

UNIVERSITE DE PARIS-NORD

N° C.N.R.S. A.O. 12.103

Freundlich Gruppe
R. Yost

THESES DE DOCTORAT D'ETAT EN MATHÉMATIQUES

présentées par

Jean CELEYRETTE

1ère Thèse

Catégories internes et fibrations

2ème Thèse

Cohomologie de gel-fand-fuks

Thèses soutenues le 15 Novembre 1975
devant la Commission d'Examen

MM. J.P. LAFON, Président
J. BENABOU, Rapporteur
D. LEHMANN
S. FAKIR
M. ANDLER
M. TIERNEY

CATEGORIES INTERNES
ET FIBRATIONS



SOMMAIRE

INTRODUCTION.

CHAPITRE I - PRELIMINAIRES.

CHAPITRE II - GENERALITES SUR LES FIBRATIONS.

CHAPITRE III - FIBRATIONS LOCALEMENT PETITES.

CHAPITRE IV - FIBRATIONS SUR $\text{Cat } \mathcal{B}$ ASSOCIEE A UNE \mathcal{B} -FIBRATION.

CHAPITRE V - COMPLETEUDE.

CHAPITRE VI - THEOREME DE KAN.

CHAPITRE VII - THEOREMES DE REPRESENTABILITE ET DU FONCTEUR ADJOINT.

BIBLIOGRAPHIE.

*

*

*

INTRODUCTION

Dans l'étude des topos - en particulier - interviennent constamment des raisonnements relatifs aux catégories internes à une catégorie donnée. On se propose de développer une technique permettant dans de nombreux théorèmes importants de la théorie des catégories de remplacer Ens par une catégorie plus générale \mathbb{B} à limites projectives finies. Cette technique repose sur l'utilisation des fibrations de base \mathbb{B} . On remarque d'abord qu'à toute catégorie \mathbb{C} est associée une fibration $\text{Ens}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Ens}$ (où un objet de $\text{Ens}(\mathbb{C})$ au-dessus de I est une famille indexée par I d'objets de \mathbb{C}). Remplaçant Ens par \mathbb{B} , on peut associer à toute catégorie $\underline{\mathbb{C}}$ interne à \mathbb{B} une fibration $C : \mathbb{B}(\underline{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{B}$. Une telle fibration sera dite petite. A la catégorie \mathbb{B} elle-même, on fait correspondre la fibration $\text{But} : \mathcal{F}\ell \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ (notée \mathbb{B}). Le rôle des catégories est alors joué dans ce contexte par les fibrations sur \mathbb{B} (§ 2).

Une classe importante de fibrations est formée des fibrations localement petites (§ 3).

Les foncteurs entre catégories "ordinaires" sont remplacés par les foncteurs cartésiens sur \mathbb{B} .

En particulier, à tout foncteur interne entre $\underline{\mathbb{C}}, \underline{\mathbb{C}}' \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$, à tout préfaisceau interne (de $\underline{\mathbb{C}} \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$, dans \mathbb{B}) correspondent des foncteurs cartésiens entre les fibrations correspondantes. Le problème de la composition d'un préfaisceau et d'un foncteur interne ou d'un préfaisceau et d'un foncteur, se ramène alors à la composition des foncteurs cartésiens.

On donne un sens à la notion de fibration à \mathbb{B} -limites ainsi qu'à celle de commutation aux \mathbb{B} -limites (§ 4).

On peut alors, dans ce contexte, établir quelques théorèmes importants tels que le théorème du foncteur adjoint, de représentabilité (§ 7) ou le théorème de Kan (\hat{C} étant une catégorie de préfaisceaux, tout foncteur ϕ commutant aux limites inductives, de \hat{C} dans D à limites inductives et localement petite, est déterminé par sa restriction à \underline{C} ; de plus ϕ a un adjoint à droite) (§ 6).

Un chapitre préliminaire (§ 1), en exposant un cas particulier, justifie le recours aux catégories fibrées. On prend systématiquement les hypothèses minimales sur B , qui, le plus souvent, doit simplement avoir des limites projectives finies (y compris un objet final 1). Pour certains théorèmes, B doit de plus posséder des \prod (adjoints à droite des foncteurs images inverses). Tout topos élémentaire a évidemment ces propriétés mais, bien sûr, les hypothèses satisfaites par un topos sont beaucoup trop fortes.

L'idée d'utiliser les fibrations pour étudier les catégories internes à un topos (et plus généralement à une catégorie à lim finies) est de J. BENABOU. Certains résultats (signalés comme tels dans le texte) sont également de lui. Il me faut d'ailleurs le remercier non seulement pour son aide au cours de l'élaboration de ce travail, mais surtout pour la patience, la générosité et l'amitié qu'il manifeste à l'égard de ses élèves.

Je désire enfin remercier Mesdames Bérat et Lengaigne pour le soin qu'elles ont mis à composer ce texte à partir d'un bien mauvais manuscrit.

CHAPITRE I

PRELIMINAIRES

Soit $F : \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$ un foncteur. Pour tout ensemble I , on peut lui associer un foncteur $F_I : \text{Ens}/I \rightarrow \text{Ens}/I$ (donné par :

$$F_I[(X_i)_{i \in I}] = ((FX_i)_{i \in I}).$$

Par ailleurs, le foncteur

$$\text{But} : F\mathcal{L}(\text{Ens}) \rightarrow \text{Ens}$$

est fibrant, car Ens a des lim finies.

La famille, pour $I \in |\text{Ens}|$, des foncteurs F_I précédents définit un foncteur cartésien de cette fibration dans elle-même.

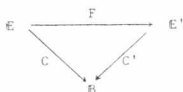
Désirant remplacer Ens par une catégorie plus générale à lim finies, on est amené à introduire la fibration :

$$\text{But} : F\mathcal{L} B \rightarrow B \quad (\text{notée dans toute la suite } B)$$

et les foncteurs cartésiens de B dans B .

1.1.- Rappel - Définition.

Etant donné deux fibrations $C : \mathbb{E} \rightarrow B$ et $C' : \mathbb{E}' \rightarrow B$, on appelle foncteur cartésien de C dans C' (ou de \mathbb{E} dans \mathbb{E}' au-dessus de B) un foncteur $F : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ tel que $C'F = C$ et tel que l'image par F d'un morphisme cartésien de \mathbb{E} soit cartésien dans \mathbb{E}' .



Notation. - Pour tout $I \in |\mathbb{B}|$, on note F_I la restriction de F à la fibre au-dessus de I . On notera parfois F , au lieu de F_I sa restriction à la fibre au-dessus de I (objet final de \mathbb{B}).

Remarque 1.1.1. - Etant donné un topos élémentaire \mathbb{B} , la plupart des foncteurs obtenus à partir des constructions usuelles dans les topos s'étendent à des foncteurs cartésiens entre des fibrations sur \mathbb{B} .

Exemple. - L'exponentiation $(X, Y) \rightarrow Y^X$ définit un bifoncteur

$$\mathbb{B}^{\text{op}} \times \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}.$$

Mais, pour tout I , \mathbb{B}/I est un topos.

Pour $f : J \rightarrow I$, $f^* : \mathbb{B}/I \rightarrow \mathbb{B}/J$ est un foncteur logique, qui commute aux exponentielles, soit :

$$\forall \xi \in |\mathbb{B}/I| \quad \forall \eta \in |\mathbb{B}/I| \quad (f^* \eta)^{f^* \xi} = f^*(\eta^\xi).$$

On introduit alors les fibrations :

$$B : \mathcal{F}\ell \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$$

et
$$P : \overline{\mathcal{F}\ell \mathbb{B}} \times_{\mathbb{B}} \mathcal{F}\ell \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{\mathcal{F}\ell \mathbb{B}} \times_{\mathbb{B}} \mathcal{F}\ell \mathbb{B} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{F}\ell \mathbb{B} \\
 \downarrow Q & \text{p.f.} & \downarrow B \\
 \mathcal{F}\ell \mathbb{B} & \xrightarrow{\quad \overline{\mathbb{B}} \quad} & \mathbb{B}
 \end{array}$$

(où $P = \bar{B} Q$ et où \bar{B} est une fibration telle que, pour tout I , la fibre au-dessus de I est $(B/I)^{OP}$, (voir 2.8.1.).

La famille des bifoncteurs "exponentiation" dans chaque fibre $(B/I)^{OP} \times (B/I)$ définit alors un foncteur cartésien :

$$P \longrightarrow B$$

Remarque 1.1.2. - B est une catégorie à limites projectives finies. Soit F un foncteur cartésien de B dans B

$$F \in |\text{Cart}_B(B, B)|$$

pour tout $T \in |B|$ ($t : T \rightarrow I$) et $X \in |B|$

$$B(T, FX) = B/T(I_T, F_T(t^*X)) .$$

Remarque 1.1.3. - Si, pour tout I , B/I est cartésienne fermée (ce qui équivaut à l'existence d'adjoints à droite pour les foncteurs f^* de changement de bases, donc est vrai si B est un topos élémentaire), B/I est une catégorie relative à B/I . Soit $\phi \in |\text{Cart}_B(B, B)|$.

$$\phi_I : B/I \rightarrow B/I \text{ est un foncteur fort}$$

(voir la démonstration d'une propriété plus générale en 3.4.a).

1.2.-Proposition.

Soit $\underline{C} \in |\text{Cat } B|$. On note (provisoirement) $B^{\underline{C}}$ la catégorie des préfaisceaux internes de \underline{C} dans B .

Si $F \in |\text{Cart}_B(B, B)|$, F s'étend à un foncteur

$$F^{\underline{C}} : B^{\underline{C}} \longrightarrow B^{\underline{C}}$$

Preuve : Un objet de $B^{\underline{C}}$ est un couple $(p_0, \bar{\lambda}_1)$, avec $p_0 \in |B/C_0|$ et $\bar{\lambda}_1 : d_0^* p_0 \rightarrow d_1^* p_0$ ($\bar{\lambda}_1 \in \text{Fl } B/C_1$), vérifiant les

conditions de descente habituelles

$$\begin{array}{ccc}
 \psi_1 & \xrightleftharpoons[\vartheta_0]{\lambda_1} & \psi_0 \\
 \downarrow d_0^* p_0 & & \downarrow p_0 \\
 C_1 & \xrightleftharpoons[d_0]{d_1} & C_0
 \end{array}$$

ϑ_0 est cartésienne au-dessus de d_0 et λ_1 est la flèche au-dessus de d_1 correspondant à $\bar{\lambda}_1$.

$F^{\mathbb{C}}$ est défini sur les objets par :

$$F^{\mathbb{C}}(p_0, \bar{\lambda}_1) = (F_{C_0}(p_0), F_{C_1}(\bar{\lambda}_1)) .$$

On a en effet :

$$F_{C_0}(p_0) \in |E/C_0|$$

$$F_{C_1}(\bar{\lambda}_1) : F_{C_1}(d_0^* p_0) \longrightarrow F_{C_1}(d_1^* p_0),$$

et, F étant cartésien, $(F_{C_1} d_0^* = d_0^* F_{C_0}$ et $F_{C_1} d_1^* = d_1^* F_{C_0})$

$$F_{C_1}(\bar{\lambda}_1) : d_0^* F_{C_0}(p_0) \longrightarrow d_1^* F_{C_0}(p_0).$$

La définition de $F^{\mathbb{C}}$ sur les morphismes est claire, et le fait que $F^{\mathbb{C}}$ est un foncteur se vérifie trivialement. On a ainsi défini un foncteur "composition par F " de $\mathbb{B}^{\mathbb{C}}$ dans $\mathbb{B}^{\mathbb{C}}$.

1.3.- Sommes internes.

On sait que pour toute catégorie \mathbb{B} à lim finies et pour toute $f \in |\text{Fl } \mathbb{B}|$, f^* a un adjoint à gauche \sum_f (la composition par f).

Si $i : I \rightarrow 1$, $i^* : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}/I$ est le foncteur, qui pour $\mathbb{B} = \text{Ens}$ associe à tout objet X , une famille indexée par I dont tous les termes sont égaux à X . L'adjoint à gauche \sum_i associe donc à toute famille indexée par I la somme (coproduit) de ses termes.

Dans le cas plus général de la catégorie \mathbb{B} , les foncteurs \sum_f définissent la notion de "somme interne à \mathbb{B} ".

1.4.- Définition.

