conférence prononcée lors du
Séminaire itinérant sur les catégories,
séance du 18 novembre 2000
à l'Université d'Amiens

ESQUISSE D'EXTENSION GALOISIENNE. ESQUISSES PRESQUE INDUCTIVES ET PRESQUE PROJECTIVES.

par **Pierre Ageron**

Département de Mathématiques, Université de Caen, 14000 Caen, France
ageron@math.unicaen.fr

Cet exposé supposera connues (entre autres choses !) :

- la notion d'esquisse (Ehresmann,1966) ;
- la caractérisation sémantique des catégories de modèles d'esquisses comme catégories β-accessibles, pour un certain cardinal régulier β (Lair, 1981) ;
- la notion de multilimite inductive d'un diagramme (Diers, 1977) ;
- l'équivalence, lorsque $\mathbb{C}$ est une catégorie accessible, des conditions suivantes :
  (*a*) $\mathbb{C}$ est multicocomplète (c.-à-d. possède toutes les multilimites inductives),
  (*b*) $\mathbb{C}$ possède les limites projectives d'indexation connexe ;
- la caractérisation syntaxique des catégories α-accessibles multicocomplètes comme catégories de modèles des esquisses dont :
  — tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation α-petite,
  — tous les cônes inductifs distingués sont d'indexation discrète
(Guitart et Lair, 1980).

Avant d'en venir au principal sujet de cet exposé, les catégories accessibles *multicomplètes*, il m'a paru intéressant de détailler un peu un exemple de catégorie accessible multi<u>co</u>complète, à la fois typique et assez différent de ceux qui sont en général proposés.

Fixons un corps commutatif k et intéressons-nous à la catégorie (essentiellement petite) $\mathbf{Extgal}(k)$ dont les objets sont les extensions algébriques galoisiennes de k (les flèches étant les morphismes de corps). Il est possible, instructif et aucunement trivial d'esquisser $\mathbf{Extgal}(k)$ sans recourir à la machinerie des multilimites inductives. Voici une esquisse $\mathbb{E}$, aussi compacte que possible ($\bar{k}$ désigne une clôture séparable fixée de k) :

— **objets :** tous les sous-groupes distingués ouverts stricts H du groupe topologique $G = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ ainsi que tous les couples (H', H'') de tels sous-groupes ;

— **flèches :**

$$H' \xrightarrow{g} H \quad \text{si} \quad H' \subset H \quad \text{et} \quad g \in G\,/\,H$$

$$H' \xleftarrow{p'} (H', H'') \xrightarrow{p''} H''$$

$$H' \cap H'' \xrightarrow{<g,1>} (H', H'') \quad \text{si} \quad g \in G/H'$$

— **équations :**

$$H'' \xrightarrow{g'} H' \xrightarrow{g} H \qquad = \qquad H'' \xrightarrow{gg'} H$$

$$H' \cap H'' \xrightarrow{<g,1>} (H', H'') \xrightarrow{p'} H' \qquad = \qquad H' \cap H'' \xrightarrow{g} H'$$

$$H' \cap H'' \xrightarrow{<g,1>} (H', H'') \xrightarrow{p''} H'' \qquad = \qquad H' \cap H'' \xrightarrow{1} H''$$

— **cônes projectifs distingués :**

$$H' \xleftarrow{p'} (H', H'') \xrightarrow{p''} H''$$

— **cônes inductifs distingués :**

$$(\, < g, 1 > :\ H' \cap H'' \to (H', H'')\,)_{\,g \in G/H'}\,.$$

PROPOSITION.— *Les catégories* **Mod**$(\mathbb{E})$ *et* **Extgal**(k) *sont équivalentes.*

La démonstration repose évidemment sur la théorie de Galois-Krull, ainsi que sur les remarques complémentaires suivantes, valables pour tout modèle M de $\mathbb{E}$:

— pour tout sous-groupe distingué ouvert strict H de G, l'ensemble $M(H)$ a une structure canonique de G/H-ensemble *formellement homogène principal* au sens de Grothendieck, ce qui implique qu'il est soit vide, soit isomorphe à G/H ;

— l'ensemble des sous-groupe distingués ouverts stricts H de G tels que $M(H) \neq \emptyset$ est un idéal du quart-de-treillis formé par tous ces sous-groupes.

On constate que l'esquisse $\mathbb{E}$ est à cônes projectifs distingués d'indexation finie et à cônes inductifs distingués d'indexation discrète. On note aussi qu'elle est à cônes projectifs d'indexation *non vide*, ce qui, selon [99], traduit exactement l'existence d'un objet initial *strict* dans **Extgal**(k).

Pour une construction « pas à pas » de cette « esquisse d'extension galoisienne », je renvoie à [00c], et pour comparaison à [00b].

J'en viens maintenant à l'étude des catégories accessibles **multicomplètes**, c'est-à-dire celles dont la catégorie opposée est multicocomplète. Malgré l'abondance d'exemples naturels (voir plus loin), elles n'ont jamais été considérées jusqu'à présent. Remarquons que leur étude ne saurait consister en une simple dualisation de celle des catégories accessibles multicocomplètes, puisque la catégorie opposée d'une catégorie accessible n'est pas, en général, accessible. Dans ces conditions, le théorème suivant, malgré sa démonstration difficile (cf. [00e]), constitue une agréable surprise :

THÉORÈME.— *Soit $\mathbb{C}$ une catégorie accessible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(a) *$\mathbb{C}$ est multicomplète ;*
(b) *$\mathbb{C}$ possède les limites inductives d'indexation connexe.*

Veut-on des *exemples* de catégories accessibles vérifiant les conditions équivalentes du théorème précédent ? La proposition suivante en fournit une large classe. Nous dirons qu'une esquisse est **presque inductive** si tous ses cônes projectifs distingués sont d'indexation vide (ses cônes inductifs distingués étant quelconques).

