составляют точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\quad\Delta\quad} \mathcal{B} \xrightarrow{\quad\nabla\quad} \mathcal{B}'$$

- начало горизонтального комплекса Жане линейного уравнения $\mathcal{A} = \{\Delta = 0\}$. Отсюда немедленно следует вывод о совпадении группы $\bar{H}^1(\mathcal{X},\mathcal{A})$ с группой "псевдопотенциалов" A по модулю тривиальных. Формально удовлетворительное изложение этих фактов удается лишь на языке накрытий [12] в духе результатов Бэка [2].

Необходимо привести несколько слов о подборе группы коэффициентов $\mathcal{A}$. Если уравнение $\mathcal{X}$ не переопределено, то, по теореме о двух строках [28], единственными ненулевыми группами являются

$\bar{H}^{k-1}(\mathcal{X},\mathcal{A})$ и $\bar{H}^{k}(\mathcal{X},\mathcal{A})$, если k – длина последовательности Жане уравнения $\mathcal{A}$. Связанную с ядром некоторого $\mathcal{C}$-дифференциального оператора группу $\bar{H}^{k-1}(\mathcal{X},\mathcal{A})$, однако, значительно проще вычислить, чем связанную с коядром этого оператора группу $\bar{H}^{k}(\mathcal{X},\mathcal{A})$. Наиболее благоприятным, поэтому, является случай $k = 2$. Это ограничивает снизу количество m независимых переменных нетривиальных примеров числом 3, так как в случае двух независимых переменных все переопределенные уравнения коэффициентов взаимно изоморфны, с точностью до взятия прямой степени. Следует отметить, что как раз в случае $m\geq 3$ аннулируются обобщаемые нами группы "потенциалов" $\bar{H}^{1}\mathcal{X}$ [28].

В заключение необходимо привести несколько слов о методах исследования. По сути дела уже теоретико-категорная постановка задачи приводит к необходимости использовать теоретико-категорный язык и теоретико-категорные методы. Стремление сделать изложение замкнутым в себе привело к значительний редукции дифференциально-геометрического языка работ [24 - 30]. Автор отдает себе отчет в том, что такой подход затруднит понимание работы специалистам по дифференциальным уравнениям. Им советуем обратиться к статье [19].

Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность научному руководителю доценту Александру Михайловичу Виноградову за поддержку, постоянное внимание к работе и критическое прочтение текста. Ему я обязан своими знаниями дифференциально-геометрических методов исследования дифференциальных уравнений.

ГЛАВА I

В этой главе содержится описание используемой нами категории бесконечномерных дифференцируемых многообразий, бесконечномерных векторных и аффинных расслоений и также основных функторов.

Читатель уже овладевший теорией бесконечномерных многообразий в какой-либо ее разновидности может пользоваться ею, проверив лишь предварительно справедливость приводимых ниже утверждений.

§1.1. Бесконечномерные многообразия.

В дальнейшем $\infty := \aleph_0$. Снабдим пространства $\mathbb{R}^k$, $k \le \infty$ топологией произведения. Тогда $\mathbb{R}^\infty = \lim \mathbb{R}^k$ относительно проекций $\mathbb{R}^{k+1} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^k$, $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) \longmapsto (x_1, \ldots, x_k)$. Напомним, что базис открытых множеств в $\mathbb{R}^\infty$ составляют прообразы открытых подмножеств $U \subseteq \mathbb{R}^k$ относительно канонических проекций $\mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots) \longmapsto (x_1, \ldots, x_k)$.

Назовем отображение $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ открытого подмножества $U \subseteq \mathbb{R}^\infty$ гладким, если для любой точки $a \in U$ найдется окрестность $V \ni a$, $V \subseteq U$ такая, что отображение $f|_V$ зависит лишь от конечного числа переменных, причем гладко.

Назовем отображение $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^\nu$ открытого подмножества $U \subseteq \mathbb{R}^\mu$, $\mu, \nu \le \infty$ гладким, если все его компоненты $f^i\colon U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^\nu \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} \mathbb{R}^i$ гладки.

Биективное отображение $f\colon U \longrightarrow V$ открытых подмножеств $U, V \subseteq \mathbb{R}^\mu$, $\mu \le \infty$ называется диффеоморфизмом, если и f и $f^{-1}\colon V \longrightarrow U$ гладки.

Определим (*гладкое*) *многообразие* M размерности $\mu \le \infty$ как топологическое T_2-пространство вместе с *гладкой структурой*, задаваемой как класс эквивалентности покрытий пространства M согласованными системами координат. Под *системой координат* здесь подразумевается открытое подмножество $U \subseteq M$ вместе с гомеоморфизмом $U \xrightarrow{x} xU$ на открытое подмножество $xU \subseteq \mathbb{R}^{\mu}$. Согласованность двух таких систем (U,x), (V,y) означает, что сквозное отображение

$$x(U\cap V) \xrightarrow{\;x^{-1}|x(U\cap V)\;} U\cap V \xrightarrow{\;y|U\cap V\;} y(U\cap V)$$

– диффеоморфизм. Наконец, два покрытия $M = \bigcup_{i\in I} U_i = \bigcup_{j\in J} V_j$ считаются эквивалентными, т.е. задающими одну и ту же гладкую структуру, если составляющие их системы координат (U_i,x_i), (V_j,y_j) согласованы для всех $i\in I$, $j\in J$.

Гладкое отображение $M \xrightarrow{f} N$ двух гладких многообразий определяется как отображение $M \longrightarrow N$, каждое координатное представление $xU \cong U \xrightarrow{f|U} V \cong yV$ которого гладко.

Гладкие многообразия вместе с гладкими отображениями составляют категорию, которую мы будем обозначать $\mathfrak{M}$. Введем функтор $\mathfrak{F}\colon \mathfrak{M}^{op} \longrightarrow \mathbb{R}\text{-Alg}$ в категорию $\mathbb{R}$-алгебр, сопоставляющий многообразию $M\in\mathfrak{M}$ $\mathbb{R}$-алгебру $\mathfrak{F}M$ гладких функций на M (= гладких отображений $M \longrightarrow \mathbb{R}$), и морфизму $\varphi\colon M \longrightarrow N$ сопоставим гомоморфизм $\mathbb{R}$-алгебр $\mathfrak{F}N \ni f \longmapsto f\circ\varphi \in \mathfrak{F}M$. В §3 мы наложим на многообразия дополнительное условие обеспечивающее биективность функтора $\mathfrak{F}\colon \mathfrak{M}^{op} \longrightarrow \mathbb{R}\text{-Alg}$ на морфизмах.

Зафиксируем гомеоморфизм $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \cong \mathbb{R}^\infty$. Определим *произведение* многообразий M, N как произведение топологических пространств с гладкой структурой задаваемой системами координат $(U\times V,\ x\times y)$, если (U,x), (V,y) — системы координат на M, N соответственно. Вместе с естественными проекциями на M,N оно представляет собой произведение в категории $\mathfrak{M}$. Очевидным образом вводится произведение конечного числа многообразий, произведение бесконечного числа многообразий в общем случае не определено.

Определим *подмногообразие* M размерности $\mu\le\infty$ и коразмерности $\varkappa\le\infty$ в многообразии N размерности $\nu = \mu+\varkappa$ как топологическое подпространство, для каждой точки $a \in M$ которого найдется система координат $(V,(x,y))$ на N, $V\ni a$, $V \xrightarrow{(x,y)} \mathbb{R}^\mu\times\mathbb{R}^\varkappa \cong \mathbb{R}^\nu$ такая, что подмножество $M\cap V$ выделяется в V уравнением $y = 0$. Пространство M является тогда многообразием относительно гладкой структуры задаваемой семейством координатных систем $(M\cap V,\ x|_{M\cap V})$.

Вложение $M \xhookrightarrow{i} N$ гладко. График $M \xrightarrow{(\mathrm{id}_M,g)} M\times N$ гладкого отображения $M \xrightarrow{g} N$ представляет собой подмногообразие.

Удобный способ задавать подмногообразия — это *уравнитель*. Пусть $f,g\colon M \rightrightarrows N$ — два гладких отображения многообразия M в многообразие N. Если $E := \{a\in M;\ fa = ga\}$ - подмногообразие в M, то вложение $E \xhookrightarrow{e} M$ является универсальным среди всех морфизмов $K \xrightarrow{h} M$ уравнивающих f и g, т.е. таких, что $f\circ h = g\circ h$. Диаграмма

$$E \xrightarrow{e} M \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} N$$

или само вложение e называются тогда уравнителем в категории $\mathfrak{M}$.

Определим *расслоенное многообразие* N размерности $\varepsilon\le\infty$ над базисным многообразием M размерности $\mu\le\infty$ как $(\mu+\varepsilon)$-мерное многообразие N вместе с открытым отображением $p\colon N \twoheadrightarrow M$ таким, что для каждой точки $b\in N$ найдется система координат $(V,(y,z))$ на N, $V\ni b$, $(y,z)\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^{\mu}\times\mathbb{R}^{\varepsilon} \cong \mathbb{R}^{\mu+\varepsilon}$ такая, что существует система координат (pV,x) на M для которой $x\circ p = y$.

Проекция $N \xrightarrow{p}\!\!\!\!\!\rightarrow M$ гладка. Подмногообразия $N_a := p^{-1}\{a\}$, $a\in M$ в N называются слоями расслоенного многообразия N.

Расслоенные многообразия над фиксированным многообразием M вместе с гладкими отображениями коммутирующими с проекциями на M составляют категорию. Обозначим ее через $\mathfrak{M}_M$. Функтор $\mathfrak{F}$ тогда принимает значения в категории $\mathfrak{F}M\text{-Alg}$ линейных алгебр над $\mathbb{R}$-алгеброй $\mathfrak{F}M$.

Пусть $N \xrightarrow{p}\!\!\!\!\!\rightarrow M$ – некоторое расслоенное многообразие и $M' \xrightarrow{f} M$ – гладкое отображение. Определим *индуцированное* отображением f расслоенное многообразие $N' \xrightarrow{p'}\!\!\!\!\!\rightarrow M'$. Положим $N' := \{[a,b] \in M'\times N;\ fa = pb\}$ и проверим, что N' является подмногообразием в $M'\times N$, расслоенным над M' относительно проекции $p'\colon [a,b] \longmapsto a$.

Итак, пусть $[a,b] \in N'$, пусть (V,x,y) – система координат на N в окрестности точки b, согласованная с системой (pV,x) на M, содержащей точку $pb = fa$. Пусть (U,z) – некоторая система координат на M', $a \in U \subseteq f^{-1}pV$. Тогда $N'\cap(U\times V)$ выделяется в $(U\times V,(x,y,z))$ уравнением $x = h(z)$, где $h = x\circ f\circ z^{-1}$. Требуемый определением подмногообразия вид уравнения $z' = 0$ достигается гладкой заменой координат $x' = x-h(z)$, $y' = y$, $z' = z$.

Введем векторные и аффинные расслоения. Заметим сначала, что отображение $h\colon \mathbb{R}^{\varkappa} \longrightarrow \mathbb{R}^{\lambda}$ тогда и только тогда является линейным и гладким, когда оно задано формулой

$$(x^i)_{i=1}^{\varkappa} \xmapsto{h} \left[\sum_{i=1}^{\varkappa} A_i^j x^i \right]_{j=1}^{\lambda}, \tag{1}$$

где A – матрица с λ строками длины $\varkappa$, лишь конечное число элементов которых не равно нулю (если $\varkappa = \infty$).

Введем *ассоциированное* с отображением (1) *гладкое аффинное* отображение $h'\colon \mathbb{R}^{\varkappa} \longrightarrow \mathbb{R}^{\lambda}$, как задаваемое формулой

$$(x^i)_{i=1}^{\varkappa} \xmapsto{h'} \left[\sum_{i=1}^{\varkappa} A_i^j x^i + b^j \right]_{j=1}^{\lambda},$$

где $(b^j) \in \mathbb{R}^{\lambda}$ – произвольный вектор.

Определим $\varkappa$-мерное *векторное* (соответственно, *аффинное*) *расслоение* над многообразием $M \in \mathfrak{M}_M$ как $\varkappa$-мерное расслоенное многообразие $E \xrightarrow{p} M$ такое, что найдется покрытие $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ многообразия M системами координат и диффеоморфизмы над U_i $h_i\colon p^{-1}U_i \xrightarrow{\cong} U_i\times\mathbb{R}^{\varkappa}$ такие, что все отображения

$$(U_i\cap U_j)\times\mathbb{R}^{\varkappa} \xrightarrow{h_i^{-1}} p^{-1}(U_i\cap U_j) \xrightarrow{h_j} (U_i\cap U_j)\times\mathbb{R}^{\varkappa}$$

– линейны (аффинны) и гладки на слоях $\mathbb{R}^{\varkappa}$.

Векторное расслоение $p\colon E \twoheadrightarrow M$ называется ассоциированным с аффинным расслоением $p'\colon E' \twoheadrightarrow M$, если диффеоморфизмы h_i ассоциированы с соответствующими диффеоморфизмами h_i'. Ясно, что слои E_a – векторные пространства, ассоциированные с соответствующими аффинными пространствами E_a'.

Эквивалентно сказано, группы E_a эффективно и транзитивно действуют на слоях E'_a.

Пусть $E_1 \xrightarrow{p_1} M_1$, $E_2 \xrightarrow{p_2} M_2$ – два векторных (соответственно аффинных) расслоения. Пусть $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ – гладкое отображение. Отображение $E_1 \xrightarrow{g} E_2$ называется линейным (аффинным) над отображением f, если $p_2 \circ g = f \circ p_1$ и отображения слоев $g_a = g|_{E_{1,a}} : E_{1,a} \longrightarrow E_{2,a}$ линейны (аффинны) и гладки.

Линейное над $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ отображение векторных расслоений $E_1 \xrightarrow{g} E_2$ называется ассоциированным с аффинным отображением $E'_1 \xrightarrow{g'} E'_2$, если отображения $g_a\colon E_{1,a} \longrightarrow E_{2,fa}$ ассоциированы с отображениями $g'_a\colon E'_{1,a} \longrightarrow E'_{2,fa}$.

Категорию векторных расслоений над фиксированным многообразием M и линейных отображений над id_M обозначим $\mathcal{V}_M$.

Определим *касательное расслоение* над μ–мерным многообразием M, $\mu \le \infty$. Назовем кривой на многобразии M произвольное гладкое отображение $\mathbb{R} \xrightarrow{f} M$. Скажем, что кривые f, g определяют один и тот же касательный вектор в точке $a \in M$, если $f0 = g0 = a$ и $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} x^i f(t) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} x^i g(t)$ для некоторой (и тогда уже для любой) системы координат (U, x) в окрестности точки a.

Множество всех касательных векторов в точке $a \in M$ обозначается $\mathrm{T}_a M$, касательный вектор к кривой $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow M$ обозначается $\dot{f}$. Через $\mathrm{T}M$ обозначим объединение $\bigcup_{a \in M} \mathrm{T}_a M$.

Систему координат (U, x) на M можно продолжить на систему координат $(\mathrm{T}U, (x, \dot{x}))$, полагая $x^i \dot{f} = x^i a$, $\dot{x}^i \dot{f} = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} x^i f$. Поскольку при гладкой замене координат $z(x)$ координаты

$\dot{z}^j = \dfrac{\partial z^j}{\partial x^i}\dot{x}^i$ преобразуются линейно, $\mathrm{T}M$ – μ-мерное векторное расслоение над M относительно проекции τM: $\mathrm{T}M \twoheadrightarrow M$, $\dot{f} \longmapsto f0$

Если h: $N \longrightarrow M$ – гладкое отображение, то формулой $\mathrm{T}h$: $\dot{f} \longmapsto (h\circ f)^{\bullet}$ определено линейное над h отображение $\mathrm{T}h$: $\mathrm{T}N \longrightarrow \mathrm{T}M$. Очевидно, T – функтор $\mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}$ и τ – естественное преобразование $\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathfrak{M}}$.

Предположим теперь, что задано расслоенное многообразие $N \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow M$ и обозначим $\mathrm{V}N := \{\dot{f}\in\mathrm{T}N,\ \mathrm{T}p(\dot{f}) = 0\}$ подмногообразие векторов касательных к слоям проекции p. Любая согласованная система координат $(V, (x, y))$ на N продолжается естественным образом на систему координат $(\mathrm{V}V, (x, y, \dot{y}))$ на $\mathrm{V}N$. Следовательно, $\mathrm{V}N$ – расслоенное многообразие над N относительно проекции τN: $\mathrm{V}N \twoheadrightarrow N$, $\dot{f} \longmapsto f0$ и V: $\mathfrak{M}_M \longrightarrow \mathfrak{M}_M$ – функтор и τ: $\mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathfrak{M}_M}$ – естественное преобразование.

§1.2. Расслоения джетов.

В этом и дальнейших параграфах M обозначает многообразие некоторой *к о н е ч н о й* размерности m. Через $\mathrm{T}^*M \twoheadrightarrow M$ обозначено кокасательное расслоение, через $\mathrm{S}^k\mathrm{T}^*M \twoheadrightarrow M$ – k-ая симметрическая степень кокасательного расслоения многообразия M.

Пусть $N \xrightarrow{p}\!\!\!\!\rightarrow M$ – ν-мерное расслоенное многообразие над M. Для $r\le\infty$ определим расслоенное многообразие r-джетов $\mathrm{j}^r N \twoheadrightarrow M$ следующим образом:

Пусть $a\in M$, пусть γ_1, γ_2 – два гладких локальных сечения проекции $N \xrightarrow{p} M$. Скажем, что сечения γ_1, γ_2 опраделяют один и тот же джет порядка r или r-джет в точке a, если $\gamma_1 a = \gamma_2 a$ и все частные производные порядка $<r+1$ функций $y^k \circ \gamma_1 \circ x^{-1}$, $y^k \circ \gamma_2 \circ x^{-1}$ в точке a совпадают для некоторой (и тогда уже для любой) согласованной системы координат $(V, (x,y))$ на N. Определяемый гладким локальным сечением γ r-джет в точке $a\in M$ обозначается $j_a^r\gamma$. Множество всех r-джетов в точке a обозначается $j_a^r N$. Через $j^r N$ обозначено объединение $\bigcup_{a\in M} j_a^r N$.