On dit qu'un foncteur cartésien $F : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ commute aux "sommes internes" ssi

a) pour tout $f \in |\text{Fl } \mathbb{B}|$ $f : J \rightarrow I$, la flèche canonique $\sum_f \cdot F_J \rightarrow F_I \cdot \sum_f$ est un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{B}/J & \xrightarrow{F_J} & \mathbb{B}/J \\
 \downarrow \sum_f & & \downarrow \sum_f \\
 \mathbb{B}/I & \xrightarrow{F_I} & \mathbb{B}/I
 \end{array}$$

b) ϵ étant la flèche de coadjonction $\sum_f \cdot f^* \rightarrow \text{Id}$

$$F_I^* \cdot \epsilon = \epsilon_{F_I}.$$

Remarque.- Pour $\mathbb{B} = \text{Ens}$ et $I = 1$, la deuxième condition exprime que les images par F des inductions

$$X \longrightarrow \prod_{j \in J} (X_j = X)$$

sont les inductions :

$$FX \longrightarrow \prod_{j \in J} (FX_j = FX) .$$

1.5. - Théorème.

Soit $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur cartésien. Pour qu'il commute aux "sommages internes" il faut et il suffit qu'il existe $A \in |\mathcal{B}|$ tel que $F = A \times (-)$.

Preuve :

On note $A \times (-)$ le foncteur cartésien défini de la façon suivante :

$$\forall I \in |\mathcal{B}| \quad (i : I \rightarrow 1) \quad [A \times (-)]_I = i^* A \times_I (-) : \mathcal{B}/I \rightarrow \mathcal{B}/I.$$

La commutation aux f^* et aux \sum_f est triviale.

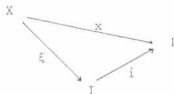
La commutation aux ε se montre en "recollant" deux produits fibrés.

Inversement :

Soit $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur cartésien commutant aux "sommages internes".

Pour tout $\xi \in |\mathcal{B}/I|$

a) on calcule $F_I(\xi)$



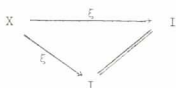
$$\text{on a } \xi = \sum_{\xi} i_X$$

$$F_I(\varepsilon) = F_I\left(\sum_{\xi} 1_X\right) = \sum_{\xi} F_X(1_X).$$

Mais $1_X = x^*1$, F étant cartésien :

$$\begin{aligned} \sum_{\xi} F_X(1_X) &= \sum_{\xi} x^*F(1) \approx \sum_{\xi} \xi^*i^*F(1) \\ &= i^*F(1) \times \xi \text{ (produit dans } B/I) \\ &= (F(1) \times \xi)_I. \end{aligned}$$

b) On note ε_I la flèche finale : $\xi \rightarrow 1_I$, représentée par le triangle commutatif



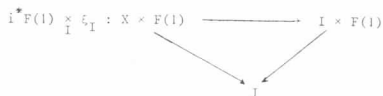
et on calcule $F_I(\varepsilon_I)$.

ε_I est aussi la flèche de coadjonction : $\sum_{\xi} \xi^* 1_I \rightarrow 1_I$ précédemment notée ε_{1_I} .

La condition 1.4.b montre que

$$F_I(\varepsilon_{1_I}) \approx \varepsilon_{F_I(1_I)} \approx \varepsilon_{i^*F(1)}.$$

Cette dernière flèche n'est autre que la flèche de B/I



déterminée par le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 X \times F(1) & \xrightarrow{\xi \times F(1)} & I \times F(1) \\
 \downarrow \xi^* F(1) & \searrow \sum \xi_i^* \times F(1) & \downarrow i^* F(1) \\
 X & \xrightarrow{\xi} & I
 \end{array}$$

c) Soit maintenant $f : K \rightarrow I$ une flèche de \mathcal{B} , on a, avec les notations suivantes

$$f = \sum_i f_{I_i} \quad (i : I \rightarrow 1)$$

$$f_{I_i} : \begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{f} & I \\
 & \searrow f & \parallel \\
 & & I
 \end{array}$$

$$\underline{F(f)} = F\left(\sum_i f_{I_i}\right) = \sum_i F_{I_i}(f_{I_i}) = \text{(d'après b)} \quad \underline{F(1) \times f}.$$

Il est clair que pour $f \in \mathcal{F}(\mathcal{B}/I)$, on a encore

$$F_{I_i}(f) = (F(1) \times f)_{I_i}.$$

CHAPITRE II

GENERALITES SUR LES FIBRATIONS.

Soit \mathcal{C} une catégorie. On peut lui associer une fibration sur \mathbf{Ens} :

$$\mathbf{Ens}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Ens}$$

où un objet de $\mathbf{Ens}(\mathcal{C})$ est une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'objets de \mathcal{C} indexée par un ensemble I , et une flèche de $\mathbf{Ens}(\mathcal{C})$, $f : (X_i)_{i \in I} \longrightarrow (Y_j)_{j \in J}$ est un couple formé de

$$u : I \rightarrow J \quad (u \in \mathcal{F}\ell \mathbf{Ens}) \quad \text{et} \quad (\phi_i : X_i \rightarrow Y_{u(i)})_{i \in I}, \quad \forall i \quad \phi_i \in \mathcal{F}\ell \mathcal{C}$$

La fibration est définie par :

$$\begin{aligned} (X_i)_{i \in I} & \rightsquigarrow I \\ (u, (\phi_i)_{i \in I}) & \rightsquigarrow u. \end{aligned}$$

La fibre au-dessus de I est :

$$\mathbf{Hom}_{\mathbf{Ens}}(I, \mathcal{C}).$$

\mathcal{B} est dans toute la suite une catégorie à limites projectives finies (a, en particulier, un objet final noté 1).

2.1. - Définition. - Soit $\mathcal{C} \in |\mathbf{Cat} \mathcal{B}|$. On note $C : \mathcal{B}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{B}$ la fibration définie de la manière suivante : pour $I \in \mathcal{B}$ la fibre au-dessus

de \mathbb{B} (notée $C(\mathbb{B})$) est donnée par

$$C(\mathbb{B}) = \text{Hom}_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}, \underline{C}).$$

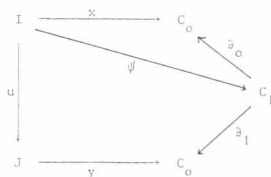
$C(\mathbb{B})$ est une petite catégorie car $\text{Hom}_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}, -) : \mathbb{B} \rightarrow \text{Ens}$ étant exact à gauche se prolonge en un facteur de $\text{Cat } \mathbb{B}$ dans $\text{Cat } \text{Ens}$. Un objet de $C(\mathbb{B})$ est donc une flèche

$$x : I \rightarrow C_0.$$

Etant donné $x : I \rightarrow C_0$ ($x \in C(\mathbb{B})$) et $y : J \rightarrow C_0$ ($y \in C(\mathbb{B})$) un morphisme de $\mathbb{B}(\underline{C})$ de x dans y est un couple (u, ψ)

$(u : I \rightarrow J, \psi : I \rightarrow C_1)$ tel que :

$$\partial_0 \psi = x \text{ et } \partial_1 \psi = y.u$$



Les projections $x \rightsquigarrow I$ et $(u, \psi) \rightsquigarrow u$ définissent bien une fibration.

Notation. - Dans toute la suite la fibration associée à une catégorie dans \mathbb{B} , est désignée par la même lettre, non soulignée

ex : $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}|, C : \mathbb{B}(\underline{C}) \rightarrow \mathbb{B} (C \in |\text{Fib } \mathbb{B}|).$

2.2. - Lemme de Yoneda. - (Bénabou).

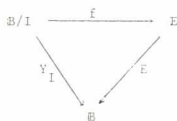
Soit $I \in |\mathbb{B}|$. Le foncteur source $\mathbb{B}/I \rightarrow \mathbb{B}$ est fibrant. (C'est la fibration notée $\gamma_1 : \mathbb{B}/I = \mathbb{B}(I) \rightarrow \mathbb{B}$ associée à I considéré comme catégorie

discrète dans \mathbb{B}).

Si $E : E \rightarrow B$ est une fibration, alors il existe une équivalence de catégories entre $\text{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I, E)$ et $E(I)$ (fibre au-dessus de I).

Preuve : L'équivalence est définie par

a) Soit $f \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I, E)|$



On lui associe $f_I(I_I) \in |E(I)|$.

b) Soit $X \in |E(I)|$. On définit un foncteur cartésien f par sa fibre au-dessus de J .

Soit $u : J \rightarrow I$ $f_J(u) = u^* X \in |E(J)|$.

(On doit ici choisir une image inverse de X par u).

La définition de f sur les morphismes de \mathbb{B}/I et la vérification qu'on a bien défini ainsi l'équivalence cherchée sont triviales.

Corollaire.- Si $E : E \rightarrow B$ est fibrée, elle est \mathbb{B} -équivalente à une catégorie fibrée scindée.

Preuve : On introduit la fibration $E' : E' \rightarrow B$ définie par : $E'(I) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}/Y_I, E)$. Elle est scindée.

Le lemme précédent permet de conclure.

2.3.- A la catégorie \mathbb{B} elle-même, on peut associer la fibration dont la fibre au-dessus de I représente, dans le cas où $B = \text{Ens}$, la catégorie des familles d'objets de B indexées par I , soit \mathbb{B}/I .

La fibration cherchée est donc :

$$B : \mathcal{F}\mathcal{L}\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \quad (1.1.)$$

2.4.- Se donner un foncteur F entre deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{C}' revient à se donner un foncteur cartésien, encore noté F , de $\text{Ens}(\mathcal{C})$ dans $\text{Ens}(\mathcal{C}')$ au-dessus de Ens .

La restriction à la fibre au-dessus de I est donnée par

$$F_I[(X_i)_{i \in I}] = (FX_i)_{i \in I}.$$

Si on remplace Ens par \mathcal{B} , l'homologue d'un foncteur sera un foncteur cartésien au-dessus de \mathcal{B} entre deux fibrations de base \mathcal{B} .

Propriété (rappel) ([6] 1.5.).

Etant donné un foncteur cartésien $u : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ au-dessus de \mathcal{B} , les conditions suivantes sont équivalentes

- 1) u est fidèle (resp. plein et fidèle), (resp. une équivalence)
- 2) pour toute fibration $X \rightarrow \mathcal{B}$, le foncteur $\text{Cart}_{\mathcal{B}}(X, u) : \text{Cart}_{\mathcal{B}}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \text{Cart}_{\mathcal{B}}(X, \mathcal{G})$ est fidèle (resp. plein et fidèle), (resp. une équivalence).
- 3) pour tout $I \in |\mathcal{B}|$, la restriction u_I aux fibres au-dessus de I est fidèle (resp. plein et fidèle), (resp. une équivalence).

On parlera ainsi de \mathcal{B} -équivalence entre fibrations, de foncteur \mathcal{B} -plein et fidèle etc...

Terminologie. - On dit qu'une fibration

$$C : \mathcal{B}(C) \longrightarrow \mathcal{B}$$

est petite. Une fibration \mathcal{B} -équivalente à une fibration petite est essentiellement petite.

2.5.- Soit $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathcal{B}|$ et $E : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ une fibration qui, dans le contexte considéré "représente" une "catégorie".

On veut définir un "foncteur" δ de \underline{C} dans \mathcal{E} .

2.5.1.- A \underline{C} , on associe la fibration $C : \mathcal{B}(\underline{C}) \rightarrow \mathcal{B}$, un "foncteur" cherché est alors un foncteur cartésien de \underline{C} dans \mathcal{E} .

2.5.2.- On définit alors la catégorie suivante

- Les objets sont les couples $(\delta_o, \bar{\lambda}_1)$ avec

$$\delta_o \in |\mathcal{E}(C_o)| \text{ et } \bar{\lambda}_1 : d_o^* \delta_o \rightarrow j_1^* \delta_o (\bar{\lambda}_1 \in \text{Fib } \mathcal{E}(C_1))$$

tels que les diagrammes (*) et (**) soient commutatifs.

$$\begin{array}{ccc}
 & d_1^* \delta_o & \\
 \bar{\lambda}_1 \nearrow & & \searrow \theta_1 \\
 d_o^* \delta_o & \xrightarrow[\theta_o]{\lambda_1} & \delta_o \\
 C_1 & \xrightarrow[d_o]{d_1} & C_o
 \end{array}$$

Diagramme (*) sa commutativité donne $1_{\delta_o} = \lambda_1 \theta_\varepsilon$.

$$\begin{array}{ccc}
 \delta_o = \varepsilon^* d_o^* \delta_o & \xrightarrow[\theta_\varepsilon]{\quad} & d_o^* \delta_o \xrightarrow[\theta_o]{\lambda_1} \delta_o \\
 C_o \xrightarrow{\varepsilon} C_1 & \xrightarrow[d_o]{d_1} & C_o
 \end{array}$$

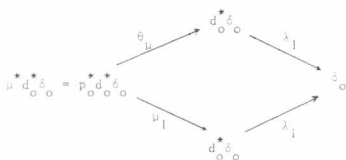
θ_ε est la flèche cartésienne

$\varepsilon^* d_o^* \delta_o \rightarrow d_o^* \delta_o$ au-dessus de ε

ε , unité est

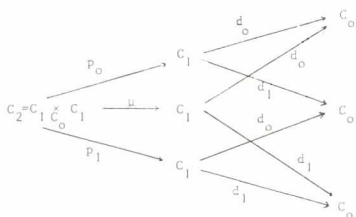
telle que $d_1 \varepsilon = d_o \varepsilon = 1_{C_o}$.