PROPOSITION.— *La catégorie des modèles d'une esquisse presque inductive est une catégorie accessible multicomplète.*

Citons la catégorie des ensembles non vides, celle des graphes connexes, celle des G-ensembles homogènes (où G est un groupe fixé), etc.

La réciproque de cette proposition est fausse : une catégorie accessible multicomplète, ou même complète, n'est pas nécessairement équivalente à la catégorie des modèles d'une esquisse presque inductive — ainsi, quoique cela semble étonnement délicat à prouver, de la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\{0 \leq 1\}$.

On peut donc se demander s'il est possible de décrire une classe d'esquisses dont les catégories de modèles sont *toutes* les catégories accessibles à multilimites projectives. La réponse est oui : il suffit de considérer les esquisses que nous appellerons **presque projectives**. Leur définition, qui n'est en rien duale de celle des esquisses presque inductives, ne sera pas précisée ici (nous renvoyons à [00a]) ; on se limitera à l'étude de deux exemples, d'ailleurs très particuliers. Ce qui justifie le nom et fait tout l'intérêt des esquisses presque projectives, c'est le théorème suivant, généralisant un fait bien connu sur les esquisses projectives :

THÉORÈME.— *Soit α un cardinal régulier. Les catégories α-accessibles multicomplètes sont (à équivalence près) les catégories de modèles des esquisses presque projectives dont tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation α-petite et dont les cônes inductifs distingués sont en nombre $< \alpha$.*

Une esquisse presque inductive $\mathbb{E}$ étant donnée, il existe donc une esquisse presque projective $\mathbb{E}'$ qui a une catégorie de modèles équivalente à celle de $\mathbb{E}$. Si on connaît (pour quelque raison extérieure) une telle esquisse $\mathbb{E}'$, on en déduit un majorant du rang d'accessibilité de $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E})$.

EXEMPLE 1.— La catégorie des *ensembles munis d'une endosurjection* est esquissable par l'esquisse formée d'un seul objet X et d'une spécification d'épimorphisme $f : X \to X$. Cette esquisse $\mathbb{E}$ est (purement) inductive. Il existe donc une esquisse (purement) projective $\mathbb{E}'$ qui a une catégorie de modèles équivalente à celle de $\mathbb{E}$. Dans [00d], on montre que la catégorie des modèles de $\mathbb{E}$ est équivalente à la catégorie des modèles de la théorie écrite dans la logique L_{ω_1,ω_1} au moyen d'un symbole fonctionnel unaire σ et d'une famille $(R_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de symboles relationnels binaires, comportant des axiomes exprimant que σ est une bijection, que chaque R_i est une relation d'équivalence, et les axiomes et schémas suivants :

$$(\bigwedge_{i\in\mathbb{Z}} R_i(t,t')) \Rightarrow (t = t')$$

$$\forall t\ \forall t' \quad R_i(t,t') \Rightarrow R_{i+1}(t,t')$$

$$\forall t\ \forall t' \quad R_{i+1}(t,t') \iff R_i(\sigma(t),\sigma(t'))$$

$$\forall (t_i)_{i\in\mathbb{Z}} \quad (\bigwedge_{i\in\mathbb{Z}} R_i(t_{i-1},t_i)) \Rightarrow (\exists!\, t \bigwedge_{i\in\mathbb{Z}} R_i(t,t_i))$$

Il en résulte aisément une esquisse projective $\mathbb{E}'$, à cônes projectifs d'indexation dénombrable (et connexe, cf. [99]), dont la catégorie des modèles est équivalente à celle de $\mathbb{E}$. On démontre par ailleurs ([00d]) qu'aucune esquisse projective à cônes projectifs d'indexation finie n'a une catégorie de modèles équivalente à celle de $\mathbb{E}$.

EXEMPLE 2.— La catégorie des *suites d'ensembles non vides* est esquissable par l'esquisse formée d'objets $X_0, X_1, \ldots$, d'un objet supplémentaire 1 spécifié comme objet final et d'une suite de spécifications d'épimorphisme $X_k \to 1$. Cette esquisse $\mathbb{E}$ est presque inductive. Il existe donc une esquisse presque projective qui a une catégorie de modèles équivalente à celle de $\mathbb{E}$. Affirmons qu'il s'agit de l'esquisse $\mathbb{E}'$ traduisant la propriété suivante, clairement équivalente à la non vacuité des X_k :

$$\varinjlim_{D\,\in\,\mathbb{E}\mathrm{ns}^*_{\aleph_1}} \prod_{k\in\mathbb{N}} {X_k}^D \quad = \quad 1$$

($\mathbb{E}\mathrm{ns}^*_{\aleph_1}$ est la catégorie essentiellement petite des ensembles dénombrables non vides). Cette esquisse est à cônes projectifs d'indexation dénombrable et n'a qu'un seul cône inductif. On montre par ailleurs qu'aucune esquisse presque projective à cônes projectifs d'indexation finie n'ayant qu'un nombre fini de cônes inductifs n'a une catégorie de modèles équivalente à celle de $\mathbb{E}$.

RÉFERENCES (tous ces articles sont des prépublications de l'Université de Caen)

[99] P. AGERON, *Limites inductives point par point dans les catégories accessibles*
[00a] P. AGERON, *Esquisses inductives et presque inductives*
[00b] P. AGERON, *L'art de l'esquisse (1) : esquisse de nombre réel*
[00c] P. AGERON, *L'art de l'esquisse (2) : esquisse d'extension galoisienne*
[00d] P. AGERON, *L'art de l'esquisse (3) : esquisse d'endosurjection*
[00e] P. AGERON, *Catégories accessibles multicomplètes*