Согласованную систему координат $(V, (x,y))$ на N можно продолжить на $j^r V$ полагая $x^i(j_a^r\gamma) = x^i a$, $y^k(j_a^r\gamma) = y^k\gamma a$ и $y_I^k(j_a^r\gamma) = \left.\frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I}\right|_a (y^k\circ\gamma\circ x^{-1})$, где I – мультииндекс длины $|I|<$ $<r+1$, $r\le\infty$. Пусть L – общее число мультииндексов I длины $1<|I|<r+1$, т.е. $L = \frac{(r+m)!}{r!\,m!} - 1$ для $r<\infty$, $L = \infty$ для $r = \infty$. Из классической теоремы Бореля следует, что отображение $(x^i, y^k, y_I^k)\colon j^r V \longrightarrow V\times\mathbb{R}^{\nu L}$ биективно, причем при гладкой замене координат $x'(x)$, $y'(x,y)$ функции $y'^{\,l}_J$ гладко зависят от x, y, y_I^k, $|I|<|J|$. Следовательно, $j^r N = \bigcup_{a\in M} j_a^r N$ – расслоенное над M многообразие относительно проекции $\pi^r\colon j_a^r\gamma \longmapsto a$.

Многообразие $j^r N$ расслоено над любым $j^q N$, $q\le r$ относительно проекций $\pi_q^r\colon j_a^r\gamma \longmapsto j_a^q\gamma$. Если $f\colon N \longrightarrow N'$ – гладкое отображение над M, то отображение $j^r f\colon j^r N \longrightarrow j^r N'$, $j_a^r\gamma \longmapsto j_a^r(f\circ\gamma)$ гладко. Возникает функтор $j^r\colon \mathfrak{M}_M \longrightarrow \mathfrak{M}_M$ и естественные преобразования $\pi_q^r\colon j^r \longrightarrow j^q$ для $q\le r\le\infty$.

Заметим, что $j^0 N \cong N$, в дальнейшем $j^0 N$, N отождествлены и функтор j^0 считается тождественным.

В координатах, $y^k_I \circ \pi^r_q = y^k_I$, $|I| \le q \le r$, и $y^k_I \circ j^r f = \dfrac{d^{|I|}}{dx^I}(y^k \circ f)$, $|I| \le r$, где

$$\mathcal{D}_i = \frac{d}{dx^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum y^k_{Ii} \frac{\partial}{\partial y^k_I} \tag{2}$$

– *полная производная* по переменной x^i.

Определим естественное преобразование $\iota^{r,s}\colon j^{r+s} \longrightarrow j^r j^s$ полагая $\iota^{r,s}N\colon j^{r+s}N \longrightarrow j^r j^s N$, $j^{r+s}_\alpha \gamma \longrightarrow j^r_\alpha j^s \gamma$, где через $j^s \gamma$ обозначено локальное сечение $\alpha \longmapsto j^s_\alpha \gamma$ расслоения $j^s N$.

Коммутируют диаграммы

$$\begin{tikzcd} & j^{r+s}N \arrow[dl, "\pi^{r+s}_r N"'] \arrow[d, "\iota^{r+s}N"] \arrow[dr, "\pi^{r+s}_s N"] & \\ j^r N & j^r j^s N \arrow[l, "j^r \pi^s_0 N"] \arrow[r, "\pi^r_0 j^s N"'] & j^s N \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} j^{r+s+t}N \arrow[r, "\iota^{r,s+t}N"] \arrow[d, "\iota^{r+s,t}N"'] & j^r j^{s+t} N \arrow[d, "j^r \iota^{s+t}N"] \\ j^{r+s} j^t N \arrow[r, "\iota^{r+s} j^t N"'] & j^r j^s j^t N \end{tikzcd} \tag{3}$$

Координаты на $j^r j^s N$ естественно обозначать x^i, $y^k_{I,J}$, $|I| \le s+1$, $|J| \le r+1$. Имеют место формулы

$$x^i \circ \iota^{r,s} = x^i, \quad y^k_{I,J} \circ \iota^{r,s} = y^k_{IJ}.$$

Следующее утверждение общеизвестно, см. [20]. Однако, для бесконечномерных многообразий оно нуждается в новом доказательстве

1.1. Утверждение: *Существует естественный изоморфизм,* $r \le \infty$

$$\mathrm{V} \mathrm{j}^r N \cong \mathrm{j}^r \mathrm{V} N,$$

Доказательство: Построим расслоенное многообразие $W^r N \xrightarrow{q} M$ следующим образом: Элементами слоя $W^r_a N = (q^r)^{-1}\{a\}$ пусть являются классы эквивалентности отображений $\mathbb{R} \times U \xrightarrow{w} N$, где U - открытое подмножество в M и $w(t,b) \in N_b$ для всех $t \in \mathbb{R}$, $b \in U$, причем два таких отображения w_1, w_2 считаются эквивалентными, если в некоторой (и тогда уже в любой) системе координат (V, x, y) на N, согласованной с системой координат (pV, x) на M, $pV \ni a$ имеют место равенства

$$\frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I}\bigg|_a y^k \circ w_1(0,x) = \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I}\bigg|_a y^k \circ w_2(0,x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_0 \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I}\bigg|_a y^k \circ w_1(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_0 \frac{\partial^{|I|}}{\partial x^I}\bigg|_a y^k \circ w_2(t,x)$$

для $|I| < r+1$. Отобразим инъективно $W^r_a N \longrightarrow \mathrm{j}^r_a \mathrm{V} N$ сопоставляя классу эквивалентности отображения $\mathbb{R} \times U \xrightarrow{w} N$ джет $\mathrm{j}^r_a \tilde{w}$ векторного поля $\tilde{w}$, где $\tilde{w}_b$ - касательный вектор к кривой $w(-,b)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{j}^r N$, $t \longmapsto w(t,b)$, $b \in U$. Отобразим инъективно $W^r_a N \longrightarrow \mathrm{V}_a \mathrm{j}^r N$, сопоставляя классу эквивалентности отображения $\mathbb{R} \times U \xrightarrow{w} N$ вектор касательный к кривой $\mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{j}^r N$, $t \longmapsto \mathrm{j}^r_a w(t,-)$. Из классической теоремы Бореля следует, что оба отображения - изоморфизмы.

Нетрудно проверить коммутативность диаграмм

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] j^rVN \arrow[rr, phantom, "\cong"] \arrow[dr, "\pi^r_0VN"'] & & Vj^rN \arrow[dl, "V\pi^r_0N"] \\ & VN & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] j^rVN \arrow[rr, phantom, "\cong"] \arrow[dr, "j^r\tau N"'] & & Vj^rN \arrow[dl, "\tau j^rN"] \\ & j^rN & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} j^{r+s}VN \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d, "\iota^{r,s}VN"'] & Vj^{r+s}N \arrow[d, "V\iota^{r,s}N"] \\ j^rj^sVN \cong j^rVj^sN & \cong Vj^rj^sN \end{tikzcd} \tag{4}$$

1.2: Утверждение: *Функторы* $j^r\colon \mathfrak{M}_M \longrightarrow \mathfrak{M}_M$, $r\le\infty$, *сохраняют конечные произведения.*

Доказательство: $j^r(X\times_M Y)\cong j^rX\times_M j^rY$ посредством одно-однозначного соответствия $j^r_a(\gamma,\delta)\longleftrightarrow(j^r_a\gamma, j^r_a\delta)$.

1.3. Теорема: *Функторы* $j^r\colon \mathfrak{M}_M \longrightarrow \mathfrak{M}_M$, $r\le\infty$, *сохраняют все уравнители, сохраняемые функтором* V.

Доказательство: Пусть сначала $r<\infty$. Используем следующую лемму (ср. 1.9.9. [20]):

1.4. Лемма: $\pi^r_{r-1}N\colon j^rN\longrightarrow j^{r-1}N$ *– аффинное расслоение ассоциированное с векторным расслоением* $VN\otimes S^rT^*M$. *Для гладкого* $f\colon N\longrightarrow N'$ *над* M, $j^rf\colon j^rN\longrightarrow j^rN'$ *– аффинное над* $j^{r-1}f\colon j^{r-1}N\longrightarrow j^{r-1}N'$ *отображение, ассоциированное с линейным отображением* $Vf\otimes S^rT^*M$.

В формулировке леммы через $VN \otimes S^rT^*M$ обозначено индуцированное расслоение $(\pi_0^{r-1}N)^*VN \otimes (\pi^{r-1}N)^*S^rT^*M$. Доказательство леммы совпадает с приведенным в [20] для конечномерного N.

Доказательство теоремы ведется по индукции: Случай $r = 0$ тривиален. Предположим, что $j^{r-1}E \hookrightarrow j^{r-1}X \rightrightarrows j^{r-1}Y$, $VE \hookrightarrow VX \rightrightarrows VY$, – уравнители для некоторого $r-1$. Рассмотрим диаграмму

$$
\begin{array}{ccccc}
VE\otimes S^rT^*M & \hookrightarrow & VX\otimes S^rT^*M & \rightrightarrows & VY\otimes S^rT^*M \\
\circlearrowright & & \circlearrowright & & \circlearrowright \\
j^rE & \hookrightarrow & j^rX & \rightrightarrows & j^rY \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
j^{r-1}E & \hookrightarrow & j^{r-1}X & \rightrightarrows & j^{r-1}Y
\end{array}
$$

где нижняя и верхняя строки – уравнители в силу предположений и проективности модулей $S^rT^*_aM$, $a\in M$. Изогнутыми стрелками обозначено эффективное и транзитивное действие групп $V_{\pi_0^r\vartheta}E \otimes S^rT^*_{\pi^r\vartheta}M$ на слоях $(\pi^r_{r-1})^{-1}(\pi^r_{r-1}\vartheta)$, $\vartheta\in j^rE$. Нужный нам факт теперь легко доказывается методом диаграммного поиска. (см. в [20]).

Для $r = \infty$ имеем $j^\infty \operatorname{eq}(f,g) \cong \lim j^r \operatorname{eq}(f,g) \cong \lim \operatorname{eq}(j^rf, j^rg) \cong \operatorname{eq}(\lim j^rf, \lim j^rg) \cong \operatorname{eq}(j^\infty f, j^\infty g)$.

1.5. Определение: Назовем *регулярным* любой уравнитель, сохраняемый функтором V.

Теорему 1.3 можно ныне сформулировать и так: *Функторы* j^r, $r\le\infty$ *сохраняют все регулярные уравнители.*

Сказанное легко распространяется и на более общие категорные конструкции: конечные пределы. О конечных пределах известно (см. [15,16]), что они выражаются посредством конечных произведений и уравнителей. Из утверждений 1.2 и 1.3 тогда немедленно следует, что *функторы* j^r *сохраняют все конечные пределы, сохраняемые функтором* V. Естественно называть такие пределы *регулярными*. В настоящей работе нам из конечных пределов потребуются только универсальные квадраты.

§1.3. $\mathcal{F}M$-модули и формы

По известной теореме Милнора любое конечномерное T_2-многообразие M со счетным базисом с точностью до изоморфизма определяются своей $\mathbb{R}$-алгеброй гладких функций $\mathcal{F}M$. По теореме Уитни предположения теоремы эквивалентны вложимости многообразия M в $\mathbb{R}^\infty$ в виде замкнутого подмногообразия. Последнее условие легко перенести на бесконечномерный случай.

Итак, назовем многообразием типа Уитни, или W-*многообразием*, гладкое многообразие, которое диффеоморфно замкнутому подмногообразию многообразия $\mathbb{R}^\infty$. Следовательно, все W-многообразия паракомпактны и замкнутое подмногообразие W-многообразия само является W-многообразием. Для W-многообразий справедлива и теорема о разбиении единицы, которую нетрудно доказать, рассмотрев структуру открытых подмножеств в $\mathbb{R}^\infty$.

Кроме того, очевидно, что функторы V и j^r сопоставляют W-многообразиям W-многообразия. Итак, уместно следующее

Соглашение: Все многообразия считаются W-многообразиями. В частности, $\mathcal{M}$ – категория W-многообразий, $\mathcal{M}_M$ – категория расслоенных W-многообразий над W-многообазием M.

1.6. **Теорема** (Милнора): *Функтор* $\mathcal{F}\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}\text{-Alg}$ *биективен на морфизмах.*

Доказательство (ср. [4]): Для точки $a\in M$ W-многообразия $M\in\mathcal{M}$ обозначим через ev_a гомоморфизм $\mathbb{R}$-алгебр $\mathcal{F}M \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto fa$. Следуя [4] докажем сначала, что гомоморфизмы $H\colon \mathcal{F}M \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-алгебр исчерпываются отображениями ev_a, $a\in M$.

Напомним, что для $f\in\mathcal{F}M$ обозначен через $A(f) \subseteq M$ прообраз числа $H(f)\in\mathbb{R}$ при отображении $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$. По [4] множества $A(f)$ замкнуты и образуют центрированную систему. Рассмотрим семейство функций $m^i\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty \xrightarrow{pr^i} \mathbb{R}$ и положим $a^i := Hm^i \in \mathbb{R}$, $a := (a^i) \in \mathbb{R}^\infty$.

Пусть $f \in \mathcal{F}M$ – любая функция. Поскольку $A(m^i) = M \cap \{(x^j)\in\mathbb{R}^\infty;\ x^i=a^i\}$, и $A(f)\cap A(m^1)\cap\ldots\cap A(m^n) \neq \emptyset$ для любого $n\in N$, то в $A(f)$ содержится последовательность точек $a_n = (a_n^i)$, $a_n^i = a^i$ для $i\le n$. Однако, эта последовательность сходится к точке a в топологии пространства $\mathbb{R}^\infty$. Следовательно, $a \in \overline{A(f)} = A(f) \subseteq M$ и $f(a) = H(f)$, что и требовалось доказать. Единственность точки a очевидна.

Обозначим через Γ функтор $\mathcal{V}_M \longrightarrow \mathcal{F}M\text{-Mod}$ сопоставляющий векторному расслоению $E \xrightarrow{\xi} M$ $\mathcal{F}M$-модуль $\Gamma(\xi) = (M,E)_M$ его сечений. Хорошо известно, см. [21], что в конечномерном случае функтор Γ биективен на морфизмах. Это и служит необходимой предпосылкой исследования линейных дифференциальных операторов алгебраическими средствами в работах А. М. виноградова. Однако, бесконечномерные векторные расслоения это свойство утрачивают и для его восстановления нужно ввести в $\mathcal{F}M$-модули $\Gamma(\xi)$ дополнительную структуру.

Для этого в [24 - 30] использованы классы фильтраций в $\Gamma(\xi)$, индуцированных представлением (неоднозначным) многообразия M в виде обратного предела $M = \lim M_i$ цепочки конечномерных многообразий. Рассматриваемые операторы предполагаются согласованными с фильтрацией.

В этой работе представимость многообразий в виде предела конечномерных не постулируется. Предложена другая дополнительная структура. Дело в том, что особенности бесконечномерного случая вызваны не столько бесконечномерностью многообразия M, сколько бесконечномерностью самих слоев векторных расслоений.

Действительно, если $E \twoheadrightarrow M$ - конечномерное векторное расслоение и многообразие M паракомпактно, то независимо от его размерности имеет место короткая точная последовательность

$$\mu_a \Gamma(E) \hookrightarrow \Gamma(E) \xrightarrow{ev_a} E_a, \tag{5}$$

где μ_a означает идеал в $\mathcal{F}M$ функций аннулирующихся в точке $a \in M$ и ev_a: $\gamma \longmapsto \gamma(a)$. Отсюда уже прямо следует, что любой гомоморфизм $\mathcal{F}M$-модулей $\Gamma(E_1) \longrightarrow \Gamma(E_2)$ индуцирован единственным отображением $E_1 \longrightarrow E_2$ [rgs].

Если же векторное расслоение $E \xrightarrow{\xi} M$ бесконечномерно, то последовательность (5) перестает быть точной. Препятствует тому отсутствие "эффективного" базиса в векторном пространстве $\mathbb{R}^\infty$.

Обозначим через $\mathbb{R}^{(\varkappa)}$ прямую сумму $\varkappa$ экземпляров пространства $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^{(\infty)}$ можно представить как подпространство в $\mathbb{R}^{\infty}$ состоящее из последовательностей с лишь конечным числом ненулевых членов. Любое линейное отображение $h\colon \mathbb{R}^{(\varkappa)} \longrightarrow \mathbb{R}^{\lambda}$ тогда описывается формулой (1), в которой, однако, для соответствующей матрицы A может не выполняться условие конечности строк.

Снабдим пространство $\mathbb{R}^{\infty}$ любой T_2-топологией, для которой $\mathbb{R}^{(\infty)}$ – плотное подмножество в $\mathbb{R}^{\infty}$. Для определенности, пусть $\dot{\mathbb{R}}$ обозначает пространство $\mathbb{R}$ с дискретной топологией. Произведение $\dot{\mathbb{R}}^{\varkappa}$ является дискретным пространством для $\varkappa<\infty$. В $\dot{\mathbb{R}}^{\infty}$ же топология нетривиальная: сходятся те и только те последовательности $\{(x_j^i)_{i=1}^{\infty}\}_{j=1}^{\infty}$, для которых все последовательности $(x_j^i)_{i=1}^{\infty}$ стабилизируются, т.е. постоянны, начиная с некоторого индекса j_i. Назовем *∞-линейным отображением* $\mathbb{R}^{\varkappa} \longrightarrow \mathbb{R}^{\lambda}$ любое непрерывное линейное отображение $\dot{\mathbb{R}}^{\varkappa} \longrightarrow \dot{\mathbb{R}}^{\lambda}$.