Diagramme (***) sa commutativité donne $\lambda_1 \circ \mu = \lambda_1 \mu_1$.



θ_μ est la flèche cartésienne
 $\mu^* d_0^* \delta_0 + d_0^* \delta_0$ au-dessus de μ .

μ_1 est une flèche au-dessus de
 p_1 définie ci-dessous.



(μ , flèche de composition est
 telle que :

$$d_0 \mu = d_0 p_0 \text{ et}$$

$$d_1 \mu = d_1 p_1.$$

μ_1 est obtenue de la façon suivante :

soit $p_0^*(\bar{\lambda}_1) : p_0^* d_0^* \delta_0 \rightarrow p_0^* d_1^* \delta_0$ au-dessus de 1_{C_2} ,

d'où $(d_1 p_0 = d_0 p_1) : \mu_1 : p_0^* d_0^* \delta_0 \rightarrow d_0^* \delta_0$ au-dessus de p_1 .

- Les morphismes sont définis par :

$$f : (\delta_0', \bar{\lambda}_1') \longrightarrow (\delta_0, \bar{\lambda}_1)$$

est un couple (f_0, f_1) ($f_0 \in \text{F}\hat{\mathcal{L}}\text{E}(C_0)$, $f_1 \in \text{F}\hat{\mathcal{L}}\text{E}(C_1)$) rendant commutatifs
 les deux carrés ci-après :

$$\begin{array}{ccc}
 d_o^* \delta_o' & \xrightleftharpoons[\theta_o']{\lambda_o'} & \delta_o' \\
 f_1 \downarrow & & \downarrow f_o \\
 d_o^* \delta_o & \xrightleftharpoons[\theta_o]{\lambda_o} & \delta_o \\
 C_1 & \xrightleftharpoons[d_o]{d_1} & C_o
 \end{array}$$

Remarque : Dans le cas où $E = B : F\mathcal{E} B + B$ la catégorie de 2.5.2 est la catégorie de préfaisceaux internes (covariants) de \underline{C} dans B (1.2.).

2.5.3.- Proposition.- La catégorie définie en 2.5.2. est équivalente à $\text{Cart}_B(C, E)$.

Preuve : On remarque que la donnée d'un foncteur ϕ d'une petite catégorie Γ dans une catégorie X revient à la donnée d'un foncteur $\psi : \Gamma_o \rightarrow X$ (Γ_o ensemble des objets de Γ , considéré comme catégorie discrète), et d'une transformation naturelle $\lambda : \psi d_o \rightarrow \psi d_1$ (où $\Gamma_1 \xrightleftharpoons[d_o]{d_1} \Gamma_o$ et Γ_1 est considéré comme une catégorie discrète, d_o, d_1 des foncteurs), vérifiant une condition de compatibilité pour la composition des flèches.

En effet :

a) Soit $\phi : \Gamma \rightarrow X$.

Il existe un foncteur $u : \Gamma_o \rightarrow \Gamma$ défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & & \Gamma_o \\
 & \swarrow i & \parallel \\
 \Gamma_1 & \xrightleftharpoons[d_o]{d_1} & \Gamma_o
 \end{array}$$

où i est l'application "identité".

On pose alors $\psi = \phi \circ u : \Gamma_0 \rightarrow X$.

On définit $\lambda : \psi d_0 \rightarrow \psi d_1$ de la façon suivante :

pour tout $f : X \rightarrow Y$

$$\lambda_{(f)} = \phi(f) : \psi d_0(f) = \phi X \rightarrow \psi d_1(f) = \phi Y.$$

b) Inversement.

Soient $\psi : \Gamma_0 \rightarrow X$ et $\lambda : \psi d_0 \rightarrow \psi d_1$.

On définit $\phi : \mathbb{E} \rightarrow X$ sur les objets par $\phi X = \psi X$ et sur

les flèches par $\phi(f) = \lambda_{(f)}$.

Se donner un foncteur cartésien ϕ de $B(\underline{C})$ dans \mathbb{E} au-dessus de \mathbb{B} , revient, pour tout $I \in |\mathbb{B}|$ à se donner un foncteur ϕ_I de $\text{Hom}_{\mathbb{B}}(I, \underline{C})$ dans $E(I)$, vérifiant la propriété usuelle de conservation des morphismes cartésiens.

Ceci est équivalent à la donnée de

$$\psi_I : \text{Hom}_{\mathbb{B}}(I, C_0) \rightarrow E(I)$$

et de

$$\lambda_I : \psi_I \cdot \text{Hom}_{\mathbb{B}}(I, d_0) \rightarrow \psi_I \cdot \text{Hom}_{\mathbb{B}}(I, d_1)$$

soit finalement à la donnée de

$$\psi \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(B/C_0, \mathbb{E})|$$

et de la \mathbb{B} -transformation naturelle $\lambda : \psi \cdot B/d_0 \rightarrow \psi \cdot B/d_1$.

Le lemme de Yoneda montre qu'au couple (ψ, λ) est associé biunivoquement un couple $(\delta_0, \bar{\lambda}_1)$ correspondant à la définition de 2.5.2.

2.5.4.- Corollaire. - Si $\underline{C}, \underline{C}' \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$

$$\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\underline{C}, \underline{C}') (= \text{Cart}_{\mathbb{B}}(B(\underline{C}), B(\underline{C}')))) \cong \text{Fonct}(\underline{C}, \underline{C}') \quad (\text{foncteurs internes}).$$

Il suffit d'observer qu'un foncteur interne de \underline{C} dans \underline{C}' cor-

respond exactement à la définition 2.5.2. d'un "foncteur" de \underline{C} dans la fibration $C' : B(\underline{C}') \rightarrow B$.

Ce corollaire justifie le recours aux foncteurs cartésiens et les notations adoptées.

2.6.- Foncteurs de composition.

2.6.1.- Définition.- Etant donné $\underline{C}, \underline{C}' \in |\text{Cat } B|$ et $\psi : \underline{C} \rightarrow \underline{C}'$ un foncteur interne $E : E \rightarrow B$ une fibration, le foncteur "composition par ψ " est donné par :

$$(\) \circ \psi = \text{Cart}_B(\psi, E) : \text{Cart}_B(C', E) \rightarrow \text{Cart}_B(C, E)$$

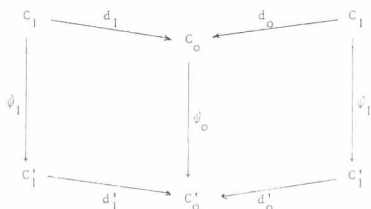
(où ψ figurant dans $\text{Cart}_B(\psi, E)$ désigne le foncteur cartésien $C \rightarrow C'$ associé au foncteur interne ψ par 2.5.4.).

2.6.2.- Construction.- Soit $\delta' (= (\delta'_0, \bar{\lambda}'_1))$, $\delta' \in |\text{Cart}_B(C', E)|$ (2.5.2.).

On construit $(\delta') \circ \psi$ de la façon suivante.

$$\begin{array}{ccc}
 & d'_1 \star \delta'_0 & \\
 \bar{\lambda}'_1 \nearrow & & \searrow \theta_1 \\
 d'_0 \star \delta'_0 & \xrightarrow{\theta_0} & \delta'_0 \\
 \\
 C'_1 & \xrightleftharpoons[d'_0]{d'_1} & C'_0
 \end{array}$$

A ψ correspondent ψ_0 et ψ_1 rendant les carrés ci-dessous commutatifs.



On considère alors le couple :

$$(\psi_0^*(\delta'_0), \psi_1^*(\bar{\lambda}'_1))$$

On a : $\psi_0^*(\delta'_0) \in |E(C_0)|$ et $\psi_1^*(\bar{\lambda}'_1) \in \text{Fl } E(C_1)$, avec

$$\psi_1^*(\bar{\lambda}'_1) : d_0^* \psi_0^*(\delta'_0) \longrightarrow d_1^* \psi_1^*(\delta'_0) \quad (\text{car } \psi_1^* d_1^* = d_1^* \psi_0^* \text{ et } \psi_1^* d_0^* = d_0^* \psi_0^*).$$

On vérifie aisément qu'on a ainsi construit un objet de la catégorie définie en 2.5.2. c'est-à-dire un foncteur cartésien de C dans E et que ce foncteur est égal à $(\delta'_0) \circ \psi$.

2.6.3.- Définition.- Etant donné $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$ et $\Psi : E \rightarrow E'$ un foncteur cartésien entre deux fibrations sur \mathbb{B} , le foncteur "composition par Ψ " est donné par :

$$\Psi \circ () = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, \Psi) : \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, E) \longrightarrow \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, E').$$

2.6.4.- Construction.-

Soit $\delta (= (\delta_0, \bar{\lambda}_1))$, $\delta \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, E)|$.

On construit $\Psi \circ (\delta)$ de façon analogue à (1.2.)

$$\begin{array}{ccc}
 & d_1^* \delta_0 & \\
 \nearrow \bar{\lambda}_1 & & \searrow \theta_1 \\
 d_0^* \delta_0 & \xrightarrow[\theta_0]{\lambda_1} & \delta_0 \\
 C_1 & \xrightarrow[d_0]{d_1} & C_0
 \end{array}$$

On considère le couple : $(\Psi_{C_0}(\delta_0), \Psi_{C_1}(\bar{\lambda}_1))$.

On a : $\Psi_{C_0}(\delta_0) \in |E'(C_0)|$ et $\Psi_{C_1}(\bar{\lambda}_1) \in \text{F}\mathcal{L} E(C_1)$ avec

$$\Psi_{C_1}(\bar{\lambda}_1) : \Psi_{C_1}(d_0^* \delta_0) \longrightarrow \Psi_{C_1}(d_1^* \delta_0), \text{ mais } \Psi \text{ étant cartésien}$$

$$\Psi_{C_1}(\bar{\lambda}_1) : d_0^* \Psi_{C_0}(\delta_0) \longrightarrow d_1^* \Psi_{C_0}(\delta_0).$$

La vérification qu'on a ainsi défini un foncteur cartésien de C dans E' et que ce foncteur est $\Psi \circ (\delta)$ est triviale.

Remarque. - Il est maintenant possible de composer par exemple des préfaisceaux ("foncteurs" de \underline{C} dans \mathbb{B}) et certains foncteurs de \mathbb{B} dans \mathbb{B} (ceux qui se prolongent en des foncteurs cartésiens de \mathbb{B} dans \mathbb{B}).

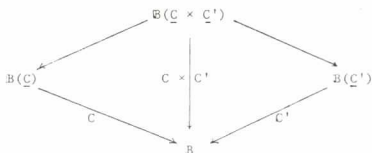
2.7. - Exponentielle de deux fibrations.

2.7.1. - Produit de deux fibrations. - Soit $C : \mathbb{B}(\underline{C}) \rightarrow \mathbb{B}$ et

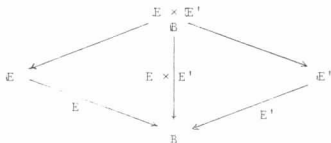
$C' : \mathbb{B}(\underline{C}') \rightarrow \mathbb{B}$ deux fibrations petites. La fibration correspondant au produit de catégories $\underline{C} \times \underline{C}'$, soit $C \times C' : \mathbb{B}(\underline{C} \times \underline{C}') \rightarrow \mathbb{B}$ a pour fibre au-dessus de I

$$C \times C'(I) = \text{Hom}_{\mathbb{B}}(I, \underline{C} \times \underline{C}') = \text{Hom}_{\mathbb{B}}(I, \underline{C}) \times \text{Hom}_{\mathbb{B}}(I, \underline{C}') = C(I) \times C'(I).$$

Cette fibration est donc obtenue par le produit fibré ci-dessous, (dans Cat)



Plus généralement, si $E : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ et $F : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{B}$ sont deux fibrations, le produit de ces deux fibrations est donné par le produit fibré dans Cat :



2.7.2.- Définition (exponentielle de deux fibrations), (Bénabou).