Из сказанного следует>

1.7. **Лемма:** *Любое ∞-линейное отображение $\mathbb{R}^{\varkappa} \xrightarrow{h} \mathbb{R}^{\lambda}$ описывается формулой* (1)

$$(x^i)_{i=1}^{\varkappa} \xmapsto{h} \left[\sum_{i=1}^{\varkappa} A_i^j x^i\right]_{j=1}^{\lambda},$$

где A – матрица с λ строками длины $\varkappa$, лишь конечное число элементов которых не равно нулю (если $\varkappa = \infty$).

Доказательство: Осталось проверить условие конечности строк матрицы A. Допустим, что существует j так, что $A_j^i \neq 0$ для бесконечного числа индексов i. Положим $x_n^i = 1/A_j^i$ если $A_j^i \neq 0$,

$i<n$, положим $x_n^i = 0$ в противном случае и, наконец, положим $x_n = (x_n^i) \in \mathbb{R}^\infty$, $n \le \infty$. Имеем тогда $\lim x_n = x_\infty$, но $\lim (h(x_n)) = \sum A_i^j x^i$ не сходится.

Множество ∞-линейных отображений $\mathbb{R}^\varkappa \longrightarrow \mathbb{R}^\lambda$ обозначим просто $\mathrm{Hom}\ (\mathbb{R}^\varkappa, \mathbb{R}^\lambda)$, и символ ∞ в слове ∞-линейный будем часто опускать. Отметим свойство рефлексивности: $\mathrm{Hom}\ (\mathbb{R}^\varkappa, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{(\varkappa)}$, поэтому $\mathrm{Hom}\ (\mathrm{Hom}\ (\mathbb{R}^\varkappa, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\varkappa$.

∞-линейные отображения естественно положить в основу определения тензорных произведений: Зафиксировав некоторый изоморфизм $\aleph_0 \cdot \aleph_0 \xrightarrow{\sigma} \aleph_0$, мы можем формулой $(x^i) \otimes (y^j) = (u^k)$, где $u^{\sigma(i,j)} = x^i y^j$, определить ∞-линейное в каждой переменной тензорное умножение $\mathbb{R}^\infty \otimes \mathbb{R}^\infty \xrightarrow{\otimes} \mathbb{R}^\infty$. Для $\mathbb{R}^\varkappa \otimes \mathbb{R}^\lambda := \mathbb{R}^{\varkappa\lambda}$ тогда имеет место изоморфизм $\mathrm{Hom}\ (\mathbb{R}^\varkappa \otimes \mathbb{R}^\lambda, \mathbb{R}^\mu) \cong \mathrm{Hom}\ (\mathbb{R}^\varkappa, \mathrm{Hom}\ (\mathbb{R}^\lambda, \mathbb{R}^\mu))$.

Снабдим модули $\Gamma(E)$ топологией индуцированной семейством отображений $\Gamma(E) \xrightarrow{\mathrm{ev}_a} E_a \cong \mathbb{R}^\infty \xrightarrow{\mathrm{id}} \dot{\mathbb{R}}^\infty$, т.е. топологией поточечной сходимости (в слоях $\dot{\mathbb{R}}^\infty$). Обозначим эти топологические модули временно через $\dot{\Gamma}(E)$.

Заметим, что локальная тривиализация $\xi^{-1}U \cong U \times \mathbb{R}^\infty$ векторного расслоения ξ определяет локальный базис сечений $e_i \in \Gamma(\xi|_U)$, в котором сечение $s \in \Gamma(\xi|_U)$ выражается посредством бесконечного ряда $s = \sum s^i e_i$, сходящегося в $\dot{\Gamma}(\xi|_U)$. Отсюда следует, что имеет место короткая точная последовательность

$$\overline{\mu_a \Gamma(E)} \hookrightarrow \dot{\Gamma}(E) \xrightarrow{\mathrm{ev}_a} E_a, \tag{6}$$

где черта $\overline{}$ означает замыкание в $\dot{\Gamma}(E)$. Отсюда прямо следует

1.8. Лемма: *Любой непрерывный гомоморфизм $\mathcal{F}M$-модулей $H\colon \dot\Gamma(E) \longrightarrow \dot\Gamma(E')$ индуцирован единственным отображением $h\colon E \longrightarrow E'$.*

Доказательство: Отображениз слоев $h_a\colon E_a \longrightarrow E'_a$ определяются коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccc}
\overline{\mu_a\Gamma(E)} & \hookrightarrow & \dot\Gamma(E) & \xrightarrow{ev_a} & E_a \\
\downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h_a} \\
\overline{\mu_a\Gamma(E')} & \hookrightarrow & \dot\Gamma(E') & \xrightarrow{ev_a} & E'_a
\end{array}$$

Тогда $h\circ\gamma = H(\gamma)$ для любого сечения γ. Гладкость отображения h вытекает из того, что оно переводит гладкие сечения в гладкие сечения.

Аналогично конечномерному случаю устанавливается и короткая точная последовательность

$$\overline{\mu_a^{k+1}\ \Gamma(E)} \hookrightarrow \dot\Gamma(E) \xrightarrow{j_a^k} j_a^k E,$$

откуда выводится, как и в [30]:

Любой ∞-линейный дифференциальный оператор k-ого порядка $\dot\Gamma(E_1) \longrightarrow \dot\Gamma(E_2)$ индуцирован единственным отображением $j^k E_1 \longrightarrow E_2$.

Следовательно, уместно следующее

· **Соглашение:** В дальнейшем $\mathcal{F}M$-модули $\Gamma(E)$ рассматриваются как топологические и отождествляются с соответствующими топологическими $\mathcal{F}M$-модулями $\dot{\Gamma}(E)$. Кроме того, все $\mathcal{F}M$-гомоморфизмы и дифференциальные операторы в алгебраическом смысле [30] считаются непрерывными.

Сочетание алгебраической и топологической структуры в $\mathcal{F}M$-модулях $\Gamma(E)$ естественно называть ∞-линейний структурой. В ней приобретают привычный смысл бесконечные суммы типа формулы (2) для полной производной. Для нас она послужит средством введения дифференциальных форм.

1.9. Определение: Для бесконечномерного многообразия X определим $\mathcal{F}X$-модуль ΛX гладких форм как

$$\Lambda X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X} (TX, \mathcal{F}X).$$

Его p-кратную внешнюю степень обозначим

$$\Lambda^p X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X} (\Lambda^p TX, \mathcal{F}X).$$

Из леммы 1.8 вытекает следующее описание гладких форм. Форма $\omega\in\Lambda X$ – это сопоставление любой точке $\alpha\in X$ элемента $\omega_\alpha \in T^*_\alpha X := \mathrm{Hom}\,(T_\alpha X, \mathbb{R})$ такое, что отображение $\alpha \longmapsto \omega_\alpha(\Xi_\alpha)$ гладко для любого гладкого векторного поля Ξ на X.

Для векторных расслоений существует, помимо τ, еще одно естественное преобразование, $\delta\colon V \longrightarrow \mathrm{Id}$ функторов $\mathcal{V}_M \longrightarrow \mathcal{V}_M$.

1.10. Определение: Пусть $B \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow M$ – векторное расслоение. Определим $\delta B\colon \mathrm{V}B \longrightarrow B$ при помощи естественных изоморфизмов слоев $\mathrm{V}_b B \cong \mathrm{T}_b B_a \cong B_a$, для $b \in B_a$.

Коммутирует диаграмма .

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{j}^r \mathrm{V}N & \cong & \mathrm{V}\mathrm{j}^r N \\ {\scriptstyle \mathrm{j}^r \delta N} \searrow & & \swarrow {\scriptstyle \delta \mathrm{j}^r N} \\ & \mathrm{j}^r N & \end{array} \tag{6}$$

В стандартных координатах $x^i \circ \delta = x^i$, $y^k \circ \delta = \dot{y}^k$.

ГЛАВА II

Здесь рассмотрены комонада $\mathbb{J} = (j^{\infty}, \pi, \iota)$ в категории $\mathcal{M}_M$ и связанные с ней категории $\mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$ Эйленберга-Мура и $\mathcal{M}_{\mathbb{J}}^M$ Клейсли.

Установлено, что объекты категории $\mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$ – дифференциальные уравнения. Для объекта $\mathcal{X}\in\mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$ введена комонада $\mathbb{J}_{\mathcal{X}} = (j^{\infty}_{\mathcal{X}}, \pi_{\mathcal{X}}, \iota_{\mathcal{X}})$, лежащая в основе $\mathcal{C}$-дифференциального исчисления [24 – 30].

Вернемся к диаграммам (1.3). Непосредственно видно, что для естественных преобразований $\pi = \pi^{\infty,0}\colon j^{\infty} \longrightarrow \mathrm{id}$, $\iota = \iota^{\infty,\infty}\colon j^{\infty} \longrightarrow j^{\infty}j^{\infty}$. мы получаем коммутативные диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & j^{\infty}Y \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\iota Y"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
j^{\infty}Y & j^{\infty}j^{\infty}Y \arrow[l, "\pi j^{\infty}Y"] \arrow[r, "j^{\infty}\pi Y"'] & j^{\infty}Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
j^{\infty}Y \arrow[r, "\iota Y"] \arrow[d, "\iota Y"'] & j^{\infty}j^{\infty}Y \arrow[d, "\iota j^{\infty}Y"] \\
j^{\infty}j^{\infty}Y \arrow[r, "j^{\infty}\iota Y"'] & j^{\infty}j^{\infty}j^{\infty}Y.
\end{tikzcd}
\qquad (1)
$$

Но это в точности означает, что тройка $\mathbb{J} = (j^{\infty}, \pi, \iota)$ представляет собой комонаду в категории $\mathcal{M}_M$. Отсюда следует, что определена категория Эйленберга-Мура $\mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$ [6] $\mathbb{J}$-коалгебр и $\mathbb{J}$-гомоморфизмов. Дадим соответствующие определения [6,15,16]:

$\mathbb{J}$-коалгебра – это пара (X,ξ), где $X\in\mathcal{M}_M$ и ξ – $\mathcal{M}_M$-морфизм $X \longrightarrow j^{\infty}X$ такой, что коммутируют диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & j^{\infty}X \arrow[d, "\pi X"] \\
 & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\xi"'] & j^{\infty}X \arrow[d, "\iota X"] \\
j^{\infty}X \arrow[r, "j^{\infty}\xi"'] & j^{\infty}j^{\infty}X.
\end{tikzcd}
\qquad (2)
$$

$\mathbb{J}$*-гомоморфизм* $(X_1,\xi_1) \longrightarrow (X_2,\xi_2)$ - это $\mathfrak{M}_M$-морфизм $X_1 \longrightarrow X_2$, для которого коммутирует диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{\ f\ } & X_2 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \xi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \xi_2} \\ j^{\infty}X_1 & \xrightarrow[\ j^{\infty}f\ ]{} & j^{\infty}X_2 . \end{array} \tag{3}$$

Заметим, что пара $\mathfrak{F}X = (j^{\infty}X, \iota X)$ является $\mathbb{J}$-коалгеброй для любого $X \in \mathfrak{M}_M$. Называется она *косвободной* $\mathbb{J}$*-коалгеброй*. Общеизвестно (см. [6,15,16]), что косвободная коалгебра обладает следующим универсальным свойством:

Для любой $\mathbb{J}$*-коалгебры* $\mathcal{E} = (E,e) \in \mathfrak{M}_M^{\mathbb{J}}$ *и любого* $\mathfrak{M}_M$*-морфизма* $f\colon E \longrightarrow X$ $\mathfrak{M}_M$*-морфизм* $f^{\#} = j^{\infty}f \circ e$ *представляет собой единственный* $\mathbb{J}$*-гомоморфизм* $(E,e) \longrightarrow (j^{\infty}X, \iota X)$ *такой, что* $\pi \circ f^{\#} = f$.

Договоримся обозначать через $[\ ,\ ]_M$ множества морфизмов в $\mathfrak{M}_M^{\mathbb{J}}$ в отличие от множеств $(\ ,\ )_M$ морфизмов в $\mathfrak{M}_M$. Итак, имеем изоморфизм сопряжения

$$(E,\ X)_M \ \cong\ [\mathcal{E},\ \mathfrak{F}X]_M \tag{4}$$

Теперь мы отождествим $\mathbb{J}$-коалгебры с бесконечно продолженными системами уравнений в частных производных с многообразием M в качестве "многообразия независимых переменных".

2.1: **Определение:** Определим дифференциальное уравнение как регулярный уравнитель (см. определение 1.4)

$$E \xhookrightarrow{\ e\ } j^{r}Y \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Z \tag{5}$$

в категории $\mathfrak{M}_M$.

Если (x^i, y^k) – согласованные локальные координаты на расслоенном многообразии $Y \longrightarrow M$, y^k_I – стандартные джетовые координаты в слоях $j^r_\alpha Y$ и $l = 1,\dots,\dim Z$, то уравнителем (5) описывается система уравнений r-ого порядка, $r<\infty$, $(|I|<r)$:

$$f^l(\dots,x^i,\dots,y^k,\dots,y^k_I,\dots)=g^l(\dots,x^i,\dots,y^k,\dots,y^k_I,\dots),$$

Решение уравнения (5), скажем, $y^k = \gamma^k(\dots,x^i,\dots)$, тогда представляется в виде сечения $\gamma\in\Gamma(Y)$ такого, что $f\circ j^r\gamma = g\circ j^r\gamma$ т.е. такого, что $j^r\gamma$ факторизуется через e (по универсальному свойству уравнителя).

2.2. **Определение:** *Бесконечное продолжение* уравнения (5) – это регулярный уравнитель стрелок $j^\infty f\circ\iota^{\infty,r}Y$, $j^\infty f\circ\iota^{\infty,r}Y$:

$$E^\infty \xhookrightarrow{e^\infty} \left[j^\infty Y \xrightarrow{\iota^{\infty,r}Y} j^\infty j^r Y \overset{j^\infty f}{\underset{j^\infty g}{\rightrightarrows}} j^\infty Z \right], \tag{6}$$

существует ли.

Диаграммой (6) переводится на язык джетов известное [20,30] определение бесконечного продолжения дифференциального уравнения как уравнения вместе со всеми его дифференциальными следствиями

$$\frac{d^{|I|}}{dx^I} f^l = \frac{d^{|I|}}{dx^I} g^l$$

где I – мультииндекс и d/dx^i – полные производные задаваемые формулой (1.2).

Нетрудно убедиться, что E и E^∞ имеют одни и те же решения в выше указаном смысле.

Бесконечно продолженные уравнения – это объекты категории $\mathcal{DE}$ А. М. Виноградова [25 – 27]. Сопоставим такому бесконечно продолженному уравнению E^∞ некоторую $\mathbb{J}$-коалгебру следуюжим способом:

В силу универсальных свойств уравнителей e^∞, $j^\infty e$ (см. 1.3) существует единственная стрелка $e^*\colon E^\infty \longrightarrow j^\infty E$, пополняющая диаграмму

$$\begin{tikzcd}
E^\infty \arrow[r, "e^\infty"] \arrow[d, dashed, "e^*"'] & j^\infty Y \arrow[d, "\iota^\infty, r_Y"] & \\
j^\infty E \arrow[r, "j^\infty e"'] & j^\infty j^r Y \arrow[r, shift left, "j^\infty f"] \arrow[r, shift right, "j^\infty g"'] & j^\infty Z.
\end{tikzcd}$$

Возникший квадрат, как нетрудно убедиться, универсален, и то же самое, в силу регулярности уравнителей, относится к его образу под действием функтора j^∞. Отсюда немедленно вытекает существование (единственной) стрелки $\tilde{e}$ пополняющей диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & j^\infty E \arrow[rr, "j^\infty e"] \arrow[dd, "\iota E"] & & j^\infty j^r Y \arrow[dd, "\iota j^\infty Y"] \\
E^\infty \arrow[ur, "e^*"] \arrow[rr, "e^\infty"] \arrow[dd, dotted, "\tilde{e}"'] & & j^\infty Y \arrow[ur, "\iota Y"] \arrow[dd, "\iota Y"] & \\
 & j^\infty j^\infty E \arrow[rr, "j^\infty j^\infty e"] & & j^\infty j^\infty j^r Y \\
j^\infty E^\infty \arrow[ur, "j^\infty e^*"] \arrow[rr, "j^\infty e^\infty"'] & & j^\infty j^\infty Y \arrow[ur, "j^\infty \iota Y"'] &
\end{tikzcd}$$

2.3. **Утверждение:** $(E^\infty, \tilde{e})$ – *$\mathbb{J}$-коалгебра.*

Доказательство: Передний квадрат этой диаграммы означает, что $(E^\infty, \tilde{e})$ – подкоалгебра косвободной $\mathbb{J}$-коалгебры $(j^\infty Y, \iota Y)$ при том предположении, что $(E^\infty, \tilde{e})$ – $\mathbb{J}$-коалгебра. Однако, известно, (см.

3.1.10 [16]), что в этих обстоятельствах $(E^{\infty},\tilde{e})$ – действительно $\mathbb{J}$-коалгебра, если только e^{∞}, $j^{\infty}j^{\infty}e^{\infty}$ – мономорфизмы, что в нашем случае и выполнено.

С другой стороны, любая $\mathbb{J}$-коалгебра (E,e) представляет собой уравнение $\iota E = j^{\infty}e$ задаваемое абсолютным уравнителем Бэка

$$E \xhookrightarrow{e} j^{\infty}E \overset{\iota E}{\underset{j^{\infty}E}{\rightrightarrows}} j^{\infty}j^{\infty}E.$$

[16] Это уравнение бесконечно продолжено: $eq\ (j^{\infty}\iota E\circ\iota E,\ j^{\infty}j^{\infty}e\circ\iota E) = eq\ (\iota j^{\infty}E\circ\iota E,\ \iota j^{\infty}E\circ j^{\infty}e) \cong eq\ (\iota E,\ j^{\infty}e)$, так как $\iota j^{\infty}E$ – мономорфизм.

Ответим на следующий естественный вопрос: Что такое решение уравнения на языке $\mathbb{J}$-коалгебр ?

Начнем со следующего замечания: Изоморфизм $j^{\infty}\mathrm{id}\colon M \longrightarrow j^{\infty}M$ превращает M в $\mathbb{J}$-коалгебру. Коалгебра $(j^{\infty}Y,\iota Y)$ косвободна и отсюда следует, что $\mathbb{J}$-гомоморфизмы $M \longrightarrow j^{\infty}Y$ – это в точности продолжения $j^{\infty}\gamma$ глобальных сечений $\gamma \in (M,Y)_M$. Из [16], loc. cit. в свою очередь следует, что $\mathbb{J}$-гомоморфизмы $M \longrightarrow (E^{\infty},\tilde{e})$ – это в точности решения уравнения E^{∞} т.е. уравнения E.

Следовательно, композиция решения с $\mathbb{J}$-гомоморфизмом – опять решение. Отсюда вывод, что $\mathbb{J}$-гомоморфизмы представляют собой естественные морфизмы категории дифференциальных уравнений.

Итак, и $\mathcal{DE}$ и $\mathcal{M}^{\mathbb{J}}_M$ удовлетворяют условиям 1 – 4 А.М.Виноградова [26,27] на "разумную" категорию дифференциальных уравнений. В следующей части объясним истинное соотношение $\mathcal{DE}$ и $\mathcal{M}^{\mathbb{J}}_M$.

Обозначим через $\mathcal{DE}_M$ ограничение категории $\mathcal{DE}$ (объектов и морфизмов) на фиксированное базисное многообразие M и покажем, что $\mathcal{DE}_M \cong \mathcal{M}^{\mathbb{J}}_M$. Напомним, что объект $\mathcal{DE}_M$ – это многообразие

$E\in\mathcal{M}_M$ вместе с m-мерным Фробениусовым распределением, проектирующимся без вырождения на базисное многообразие M. Таким объектом является например бесконечно продолженное уравнение вместе с распределением Картана, определяемым как объединение всех касательных плоскостей к формальным решениям уравнения E. $\mathcal{DE}_M$-морфизм — это сохраняющее распределения отображение многообразий.

На $\mathbb{J}$-языке распределение Картана описывается как отображение $E \xrightarrow{e^1} j^1E$, где e^r, $r\le\infty$ здесь и в дальнейшем обозначает сложение $E \xrightarrow{e} j^\infty E \xrightarrow{\pi^{\infty,r}} j^rE$.

2.4. Утверждение: *Отображение* $f\colon E_1 \longrightarrow E_2$ $\mathbb{J}$*-коалгебр* (E_1,e_1), (E_2,e_2) *является* $\mathbb{J}$*-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда оно сохраняет распределения Картана:* $j^1f\circ e_1^1 = e_2^1\circ f$.

Доказательство: Опираясь на коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e_1^{r+1}"] \arrow[dd, "e_1^r"'] & & E_2 \arrow[dr, "e_2^{r+1}"] \arrow[dd, "e_2^r"' near start] & \\
& j^{r+1}E_1 \arrow[rr, "j^{r+1}f" near start] \arrow[dd, hook, "\iota^{r,1}E_2" near end] & & j^{r+1}E_2 \arrow[dd, hook, "\iota^{r,1}E_2"] \\
j^rE_1 \arrow[rr, "j^rf"' near end] \arrow[dr, "j^re_1^1"'] & & j^rE_2 \arrow[dr, "j^re_2^1"'] & \\
& j^rj^1E_1 \arrow[rr, "j^rj^1f"'] & & j^rj^1E_2
\end{tikzcd}$$

и инъективность вложения $\iota^{r,1}E_2$ без труда проверим по индукции, что равенство $j^1f\circ e_1^1 = e_2^1\circ f$ влечет за собой равенство $j^rf\circ e_1^r = e_2^r\circ f$ для $r<\infty$. Равенство $j^\infty f\circ e_1^\infty = e_2^\infty\circ f$ затем следует из того, что $j^\infty E_2 = \lim j^rE_2$ в категории $\mathcal{M}_M$. Обратное утверждение очевидно.

Ограничение на фиксированное многообразие M для многих аспектов теории [24 - 30] несущественно. В последующем абзаце мы коснемся вопроса о инфинитезимальных симметриях уравнений.

Функтор $V\colon \mathfrak{M}_M \longrightarrow \mathfrak{M}_M$ естественно продолжается на функтор $V\colon \mathfrak{M}_M^{\mathbb{J}} \longrightarrow \mathfrak{M}_M^{\mathbb{J}}$ сопоставляющий $\mathbb{J}$-коалгебре (X,ξ) пару $(VX, j^{\infty}VX \cong Vj^{\infty}X \xrightarrow{V\xi} VX)$, которая, как непосредственно следует из коммутативности диаграмм (4), представляет собой $\mathbb{J}$-коалгебру. Функтор $V\colon \mathfrak{M}_M^{\mathbb{J}} \longrightarrow \mathfrak{M}_M^{\mathbb{J}}$ по сути дела совпадает с функтором универсальной линеаризации А. М. Виноградова (см. [25,30]).

Оператор универсальной линеаризации участвует в описании алгебры инфинитезимальных симметрий дифференциального уравнения, Установлено, что инфинитезимальные симметрии представляют собой вертикальные векторные поля удовлетворяющие некоторому дополнительному условию, которое на языке $\mathbb{J}$-коалгебр принимает следующий вид:

2.3. **Утверждение:** *Для уравнения* $(X,\xi)\in\mathfrak{M}_M^{\mathbb{J}}$, *вертикальное векторное поле* $\varphi\colon X \longrightarrow VX$ *является инфинитезимальной симметрией тогда и только тогда, когда* φ *–* $\mathbb{J}$*-гомоморфизм* $(X,\xi) \longrightarrow V(X,\xi)$, *то есть, когда коммутирует диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "\xi_1"'] & & VX \arrow[d, "V\xi_1"] \\
& & Vj^1X \\
j^1X \arrow[r, "j^1\varphi"'] & j^1VX \arrow[ur, leftrightarrow, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Доказательство: Диаграмма выражает факт коммутирования вертикального поля φ с полями распределения Картана (см. [25,30]), остальное вытекает из утверждения 2.4.

§2.1. Категория Клейсли и дифференциальные операторы

Начнем со следующего замечания: С теоретико-категорной точки зрения, стандартное определение нелинейных дифференциальных операторов в точности следует схеме построения категории Клейсли [11] $\mathcal{M}^M_{\mathbb{J}}$ комонады $\mathbb{J}$. В этой работе мы используем только самые простые факты о категории Клейсли, подробности см. в [11,16].

Для двух многообразий $X,Y\in\mathcal{M}_M$ морфизм Клейсли $X \xrightarrow{\varphi} Y$ определяется как $\mathcal{M}_M$-морфизм $j^\infty X \xrightarrow{\varphi} Y$. Если $Y \xrightarrow{\psi} Z$ - другой морфизм Клейсли, то сложение Клейсли $\psi\odot\varphi$: $X \longrightarrow Z$ определяется как композиция

$$j^\infty X \xhookrightarrow{\iota X} j^\infty j^\infty X \xrightarrow{j^\infty\varphi} j^\infty Y \xrightarrow{\psi} Z,$$

Однако, в дифференциальной геометрии принято $\mathcal{M}_M$-морфизм $j^\infty X \xrightarrow{\varphi} Y$ рассматривать как (нелинейный) дифференциальный оператор $\Gamma(X) \longrightarrow \Gamma(Y)$, сопоставляющий сечению $\gamma \in \Gamma(X)$ сечение $\varphi\circ j^\infty\gamma \in \Gamma(X)$. Сложение Клейсли тогда соответствует стандартному сложению дифференциальных операторов:

$$\gamma \longmapsto \psi\circ j^\infty(\varphi\circ j^\infty\gamma).$$

"Тождественные" морфизмы Клейсли - это $X \xrightarrow{\pi X} X$. Категорию Клейсли объектов $X\in\mathcal{M}_M$ и морфизмов Клейсли между ними обозначим $\mathcal{M}^M_{\mathbb{J}}$. Множество морфизмов Клейсли, т.е. дифференциальных операторов $X \longrightarrow Y$ будем обозначать $\{X,Y\}_M$. Отметим использование однобокой стрелки для обозначения морфизмов Клейсли и дифференциальных операторов.

В дальнейшем регулярно используется следующий очевидный факт: Изоморфизм сопряжения $\#$: $(j^{\infty}X, Y)_M \cong [\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y]_M$ устанавливает функториальное биективное отображение $\{X, Y\}_M \longrightarrow [\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y]_M$, ср. формулу (4).

Функтор $V: \mathcal{M}_M \longrightarrow \mathcal{M}_M$ допускает естественное продолжение на функтор $V: \mathcal{M}_M^{\mathbb{J}} \longrightarrow \mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$, представляющий собой еще одну форму универсальной линеаризации дифференциальных операторов (ср. с [....]). Описывается она сопоставлениями

$$
\begin{array}{ccc}
X & \longmapsto & VX \\
j^{\infty}X \xrightarrow{\varphi} Y & \longmapsto & j^{\infty}VX \cong Vj^{\infty}X \xrightarrow{V\varphi} VY.
\end{array}
$$

Функториальность V т.е. формула $V(\psi \circ \varphi) = V\psi \circ V\varphi$ следует из коммутативности диаграмм (1.4).

§2.3. $\mathcal{C}$-дифференциальные операторы.

Имея ввиду дальнейшее использование $\mathcal{C}$-теории А.М.Виноградова, мы на этом месте приносим ее короткое изложение в терминах комонад. $\mathcal{C}$-теория - это, грубо говоря, дифференциальное исчисление полных производных на некотором фиксированном уравнении $\mathcal{X} = (X, \xi) \in \mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$. Поэтому нужно построить категорию Клейсли над объектом $(X, \xi) \in \mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$.

Пусть $E \xrightarrow{p} X$ – векторное расслоение. Тогда таковым является и $j^\infty E \xrightarrow{j^\infty p} j^\infty X$. Обозначим через $j^\infty_{\mathfrak{X}} E$ индуцированное отображением $X \xrightarrow{\xi} j^\infty X$ расслоение $\xi^* j^\infty E$ над X. Введем $\mathfrak{M}_M$-морфизм $\pi_{\mathfrak{X}}E\colon\ j^\infty_{\mathfrak{X}} E \longrightarrow E$ как композицию верхних стрелок в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
j^\infty_{\mathfrak{X}} E \arrow[r, "\xi E"] \arrow[d, "j^\infty_{\mathfrak{X}} p"'] \arrow[dr, phantom, "\text{унив.}"] & j^\infty E \arrow[r, "\pi E"] \arrow[d, "j^\infty p"] & E \arrow[d, "p"] \\
X \arrow[r, "\xi"'] & j^\infty X \arrow[r, "\pi X"'] & X
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим два универсальных квадрата

$$\begin{tikzcd}
j^\infty_{\mathfrak{X}} j^\infty_{\mathfrak{X}} E \arrow[r, "\xi j^\infty_{\mathfrak{X}} E"] \arrow[d, "j^\infty_{\mathfrak{X}} j^\infty_{\mathfrak{X}} p"'] \arrow[dr, phantom, "\text{унив.}"] & j^\infty j^\infty_{\mathfrak{X}} E \arrow[r, "j^\infty \xi E"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{унив.}"] & j^\infty j^\infty E \arrow[d, "j^\infty j^\infty p"] \\
X \arrow[r, "\xi"'] & j^\infty X \arrow[r, "j^\infty \xi"'] & j^\infty j^\infty X
\end{tikzcd}$$

из которых правый получен действием функтора j^∞ на левый квадрат предыдущей диаграммы. Имеем

$$\begin{aligned}
j^\infty_{\mathfrak{X}} j^\infty_{\mathfrak{X}} E &\cong \xi^* j^\infty (\xi^* j^\infty E) \cong \xi^* (j^\infty \xi) j^\infty j^\infty E \cong (j^\infty \xi \circ \xi)^* j^\infty j^\infty E \\
&= (\iota X \circ \xi)^* j^\infty j^\infty E
\end{aligned}$$

Затем из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
j^\infty_{\mathfrak{X}} E \arrow[r, "\xi E"] \arrow[d, "j^\infty_{\mathfrak{X}} p"'] \arrow[dr, phantom, "\text{унив.}"] & j^\infty E \arrow[r, "\iota E"] \arrow[d, "j^\infty p"] & j^\infty j^\infty E \arrow[d, "j^\infty j^\infty p"] \\
X \arrow[r, "\xi"'] & j^\infty X \arrow[r, "\iota X"'] & j^\infty j^\infty X
\end{tikzcd}$$

следует, что существует единственный $\mathfrak{M}_M$-морфизм

$\iota_{\mathfrak{X}} E\colon\ j^\infty_{\mathfrak{X}} E \longrightarrow j^\infty_{\mathfrak{X}} j^\infty_{\mathfrak{X}} E$ такой, что коммутирует диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
j^{\infty}_{\mathfrak{X}}E \arrow[drr, bend left, "\iota E\circ\xi E"] \arrow[dr, dashed, "\iota^{\infty}_{\mathfrak{X}}E"] \arrow[ddr, bend right, "j^{\infty}_{\mathfrak{X}}p"'] & & \\
& j^{\infty}_{\mathfrak{X}}j^{\infty}_{\mathfrak{X}}E \arrow[r, "j^{\infty}\xi E\circ\xi j^{\infty}_{\mathfrak{X}}E"] \arrow[d, "j^{\infty}_{\mathfrak{X}}j^{\infty}_{\mathfrak{X}}p"'] \arrow[dr, phantom, "\text{унив.}"] & j^{\infty}j^{\infty}E \arrow[d, "j^{\infty}j^{\infty}p"] \\
& X \arrow[r, "\iota X\circ\xi"'] & j^{\infty}j^{\infty}X
\end{tikzcd}
\tag{7}
$$

Покажем, что $j^{\infty}_{\mathfrak{X}}$ естественно относительно $\mathfrak{X}$: Пусть $f\colon \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ – $\mathbb{J}$-гомоморфизм $\mathbb{J}$-коалгебр $\mathfrak{X} = (X,\xi)$, $\mathfrak{Y} = (Y,\zeta)$, пусть

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[d, "q"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

– морфизм векторных расслоений. Определим $j^{\infty}_{f}h\colon j^{\infty}_{\mathfrak{X}}E \longrightarrow j^{\infty}_{\mathfrak{Y}}F$ исходя из универсальности переднего квадрата в диаграмме

$$
\begin{tikzcd}
j^{\infty}_{\mathfrak{X}}E \arrow[rr, "\xi E"] \arrow[dr, dashed, "j^{\infty}_{f}h"] \arrow[dd, "j^{\infty}_{\mathfrak{X}}p"'] & & j^{\infty}E \arrow[dr, "j^{\infty}h"] \arrow[dd, "j^{\infty}p" near start] & \\
& j^{\infty}_{\mathfrak{Y}}F \arrow[rr, "\zeta F"' near start] \arrow[dd, "j^{\infty}_{\mathfrak{Y}}q"' near start] & & j^{\infty}F \arrow[dd, "j^{\infty}q"] \\
X \arrow[rr, "\xi"' near end] \arrow[dr, "f"'] & & j^{\infty}X \arrow[dr, "j^{\infty}f"'] & \\
& Y \arrow[rr, "\zeta"'] & & j^{\infty}Y
\end{tikzcd}
\tag{8}
$$

Замечание: Если в последнем квадрате положить $f = \mathrm{id}_X$, то эта конструкция описывает действие функтора $j^\infty_{\mathfrak{X}}$ на морфизмах.

2.6. **Утверждение>** *Если* $E \cong f^*F$, *то* $j^\infty_{\mathfrak{X}}E \cong f^* j^\infty_{\mathcal{Y}}F$.

Доказательство: В последней диаграмме передний, задний и правый квадрат будут универсальными, откуда и следует универсальность левого.

2.7. **Следствие:** *Для векторного расслоения* B *над* M *пусть* $\overline{B}X$ *означает индуцированное проекцией* $\dot{X} \longrightarrow M$ *расслоение над* X. *Тогда имеет место изоморфизм*

$$j^\infty_{\mathfrak{X}}\overline{B}X \;\cong\; \overline{j^\infty B}X.$$

Доказательство: Применим предыдущее утверждение к универсальному квадрату определяющему $\overline{B}X$.

2.8. **Утверждение:** *Тройка* $\mathbb{J}_{\mathfrak{X}} = (j^\infty_{\mathfrak{X}}, \pi_{\mathfrak{X}}, \iota_{\mathfrak{X}})$ *– комонада в категории векторных расслоений над* X.