Etant donné deux fibrations $E : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ et $E' : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{B}$ on définit la fibration E'^E par :

$$\forall I \in |\mathbb{B}| \quad E'^E(I) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I \times E, E')$$

(où $Y_I : \mathbb{B}(I) \rightarrow \mathbb{B}$ est la fibration introduite en 2.2. et où $Y_I \times E$ est un produit de fibrations).

On a bien (lemme de Yoneda, 2.2.)

$$\text{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I, E'^E) = E'^E(I) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I \times E, E')$$

Pour $f : I \rightarrow J$ le changement de bases f^* est obtenu à partir du foncteur $Y_f : Y_I \rightarrow Y_J$ (pour $\tau : T \rightarrow I$, $Y_f(\tau) = f\tau$)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}/I & \xrightarrow{Y_f} & \mathbb{B}/J \\ & \searrow Y_I & \swarrow Y_J \\ & \mathbb{B} & \end{array}$$

$$f^* = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(E \times Y_f, E') : \text{Cart}_{\mathbb{B}}(E \times Y_J, E') \longrightarrow \text{Cart}_{\mathbb{B}}(E \times Y_I, E').$$

Remarque. - $\text{Cart}_{\mathbb{B}}(E, E')$ est la fibre au-dessus de 1 de E'^E .
En particulier, la catégorie définie en 2.5.2. des préfaisceaux internes covariants de \mathbb{C} dans E ($C : \mathbb{B}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{B}$), équivalente à $\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{C}, E)$, est la fibre au-dessus de 1 de $E^{\mathbb{C}}$.

2.7.3.- Localisation.-

2.7.3.1.- Définition. - Soit $D : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$ une fibration et $I \in |\mathbb{B}|$.

On note D_I la fibration sur \mathbb{B}/I obtenue à partir de D par le produit fibré (dans Cat) ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{D} \\ D_I \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow D \\ \mathbb{B}(I) = \mathbb{B}/I & \xrightarrow{Y_I} & \mathbb{B} \end{array}$$

Pour $\tau : T \rightarrow I$ $D_I(\tau)$ (fibre de D_I au-dessus de τ) = $D(T)$.
En particulier pour $1_I : I \xrightarrow{=} I$

$$D_I(1_I) = D(I) .$$

Pour $f : \tau' \rightarrow \tau$ dans \mathcal{B}/I , le changement de base f^* dans D_I se confond avec le changement de base f^* dans D .

$$\begin{array}{ccc}
 T' & \xrightarrow{f} & T \\
 \searrow \tau' & & \swarrow \tau \\
 & I &
 \end{array}$$

2.7.3.2.- Exemple.- Si $C : \mathcal{B}(C) \rightarrow \mathcal{B}$ est une petite fibration C_I est la fibration $\mathcal{B}/I(i^*C) \rightarrow \mathcal{B}/I$, ($i : I \rightarrow 1$).

Preuve :

$i^* : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}/I$, a un adjoint à gauche \sum_I , est exact à gauche, et se prolonge en un foncteur de $\text{Cat } \mathcal{B}$ dans $\text{Cat } \mathcal{B}/I$.

De l'adjonction $\sum_I \dashv i^*$, on tire alors :

pour $\tau : T \rightarrow I$, $C(T) = \mathcal{B}(T, C) = \mathcal{B}(\sum_I \tau, C) = \mathcal{B}/I(\tau, i^*C) = C_I(\tau)$.

2.7.3.3.- Proposition.- Etant donné deux fibrations E, E' sur \mathcal{B}

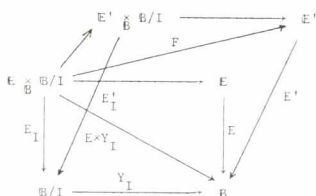
$$E^E(I) = \text{Cart}_{\mathcal{B}/I}(E_I, E'_I) = E_I^{E_I}(1_I) \text{ (exponentielle)}$$

entre fibrations sur \mathcal{B}/I .

Preuve :

E'_I étant obtenu par le produit fibré par Y_I , se donner un foncteur $F : E \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}/I \rightarrow E'$ tel que : $E'.F = Y_I E_I$ revient à se donner un foncteur cartésien $E_I \rightarrow E'_I$.

Les changements de bases pour la \mathcal{B} -fibration : $E \times_{\mathcal{B}} Y_I$ se ramènent à des changements de bases pour la \mathcal{B}/I -fibration E_I .



Cette proposition permet de ramener des démonstrations sur les fibrations aux démonstrations restreintes à la fibre au-dessus de 1.

Remarque. - Si $C : \mathbb{B}(C) \rightarrow \mathbb{B}$, $C \times Y_I = C \times I : \mathbb{B}(C \times I) \rightarrow \mathbb{B}$ (2.7.1.).

Si D est une \mathbb{B} -fibration, on a donc (2.7.3.2.)

$$\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C \times I, D) = D^C(I) = D_I(i^*C)(1_I).$$

2.7.4.- Proposition. - (Propriété universelle de l'exponentielle).

Etant donné trois fibrations D, E, E' , on a :

$$\text{Cart}_{\mathbb{B}}(D, E'^E) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(D \times E, E')$$

($D \times E$ est le produit défini en 2.7.1.).

Preuve : L'équivalence se montre de façon classique en utilisant la proposition précédente.

Si $K \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(D, E'^E)|$, K est la donnée pour tout I de

$$K_I : D(I) \rightarrow E'^E(I) (= E_I^E(1_I)) \quad (2.7.3.3.),$$

$$\text{(avec } E_I^E(1_I) = \text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(E_I, E_I^E)).$$

La donnée de K revient donc, pour tout I , et tout $d_I \in D(I)$ à la donnée de $K_I(d_I) : E_I \rightarrow E_I^E$.

A K_I , on associe donc :

$$\overline{K}_I : (D \times E)(I) = D(I) \times E(I) \longrightarrow E'(I)$$

défini par : $\overline{K}_I(d_I, x_I) = K_I(d_I)(x_I) \quad (x_I \in |E(I)| = |E_I(I)|)$.

On vérifie que les \overline{K}_I définissent $\overline{K} \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(D \times E, E')|$ et qu'on a bien l'équivalence annoncée.

2.7.5. - Définition. - Soient E, E', D, D' des fibrations sur \mathbb{B} , $\phi \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(D, E)|$ et $\phi' \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(E', D')|$.

a) E'^{ϕ} est le foncteur cartésien $E'^E \longrightarrow E'^D$ défini par :

$$\forall I \quad E'^{\phi}_I = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I \times \phi, E') : \text{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I \times E, E') \longrightarrow \text{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I \times D, E).$$

b) ϕ'^E est le foncteur cartésien $E'^E \longrightarrow D'^E$ défini par :

$$\forall I \quad \phi'^E_I = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I \times E, \phi') : \text{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I \times E, E') \longrightarrow \text{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I \times E, D').$$

Remarques. -

1) Le foncteur $() \circ \psi$ défini en 2.6.1. est la restriction à la fibre au-dessus de 1 de E'^{ψ}

$$() \circ \psi = E'^{\psi}_1.$$

2) Le foncteur $\psi \circ ()$ défini en 2.6.3. est la restriction à la fibre au-dessus de 1 de ψ^C .

$$3) \psi \circ () = \psi^C_1.$$

Comme en 2.7.3., on peut, à tout $F \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(D, D')|$ associer, pour $I \in |\mathbb{B}|$, $i^* F \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(D_I, D'_I)|$.

(i^*F est obtenu à partir de F par produit fibré par Y_I , dans Cat).

On a alors : F_I (restriction de F à $D(I)$) = $i^*F|_I$
(restriction de i^*F à $D_I(I_I)$).

Reprenant l'argument de la preuve de 2.7.3.3., on tire :
pour $\psi : C \rightarrow C'$ et $\varphi : E \rightarrow E'$

$$E_I^\psi = (\) \circ (I \times \psi) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(I \times \psi, E) = \text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(\psi_I, E_I) = i^*\psi|_I$$

(Pour $\psi : C \rightarrow C'$, $i^*\psi$ est le foncteur \mathbb{B}/I -cartésien :

$$i^*\psi : i^*C \longrightarrow i^*C'$$

associé (2.5.4.) aux images de \underline{C} et \underline{C}' par le foncteur :

$$i^* : \text{Cat } \mathbb{B} \longrightarrow \text{Cat } \mathbb{B}/I.$$

De même

$$\varphi_I^C = \varphi \circ (I \times -) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(I \times C, \varphi) = \text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(i^*C, i^*\varphi) = i^*\varphi|_I^C.$$

2.8. - Catégorie de préfaisceaux.

2.8.1. - Fibration duale.

Soit $D : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$; il lui correspond un pseudo-foncteur

$$\mathfrak{D} : \mathbb{B}^{\text{OP}} \rightarrow \text{Cat}.$$

On forme le pseudo-foncteur : $\delta \circ \mathfrak{D}$, où $\delta : \text{Cat} \rightarrow \text{Cat}$
est le foncteur qui à toute catégorie associe sa duale. La fibration correspondant à $\delta \circ \mathfrak{D}$ sera notée D^{OP} .

$$\text{Pour } I \in |\mathbb{B}| \quad D^{\text{OP}}(I) = D(I)^{\text{OP}}.$$

Si $C : \mathbb{B}(C) \rightarrow \mathbb{B}$, on vérifie que :

$$C^{\text{OP}} : \mathbb{B}(C^{\text{OP}}) \rightarrow \mathbb{B}.$$

2.8.2. - Soit $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$, et \hat{C} la catégorie des préfaisceaux contravariants (internes). On a : $\hat{C} = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C^{\text{OP}}, \mathbb{B})$.

\hat{C} est donc la fibre au-dessus de I de $\mathbb{B}^{C^{\text{OP}}}$.

Pour $I \in |\mathbb{B}|$, on a :

$${}_{\mathbb{B}}C^{\text{op}}(I) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C^{\text{op}} \times I, \mathbb{B}).$$

Un objet γ de cette catégorie est (2.5.2.) un couple $(\delta_o \in |\mathbb{B}/I \times C_o|, \lambda_o \in \text{Fl}(\mathbb{B}/I \times C_1))$ vérifiant les conditions habituelles.

$$\begin{array}{ccc}
 Y_1 & \xrightleftharpoons[\mathbb{B}_I]{\lambda_o} & Y_o \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 I \times C_1 & \xrightleftharpoons[I \times d_1]{I \times d_o} & I \times C_o
 \end{array}$$

soit, sous forme abrégée :

$$\begin{array}{c}
 \underline{Y} \\
 \downarrow \\
 \underline{I \times C^{\text{op}}}
 \end{array}$$

(où \underline{Y} et $\underline{I \times C^{\text{op}}} \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$).

Un tel diagramme peut encore s'écrire, en introduisant la projection $\underline{I \times C^{\text{op}}} \rightarrow \underline{C^{\text{op}}}$:

$$\begin{array}{ccc}
 & Y & \\
 & \downarrow & \\
 & \underline{I \times C^{\text{op}}} & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 \underline{C^{\text{op}}} & &
 \end{array}$$

On sait qu'il existe un foncteur $c^* : \mathcal{B} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ exact à gauche qui à $I \in |\mathcal{B}|$ associe $I \times \underline{c}^{\text{op}} \rightarrow \underline{c}^{\text{oi}}$ préfaisceau constant égal à I .

On voit alors que γ est un objet de $\widehat{\mathcal{C}}/c^*I$ (dans le cas où $\mathcal{B} = \text{Ens}$, γ est une famille de préfaisceaux indexée par I).

On vérifie alors simplement que :

$$\widehat{\mathcal{C}}/c^*I = \mathcal{B}^{\mathcal{C}^{\text{op}}}(I) \quad (\text{équivalence de catégories}).$$

2.8.3.- On considère la "comma category" $(\widehat{\mathcal{C}}, c^*)$ et la projection

$$P : (\widehat{\mathcal{C}}, c^*) \longrightarrow \mathcal{B}.$$

Le diagramme ci-dessous est un produit fibré dans Cat .

$$\begin{array}{ccc}
 & (\widehat{\mathcal{C}}, c^*) & \\
 \swarrow & & \searrow P \\
 \text{Fl } \widehat{\mathcal{C}} & & \mathcal{B} \\
 \searrow \text{But} & & \swarrow c^* \\
 & \widehat{\mathcal{C}} &
 \end{array}$$

$\widehat{\mathcal{C}}$ ayant des produits fibrés, $\text{But} : \text{Fl } \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ est fibrant.