Доказательство: Проверка естественности преобразований $\pi_{\mathfrak{X}}$, $\iota_{\mathfrak{X}}$ не представляет трудностей. Проверим требуемые равенства. Имеем:

$$\xi E \circ j^\infty_{\mathfrak{X}}\pi_{\mathfrak{X}}E \circ \iota_{\mathfrak{X}}E \overset{(8)}{=} j^\infty\pi_{\mathfrak{X}}E \circ \xi j^\infty_{\mathfrak{X}}E \circ \iota_{\mathfrak{X}}E =$$

$$= j^\infty\pi E \circ j^\infty\xi E \circ \xi j^\infty_{\mathfrak{X}}E \circ \iota_{\mathfrak{X}}E \overset{(7)}{=}$$

$$= j^\infty\pi E \circ \iota E \circ \xi E \overset{(1)}{=} \xi E$$

и $j^\infty_\mathcal{X} p \circ j^\infty_\mathcal{X}\pi_\mathcal{X}E \circ \iota_\mathcal{X}E = j^\infty_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X} p \circ \iota_\mathcal{X}E = j^\infty_\mathcal{X} p$, вследствие чего $j^\infty_\mathcal{X}\pi_\mathcal{X}E \circ \iota_\mathcal{X}E = \mathrm{id}$. Аналогично,

$$\xi E \circ \pi_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E \circ \iota_\mathcal{X}E = \xi E \circ \pi j^\infty_\mathcal{X}E \circ \xi\; j^\infty_\mathcal{X}E \overset{(\pi)}{=}$$

$$= \pi j^\infty E \circ j^\infty \xi E \circ \xi j^\infty_\mathcal{X}E \circ \iota_\mathcal{X}E \overset{(7)}{=}$$

$$= \pi j^\infty E \circ \iota \quad \circ \xi E \overset{(1)}{=} \xi E$$

откуда, в свою очередь, $\pi_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E \circ \iota_\mathcal{X}E = \mathrm{id}$.

Наконец,

$$j^\infty j^\infty \xi E \circ j^\infty \xi j^\infty_\mathcal{X}E \circ \xi j^\infty_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E \circ \iota_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E \circ \iota_\mathcal{X}E =$$

$$= j^\infty j^\infty \xi E \circ j^\infty \xi j^\infty_\mathcal{X}E \circ \xi j^\infty_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E \circ j^\infty_\mathcal{X}\iota_\mathcal{X}E \circ \iota_\mathcal{X}E$$

в силу коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
j^\infty_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E \arrow[d, "\xi j^\infty_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E"'] & & j^\infty_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E \arrow[ll, "\iota_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E"'] \arrow[d, "\iota j^\infty_\mathcal{X}E"] & & j^\infty_\mathcal{X}E \arrow[ll, "\iota_\mathcal{X}E"'] \arrow[rr, "\iota_\mathcal{X}E"] \arrow[d, "\xi E"] & & j^\infty_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E \arrow[rr, "j^\infty_\mathcal{X}\iota_\mathcal{X}E"] \arrow[d, "\iota j^\infty E"] \arrow[drr, phantom, "(8)"] & & j^\infty_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E \arrow[d, "\xi j^\infty_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E"] \\
j^\infty j^\infty_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E \arrow[dd, "j^\infty \xi j^\infty_\mathcal{X}E"'] \arrow[rr, phantom, "(7)"] & & j^\infty j^\infty_\mathcal{X}E \arrow[dr, "j^\infty \iota E"] \arrow[ddll, "\iota j^\infty_\mathcal{X}E"'] \arrow[rr, phantom, "(7)"] & & j^\infty E \arrow[dl, "\iota E"'] \arrow[dr, "\iota E"] \arrow[rr, phantom, "(7)"] & & j^\infty j^\infty_\mathcal{X}E \arrow[rr, "j^\infty \iota\; E"'] \arrow[dl, "j^\infty \xi E"'] & & j^\infty j^\infty_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E \arrow[dd, "j^\infty \xi j^\infty_\mathcal{X}E"] \\
& & & j^\infty j^\infty_\mathcal{X}E \arrow[dr, "\iota j^\infty E"'] \arrow[rr, phantom, "(1)"] & & j^\infty j^\infty_\mathcal{X}E \arrow[dl, "j^\infty \iota E"] \arrow[rrr, phantom, "(7)"] & & & \\
j^\infty j^\infty j^\infty_\mathcal{X}E \arrow[rrrr, "j^\infty j^\infty \xi E"'] \arrow[urr, phantom, "(\iota)"] & & & & j^\infty j^\infty j^\infty E & & & & j^\infty j^\infty j^\infty_\mathcal{X}E \arrow[llll, "j^\infty j^\infty \xi E"]
\end{tikzcd}$$

откуда и выводится (детали оставляем читателю) последнее требуемое равенство

$$\iota_\mathcal{X} j^\infty_\mathcal{X}E \circ \iota_\mathcal{X}E = j^\infty_\mathcal{X}\iota_\mathcal{X}E \circ \iota_\mathcal{X}E.$$

Доказательство того, что $j^\infty_{\mathcal{X}}$ сохраняет суммы Уитни опустим.

$\mathcal{C}$-дифференциальный оператор $P \xrightarrow{\varphi} Q$ — это морфизм Клейсли $j^\infty_{\mathcal{X}}P \xrightarrow{\varphi} Q$ комонады $\mathbb{J}_{\mathcal{X}}$ (и $j^\infty_{\mathcal{X}} \cong \mathcal{C}\mathcal{J}$). Действие такого оператора на сечении $p \in \Gamma_X(P)$ описывается формулой $p \longmapsto \varphi \circ j^\infty_{\mathcal{X}} p$, где $j^\infty_{\mathcal{X}} p$ определяется условием коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "j^\infty_{\mathcal{X}} p"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & j^\infty X \arrow[dr, "j^\infty p"] & \\
& j^\infty_{\mathcal{X}} P \arrow[rr, "\xi P"] \arrow[d] & & j^\infty P \arrow[d] \\
& X \arrow[rr, "\xi"'] & & j^\infty X
\end{tikzcd}$$

Отсюда и следует стандартное координатное описание

$$\varphi^j(p) = f_i^{I,j}\, \mathcal{D}_I p^i \tag{9}$$

для такого оператора. Здесь $f_i^{I,j} \in \mathcal{F}X$ и операторы $\mathcal{D}_I$ полных производных (1.2) предполагаются ограничеными на $\mathcal{X}$.

Итак, имеем определяющие формулы (ср. [28])

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (P,\ Q) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}\ (j^\infty_{\mathcal{X}}P,\ Q), \\
\mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (P_1,\dots,P_p;\ Q) &= \mathrm{Hom}\ (j^\infty_{\mathcal{X}}P_1 \otimes\dots\otimes j^\infty_{\mathcal{X}}P_p,\ Q).
\end{aligned} \tag{10}$$

Наконец, любому дифференциальному оператору $P \xrightarrow{\varphi} Q$, $P, Q \in \mathfrak{M}_M$, т.е. $\mathfrak{M}_M$-морфизму $j^\infty P \xrightarrow{\varphi} Q$ можно сопоставить индуцированное отображение $j^\infty_{\mathcal{X}}\bar{P}X \cong \overline{j^\infty P X} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{Q}X$, т.е. $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор $\bar{P}X \xrightarrow{\bar{\varphi}X} \bar{Q}X$, действующий на сечениях согласно формуле

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\bar{P}X) \cong (X,P)_M \ni \gamma \arrow[r, mapsto] \arrow[d, equal] & \varphi\circ j^{\infty}\gamma\circ\xi \in (X,Q)_M \cong \Gamma(\bar{Q}X) \arrow[d, equal] \\
{[\mathcal{X},\mathcal{J}P]_M} \arrow[r, "{[\mathcal{X},\varphi^{\sharp}]}"'] & {[\mathcal{X},\mathcal{J}Q]_M}
\end{tikzcd}$$

Эта конструкция и описывает "поднятие" обычных дифференциальных операторов на базисном многообразии M в $\mathcal{C}$-дифференциальные операторы на уравнении $\mathcal{X}$ (см. 6.4, [28]), причем $\partial/\partial x^i$ переходит в $\mathcal{D}_i = d/dx^i$.

ГЛАВА III

В этой главе сосредсточены основные результаты работы. Здесь введены $\mathbb{J}$-когомологии, к ним применяется метод резольвент и затем для важного класса резольвент Жане построена спектральная последовательность, обобщающая $\mathcal{C}$-спектральную последовательность А.М. Виноградова.

§3.1. Горизонтальные когомологии

В предыдущем мы отождествили категорию $\mathcal{DE}_M$ дифференциальных уравнений с категорией Эйленберга - Мура $\mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$ $\mathbb{J}$-коалгебр комонады $\mathbb{J} = (j^{\infty}, \pi, \iota)$. Начиная с этого места, $\mathbb{J}$-коалгебра и бесконечно продолженное уравнение (объект $\mathcal{DE}_M$) - синонимы.

Пусть $\mathcal{J}$ означает функтор $\mathcal{M}_M \longrightarrow \mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$, сопоставляющий многообразию $Y \in \mathcal{M}_M$ косвободное (= "пустое") уравнение $(j^{\infty}Y, \iota Y)$. Поскольку функтор j^{∞} сохраняет суммы Уитни в $\mathcal{M}_M$, то функтор $\mathcal{J}$ сохраняет суммы Уитни в $\mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$ и выполнены требования Ван Осдола [23] к построению теории "бикогомологий" относительно функторов $\mathcal{J}$ и Id: $\mathcal{M}_M^{\mathbb{J}} \longrightarrow \mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$. Ниже мы займемся ее описанием.

Для любой абелевой группы $\mathcal{A} = (A, \alpha, +, -, 0) \in \mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$ (группы коэффициентов), $\mathcal{J}\mathcal{A}$, $\mathcal{J}^2\mathcal{A} = \mathcal{J}j^{\infty}\mathcal{A}$, $\mathcal{J}^3\mathcal{A} = \mathcal{J}j^{\infty}j^{\infty}\mathcal{A}, \ldots$ - абелевы группы в категории $\mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$ и отображения

$$\chi_i^n\mathcal{A}\colon\ \mathcal{J}^n\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{J}^i\iota\mathcal{J}^{n-i-1}\mathcal{A}} \mathcal{J}^{n+1}\mathcal{A}, \qquad i = 0,\dots,n-1$$

$$\chi_n^n\mathcal{A}\colon\ \mathcal{J}^n\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{J}^n\alpha} \mathcal{J}^{n+1}\mathcal{A}$$

– гомоморфизмы абелевых групп, позволяющие для любой $\mathbb{J}$-коалгебры $\mathcal{X} = (X,\xi)$ построить комплекс абелевых групп

$$0 \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{J}\mathcal{A}]_M \xrightarrow{\partial_1} [\mathcal{X},\mathcal{J}^2\mathcal{A}]_M \xrightarrow{\partial_2} [\mathcal{X},\mathcal{J}^3\mathcal{A}]_M \xrightarrow{\partial_3} \dots \tag{1}$$

полагая

$$[\mathcal{X},\mathcal{J}^n\mathcal{A}]_M \ni \varphi \quad \overset{\partial_n}{\longmapsto} \quad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\ \chi_i^n\mathcal{A}\circ\varphi \ \in\ [\mathcal{X},\mathcal{J}^{n+1}\mathcal{A}]_M$$

Условие $\partial_{n+1}\circ\partial_n = 0$ является простым следствием определений.

3.1. Определение: *Группа*

$$H^n_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}) := \frac{\operatorname{Ker}\ \partial_{n+1}}{\operatorname{Im}\ \partial_n}$$

называется n-мерной группой $\mathbb{J}$-когомологий уравнения $\mathcal{X}$ с коэффициентами в линейном уравнении $\mathcal{A}$.

Вследствие изоморфизма $[\mathcal{X},\mathcal{J}\mathcal{A}]_M \cong (X,A)_M$ (формула 2.4), комплекс (1) изоморфен комплексу

$$0 \longrightarrow (X,A)_M \xrightarrow{\partial'_1} (X,\mathcal{J}A)_M \xrightarrow{\partial'_2} (X,\mathcal{J}^2A)_M \xrightarrow{\partial'_3} \dots \tag{2}$$

в котором $\partial'_1\colon f \longmapsto \mathcal{J}f\circ\xi - \alpha\circ f$, $\partial'_2\colon f \longmapsto \mathcal{J}f\circ\xi - \iota A\circ f + \mathcal{J}\alpha\circ f$, и так далее.

Из первой формулы сразу вытекает, что $\partial_1' f = 0$ тогда и только тогда, когда f – $\mathbb{J}$-гомоморфизм $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{A}$. Следовательно, имеет место формула

$$H^0_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}) \cong [\mathcal{X},\mathcal{A}]_M \tag{3}$$

Выражение для ∂_2' используют для отождествления $H^1_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A})$ с классами изоморфизмов главных расслоений над $\mathcal{X}$ с структурной группой $\mathcal{A}$ (см. Бек [2], Манес [16], упр. 3.1.21, Ван Осдол [23]):

3.2. **Утверждение**: *Для любого уравнения* $\mathcal{X} \in \mathfrak{M}^{\mathbb{J}}_M$ *и векторного расслоения* $B \in \mathfrak{M}_M$

$$H^n_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathfrak{J}B) = 0, \qquad n = 1,2,3,\ldots.$$

Доказательство: Ввиду равенства (3) требуется доказать, что последовательность

$$0 \longrightarrow [\mathcal{X},\mathfrak{J}\mathbf{B}]_M \xrightarrow{\ker \partial_1} [\mathcal{X},\mathfrak{J}^2\mathbf{B}]_M \xrightarrow{\partial_1} [\mathcal{X},\mathfrak{J}^3\mathbf{B}]_M \xrightarrow{\partial_2} \ldots$$

точна. Здесь $\partial_n\varphi = \sum_{i=0}^n (-1)^i \chi_i^n \mathfrak{J}\mathbf{B}\circ\varphi = \sum_{i=0}^n \chi_i^{n+1}\mathbf{B}\circ\varphi$. Отображение $s_{n+1} = (-1)^n \mathfrak{J}^{n+1}\pi\mathbf{B}$: $\mathfrak{J}^{n+2}\mathbf{B} \longrightarrow \mathfrak{J}^{n+1}\mathbf{B}$ индуцирует стягивающую гомотопию $[\mathcal{X},s_{n+1}]_M$: $[\mathcal{X},\mathfrak{J}^{n+2}\mathbf{B}]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathfrak{J}^{n+1}\mathbf{B}]_M$. Действительно, $s_{n+1}\circ\chi_i^{n+1}\mathbf{B} + \chi_i^n\mathbf{B}\circ s_n = 0$ для $i = 0,1,\ldots,n-1$, вследствие чего $s_{n+1}\circ\partial_n + \partial_{n-1}\circ s_n = (-1)^n s_{n+1}\circ\chi_n^{n+1} = \mathrm{id}$, $n>0$.

В дальнейшем мы ограничим выбор абелевых групп в $\mathfrak{M}^{\mathbb{J}}_M$ линейными уравнениями. Для линейного уравнения $\mathcal{A} = (A,\alpha,+,-,0) \in \mathfrak{M}^{\mathbb{J}}_M$, A представляет собой $\le\infty$-мерное векторное расслоение над M.

Определим гомоморфизм линейных уравнений как $\mathbb{J}$-гомоморфизм являющийся одновременно линейным отображением соответствующих векторных расслоений. Назовем последовательность $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C}$ гомоморфизмов линейных уравнений точной, если она точна как последовательность морфизмов векторных расслоений в следующем смысле: $\operatorname{Ker} g$ и $\operatorname{Im} f$ существуют как векторные расслоения и равны между собою.

3.3. **Лемма>** *Пусть* $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$ *– короткая точная последовательность векторных расслоений над* M. *Тогда индуцированные последовательности* $\mathfrak{J}A \hookrightarrow \mathfrak{J}B \twoheadrightarrow \mathfrak{J}C$ *и* $(X,A)_M \hookrightarrow (X,B)_M \twoheadrightarrow (X,C)_M$, $X \in \mathfrak{M}_M$ *также точны.*

Доказательство: Поскольку M паракомпактно, то любая короткая точная последовательность расщепляется (на любом тривиализующем открытом покрытии факт очевиден и распространяется на все многообразие M посредством разбиения единицы). Следовательно, любой сохраняющий произведения функтор точен, однако таковы, в частности, $\mathfrak{J}$ и $(X,-)_M$.

3.4. **Утверждение>** *Любой короткой точной последовательности линейных уравнений* $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C}$ *и любому уравнению* $\mathcal{X} \in \mathfrak{M}_M^{\mathbb{J}}$ *функториально сопоставлена каноническая точная последовательность*

$$
\begin{gathered}
0 \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{A}]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{B}]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{C}]_M \longrightarrow H^1_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}) \longrightarrow \dots \\
\dots \longrightarrow H^n_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}) \longrightarrow H^n_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{B}) \longrightarrow H^n_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \longrightarrow H^{n+1}_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}) \to \dots
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Доказательство: Гомоморфизмы ∂ естественны, поэтому возникает последовательность комплексов (2)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (X,A)_M & \xrightarrow{\partial'_1} & (X,\mathcal{J}A)_M & \xrightarrow{\partial'_2} & (X,\mathcal{J}^2A)_M & \xrightarrow{\partial'_3} & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (X,B)_M & \xrightarrow{\partial'_1} & (X,\mathcal{J}B)_M & \xrightarrow{\partial'_2} & (X,\mathcal{J}^2B)_M & \xrightarrow{\partial'_3} & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (X,C)_M & \xrightarrow{\partial'_1} & (X,\mathcal{J}C)_M & \xrightarrow{\partial'_2} & (X,\mathcal{J}^2C)_M & \xrightarrow{\partial'_3} & \ldots
\end{array}$$

точная в силу предыдущей леммы, которая и индуцирует искомую последовательность гомологий.

Стандартный метод вычислять когомологии состоит в использовании резольвент.