$P : (\widehat{\mathcal{C}}, c^*) \rightarrow \mathcal{B}$ est donc une fibration.

Si $f : I \rightarrow J$ ($f \in \text{Fl } \mathcal{B}$), le foncteur f^* est déterminé sur les objets par le produit fibré dans $\widehat{\mathcal{C}}$ ci-dessous

$$\begin{array}{ccc}
 \downarrow \times_{c^* J} c^* I & \longrightarrow & \downarrow \\
 f^* \xi \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow \zeta \\
 c^* I & \longrightarrow & c^* J \\
 I & \xrightarrow{f} & J
 \end{array}$$

2.8.4.- Il résulte de 2.8.2. et 2.8.3. que la fibration associée à \hat{C} , soit $B^{C^{OP}}$ est \mathbb{B} -équivalente à $P : (\hat{C}, c^*) \rightarrow \mathbb{B}$.

2.9.- Foncteur de Yoneda.

Soit $C : \mathbb{B}(C) \rightarrow \mathbb{B}$ une petite fibration.

On se propose de définir dans le \mathbb{B} -contexte le foncteur de Yoneda, Y .

Dans le cas usuel, ($\mathbb{B} = \text{Ens}$), il s'agit d'un foncteur $\underline{C} \rightarrow \hat{C}$.

Dans le cas général, il s'agit donc d'un foncteur cartésien de C dans $B^{C^{OP}} : Y \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, B^{C^{OP}})|$.

Y peut donc être construit de la façon suivante (2.5.2.)

$$\begin{array}{ccc}
 \Gamma' & \xrightleftharpoons[\theta_0]{\lambda_1} & \Gamma \\
 \downarrow Y_1 & & \downarrow Y_0 \\
 c^* C_1 & \xrightleftharpoons[\theta_0]{c^* d_1} & c^* C_0 \\
 & & \downarrow d_0 \\
 C_1 & \xrightleftharpoons[d_0]{d_1} & C_0
 \end{array}$$

où $Y_0 : \Gamma \longrightarrow c^* C_0 \in |B^{C^{OP}}(C_0)|$ ($= \hat{C}/c^* C_0$ (2.8.2.)),

$Y_1 : \Gamma' \longrightarrow c^* C_1 \in |B^{C^{OP}}(C_1)|$ ($= \hat{C}/c^* C_1$) est de plus image inverse de Y_0 par d_0 :

$$Y_1 = d_0^*(Y_0),$$

c'est-à-dire (2.8.3.) que le carré inférieur du diagramme ci-dessus est un produit fibré dans \hat{C} .

Observant qu'un objet de \hat{C} peut être représenté par une catégorie interne à \mathbb{B} , au-dessus de \underline{C}^{OP} , la construction de Y prend la forme

D'où Y_0 :

$$\begin{array}{ccc}
 C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightleftharpoons[p_1]{\mu} & C_1 \\
 \downarrow (p_0, d_1 p_1) & & \downarrow (d_0, d_1) \\
 C_1 \times C_0 & \xrightleftharpoons[d_1 \times C_0]{d_0 \times C_0} & C_0 \times C_0
 \end{array}$$

(μ est la flèche de composition).

Détermination de la face (2). - Cette face représente un objet de $\text{Cart}_{\mathcal{B}}(C \times C_0, B) = B^C(C_0)$.

On fait un raisonnement analogue. Soit $y : 1 \rightarrow C_0$.

L'image inverse de la face (2) par y est $C(y, -)$.

On en déduit la face cherchée :

$$\begin{array}{ccc}
 C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightleftharpoons[p_0]{\mu} & C_1 \\
 \downarrow (d_0 p_0, p_1) & & \downarrow (d_0, d_1) \\
 C_0 \times C_1 & \xrightleftharpoons[C_0 \times d_0]{C_0 \times d_1} & C_0 \times C_0
 \end{array}$$

Remarque. - La détermination des diverses faces du diagramme nécessite l'utilisation des flèches $T \rightarrow C_0$, pour tout T ($t : T \rightarrow 1$).

Mais une telle flèche revient à une flèche de $\mathcal{B}/T : 1_T \rightarrow t^* C_0$, donc au cas particulier envisagé plus haut.

La détermination des autres faces se ferait de la même façon à partir de flèches $1 \rightarrow C_1$.

2.10.- Catégories "comma" au-dessus de \mathcal{B} .

2.10.1.- Définition.- Soit $\phi : E \rightarrow D$ et $\psi : E' \rightarrow D$ deux foncteurs cartésiens au-dessus de \mathcal{B} . On note (ϕ, ψ) la fibration définie de la façon suivante :

$$\forall I \in |\mathcal{B}| \quad (\phi, \psi)(I) = (\phi_I, \psi_I) \quad (\text{catégorie "comma"})$$

et si $f : I \rightarrow J$ le changement de base f^* est défini sur un objet $(A_J, A'_J, u_J : \phi_J A_J \rightarrow \psi_J A'_J) \in |(\phi, \psi)(J)|$ par

$$f^*(A_J, A'_J, u_J) = (f^* A_J, f^* A'_J, f^* u_J)$$

(où les trois derniers f^* sont les changements de base dans E, E' et D).

$$\text{En effet : } f^* u_J : f^* \phi_J A_J = \phi_I f^* A_J \longrightarrow f^* \psi_J A'_J = \psi_I f^* A'_J.$$

Les projections $P : (\phi, \psi) \rightarrow E$ et $P' : (\phi, \psi) \rightarrow E'$ sont des foncteurs cartésiens.

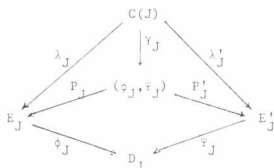
2.10.2.- Proposition.- Dans les conditions de (2.10.1.), si $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathcal{B}|$

$$(\phi, \psi)^C \rightarrow (\phi^C, \psi^C) \quad (\mathcal{B}\text{-équivalence entre fibrations}).$$

Preuve : On a : $\phi^C : E^C \rightarrow D^C$ et $\psi^C : E'^C \rightarrow D^C$ foncteurs cartésiens au-dessus de \mathcal{B} .

On montre l'équivalence sur la fibre au-dessus de 1 puis on utilise (2.7.3.).

$$\text{Soit } \gamma \in |(\phi, \psi)^C(1)| = |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(C, (\phi, \psi))|$$



La donnée de γ équivaut à celle d'une famille de foncteurs $\gamma_J : C(J) \rightarrow (\phi, \psi)(J) = (\phi_J, \psi_J)$ ($J \in |\mathcal{B}|$) commutant aux changements de bases.

On sait que ceci équivaut à la donnée d'une famille

$$(\lambda_J, \lambda'_J, \delta_J)_J \in |\mathcal{B}|$$

où $\lambda_J : C(J) \rightarrow E_J$ et $\lambda'_J : C(J) \rightarrow E'_J$ sont des foncteurs et $\mu_J : \phi_J \lambda_J + \psi_J \lambda'_J$ une transformation naturelle. La commutation aux changements de bases se vérifie trivialement.

La donnée de γ équivaut donc à celle d'un triplet (λ, λ', μ) où $\lambda \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(C, E)| = |E^C(1)|$, $\lambda' \in |E'^C(1)|$ et $\mu : \phi_1^C(\lambda) \rightarrow \psi_1^C(\lambda')$ est une transformation \mathcal{B} -naturelle, c'est-à-dire à la donnée d'un objet de $(\phi^C, \psi^C)(1)$.

2.10.3.- Applications.

a) Soit $K : D \rightarrow \mathcal{B}$ un \mathcal{B} -foncteur cartésien.

On note $\text{Id} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ la fibration identique et on introduit le foncteur cartésien $\star : \text{Id} \rightarrow \mathcal{B}$ défini par :

$$\forall I \in |\mathcal{B}| \quad (\star)_I : I \rightarrow \mathcal{B}/I \text{ est tel que } (\star)_I(1) = 1_I$$

(objet final de \mathcal{B}/I).

On forme la catégorie "comma" (\star, K) .

Un objet de $(\star, K)(I)$ est la donnée de (δ_I, α_I) avec :

$$\delta_I \in |D(I)| \text{ et } \alpha_I : 1_I \rightarrow K_I \delta_I \text{ (} \alpha \in \text{F}\ell \mathcal{B}/I \text{)}.$$

Pour tout $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$, on a :

$$(\star, K)^C = (\star^C, K^C) \quad (\mathbb{B}\text{-équivalence}).$$

Un objet de $(\star, K)^C$, par exemple dans la fibre au-dessus de 1 est donc la donnée de

$$\begin{aligned} - \delta \in |D^C(1)| &= |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)| \\ - \alpha : \underline{C}^{\star}(1) &\rightarrow K^C(\delta) = K \circ (\delta) \end{aligned} \quad (2.6.3.)$$

(flèche dans $B^C(1) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, B)$).

On voit, en effet, que :

$$(\star)_1^C(1) = \underline{C}^{\star}(1) \quad (\text{préfaisceau constant égal à } 1).$$

b) Soit $U : D' \rightarrow D$ un \mathbb{B} -foncteur cartésien.

On forme la catégorie "comma" (X, U) ($X \in |D(1)|$).

Pour tout $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$, on a :

$$(X, U)^C = (\underline{C}^{\star}(X), U^C) \quad (\mathbb{B}\text{-équivalence}).$$

Un objet de $(X, U)^C(1)$ est donc la donnée de

$$\begin{aligned} - \delta' \in |D'^C(1)| &= |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D')| \\ - \gamma : \underline{C}^{\star}(X) &\rightarrow U^C(\delta') = U \circ (\delta') \text{ flèche dans } D^C(1). \\ (\underline{C}^{\star}(X) \in |D^C(1)|, &\text{ "foncteur" constant égal à } X). \end{aligned}$$

CHAPITRE III

FIBRATIONS LOCALEMENT PETITES.

3.1.- Définition.- Etant donné une fibration $E : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ on dit qu'elle est localement petite si et seulement si, pour tout $I \in |\mathcal{B}|$ et tout couple (X, Y) d'objets de $E(I)$ il existe un objet $\underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \xrightarrow{k} I$ de \mathcal{B}/I vérifiant la propriété :

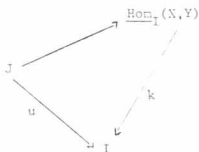
$$\forall u \in |\mathcal{B}/I| \quad \mathcal{B}/I(u, k) = E(J) (u^*X, u^*Y) \quad (u : J \rightarrow I)$$

(bijection compatible avec les changements de base).

Remarque.-

1) Une telle définition suppose l'existence d'un choix des images inverses u^*X, u^*Y , c'est-à-dire d'un clivage pour la fibration E .

2) Si E est une fibration scindée, pour tout (X, Y) il existe un foncteur $\mathcal{B}/I^{\text{OP}} \rightarrow \text{Ens}$ qui à u associe $E(J) (u^*X, u^*Y)$. E est localement petite ssi pour tout I, X, Y , le foncteur précédent est représentable.



3) Dans le cas usuel, $\mathcal{B} = \text{Ens}$, cette définition coïncide avec la notion habituelle de catégorie localement petite :

3.3.- Proposition.- Une fibration $E : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ est localement petite si et seulement si, pour tout $I \in |\mathcal{B}|$, la fibre $E(I)$ est une catégorie relative à \mathcal{B}/I , et pour tout $u : J \rightarrow I$, $u^* : E(I) \rightarrow E(J)$ commute aux Hom. (La multiplication dans \mathcal{B}/I est le produit cartésien).

Preuve :

a) Etant donné X, Y, Z de $|E(I)|$, on définit un morphisme :

$$\underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \times \underline{\text{Hom}}_I(Y, Z) \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_I(X, Z) .$$

On montre qu'à tout $u : J \rightarrow I$ et toute flèche :

$$(v, w) : J \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \times \underline{\text{Hom}}_I(Y, Z) \quad \text{au-dessus de } I$$

correspond une flèche : $J \longrightarrow \underline{\text{Hom}}_I(X, Z)$ au-dessus de I .

$$\begin{array}{ccc}
 & & \underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \times \underline{\text{Hom}}_I(Y, Z) \\
 & \nearrow^{(v, w)} & \\
 J & & \\
 & \searrow_u & \\
 & & I \\
 & \nwarrow_{\text{Hom}_I(X, Z)} & \\
 & &
 \end{array}$$

A v correspond une flèche : $u^* X \xrightarrow{\bar{v}} u^* Y$ de $E(J)$.