Определим резольвенту линейного уравнения $\mathcal{A}$ как точную последовательность $\mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2 \longrightarrow \mathcal{A}_3 \longrightarrow \ldots$ для которой $\mathcal{A} \cong \operatorname{Ker}\,(\mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_1)$. Назовем резольвенту $\mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2 \longrightarrow \ldots$ ацикличной, если $H^n_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}_i) = 0$ для всех $\mathcal{X}\in\mathfrak{M}^{\mathbb{J}}_M$ и всех $n>0$, $i\geq 0$. Назовем резольвенту $\mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2 \longrightarrow \ldots$ косвободной, если все уравнения $\mathcal{A}_i$ косвободны, т.е. имеют вид $\mathcal{A}_i = \mathcal{J}B$, $B\in\mathfrak{M}_M$.

В силу утверждения 3.2. все косвободные резольвенты ацикличны.

Пусть $\mathcal{X}\in\mathfrak{M}^{\mathbb{J}}_M$ – уравнение, пусть $\mathcal{A}\in\mathfrak{M}^{\mathbb{J}}_M$ – линейное уравнение и $\mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2 \longrightarrow \ldots$ – его резольвента. Определим соответствующий этой резольвенте *горизонтальный комплекс* уравнения $\mathcal{X}$ как

$$0 \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{A}_0]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{A}_1]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{A}_2]_M \longrightarrow \ldots \qquad (5)$$

3.5. Определение: Фактор

$$\bar{H}^n(\mathcal{X},\mathcal{A}) = \frac{\operatorname{Ker}\ ([\mathcal{X},\mathcal{A}_n]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{A}_{n+1}]_M)}{\operatorname{Im}\ ([\mathcal{X},\mathcal{A}_{n-1}]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{A}_n]_M)}$$

называется *n-мерной группой горизонтальных когомологий уравнения $\mathcal{X}$ с коэффициентами в линейном уравнении $\mathcal{A}$.*

Следующая теорема показывает, что группа $\bar{H}^n(\mathcal{X},\mathcal{A})$ не зависит от выбора резольвенты уравнения $\mathcal{A}$, если только она ациклична.

3.6. Теорема: *Если резольвента $\mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2 \longrightarrow \dots$ уравнения $\mathcal{A}$ ациклична, то имеет место естественный изоморфизм*

$$\bar{H}^n(\mathcal{X},\mathcal{A}) \cong H^n_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}).$$

Доказательство: Пусть $\mathcal{B}_i$ означает векторное расслоение $\operatorname{Ker}\ (A_i \longrightarrow A_{i+1}) \cong \operatorname{Im}\ (A_{i-1} \longrightarrow A_i)$, снабженное структурой $\mathbb{J}$-коалгебры, индуцированной из $\mathcal{A}_i$. Для любой из коротких точных последовательностей

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A}_0 \twoheadrightarrow \mathcal{B}_1 \longrightarrow 0, \quad \dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{B}_i \hookrightarrow \mathcal{A}_i \twoheadrightarrow \mathcal{B}_{i+1} \rightarrow 0, \quad \dots\dots$$

соответствующая точная когомологическая последовательность (4) распадается, вследствие ацикличности резольвенты, на части

$$0 \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{A}]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{A}_0]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{B}_1]_M \longrightarrow H^1_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}) \longrightarrow 0,\ldots$$

$$,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ 0 \longrightarrow H^n_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{B}_1) \cong H^{n+1}_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}) \longrightarrow 0,\ldots$$

$$,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$0 \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{B}_i]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{A}_i]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{B}_{i+1}]_M \longrightarrow H^1_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{B}_i) \longrightarrow 0,\ldots$$

$$,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ 0 \longrightarrow H^n_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{i+1}) \cong H^{n+1}_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{B}_i) \longrightarrow 0,\ldots$$

$$,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Следовательно, в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & H^1_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}) & & & & H^1_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{B}_2) \cong H^3_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}) & & \\
 & & {[\mathcal{X},\mathcal{B}_1]_M} \arrow[ur, two heads] \arrow[dr, hook] & & & & {[\mathcal{X},\mathcal{B}_3]_M} \arrow[ur, two heads] \arrow[dr, hook] & & & \\
0 \arrow[r] & {[\mathcal{X},\mathcal{A}_0]_M} \arrow[ur] \arrow[rr] & & {[\mathcal{X},\mathcal{A}_1]_M} \arrow[rr] \arrow[dr] & & {[\mathcal{X},\mathcal{A}_2]_M} \arrow[ur] \arrow[rr] & & {[\mathcal{X},\mathcal{A}_3]_M} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \ldots\ldots\ldots \\
{[\mathcal{X},\mathcal{A}]_M} \arrow[ur, hook] & & & & {[\mathcal{X},\mathcal{B}_2]_M} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, two heads] & & & & {[\mathcal{X},\mathcal{B}_4]_M} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, two heads] & \\
 & & & & & H^1_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{B}_1) \cong H^2_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}) & & & & \ldots\ldots
\end{tikzcd}$$

все косые последовательности точны, откуда

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{H}^0(\mathcal{X},\mathcal{A}) &= \operatorname{Ker}\,([\mathcal{X},\mathcal{A}_0] \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{A}_1]) \cong \\
&\cong \operatorname{Ker}\,([\mathcal{X},\mathcal{A}_0] \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{B}_1]) \cong \\
&\cong [\mathcal{X},\mathcal{A}]_M,
\end{aligned}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{H}^{n}(\mathcal{X},\mathcal{A}) \cong \frac{\operatorname{Ker}\ ([\mathcal{X},\mathcal{A}_n]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{A}_{n+1}]_M)}{\operatorname{Im}\ ([\mathcal{X},\mathcal{A}_{n-1}]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{A}_n]_M)} \cong$$

$$\cong \frac{\operatorname{Ker}\ ([\mathcal{X},\mathcal{A}_n]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{B}_{n+1}]_M)}{\operatorname{Im}\ ([\mathcal{X},\mathcal{A}_{n-1}]_M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{A}_n]_M)} \cong$$

$$\cong \frac{[\mathcal{X},\mathcal{B}_n]_M}{\operatorname{Im}\ ([\mathcal{X},\mathcal{A}_{n-1}]M \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{B}_n]\ )} \cong$$

$$\cong H^1_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{n-1}) \cong$$

$$\cong H^2_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{B}_{n-2}) \cong$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cong H^{n-1}_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{B}_1) \cong$$

$$\cong H^{n}_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}).$$

Широкий класс линейных уравнений обладающих косвободной резольвентой конечной длины доставляют инволютивные уравнения. Напомним, что по теореме 5.5 Поммаре [20] (определение инволютивности см. там же) *для любого инволютивного линейного уравнения* $\mathcal{A}\in\mathcal{M}^{\mathbb{J}}_M$ *существует косвободная резольвента вида*

$$\mathcal{J}B_0 \xrightarrow{\Phi_1} \mathcal{J}B_1 \xrightarrow{\Phi_2} \cdots \xrightarrow{\Phi_m} \mathcal{J}B_m \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \tag{6}$$

где $m = \dim M$

В дальнейшем мы эту резольвенту будем называть *резольвентой Жане* и соответствующий комплекс дифференциальных операторов

$$0 \longrightarrow B_0 \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_m} B_m \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots, \tag{7}$$

$\Phi_i = \varphi_i^{H}$, мы будем называть *последовательностью Жане*.

Для коалгебры $\mathcal{X} = (X,\xi) \in \mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$ соответствующий комплекс (5),

$$0 \longrightarrow [\mathcal{X},\mathcal{J}B_0]_M \xrightarrow{[\mathcal{X},\Phi_1]_M} [\mathcal{X},\mathcal{J}B_1]_M \xrightarrow{[\mathcal{X},\Phi_2]_M} [\mathcal{X},\mathcal{J}B_2]_M \longrightarrow \dots$$

изоморфен комплексу

$$0 \longrightarrow (\mathcal{X},B_0)_M \xrightarrow{(\mathcal{X},\varphi_1)_M} (\mathcal{X},B_1)_M \xrightarrow{(\mathcal{X},\varphi_2)_M} (\mathcal{X},B_2)_M \longrightarrow \dots \qquad (8)$$

который мы будем называть *горизонтальным комплексом Жане.* Имеем:

3.7. Следствие: $\mathrm{H}^n_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}) = 0$, $n>m$ *для любого уравнения* $\mathcal{X} \in \mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$ *и любого инволютивного линейного уравнения* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$.

Для непереопределенных уравнений по теореме 6.8. Поммаре [20] $B_2 = B_3 = \dots = B_m = 0$, т.е. и резольвента и последовательность Жане двучленные. Отсюда

3.8. Следствие: $\mathrm{H}^n_{\mathbb{J}}(\mathcal{X},\mathcal{A}) = 0$, $n>2$ *для любого уравнения* $\mathcal{X} \in \mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$ *и любого непереопределенного линейного уравнения* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_M^{\mathbb{J}}$

Пример> Обычный комплекс де Рама

$$\mathcal{F}M \xrightarrow{d} \Lambda M \xrightarrow{d} \Lambda^2 M \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^m M \longrightarrow 0$$

и соответствующая последовательность Спенсера

$$\mathcal{J}\mathcal{F}M \xrightarrow{S} \mathcal{J}\Lambda M \xrightarrow{S} \mathcal{J}\Lambda^2 M \xrightarrow{S} \dots \xrightarrow{S} \mathcal{J}\Lambda^m M \longrightarrow 0$$

служат соответственно последовательностью и резольвентой Жане для "уравнения постоянных" $\partial y/\partial x^i = 0$, $i = 1,\dots,m$. Горизонтальный комплекс Жане тогда совпадает с *горизонтальным комплексом де Рама*

$$\mathcal{F}X \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}X \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}^2X \xrightarrow{\bar{d}} \dots \xrightarrow{\bar{d}} \bar{\Lambda}^m X \longrightarrow 0$$

изучению которого посвящены работы А. М. Виноградова [24,28]. В следующем параграфе мы убедимся, что методы этих работ применимы и к общему горизонтальному комплексу Жане.

§3.2. **Бикомплекс**

Пусть задано уравнение $\mathcal{X} = (X,\xi) \in \mathcal{M}^{\mathbb{J}}_{M}$, пусть

$$0 \longrightarrow B^0 \xrightarrow{\varphi^0} B^1 \xrightarrow{\varphi^1} \dots \xrightarrow{\varphi^{k-1}} B^k \longrightarrow 0$$

– последовательность Жане (7) некоторого линейного уравнения $\mathcal{A} \in \mathcal{M}^{\mathbb{J}}_{M}$, $B^k \neq 0$. Вспомним, что в категории $\mathcal{DE}_M$ $\mathcal{C}$-спектральная последовательность уравнения $\mathcal{X}$ ассоциирована с так называемым *вариационным бикомплексом* ([28], 9.2)

$$\Lambda^{p,q}\mathcal{X} \;\cong\; \Lambda^{p,0}X \,\Lambda_{\mathcal{F}X}\, \bar{\Lambda}^q X \;\cong\; \Lambda^{p,0}X \,\Lambda_{\mathcal{F}M}\, \Lambda^q M.$$

где $\Lambda^{p,0}\mathcal{X}$ – $\mathcal{F}X$-модуль p-контактных p-форм на X, изоморфный $\mathcal{F}X$-модулю p-форм аннулирующихся на слоях проекции $X \longrightarrow M$, т.е.

$$\Lambda^{0,0}\mathcal{X} \;=\; \mathcal{F}X$$

$$\Lambda^{p,0}\mathcal{X} \;\cong\; \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}\,(\Lambda^p VX,\ \mathcal{F}X), \qquad p\geq 1,$$

и $\bar{\Lambda}^q X \cong \mathcal{F}X \otimes \Lambda^q M$ – $\mathcal{F}X$-модуль q-горизонтальных q-форм на X.

Для вертикальных стрелок $\imath^{0,0}\colon \mathcal{F}X \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}\,(VX,\ \mathcal{F}X)$ и $\imath^{p,0}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}\,(\Lambda^p VX,\ \mathcal{F}X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}\,(\Lambda^{p+1} VX,\ \mathcal{F}X)$ имеем формулы [28] 9.4.1:

$$(\iota^{0,0}f)(\chi) = \chi(f)$$

$$(\iota^{p,0}\omega)(\chi_0,\dots,\chi_p) =$$

$$= \sum_i (-1)^i \, \iota^{0,0}(\omega(\chi_0,\dots,\chi_{i-1},\chi_{i+1},\dots,\chi_p))(\chi_i) +$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \, \omega([\chi_i,\chi_j],\chi_0,\dots,\chi_{i-1},\chi_{i+1},\dots,\chi_{j-1},\chi_{j+1},\dots,\chi_p).$$

и

$$\iota^{p+s,0}(\omega\wedge\sigma) = \iota^{p,0}\omega \wedge \sigma + (-1)^s\omega \wedge \iota^{s,0}\sigma$$

3.7. **Определение:** Определим бикомплекс $B\mathfrak{X}$, полагая

$$B^{\overset{0\ \ q}{p,0}}\mathfrak{X} = \mathcal{F}X \otimes_{\mathcal{F}M} B^q \cong \overline{B^q}X$$

$$B^{p,q}\mathfrak{X} = \Lambda^{p,0}X \otimes_{\mathcal{F}M} B^q \cong \Lambda^{p,0}X \otimes_{\mathcal{F}X} \overline{B^q}X \cong$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}(\Lambda^p VX, \overline{B^q}X), \qquad p\geq 1$$

Дифференциальные операторы $\iota^{p,0}\mathfrak{X}\colon \Lambda^{p,0}\mathfrak{X} \longrightarrow \Lambda^{p+1,0}\mathfrak{X}$, будучи $\mathcal{F}M$-гомоморфизмами, выдерживают тензорное умножение на любой $\mathcal{F}M$-модуль, в частности, $\mathcal{F}M$-модули B^qM, и корректно определение операторов $b^{p,q}\colon B^{p,q}\mathfrak{X} \longrightarrow B^{p+1,q}\mathfrak{X}$ как

$$b^{p,q}\mathfrak{X}\colon \Lambda^{p,0}\mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{F}M} B^q \xrightarrow{\ \iota^{p,0}\mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{F}M} B^q\ } \Lambda^{p+1,0}\mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{F}M} B^q.$$

Нижнюю строку бикомплекса определим как совпадающую с горизонтальным комплексом Жане (8).

Чтобы ввести остальные горизонтальные стрелки, представим элементы $\mathcal{F}X$-модуля $\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}(VX, \overline{B^q}X)$ в виде отображений $VX \longrightarrow B^q$
послойно
линейных (над проекцией $X \longrightarrow M$) и форме $\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}(\Lambda^p VX, \overline{B^q}X)$

сопоставим форму $\overline{\varphi\omega} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}\ (\Lambda^{p+1}VX,\ \overline{B^q}X)$, определяемую как

$$\Lambda^p VX \xrightarrow{\Lambda^p V\xi} \Lambda^p Vj^\infty X \cong \Lambda^p j^\infty VX \longrightarrow j^\infty\Lambda^p VX \xrightarrow{j^\infty\omega} j^\infty B^q \xrightarrow{\varphi} B^{q+1} \qquad (9)$$

где необозначенная стрелка переводит $j^\infty_\alpha\gamma_1\Lambda\ldots\Lambda j^\infty_\alpha\gamma_p \in \Lambda^p j^\infty VX$ в $(-1)^p\ j^\infty_\alpha(\gamma_1\Lambda\ldots\Lambda\gamma_p) \in j^\infty\Lambda^p VX$.

Отметим равенство

$$\overline{\varphi\odot\psi} = \overline{\varphi}\circ\overline{\psi} \qquad (10)$$

вытекающее из коммутативности диаграмм (1.4), (2.2) и естественности преобразования ι.

Антикоммутативность бикомплекса можно проверить опираясь на доказанную в [28] коммутативность операторов $\iota^{p,0}$ с операторами полных производных. Дадим этим фактам независимое доказательство:

Начнем с $p = 0$: Заметим, что дифференциальный оператор $b^{0,q}\colon \overline{B^q}X \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}\ (VX, \overline{B^q}X)$ сопоставляет сечению $X \xrightarrow{b} B^q$ гомоморфизм $VX \xrightarrow{Vb} VB^q \xrightarrow{\delta B^q} B^q$ (определение δ см. 1.10), в чем нетрудно убедиться, рассмотрев действие обоих операторов на слоях проекции $X \longrightarrow M$.

Равенство $\overline{\varphi^q}\circ b^{1,q} + b^{0,q}\circ\overline{\varphi^q} = 0$ затем вытекает из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
VX \arrow[r, "V\xi"] & Vj^\infty X \arrow[r, "Vj^\infty b"] \arrow[d, "\wr\|"] & Vj^\infty B^q \arrow[r, "V\varphi^q"] \arrow[d, "\wr\|"] \arrow[dr, "\delta j^\infty B^q"] & VB^{q+1} \arrow[dr, "\delta B^{q+1}"] & \\
 & j^\infty VX \arrow[r, "j^\infty Vb"'] & j^\infty VB^q \arrow[r, "j^\infty\delta B^q"'] & j^\infty B^q \arrow[r, "\varphi^q"'] & B^{q+1}.
\end{tikzcd}$$

Обратимся к случаю $p\geq 1$. Вследствие формулы (10) и того факта, что операторы $b^{p,q}$ являются $\mathcal{F}M$-гомоморфизмами, нам достаточно ограничиться случаем, когда φ – дифференцирование, так что $\bar{\varphi}(\omega\wedge\sigma) = \bar{\varphi}\omega \wedge \sigma + \omega \wedge \bar{\varphi}\sigma$ для $\omega\in B^{p,q}$, $\sigma\in\Lambda^{p,0}$. Утверждение теперь вытекает из того факта, что любая форма $\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}(\Lambda^p VX, \overline{B^q X})$ локально выражается в виде суммы $b_{i_1,\dots,i_p}\, l^{0,0} f_{i_1} \wedge\dots\wedge l^{0,0} f_{i_p}$, $b_{i_1,\dots,i_p} \in B^q$, $f_i \in \Lambda^{1,0}X$.