à w , une flèche : $u^* Y \xrightarrow{\bar{w}} u^* Z$ de $E(J)$.

A la composition $\bar{w} \cdot \bar{v}$ correspond la flèche cherchée. On vérifie ensuite que pour $\underline{\text{Hom}}_I$, $E(I)$ a bien une structure de catégorie relative à \mathcal{B}/I ($[2]$).

b) Etant donné $u : J \rightarrow I$, on montre que $u^* : E(I) \rightarrow E(J)$ commute aux Hom. En fait, notant de la même façon $u^* : E(I) \rightarrow E(J)$ et

$u^* : \mathcal{B}/I \rightarrow \mathcal{B}/J$, on établit que :

$$\underline{\text{hom}}_J(u^* X, u^* Y) \cong u^* \underline{\text{Hom}}_I(X, Y) .$$

Pour tout $\tau : I \rightarrow J$,

on forme $\mathcal{B}/J(\tau, \underline{\text{Hom}}_J(u^* X, u^* Y)) \cong E(\tau) (\tau^* u^* X, \tau^* u^* Y)$

qui est isomorphe à $\mathcal{B}/J(\tau, u^* \underline{\text{Hom}}_I(X, Y))$.

c) La réciproque est immédiate.

3.4. - Proposition. - Si $E : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ et $E' : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{B}$ sont localement petites et $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ est cartésien :

a) pour tout I , F_I est un foncteur relatif ($[2]$) de catégories relatives à \mathcal{B}/I (i.e. il existe $\underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_I(FX, FY) \in F \downarrow \mathcal{B}/I$ rendant commutatifs les diagrammes habituels).

b) F est \mathcal{B} -fidèle (resp. plein) si et seulement si pour tout I , pour tout X , et tout Y , la flèche précédente est un mono (resp. un épimorphisme scindé).

Si E est localement petite, et $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ est une \mathcal{B} -équivalence, E' est localement petite.

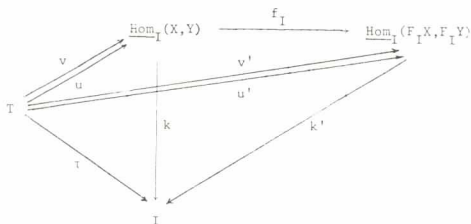
Preuve :

a) Soit $X, Y \in |E(I)|$.

A tout $\tau : I \rightarrow I$ et tout $u : \tau \rightarrow k$ dans \mathcal{B}/I correspond $\bar{u} : \tau^* X \rightarrow \tau^* Y$ donc $F_I \bar{u} : F_I \tau^* X \rightarrow F_I \tau^* Y \cong \tau^* F_I X \rightarrow \tau^* F_I Y \cong \tau^* F_I Y$. On pose $\bar{u}' = F_I \bar{u}$, d'où $u' : \tau \rightarrow k'$ (diagramme ci-après) et,

$$f_I : \underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \rightarrow \underline{\text{Hom}}_I(F_I X, F_I Y) \text{ au-dessus de } I.$$

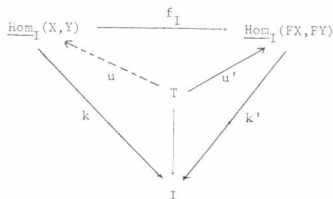
b) 1)



Soient $u, v : \tau \rightarrow k$ pour que $f_I v = f_I u$, donc $v' = u'$, il faut et il suffit que $F_I \bar{u} = F_I \bar{v}$.

Finalement, pour tout T , F_T est fidèle si et seulement si, pour tout I , tout $X, Y \in |E(I)|$, f_I est un mono.

2)



Pour que f_I soit un épimorphisme scindé il faut et il suffit que :

$$\forall v : T \rightarrow I \quad \forall u' : \tau \rightarrow k' \quad \exists u : \tau \rightarrow k \quad f_I u = u'.$$

A u et u' correspondent $\bar{u} : \tau^* X \rightarrow \tau^* Y$,

$$\bar{u}' : \tau^* F_I X = F_I \tau^* X \rightarrow \tau^* F_I Y = F_I \tau^* Y.$$

La condition précédente équivaut à

$$\forall \tau \forall \bar{u}' : F_T \tau^* X \rightarrow F_T \tau^* Y \quad \exists \bar{u} : \tau^* X \rightarrow \tau^* Y \quad F_T \bar{u} = \bar{u}' .$$

D'où le résultat.

3) La dernière partie est une conséquence triviale de la définition et du résultat ci-dessus.

Remarque. - Le lemme de Yoneda et cette proposition permettent de ramener l'étude des fibrations localement petites au cas de fibrations scindées.

3.5.- Proposition. - Si $C : B(C) \rightarrow B$ est petite, C est localement petite.

Preuve : En fait (remarque précédente) la propriété est vraie pour C essentiellement petite (2.4.).

Soient X et Y deux objets au-dessus de I , c'est-à-dire deux flèches $I \xrightarrow{\frac{X}{Y}} C_0$.

On construit $\text{Hom}_I(X, Y)$ par le produit fibré ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_I(X, Y) & \longrightarrow & C_1 \\ \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow (d_0, d_1) \\ I & \xrightarrow{(X, Y)} & C_0 \times C_0 \end{array}$$

3.6.- Proposition. -

La fibration $B : \mathcal{F}C B \rightarrow B$ est localement petite si et seulement si, dans B , les foncteurs $u^* : B/I \rightarrow B/J$ (pour tout $u : J \rightarrow I$) ont des adjoints à droite. (On dit aussi que B a des u^*).

Preuve :

a) Si \mathcal{B} a des π_u , $\underline{\text{Hom}}_I(x, y)$ ($x : X \rightarrow I$ $y : Y \rightarrow I$) est donné par :

$$\pi_x \circ x^* y \in |\mathcal{B}/I|$$

b) Si $\mathcal{B} : \text{Fl } \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ est localement petite, on voit immédiatement que, pour tout I , \mathcal{B}/I est cartésienne fermée. On sait que cette propriété est équivalente à l'existence de π_u pour tout u , dans \mathcal{B} à lim finies.

3.7. - Proposition. - Soit $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathcal{B}|$ et \mathcal{B} vérifiant l'hypothèse précédente (\mathcal{B} a des π_u), alors $\mathcal{B}^{C^{\text{OP}}} : (\underline{C}, c^*) \rightarrow \mathcal{B}$ est localement petite.

Preuve : On sait que moyennant l'existence de π_u , il existe des foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{lim}_{\underline{C}}} & \\ \hat{C} & \xleftarrow{c^*} & \mathcal{B} \\ & \xrightarrow{\text{lim}_{\underline{C}}} & \\ & \xrightarrow{\text{lim}_{\underline{C}}} & c_* \end{array} \quad \text{avec} \quad \text{lim}_{\underline{C}} \dashv c^* \dashv \text{lim}_{\underline{C}} = c_* .$$

On en déduit, pour tout I , deux foncteurs adjoints

$$\hat{C}/c^* I \xrightleftharpoons[c_* I]{c^* I} \mathcal{B}/I \quad \text{avec} \quad c^* I \dashv c_* I .$$

$(c^*_I(X \rightarrow I) = (c^* X \rightarrow c^* I)$, $c_{*I}(\varnothing \rightarrow c^* I) = \text{image inverse par } \pi_I : I \rightarrow c_* c^* I$ de $c_* \varnothing \rightarrow c_* c^* I$).

Par ailleurs, les mêmes hypothèses suffisent à assurer que, pour tout I , $\hat{C}/c^* I$ est cartésienne fermée.

Alors, si $\psi, \varphi \in |\hat{C}/c^* I|$, on a :

$$\underline{\text{Hom}}_I(\psi, \varphi) = c_{*I}(\psi^\varnothing)$$

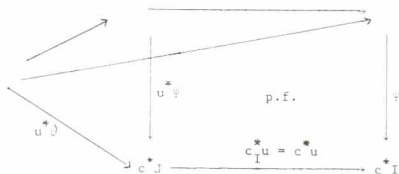
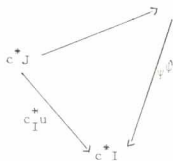
(avec ψ^\varnothing exponentielle dans $\hat{C}/c^* I$).

En effet, observant que dans la fibration :

$$(\hat{C}, c^*) \longrightarrow \mathbb{B}$$

l'image inverse par $u : J \rightarrow I$ est le produit fibré, dans \hat{C} , par $c^*u : c^*J \rightarrow c^*I$, on a successivement :

$$\begin{aligned} \mathbb{B}/I(u, c_{*I}^*(\psi^{\downarrow})) &= (\text{adjonction}) \hat{C}/c^*I(c_{*I}^*u, \psi^{\downarrow}) \\ &= (\text{adjonction cartésienne dans } \hat{C}/c^*I) \hat{C}/c^*I(c_{*I}^*u \times \psi, \psi) \\ &= \hat{C}/c^*J(u^*\psi, u^*\psi) . \end{aligned}$$



3.8. - Construction de la sous-catégorie [interne] pleine engendrée par un objet de $D(I)$.

On généralise à une fibration localement petite D une construction donnée par Bénabou dans le cadre des catégories internes à un topos.

Soit $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ une fibration et $S \in |D(I)|$; on construit la "petite fibration" engendrée par S (représentant la sous-catégorie pleine de D ayant pour objets - dans le cas où $\mathcal{B} = \text{Ens}$ - les $(S_i)_{i \in I}$).

Il s'agit donc de construire $\underline{\sum} \in |\text{Cat } \mathcal{B}|$.

On prend $\underline{\sum}_0$ (objet des objets) = I

$$\underline{\sum}_1 \text{ (objet des flèches) } = \underline{\text{Hom}}_{I \times I}(p_1^* S, p_2^* S) \quad (3.1)$$

où p_1 et p_2 sont les deux projections $I \times I \rightarrow I$

$$0 = \underline{\text{Hom}}_{I \times I}(p_1^* S, p_2^* S) \xrightarrow{k} I \times I \xrightarrow[\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \end{smallmatrix}]{S} I$$

$p_1 k$ et $p_2 k$ sont respectivement les flèches source et but. La flèche identité $\epsilon : I \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{I \times I}(p_1^* S, p_2^* S) = 0$ s'obtient de la façon suivante :

soit $\Delta : I \rightarrow I \times I$ la diagonale ; on a, dans $D(I)$ la flèche identique :

$$1_S : S \longrightarrow S = \Delta^* p_1^* S \longrightarrow \Delta^* p_2^* S$$

d'où (3.1) l'existence de ϵ rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} & & \underline{\text{Hom}}_{I \times I}(p_1^* S, p_2^* S) \\ & \nearrow \epsilon & \downarrow \\ I & & \\ & \searrow \Delta & \\ & & I \times I \end{array}$$

Considérons la \mathcal{B} -fibration $\underline{\Sigma}$ associée à $\underline{\Sigma}$.

Pour $T \in |\mathcal{B}|$ la catégorie $\underline{\Sigma}(T)$

- a pour objets les morphismes $\tau : T \rightarrow I$ dans \mathcal{B}

$$|\underline{\Sigma}(T)| = \mathcal{B}(T, I).$$

- a pour flèches de τ_1 dans τ_2 ($(\tau_1, \tau_2) : T \rightarrow I \times I$) les flèches de T dans \mathcal{O} rendant commutatif le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O} = \underline{\text{Hom}}_{I \times I}(p_1^* S, p_2^* S) \\ \downarrow (\tau_1, \tau_2) & & \downarrow k \\ & & I \times I \end{array}$$

Il en résulte (3.1) :

$$\underline{\Sigma}(T) (\tau_1, \tau_2) = D(T) (\tau_1^* S, \tau_2^* S).$$

On a donc mis en évidence un foncteur U_T plein et fidèle :

$$U_T : \underline{\Sigma}(T) \longrightarrow D(T) \text{ défini par :}$$

$$U_T(\tau) = \tau^* S$$

Les foncteurs U_T commutent évidemment aux changements de base ($f : T' \rightarrow T$ $U_T, f^* \tau = f^* U_{T'} \tau = f^* \tau^* S$).

On note $U \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(\underline{\Sigma}, D)|$ le foncteur cartésien \mathcal{B} -plein et fidèle engendré par les U_T .

U peut être représenté (2.5.2.) comme un couple $(U_0, \bar{\tau}_1)$.

$$\text{On a } U_0 = U_1(1_1) = S.$$

3.9.- Proposition.- Pour que D soit localement petite il faut et il suffit que pour toute petite fibration C et tout couple de foncteurs cartésiens $G, G' \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)|$, (G, G') soit petite. (Bénabou)

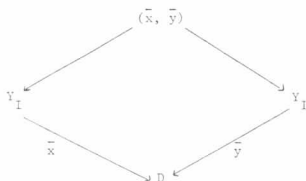
Preuve : a) Soit $I \in |\mathbb{B}|$ et $Y_I : \mathbb{B}/I \rightarrow \mathbb{B}$.

Soient $x, y \in |D(I)|$. D'après le lemme de Yoneda (2.2) il leur correspond $\bar{x}, \bar{y} \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(Y_I, D)|$.

On forme la "comma category" (\bar{x}, \bar{y}) .

Dire qu'il s'agit d'une petite fibration c'est, en particulier, dire qu'il existe un objet de \mathbb{B} , $(\bar{x}, \bar{y})_0$ qui "représente" ses objets, c'est-à-dire les flèches $\bar{x} \rightarrow \bar{y}$.

On vérifie que $(\bar{x}, \bar{y})_0$ a bien les propriétés de $\underline{\text{Hom}}_I(x, y)$.



b) Soit D une fibration localement petite.

- Objet des "objets de (G, G') .- On doit construire un objet de \mathbb{B} qui, dans le cas où $\mathbb{B} = \text{Ens}$, "représente" les morphismes $u : Gx \rightarrow G'x$ ($x \in |\underline{\mathcal{C}}|$) G et G' sont donnés par les diagrammes (2.5.2.)

$$\begin{array}{ccc}
 G_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & G_0 \\
 \theta_0 & \xrightarrow{\quad} & \\
 G'_1 & \xrightarrow{\lambda'_1} & G'_0 \\
 \theta'_0 & \xrightarrow{\quad} & \\
 C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \\
 d_0 & \xrightarrow{\quad} &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \text{Hom}_{C_0}(G_0, G'_0) \\
 \downarrow \\
 C_0
 \end{array}$$

Pour $\mathcal{B} = \text{Ens}$, la fibre de G_0 (resp. G'_0) au-dessus de $x \in C_0$ est Gx (resp. $G'x$).

D étant localement petite, on considère $\text{Hom}_{C_0}(G_0, G'_0)$ et on vérifie qu'il est bien l'objet des "objets" cherché.

- Objet des "flèches" de (G, G') . - On doit construire un objet qui représente pour $\mathcal{B} = \text{Ens}$ les flèches $\alpha : x \rightarrow x'$ telles que le carré ci-dessous soit commutatif (flèches de u dans u').

$$\begin{array}{ccc}
 Gx & \xrightarrow{\quad} & Gx' \\
 \downarrow u & & \downarrow u' \\
 G'x & \xrightarrow{G'_\alpha} & G'x'
 \end{array}$$

Soient $C_0 \times C_0 \xrightarrow[p_2]{p_1} C_0$ les deux projections.

On remarque que $\text{Hom}_{C_0 \times C_0}(p_1^* G_0, p_2^* G_0)$ "représente" les flèches $Gx \rightarrow Gx'$ et que $\bar{\lambda}_1 : d_0^* G_0 \rightarrow d_1^* G_0$ peut être considéré comme une flèche $(d_0, d_1)^*(p_1^* G_0) \rightarrow (d_0, d_1)^*(p_2^* G_0)$. Il lui correspond donc une flèche $\hat{\lambda}_1$ (qui pour $\mathcal{B} = \text{Ens}$, envoie $\alpha \in C_1$ sur $G\alpha$).

$$\begin{array}{ccc}
 C_1 & \xrightarrow{\hat{\lambda}_1} & \underline{\text{Hom}}_{C_0 \times C_0} (p_1^* G_0, p_2^* G_0) \\
 \searrow (d_0, d_1) & & \swarrow \\
 & C_0 \times C_0 &
 \end{array}$$

On forme alors le produit (sur $C_0 \times C_0$)

$$\underline{\text{Hom}}_{C_0 \times C_0} (p_1^* G_0, p_2^* G_0) \times p_2^* \underline{\text{Hom}}_{C_0} (G_0, G'_0)$$

Il existe (3.3) une flèche de ce produit dans $\underline{\text{Hom}}_{C_0 \times C_0} (p_1^* G_0, p_2^* G'_0)$ d'où une flèche (sur $C_0 \times C_0$) de C_1 dans $\underline{\text{Hom}}_{C_0 \times C_0} (p_1^* G_0, p_2^* G'_0)$ qui "représente" les flèches :

$$\alpha \rightsquigarrow u' \cdot G\alpha .$$

Il suffit de construire de la même façon la flèche qui "représente"

$$\alpha \rightsquigarrow G'a.u$$

puis de prendre le noyau pour construire un objet dont on vérifie qu'il est l'objet des "flèches" cherché.

CHAPITRE IV

FIBRATION SUR $\text{Cat } \mathbb{B}$ ASSOCIÉE A UNE \mathbb{B} -FIBRATION .

4.1.- Proposition.- Soit $D : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$ une fibration. Il existe une fibration $\bar{D} : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \text{Cat } \mathbb{B}$ telle que :

$$\forall \underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}| \quad \bar{D}(\underline{C}) \quad (\text{fibre au-dessus de } \underline{C}) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(\underline{C}, D) .$$

Preuve : $\text{Cat } \mathbb{B}$ a des lim finies quand \mathbb{B} en a.

Le foncteur de changement de bases : $\mathcal{J}^* : \bar{D}(\underline{C}) \rightarrow \bar{D}(\underline{C}')$ est donné par : $\mathcal{J}^* = () \circ \mathcal{J} = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathcal{J}, D)$ (2.6.1).

Le composé de deux morphismes cartésiens est évidemment cartésien.

4.2.- Proposition.- Si $F : D \rightarrow D'$ est un foncteur cartésien au-dessus de \mathbb{B} , on peut lui associer : $\bar{F} : \bar{D} \rightarrow \bar{D}'$ cartésien au-dessus de $\text{Cat } \mathbb{B}$ et vérifiant :

$$\forall \underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}| \quad \bar{F}_{\underline{C}} \quad (\text{restriction à la fibre au-dessus de } \underline{C}) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(\underline{C}, F) = F \circ () \quad (2.6.3).$$

Preuve : Si $\mathcal{J} : \underline{C}' \rightarrow \underline{C}$, on montre que \bar{F} commute au changement de bases : $() \circ \mathcal{J} = \mathcal{J}^*$, soit :

$$\bar{F}_{\underline{C}} \cdot \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^* \cdot \bar{F}_{\underline{C}}$$

Avec les notations de 2.6, les deux membres s'écrivent :

$$\bar{F}_{\underline{C}} \cdot \mathcal{J}^* = F \circ (() \circ \mathcal{J})$$

$$\mathcal{J}^* \cdot \bar{F}_{\underline{C}} = (F \circ ()) \circ \mathcal{J}$$

ils sont égaux (composition de foncteurs \mathbb{B} -cartésiens).

4.3. - Remarques. -

1) 2.6.2. donne la construction du foncteur changement de bases ϑ^* et 2.6.4. la construction du foncteur cartésien (sur $\text{Cat } \mathbb{B}$) \bar{F} , associé à $F : D \rightarrow D'$.

2) On notera désormais \underline{C}^* le foncteur de changement de bases dans \bar{D} correspondant à la flèche unique $\underline{C} \rightarrow 1$ de $\text{Cat } \mathbb{B}$.

$$\underline{C}^* : \bar{D}(1) = \mathbb{D} \rightarrow \bar{D}(\underline{C}) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D) .$$

(pour $d \in |\mathbb{D}|$ $\underline{C}^* d$ est le "foncteur" constant égal à d).

Avec cette notation, le foncteur $c^* : \mathbb{B} \rightarrow \hat{C}$ s'écrirait $\underline{C}^{\text{op}*}$.

3) Le foncteur cartésien "foncteur" constant : $D \rightarrow D^C$ est noté C^* (non souligné).

On a : $C_I^* = \underline{C}^*$ et, pour $I \in |\mathbb{B}|$

$$C_I^* : D(I) = D_I(I_I) \rightarrow D^C(I) = D_I^{i^* C}(I_I) = \text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(i^* C, D_I) \quad (2.7.3.3.)$$

donné par : $C_I^* = (i^* C)^*$

4.4. - Théorème. - Si $D : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$ est \mathbb{B} localement petite, $\bar{D} : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \text{Cat } \mathbb{B}$ est $\text{Cat } \mathbb{B}$ -localement petite c'est-à-dire que :

$$\forall \underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}| \quad \forall \underline{G} \in |\bar{D}(\underline{C})| \quad \forall \underline{G}' \in |\bar{D}(\underline{C})| \quad \exists \underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(G, G') \in |\text{Cat } \mathbb{B}/\underline{C}|$$

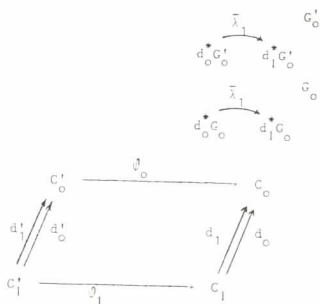
vérifiant :

$$\forall \vartheta : \underline{C}' \rightarrow \underline{C} \quad \bar{D}(\underline{C}') (\vartheta^* G, \vartheta^* G') = \text{Cat } \mathbb{B}/\underline{C} (\vartheta, \underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(G, G'))$$

Preuve : Soient G et $G' \in |\bar{D}(\underline{C})|$, $\vartheta : \underline{C}' \rightarrow \underline{C}$

$$G = (G_o, \bar{\lambda}_1 : d_o^* G_o \rightarrow d_1^* G_o)$$

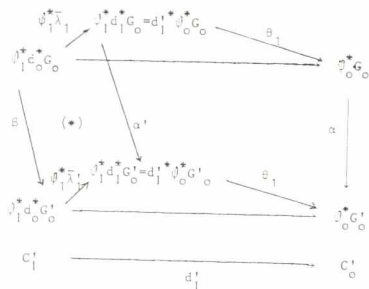
$$G' = (G'_o, \bar{\lambda}'_1 : d_o^* G'_o \rightarrow d_1^* G'_o)$$



Soit d'autre part, dans $\bar{D}(C')$ une flèche : $\vartheta^* G \rightarrow \vartheta^* G'$, c'est-à-dire (remarques précédentes) :

1) une flèche au-dessus de $l_{C'_0} : \vartheta^*_0 G_0 \xrightarrow{\alpha} \vartheta^*_0 G'_0$.

2) une flèche au-dessus de $l_{C'_1} : \vartheta^*_1 d^*_0 G_0 \xrightarrow{\beta} \vartheta^*_1 d^*_0 G'_0$ rendant le grand carré ci-dessous commutatif.