С бикомплексом, вообще говоря, связаны две спектральные последовательности, см. [8,14]. Буквой E будем обозначать спектральную последовательность, для которой оператор d_0 задан вертикальными стрелками бикомплекса, и буквой Ш будем обозначать спектральную последовательность, оператор d_0 которой задан горизонтальными стрелками бикомплекса. Из ограниченности бикомплекса $B\mathcal{X}$ следует, что обе спектральные последовательности сходятся к одним и тем же "полным" когомологиям $H^n B\mathcal{X}$ бикомплекса. Вычисление E_∞, как будет показано ниже, локально сводится к вычислению когомологий Жане уравнения $\mathcal{A}$, к вычислению $Ш_\infty$ затем удается адаптировать методы используемые в [28] для вычисления "обычных" горизонтальных когомологий.

3.8. **Утверждение**: *Пусть проекция* $X \twoheadrightarrow M$ *гладко послойно гомотопически обратна к некоторому гладкому сечению* γ: $M \longrightarrow X$. *Тогда*

$$H^q B\mathcal{X} = E_\infty^{q,0} = \dots = E_2^{q,0} = \frac{\mathrm{Ker}\ (B^q \longrightarrow B^{q+1})}{\mathrm{Im}\ (B^{q-1} \longrightarrow B^q)}$$

$$E_\infty^{q,p} = \dots = E_1^{q,p} = 0 \qquad \text{для } q\geq 1.$$

Доказательство: Имеем $d_0^{p,q} = b^{p,q} = \imath^{p,0} \otimes B^q$. Следовательно, достаточно рассмотреть гомологии комплекса $\{\imath^{p,0}\}$. Операторы $\imath^{p,0}$, будучи $\mathcal{F}M$-гомоморфизмами, допускают ограничение на слои X_α, $\alpha \in M$, превращаясь в оператор внешнего дифференцирования $\Lambda^p X_\alpha \longrightarrow \Lambda^{p+1} X_\alpha$. Предположение о сечении γ означает, что найдется гладкая послойная гомотопия $\gamma \circ p \simeq \mathrm{id}_X$, т.е. стягивающая гомотопия $\gamma(\alpha) \circ p \simeq \mathrm{id}_{X_\alpha}$. Применив лемму Пуанкаре относительно последней гомотопии (см. [9]), мы получаем, для $p \geq 0$, операторы $h_\alpha \colon \Lambda^{p+1} X_\alpha \longrightarrow \Lambda^p X_\alpha$ такие, что $\omega|_{X_\alpha} = dh_\alpha \omega|_{X_\alpha} + h_\alpha d\omega|_{X_\alpha}$. Из соответствующих формул для h_α следует, что порождаемый ими оператор $h \colon \Lambda^{p+1,0} \longrightarrow \Lambda^{p,0}$ удовлетворяет соотношению $\omega = \imath^{p-1,0} h\omega + h\imath^{p,0}\omega$ для $\omega \in \Lambda^{p,0}$, $p \geq 1$. Отсюда вытекает, что $E_1^{q,p} = 0, \dots, E_\infty^{q,p} = 0$, $p \geq 1$. Для $p = 0$ мы имеем $\mathrm{Ker}\ d_0 = \mathbb{R}$, вследствие чего $E_1^{q,0} = \mathrm{Ker}\ b^{0,q} = B^q \otimes \mathrm{Ker}\ \imath^{0,0} \cong B^q \otimes \mathcal{F}M \cong B^q$. Индуцированный операторами $\bar{\varphi}X$ оператор $d_1 \colon E_1^{q,0} \longrightarrow E_1^{q+1,0}$ тогда совпадает с последовательностью Жане (7), откуда и вытекает формула для $E_2^{q,0}$. Остальное получается стандартными рассуждениями.

§3.3. Спектральная последовательность

Рассмотрение спектральной последовательности $\text{Ш}_r^{p,q}$ начнем, следуя [28], с "абсолютного" случая $\mathcal{X} = \mathcal{J}Y$, $Y \in \mathfrak{M}_M$. Договоримся опускать $\mathcal{J}Y$ в обозначениях всюду, где не может возникнуть путаница и обозначим через $\varkappa Y$ векторное расслоение $(\pi Y)^* VY$. Тогда $j^\infty_{\mathcal{J}Y}\varkappa = \iota^* j^\infty \varkappa = \iota^* j^\infty \pi Y^* j^\infty VY = j^\infty VY \cong Vj^\infty Y$ и (ср. [28], 9.3)

$$B^{1,q} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\,(Vj^{\infty}Y, \overline{B^q}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\,(j^{\infty}_{\mathcal{F}Y}\varkappa, \overline{B^q}) = \mathcal{C}\mathrm{Diff}\,(\varkappa, \overline{B^q})$$

$$B^{p,q} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\,(\Lambda^p Vj^{\infty}Y,\ \overline{B^q}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\,(\Lambda^p j^{\infty}_{\mathcal{F}Y}\varkappa,\ \overline{B^q}) = $$
$$= \mathrm{Alt}\ \mathcal{C}\mathrm{Diff}\,(\underbrace{\varkappa,\dots,\varkappa}_{p};\ \overline{B^q})$$

где Alt означает антисимметричную относительно естественного действия симметричной группы $\mathcal{S}(p)$ часть.

Горизонтальные стрелки бикомплекса действуют посредством композиции

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alt}\ \mathcal{C}\mathrm{Diff}\,(\underbrace{\varkappa,\dots,\varkappa}_{p};\ \overline{B^q}) & \longrightarrow & \mathrm{Alt}\ \mathcal{C}\mathrm{Diff}\,(\underbrace{\varkappa,\dots,\varkappa}_{p};\ \overline{B^{q+1}}) \\ \Delta & \longmapsto & \overline{\varphi^q}\circ\Delta \end{array}$$

с $\mathcal{C}$-дифференциальными операторами $\overline{\varphi^q}\colon \overline{B^q} \longrightarrow \overline{B^{q+1}}$, и можно применить метод [28] перехода к формально сопряженным операторам.

Напомним, что по [28], 7.3 к любому $\mathcal{C}$-дифференциальному оператору $\Delta\colon A \longrightarrow B$ найдется так называемый формально сопряженный $\mathcal{C}$-дифференциальный оператор $\Delta^*\colon B^* \longrightarrow A^*$, где $A^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\,(A, \overline{\Lambda}^m)$, $A^{**} \cong A$ так, что справедливы формулы

$$\begin{aligned} (\Delta\circ\nabla)^* &= \nabla^*\circ\Delta^* \\ \Delta^{**} &= \Delta \end{aligned} \tag{11}$$

Напомним координатное описание. Если b^i, a^j – локальные базисные сечения в расслоениях A, B, и a^*_j, b^*_i – сопряженные к ним базисные сечения определяемые условием $a^*_j(a^i) = \delta^i_j\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^m$ и оператор Δ задан формулой $b^i = f^{i,I}_j\ \mathcal{D}_I a^j$, то Δ^* описывается формулой $a^*_j = (-\mathcal{D})_I\ (f^{i,I}_j\ b^*_i)$.

Из второй из формул (11) следует, что имеется биективное отображение (на самом деле линейный дифференциальный оператор)

$$\mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (A,B) \xrightarrow{\ *\ } \mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (B^*,A^*)$$

позволяющее заменить комплекс $Ш_1^{p,q}$

$$\mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\varkappa,\overline{B^0}) \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\varkappa,\overline{B^1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\varkappa,\overline{B^k})$$

эквивалентным комплексом

$$\mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\overline{B^{0*}},\varkappa^*) \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\overline{B^{1*}},\varkappa^*) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\overline{B^{k*}},\varkappa^*)$$

стрелки которого уже являются $\mathcal{F}$-гомоморфизмами.

Примеры показывают, что достаточно широк класс линейных уравнений $\mathcal{A}$ для которых последний комплекс точен во всех членах кроме последнего. Следовательно, уместно следующее определение:

3.9. **Определение:** *Пусть* $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_M^{\mathrm{J}}$ *– линейное уравнение, пусть*

$$\mathcal{J}B^0 \xrightarrow{\ \Phi^0\ } \mathcal{J}B^1 \xrightarrow{\ \Phi^1\ } \dots \xrightarrow{\ \Phi^{k-1}\ } \mathcal{J}B^k \longrightarrow 0$$

– его резольвента Жане. Предположим, что последовательность формально сопряженных операторов $\Phi^{q*} = (\varphi^{q*})^{\#}$

$$\mathcal{J}B^{k*} \xrightarrow{\ \Phi^{k-1*}\ } \mathcal{J}B^{k-1*} \xrightarrow{\ \Phi^{k-2*}\ } \dots \xrightarrow{\ \Phi^{1*}\ } \mathcal{J}B^{0*} \longrightarrow 0$$

опять точна и является резольвентой некоторого уравнения $\mathcal{A}^* = \mathrm{Ker}\ \Phi^{k-1*}$. *Назовем тогда уравнение* $\mathcal{A}^*$ *формально сопряженным к уравнению* $\mathcal{A}$.

3.10. **Утверждение** (ср. с [28], 9.5): *Пусть уравнение* $\mathcal{A}$ *допускает формально сопряженное уравнение* $\mathcal{A}^{*}$, *пусть* $L^{p}\varkappa$, *как и в* [28], 9.6, *означает антисимметричную относительно естественного действия симметричной группы* $\mathcal{S}(p)$ *часть* $\mathcal{F}$-*модуля полилинейных* $\mathcal{C}$-*дифференциальных операторов* $\mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\varkappa,\dots,\varkappa;\ \varkappa^{*})$. *Тогда для спектральной последовательности* Ш *пары* $(\mathcal{J}Y,\ \mathcal{A})$ *имеем*

$$\text{Ш}_1^{p,q} = 0 \qquad 0\le q< k$$

$$\text{Ш}_1^{1,k} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\ (\overline{A^{*}},\varkappa^{*})$$

$$\text{Ш}_1^{p,k} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\ (\overline{A^{*}},L^{p}\varkappa) \qquad p\ge 2$$

Доказательство: Для $p=1$ имеем $\text{Ш}_0^{1,q} \cong \mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\varkappa,\overline{B^{q}})$. В силу проективности модулей $A^{i} = \mathrm{Ker}\ (\overline{\Phi^{i*}}\colon\ \overline{j^{\infty}B^{i*}} \longrightarrow \overline{j^{\infty}B^{i+1*}})$ имеем $\mathrm{Ext}\ (A^{i},\varkappa^{*}) = 0$ и отсюда следует, что точна последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\ (\overline{j^{\infty}B^{0*}},\varkappa^{*}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\ (\overline{j^{\infty}B^{1*}},\varkappa^{*}) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\ (\overline{j^{\infty}B^{k*}},\varkappa^{*}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\ (\overline{A^{*}},\varkappa^{*}).$$

Утверждение теперь следует из эквивалентности функторов

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\ (\overline{j^{\infty}B^{*}},-) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\ (j^{\infty}_{\mathcal{X}}\overline{B^{*}},-) \cong \mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (B^{*},-)$$

на категории $\mathcal{F}$-модулей.

Аналогично, для $p\ge 2$ имеем $\text{Ш}_0^{p,q} \cong \mathrm{Alt}\ \mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\varkappa,\dots,\varkappa;\ \overline{B^{q}})$. Однако,

$$\mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\varkappa,\dots,\varkappa;\ \overline{B^{q}}) \xleftrightarrow{\ *\ } \mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\overline{B^{q*}},\varkappa,\dots,\varkappa;\ \varkappa^{*}) \cong$$

$$\cong\ \mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\overline{B^{q*}},\ \mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\varkappa,\dots,\varkappa;\ \varkappa^{*})).$$

Поскольку Alt коммутирует со всеми функторами сохраняющими произведения, мы аналогичным рассуждением как в случае p=1 получаем $Ш_1^{p,q} = 0$ для $q<k$ и

$$\begin{aligned} Ш_1^{p,k} &\cong \mathrm{Alt}\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\ (\overline{A^*},\ \mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\varkappa,\dots,\varkappa;\ \varkappa^*)) \cong \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\ (\overline{A^*},\ \mathrm{Alt}\ \mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\varkappa,\dots,\varkappa;\ \varkappa^*)) \cong \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}\ (\overline{A^*},\ \mathrm{L}^p\varkappa). \end{aligned}$$

Перейдем к общему случаю бесконечно продолженного уравнения. Рассмотрим бесконечное продолжение $\mathcal{X} = (X,\xi)$ уравнения $f = g$, т.е. регулярный уравнитель (6)

$$X \overset{e}{\hookrightarrow} \left[j^\infty Y \underset{\iota Y}{\overset{\iota Y}{\rightrightarrows}} j^\infty j^\infty Y \underset{j^\infty g}{\overset{j^\infty f}{\rightrightarrows}} j^\infty Z \right].$$

Под действием функтора V мы получаем уравнитель составляющий вместе с исходным коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} VX & \overset{Ve}{\hookrightarrow} & \Big[Vj^\infty Y & \underset{V\iota Y}{\overset{V\iota Y}{\rightrightarrows}} & Vj^\infty j^\infty Y & \underset{Vj^\infty g}{\overset{Vj^\infty f}{\rightrightarrows}} & Vj^\infty Z \Big]. \\ {\scriptstyle \tau X}\big\downarrow & & {\scriptstyle \tau j^\infty Y}\big\downarrow & & & & \big\downarrow{\scriptstyle \tau j^\infty Z} \\ X & \overset{e}{\hookrightarrow} & \Big[j^\infty Y & \underset{\iota Y}{\overset{\iota Y}{\rightrightarrows}} & j^\infty j^\infty Y & \underset{j^\infty g}{\overset{j^\infty f}{\rightrightarrows}} & j^\infty Z \Big]. \end{array} \qquad (12)$$

Рассмотрим индуцированный над X уравнитель

$$VX \hookrightarrow (e^\infty)^*\ Vj^\infty Y \rightrightarrows (j^\infty f \circ \iota Y \circ e^\infty)^*\ Vj^\infty Z \qquad (13)$$

(напомним, что $j^\infty f\circ\iota Y\circ e^\infty = j^\infty g\circ\iota Y\circ e^\infty$). Обозначим, в согласии с [28], 10.4,

$$\varkappa_{\mathfrak{X}} = (e^\infty)^*\varkappa = (\pi Y\circ e^\infty)^*\mathrm{V}Y$$

$$P_{\mathfrak{X}} = (f\circ e^\infty)^*\mathrm{V}Z = (g\circ e^\infty)^*\mathrm{V}Z$$

Тогда

$$\begin{aligned} j^\infty_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}} &= \xi^* j^\infty\varkappa_{\mathfrak{X}} = \xi^* j^\infty((\pi Y\circ e^\infty)^*\mathrm{V}Y) = \\ &= (j^\infty\pi Y\circ j^\infty e^\infty\circ\xi)^* j^\infty\mathrm{V}Y = (j^\infty\pi Y\circ\iota Y\circ e^\infty)^* j^\infty\mathrm{V}Y = \\ &= (e^\infty)^* j^\infty\mathrm{V}Y = (e^\infty)^*\mathrm{V}j^\infty Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j^\infty_{\mathfrak{X}}P_{\mathfrak{X}} &= \xi^* j^\infty P_{\mathfrak{X}} = (j^\infty f\circ j^\infty e^\infty\circ\xi)^* j^\infty\mathrm{V}Z = \\ &= (j^\infty f\circ\iota Y\circ e^\infty)^* j^\infty\mathrm{V}Z = (j^\infty f\circ\iota Y\circ e^\infty)^\infty\mathrm{V}j^\infty Z \end{aligned}$$

откуда следует эквивалентная запись

$$\mathrm{V}X \hookrightarrow j^\infty_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}} \underset{\tilde{G}}{\overset{\tilde{F}}{\rightrightarrows}} j^\infty_{\mathfrak{X}}P_{\mathfrak{X}} \tag{14}$$

уравнителя (12). Здесь $\tilde{F}$, индуцированное верхней строкой диаграммы (13), совпадает с композицией пунктирных стрелок

$$\begin{tikzcd}
j^\infty_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}} \arrow[rrr] \arrow[d] \arrow[dr, dotted] \arrow[drrr, phantom, "\text{унив.}"] & & & \mathrm{V}j^\infty Y \arrow[d] \arrow[dr, "\mathrm{V}\iota Y"] & & \\
X \arrow[rrr, "e^\infty"] \arrow[dr, equal] & & & j^\infty Y \arrow[dr, "\iota Y"] & & \\
& j^\infty_{\mathfrak{X}} j^\infty_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}} \arrow[rrr] \arrow[d] \arrow[dr, dotted] \arrow[drrr, phantom, "\text{унив.}"] & & & \mathrm{V}j^\infty j^\infty Y \arrow[d] \arrow[dr, "\mathrm{V}j^\infty f"] & \\
& X \arrow[rrr] \arrow[dr, equal] & & & j^\infty j^\infty Y \arrow[dr, "j^\infty f"] & \\
& & j^\infty_{\mathfrak{X}}P_{\mathfrak{X}} \arrow[rrr] \arrow[d] \arrow[drrr, phantom, "\text{унив.}"] & & & \mathrm{V}j^\infty Z \arrow[d] \\
& & X \arrow[rrr, "j^\infty f\circ\iota Y\circ e^\infty"'] & & & j^\infty Z
\end{tikzcd}$$

Предоставляем читателю убедиться, рассмотрев диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
j^\infty_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}} \arrow[rr, "\xi\varkappa_{\mathfrak{X}}"] \arrow[d] \arrow[ddr, dotted, "\iota_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}}"'] \arrow[drr, phantom, "\text{унив.}"] & & j^\infty\varkappa_{\mathfrak{X}} \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[ddr, "\iota\varkappa_{\mathfrak{X}}"] \arrow[drr, phantom, "\text{унив.}"] & & j^\infty VY \arrow[d, "j^\infty\tau Y"'] \arrow[ddr, "\iota VY"] & \cong & Vj^\infty Y \arrow[dll, "\tau j^\infty Y"'] \arrow[ddr, "V\iota Y"] & \\
X \arrow[rr, "\xi"'] \arrow[ddr, equal] & & j^\infty X \arrow[rr, "j^\infty e^\infty"'] \arrow[ddr, "\iota X"'] & & j^\infty Y \arrow[ddr, "\iota Y"'] & & & \\
& j^\infty_{\mathfrak{X}} j^\infty_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}} \arrow[rr, "j^\infty\xi\varkappa_{\mathfrak{X}}\circ\xi j^\infty_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}}"] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\text{унив.}"] & & j^\infty j^\infty\varkappa_{\mathfrak{X}} \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\text{унив.}"] & & j^\infty j^\infty VY \arrow[d] & \cong & Vj^\infty j^\infty Y \arrow[dll, "\tau j^\infty j^\infty Y"] \\
& X \arrow[rr, "j^\infty\xi\circ\xi"'] & & j^\infty j^\infty X \arrow[rr, "j^\infty j^\infty e^\infty"'] & & j^\infty j^\infty Y & &
\end{tikzcd}
$$

что первая из стрелок совпадает с $\iota_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}}$ и, пользуясь диаграмой

$$
\begin{tikzcd}
j^\infty_{\mathfrak{X}} j^\infty_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}} \arrow[rr, "\xi j^\infty_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}}"] \arrow[d] \arrow[ddr, dotted, "j^\infty_{\mathfrak{X}}F"'] \arrow[drr, phantom, "\text{унив.}"] & & j^\infty j^\infty_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}} \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[ddr, "j^\infty F"] \arrow[drr, phantom, "\text{унив.}"] & & j^\infty Vj^\infty Y \arrow[d, "j^\infty\tau j^\infty Y"'] \arrow[ddr, "j^\infty Vf"] & \cong & Vj^\infty j^\infty Y \arrow[dll, "\tau j^\infty j^\infty Y"'] \arrow[ddr, "Vj^\infty f"] & \\
X \arrow[rr, "\xi"'] \arrow[ddr, equal] & & j^\infty X \arrow[rr, "j^\infty e^\infty"'] \arrow[ddr, equal] & & j^\infty j^\infty Y \arrow[ddr, "j^\infty f"'] & & & \\
& j^\infty_{\mathfrak{X}} P_{\mathfrak{X}} \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\text{унив.}"] & & j^\infty P_{\mathfrak{X}} \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\text{унив.}"] & & j^\infty VZ \arrow[d, "j^\infty\tau Z"] & \cong & Vj^\infty Z \arrow[dll, "\tau j^\infty Z"] \\
& X \arrow[rr, "\xi"'] & & j^\infty X \arrow[rr, "j^\infty f\circ j^\infty e^\infty"'] & & j^\infty Z & &
\end{tikzcd}
$$

проверить, что вторая стрелка равна $j^\infty_{\mathfrak{X}}F$ для $F\colon j^\infty_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}} \longrightarrow P_{\mathfrak{X}}$ определяемого условием коммутативности диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
j^\infty_{\mathfrak{X}}\varkappa_{\mathfrak{X}} \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[ddr, dotted, "F"'] \arrow[drr, phantom, "\text{унив.}"] & & Vj^\infty Y \arrow[d, "\tau j^\infty Y"'] \arrow[ddr, "j^\infty Vf"] & \\
X \arrow[rr, "e^\infty"'] \arrow[ddr, equal] & & j^\infty Y \arrow[ddr, "f"'] & \\
& P_{\mathfrak{X}} \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\text{унив.}"] & & VZ \arrow[d, "\tau Z"] \\
& X \arrow[rr, "f\circ e^\infty"'] & & Z
\end{tikzcd}
$$

т.е. для ограничения F на $\mathfrak{X}$ универсальной линеаризации Vf оператора $f\colon Y \longrightarrow Z$. Аналогичное имеет место и для g.

Суммируя все сказанное, мы получаем следующее:

3.11. Лемма: *Для регулярного уравнения* $\mathcal{X}$ *имеет место уравнитель* (14)

$$VX \hookrightarrow j^{\infty}_{\mathcal{X}}\varkappa_{\mathcal{X}} \overset{\tilde{F}}{\underset{\tilde{G}}{\rightrightarrows}} j^{\infty}_{\mathcal{X}}P_{\mathcal{X}}$$

или, что то же, точная последовательность

$$VX \hookrightarrow j^{\infty}_{\mathcal{X}}\varkappa_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\tilde{F}-\tilde{G}} j^{\infty}_{\mathcal{X}}P_{\mathcal{X}} \tag{15}$$

где $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ *–* $j^{\infty}_{\mathcal{X}}$*-продолжения* $\tilde{F} = j^{\infty}_{\mathcal{X}}F \circ \iota_{\mathcal{X}}\varkappa_{\mathcal{X}}$, $\tilde{G} = j^{\infty}_{\mathcal{X}}G \circ \iota_{\mathcal{X}}\varkappa_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{C}$*-дифференциальных операторов* $F, G\colon \varkappa_{\mathcal{X}} \longrightarrow P_{\mathcal{X}}$ *– ограничений на* $\mathcal{X}$ *универсальной линеаризации* Vf, Vg *операторов* $f, g\colon Y \longrightarrow Z$.

Как следствие, для $Ш^{1,q}_0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}(VX, \overline{B^q X})$ имеют место точные последовательности

$$0 \longleftarrow Ш^{1,q}_0 \longleftarrow \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa_{\mathcal{X}}, \overline{B^q X}) \xleftarrow{\mathcal{C}\mathrm{Diff}(F-G,\, \overline{B^q X})} \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_{\mathcal{X}}, \overline{B^q X}) \tag{16}$$

составляющие коммутативную диаграмму с точными столбцами

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_{\mathcal{X}}, \overline{B^0 X}) & \longrightarrow & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_{\mathcal{X}}, \overline{B^1 X}) & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(P_{\mathcal{X}}, \overline{B^k X}) \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
\mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa_{\mathcal{X}}, \overline{B^0 X}) & \longrightarrow & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa_{\mathcal{X}}, \overline{B^1 X}) & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & \mathcal{C}\mathrm{Diff}(\varkappa_{\mathcal{X}}, \overline{B^k X}) \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\
Ш^{1,0}_0 & \longrightarrow & Ш^{1,1}_0 & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & Ш^{1,k}_0
\end{array}.$$

Его коммутативность немедленно следует из определения стрелок.

Перейдя к формально сопряженным операторам, и, опираясь на 3.10, добавив, где нужно, ядра и коядра, мы приходим к точной последовательности комплексов $\mathcal{F}X$-гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{K}^{1,0} & \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow & \mathcal{K}^{1,k} & \dashrightarrow\!\!\!\!\rightarrow & \mathrm{Ker}\ (F^*_{\mathcal{A}} - G^*_{\mathcal{A}}) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \vdots & & \\
\mathcal{C}\mathrm{Diff}\,(\overline{B^{0*}X}, P^*_{\mathcal{X}}) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathcal{C}\mathrm{Diff}\,(\overline{B^{k*}X}, P^*_{\mathcal{X}}) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}(\overline{A^*X}, P^*_{\mathcal{X}}) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \vdots\, F^*_{\mathcal{A}} - G^*_{\mathcal{A}} & & (17) \\
\mathcal{C}\mathrm{Diff}\,(\overline{B^{0*}X}, \boldsymbol{\varkappa}^*_{\mathcal{X}}) & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \mathcal{C}\mathrm{Diff}\,(\overline{B^{k*}X}, \boldsymbol{\varkappa}^*_{\mathcal{X}}) & \twoheadrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}(\overline{A^*X}, \varkappa^*_{\mathcal{X}}) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \vdots & & \\
\text{Ш}^{1,0}_0 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \text{Ш}^{1,k}_0 & \dashrightarrow & \mathrm{Coker}\ (F^*_{\mathcal{A}} - G^*_{\mathcal{A}}) & &
\end{array}$$

причем две серединные строки точны. Стрелка обозначенная $F^*_{\mathcal{A}}-G^*_{\mathcal{A}}$ притом описывается при помощи следующего утверждения:

3.12. Утверждение: *Оператор*

$$F^*_{\mathcal{A}}:\ \mathrm{Hom}\ (\overline{A^*X}, P^*_{\mathcal{X}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}\ (\overline{A^*X}, \varkappa^*_{\mathcal{X}})$$

сопоставляет гомоморфизму $h\colon \overline{A^*X} \longrightarrow P^*_{\mathcal{X}}$ *гомоморфизм*

$$\overline{A^*X} \xrightarrow{\ \overline{\alpha^*X}\ } \overline{j^\infty A^*X} \cong j^\infty_{\mathcal{X}}\overline{A^*} \xrightarrow{\ j^\infty_{\mathcal{X}}h\ } j^\infty_{\mathcal{X}}P^*_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\ F^*\ } \varkappa^*_{\mathcal{X}}$$

где $\alpha^*\colon A \longrightarrow j^\infty A$ *задает структуру* $\mathbb{J}$*-коалгебры в* $\mathcal{A}^*$.

Доказательство: Достаточно доказать коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}\mathrm{Diff}\,(\overline{B^{k*}}X, P^*_{\mathcal{X}}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}(\overline{A^*}X, P^*_{\mathcal{X}}) \\
\downarrow & & \downarrow F^*_{\mathcal{A}} \\
\mathcal{C}\mathrm{Diff}\,(\overline{B^{k*}}X, P^*_{\mathcal{X}}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}X}(\overline{A^*}X, \varkappa^*_{\mathcal{X}})
\end{array}$$

что для $h \in \mathrm{Hom}\ (j^{\infty}\overline{B^{k*}}X, P^*_{\mathcal{X}}) \cong \mathrm{Hom}\ (j^{\infty}_{\mathcal{X}}\overline{B^{k*}}X, P^*_{\mathcal{X}}) \cong \mathcal{C}\mathrm{Diff}\ (\overline{B^{k*}}X, P^*_{\mathcal{X}})$ равносильно коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccccccc}
\overline{A^*}X & \hookrightarrow & \overline{j^{\infty}B^{k*}}X & \cong & j^{\infty}_{\mathcal{X}}\overline{B^{k*}}X & & & & \\
\downarrow \overline{\alpha^*}X & & \downarrow \overline{\iota B^{m*}}X & & \downarrow \iota_{\mathcal{X}}\overline{B^{m*}}X & & & & \\
\overline{j^{\infty}A^*}X & \hookrightarrow & \overline{j^{\infty}j^{\infty}B^{k*}}X & \cong & j^{\infty}_{\mathcal{X}}j^{\infty}_{\mathcal{X}}\overline{B^{k*}}X & \xrightarrow{j^{\infty}_{\mathcal{X}}h} & j^{\infty}_{\mathcal{X}}P^*_{\mathcal{X}} & \xrightarrow{F^*} & \varkappa^*_{\mathcal{X}}
\end{array}$$

3.13. **Утверждение**: *Пусть модули* $\mathcal{K}^q$, $q = 1,\ldots,k$ *определены согласно диаграмме* (17), *пусть* $\mathcal{K}^{k+1} := \mathrm{Ker}\ (F^*_{\mathcal{A}} - G^*_{\mathcal{A}})$. *Тогда*

$$Ш_1^{1,q} \cong \frac{\mathrm{Ker}\ (\mathcal{K}^{q+2} \longrightarrow \mathcal{K}^{q+3})}{\mathrm{Im}\ (\mathcal{K}^{q+1} \longrightarrow \mathcal{K}^{q+2})}, \qquad q<k-1$$

$$Ш_1^{1,k-1} \cong \frac{\mathcal{K}^{m+1}}{\mathrm{Im}\ (\mathcal{K}^{m} \longrightarrow \mathcal{K}^{m+1})}$$

$$Ш_1^{1,k} \cong \mathrm{Coker}\ (F^*_{\mathcal{A}} - G^*_{\mathcal{A}}).$$

Доказательство: Проводится как в формулах (10.7.2) [28] путем вложения серединной строки $\mathcal{K}^q_0 = \mathrm{Im}\ (\mathcal{C}\mathrm{Diff}\,(F-G, \overline{B^q}X))$.

Для непереопределенных уравнений, как правило, $\tilde{F} - \tilde{G}$ – эпиморфизм, т.е. диаграмма (15) представляет собой короткую точную последовательность. Соответственно, и (16) прдставляет собой короткую точную последовательность, вследствие чего имеет место

3.14. Следствие: *Пусть* $\tilde{F} - \tilde{G}$ *– эпиморфизм. Тогда, в обозначениях 3.13,* $\mathcal{K}^q = 0$, $q = 1,..,k$ *и*

$$Ш_1^{1,q} = 0 \qquad q<k-1$$

$$Ш_1^{1,k-1} \cong \operatorname{Ker}\,(F^*_{\mathcal{A}} - G^*_{\mathcal{A}}).$$

$$Ш_1^{1,k} \cong \operatorname{Coker}\,(F^*_{\mathcal{A}} - G^*_{\mathcal{A}}).$$

На этом нами исследование спектральной последовательности закончено. Рассмотрение членов $Ш_1^{p,q}$, $p>1$ и $Ш_1^{p,q}$, $r>1$ выходит за рамки этой диссертации. Отметим, однако, что формулировки и результаты соответствующих параграфов 10.9 – 10.12 статьи [28] непосредственно применимы и к нашей более общей последовательности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M. BARR; J. BECK: *Homology and standard constructions*, Seminar on Triples and Categorical Homology Theory, LNM 80, Springer 1969, 245 - 335

[2] J. BECK: *Triples, algebras and cohomology*, dissertation, Columbia University 1967

[3] И. Н. БЕРНШТЕЙН; Б. И. РОЗЕНФЕЛЬД: *Однородные пространства бесконечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений*, Успехи Математических Наук **28** (1973), 103 - 138

[4] E. J. DUBUC: *Sur les modèles de la géométrie différentielle synthétique*, Cahiers Top. Géom. Diff. **20** (1979), 231 - 279

[5] J. DUSKIN: *$K(\pi,n)$-torsors and the interpretation of "triple" cohomology*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **71** (1974), 2554 - 2557

[6] S. EILENBERG; J. C. MOORE: *Adjoint functors and triples*, Ill. J. Math. **9** (1965), 381 - 398

[7] A. FRÖLICHER: *Smooth structures*, Lecture Notes in Math. 962 Springer 1982, 69 - 81

[8] R. GODEMENT: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Herman, Paris 1958

[9] W. GREUB; S. HALPERIN; R. VANSTONE: *Connections, Curvature and Cohomology*, Academic Press, New York 1972

[10] Н. Г. ХОРЬКОВА: *Законы сохранения и нелокальные симметрии*, Мат. Заметки **44** (1988), 134 - 144

[11] H. KLEISLI: *Every standard construction is induced by a pair of adjoint functors*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 544 - 546

[12] I. S. KRASILSHCHIK, A. M. VINOGRADOV: *Nonlocal symmetries and the theory of coverings*, Acta Appl. Math. 2 (1984), 79 - 96

[13] С. ЛЕНГ: *Введение в теорию дифференцируемых многообразий*, Москва, Мир 1967

[14] S. MAC LANE: *Homology*, Springer 1963

[15] S. MAC LANE: *Categories for the working mathematician*, Springer 1971

[16] E. G. MANES: *Algebraic Theories*, GTM 26, Springer 1976

[17] M. MARVAN: *A note on the category of partial differential equations*, Differential geometry and its applications, Proc. Conf., Brno 1986, Univ. J. E. Purkyně, Brno 1987

[18] M. MARVAN: *On the horizontal cohomology with general coefficients*, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, в печати

[19] M. МАРВАН: *О $\mathcal{C}$-спектральной последовательности с общими коэффициентами* MARVAN M. *On the C-spectral sequence with "general" coefficients*, in "Differential Geometry and Its Applications," Proc. Conf. Brno 1989, World Scientific, Singapore 1990, 361–371

[20] J.-F. POMMARET: *Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups*, Gordon and Breach, New York 1978

[21] R. G. SWAN: *Vector bundles and projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962), 264 - 277

[22] T. TSUJISHITA: *On variation bicomplexes associated to differential equations*, Osaka J. Math. **19** (1982), 311 - 363

[23] D. H. VAN OSDOL: *Bicohomology theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **183** (1973), 449 - 476

[24] А. М. ВИНОГРАДОВ: *Одна спектральная последовательность, связанная с нелинейным дифференциальным уравнением, и алгебро-геометрические основания лагранжевой теории поля со связями*, Доклады АН СССР 238 (1978), 1028 - 1031

[25] А. М. ВИНОГРАДОВ: *Геометрия нелинейных дифференциальных уравнений*, Проблемы геометрии II, Итоги науки и техники, ВИНИТИ, Москва 1980

[26] А. М. ВИНОГРАДОВ: *Категория нелинейных дифференциальных уравнений*, Уравнения на многообразиях, Новое в глобальном анализе, Воронеж 1982

[27] А. М. ВИНОГРАДОВ: *Категория нелинейных дифференциальных уравнений*, дополнение к русскому переводу книги [20]

[28] A. M. VINOGRADOV: *The $\mathcal{C}$-spectral sequence, lagrangian formalism, and conservation laws*, J. Math. Anal. and Appl. **100** (1984), 1 - 129

[29] A. M. VINOGRADOV: *Category of differential equations and its significance for physics*, Geometrical Methods in Physics, Proc. Conf. Diff. Geom. and Its Appl., Nové Město na Moravě 1983, Univ. J. E. Purkyně, Brno 1984

[30] А. М. ВИНОГРАДОВ; И. С. КРАСИЛЬЩИК; В. В. ЛЫЧАГИН: *Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва 1986