Il en résulte que (*) l'est aussi

et :

$$\alpha' \cdot \vartheta^*_1(\bar{\lambda}_1) = \vartheta^*_1(\bar{\lambda}'_1) \beta$$

1) L'existence de la flèche α est équivalente par hypothèse à celle d'une flèche $C'_0 \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{C_0}(G_0, G'_0)$ telle que le triangle soit commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 C'_0 & \xrightarrow{\quad} & \underline{\text{Hom}}_{C_0}(G_0, G'_0) = H_0 \\
 \downarrow \psi_0 & & \swarrow h_0 \\
 & & C_0
 \end{array}$$

2) A la flèche $F_1^*(\bar{\lambda}'_1) \cdot \beta$ correspond le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d_0^*G_0, d_0^*G'_0) & & \\
 & \nearrow & & \xrightarrow{\underline{\text{Hom}}_{C_1}(d_0^*G_0, \bar{\lambda}'_1)} & \\
 C'_1 & & & & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d_0^*G_0, d_1^*G'_0) \\
 & \searrow \psi_1 & \downarrow h'_1 & & \swarrow h' \\
 & & C_1 & &
 \end{array}$$

A la flèche $\alpha' \cdot \beta_1^*(\bar{\lambda}'_1)$ correspond le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d_1^*G_0, d_1^*G'_0) & & \\
 & \nearrow & & \xrightarrow{\underline{\text{Hom}}_{C_1}(\bar{\lambda}'_1, d_1^*G'_0)} & \\
 C'_1 & & & & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d_0^*G_0, d_1^*G'_0) \\
 & \searrow \psi_1 & \downarrow h''_1 & & \swarrow h' \\
 & & C_1 & &
 \end{array}$$

Le fait que le carré (*) soit commutatif montre que les deux flèches $C'_1 \rightarrow \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d_1^*G_0, d_1^*G'_0)$ qu'on vient de construire sont égales. Finalement, on en déduit dans $\mathcal{L} \cdot \mathcal{C}_1$ une flèche

$$\begin{array}{ccc}
 C'_1 & \longrightarrow & H_1 \\
 \downarrow \psi_1 & & \downarrow h_1 \\
 & & C_1
 \end{array}$$

où h_1 est dans \mathbb{B}/C_1 le produit fibré

$$\begin{array}{ccc}
 h_1 & \longrightarrow & h'_1 \\
 \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow \text{Hom}_{C_1}(d_0^*G_0, \bar{\lambda}'_1) \\
 h''_1 & \longrightarrow & h' \\
 & \text{Hom}_{C_1}(\bar{\lambda}_1, d_1^*(G'_0)) &
 \end{array}$$

A la projection $h_1 \rightarrow h'_1$ correspond une flèche au-dessus de l_{C_1}
 $\bar{h}_1 \longrightarrow \text{Hom}_{C_1}(d_0^*G_0, d_0^*G'_0) = d_0^*H_0$ (3.3) soit une flèche $H_1 \rightarrow H_0$ au-dessus
 de d_0 .

A la projection $h_1 \rightarrow h''_1$ correspond une flèche au-dessus de l_{C_1}
 $H_1 \longrightarrow \text{Hom}_{C_1}(d_1^*G_0, d_1^*G'_0) = d_1^*H_0$ soit une flèche $H_1 \rightarrow H_0$ au-dessus
 de d_1 .

On vérifie alors que ces deux flèches déterminent bien une catégorie
 \underline{H} au-dessus de \underline{C}

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C'_0 & & \\
 & \nearrow d'_1 & & \searrow & \\
 C'_1 & & & & H_0 \\
 & \searrow d'_0 & & \nearrow & \downarrow h_0 \\
 & & H_1 & & C_0 \\
 & \searrow \psi_1 & & \nearrow & \downarrow d_1 \\
 & & C_1 & & \\
 & & \downarrow h_1 & & \\
 & & & & C_0 \\
 & & & & \downarrow d_0 \\
 & & & & C_0
 \end{array}$$

De plus les flèches $C'_0 \rightarrow H_0$ et $C'_1 \rightarrow H_1$ construites plus haut déterminent bien un morphisme de $\text{Cat } \mathbb{B}/C$. On a ainsi défini, sur les objets le bifoncteur cherché.

Cas particulier - Si $C' = \underline{C}^* d$ ($d \in |\mathbb{D}|$).

(On a alors $G'_0 = C^*_0 d$, $d^*_1 G'_0 = d^*_0 G'_0 = C^*_1 d$)

$$\begin{array}{ccc} C^*_1(d) & \xrightarrow[\vartheta_0]{\theta_1} & C^*_0(d) \\ C_1 & \xrightarrow[d_0]{d_1} & C_0 \end{array}$$

Le carré fibré qui définit H_1 est alors

$$\begin{array}{ccc} & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d^*_1 G_0, C^*_1 d) = d^*_1 H_0 & \\ & \nearrow \sim & \\ H_1 & & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d^*_0 G_0, C^*_1 d) \\ & \searrow & \nearrow \sim \\ & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(d^*_0 G_0, C^*_1 d) = d^*_0 H_0 & \end{array}$$

La flèche $H_1 \rightarrow H_0$ au-dessus de d_1 construite plus haut est simplement la projection

$$\begin{array}{ccc} H_1 = d^*_1 H_0 & \xrightarrow{\theta_1} & H_0 \\ \downarrow & \text{pf} & \downarrow \\ C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \end{array}$$

La catégorie \underline{H} au-dessus de \underline{C} est donc de la forme :

$$\begin{array}{ccc} H_1 = d_1^* H_0 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda_0} \\ \xrightarrow{\beta_1} \end{array} & H_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_1 & \begin{array}{c} \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_1} \end{array} & C_0 \end{array}$$

Elle définit donc un objet de $\hat{C} = B^{C^{OP}}(1) = \text{Cart}_B(C^{OP}, B)$.

4.5.- Interprétation de la construction 4.4.-

Etant donné $G, G' \in |\text{Cart}_B(C, D)|$, (D localement petite) il s'agit de construire une catégorie interne à B , au-dessus de \underline{C}

$$h : \underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(G, G') \rightarrow \underline{C}$$

telle que pour tout foncteur interne $\psi : \underline{C}' \rightarrow \underline{C}$ les transformations B -naturelles $(G) \circ \psi \rightarrow (G') \circ \psi$ soient en correspondance biunivoque avec les foncteurs de \underline{C}' dans $\underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(G, G')$ au-dessus de \underline{C} . On est donc amené à introduire la "comma category" (G, G') , (2.10). Se donner une transformation B -naturelle $(G) \circ \psi \rightarrow (G') \circ \psi$ revient à se donner un foncteur cartésien $L : G' \rightarrow (G, G')$ tel que $\psi = P.L = Q.L$, (figure ci-dessous), c'est-à-dire qui se factorise par $\text{Ker}(P, Q)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & C' & & \\ & \swarrow & \downarrow L & \searrow & \\ & (G, G') & & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ C & & D & & C \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{P} \\ \xrightarrow{Q} \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{P} \\ \xrightarrow{Q} \end{array} C$$

$G \quad G'$

On a donc $\underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(G, G') = \text{Ker}(P, Q)$.

CHAPITRE V

COMPLETUE.

5.1.- Proposition.- (rappel [6]) - Etant donné deux fibrations $E : E \rightarrow B$ et $E' : E' \rightarrow B$ et deux foncteurs cartésiens $E \xleftarrow[L]{R} E'$ au-dessus de B munis de deux B -transformations naturelles :

$$\varepsilon : LR \longrightarrow 1_E \quad \eta : 1_{E'} \longrightarrow RL$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) ε et η définissent une adjonction $L \dashv R$,
 b) pour tout $I \in |B|$, ε_I et η_I définissent l'adjonction $L_I \dashv R_I$.

Dans ces conditions on dit que L est B -adjoint à gauche de R .

5.2.- Proposition.- (rappel [6]) - Si $R : E \rightarrow E'$ est un foncteur cartésien au-dessus de B , pour que R admette un B -adjoint à gauche il faut et il suffit que, pour tout $I \in |B|$, R_I ait un adjoint à gauche L_I , les L_I étant compatibles avec les changements de bases.

5.3.- Limites finies.-

Soit $E : E \rightarrow B$; on construit une fibration qui pour $B = \text{Ens}$ correspond à la catégorie $E \times E = E^2$ (2 : catégorie discrète à deux objets).

A E , correspond un pseudo-foncteur $\mathfrak{B}E : B^{\text{op}} \rightarrow \text{Cat}$ qu'on compose avec le foncteur $\text{Cat} \xrightarrow{(\)^2} \text{Cat}$.

On note $E^{(2)} : E^{(2)} \rightarrow B$ la fibration correspondant au pseudo-foncteur $(\)^2 \cdot \mathfrak{B}E$.

On a, pour tout I $E^{(2)}(I) = (E(I))^2$.

Il existe un foncteur cartésien $\Delta : E \rightarrow E^{(2)}$ au-dessus de \mathbb{B} . (Δ_I est la diagonale $E(I) \rightarrow (E(I))^2$).

Définition.- $E : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ a des sommes finies (resp. produits finis) si et seulement si $\Delta : E \rightarrow E^{(2)}$ a un \mathbb{B} -adjoint à gauche (resp. à droite).

Remarque.- D'après 5.1, la définition équivaut à : chaque fibre a des sommes finies (resp. produits finis) qui commutent aux changements de base.

5.4.- Fibrations à \mathbb{B} -sommes.

Etant donné une fibration $E : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$, on veut généraliser à \mathbb{B} la construction suivante relative à Ens .

A toute famille de familles d'objets de \mathbb{C} , $\left((X_i)_{i \in I_k} \right)_{k \in K}$ on associe $\left(\coprod_{i \in I_k} X_i \right)_{k \in K}$. Remplaçant Ens par \mathbb{B} , à toute flèche $f : I \rightarrow K$ de \mathbb{B} et tout objet X au-dessus de I , on doit associer un objet au-dessus de K , "représentant la somme".

On exige donc que le foncteur de changement de base f^* ait un adjoint à gauche \sum_f .

Il faut par ailleurs que ces "sommes" commutent aux changements de base.

Définition.- $E : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{B}$ est à \mathbb{B} -sommes si et seulement si les foncteurs f^* de changements de bases ont des adjoints à gauche \sum_f , vérifiant la condition de Chevalley :

si le carré ci-contre est cartésien dans \mathbb{B} ,

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{f} & J \\
 \downarrow k & & \downarrow h \\
 & p.f. & \\
 L & \xrightarrow{g} & K
 \end{array}$$

la flèche canonique :

$$\sum_f \cdot k^* \longrightarrow h^* \cdot \sum_g$$

est un isomorphisme, $(\sum_f k^* \cong h^* \sum_g : E(L) \longrightarrow E(J))$.

5.5.- Fibration à B-produits.

On définit dualement une fibration à B-produits en exigeant

- que les foncteurs de changements de bases f^* aient des adjoints à droite π_f ,
- que ces foncteurs vérifient une condition duale de celle de Chevalley (condition de co-Chevalley) :

dans les mêmes conditions que précédemment, la flèche canonique :

$$g^* \pi_h \rightarrow \pi_k f^* \text{ est un isomorphisme.}$$

Remarque.- Soit $E : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ et E^{op} sa duale (2.8.1). On vérifie que E est à B-produits si et seulement si E^{op} est à B-sommes.

5.5.1.- Exemples.

1) $B : \text{Fl } \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ est à B-sommes (1.3) ; la condition de Chevalley est trivialement vérifiée.

2) Si $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathcal{B}|$, $B^{\text{C op}} : (\hat{C}, c^*) \rightarrow \mathcal{B}$ est à B-sommes.

On a successivement, pour $X \in |E(J)|$

$$\begin{aligned}
 E(J)(L_J \sum_f Y', X) &= (\mathbb{B}\text{-adjonction}) E'(J) (\sum_f Y', R_J X) \\
 &= (\sum_f \dashv f^*) E'(I) (Y', f^* R_J X) \\
 &\approx (\mathbb{R} \text{ cartésien}) E'(I) (Y', R_I f^* X) \\
 &= (\mathbb{B}\text{-adjonction}) E(I) (L_I Y', f^* X) \\
 &= (\sum_f \dashv f^*) E(J) (\sum_f L_I Y', X) .
 \end{aligned}$$

La fin de la démonstration est triviale.

5.7. - Définition. - Soit $D : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$ une fibration, on dit que D a des conoyaux (resp. des noyaux), si et seulement si, pour tout I , $D(I)$ a des conoyaux (resp. noyaux) et si ces conoyaux (resp. noyaux) sont compatibles avec les changements de base.

5.8. - Théorème. - Si $D : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{B}$ est à \mathbb{B} -sommes et a des conoyaux, pour tout foncteur interne $\mathcal{D} : \underline{C} \rightarrow \underline{C}'$ ($\underline{C}, \underline{C}' \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$), $D^{\mathcal{D}} : D^{C'} \rightarrow D^C$ a un \mathbb{B} -adjoint à gauche.

On dit que D est \mathbb{B} -complète à droite.

Preuve : On doit montrer que, pour tout I , $D_I^{\mathcal{D}} = D_I^{i^* \mathcal{D}} \circ I_I$ (2.7.5. remarque 3) a un adjoint à gauche $\lim_{\mathcal{D}}^{\rightarrow} I_I$, et que ces foncteurs commutent aux changements de base. La remarque initiale montre qu'on peut se borner à considérer la restriction de $D^{\mathcal{D}}$ à la fibre au-dessus de 1 .

La construction de l'adjoint à gauche de $D_I^{\mathcal{D}} = () \circ \mathcal{D}$ étant fastidieuse, on se bornera à établir l'existence de cet adjoint (dans le cas général) puis à le construire (et à montrer la commutation aux changements de bases) dans le cas (le seul qui intervient dans la suite) où

$$\mathcal{D} : \underline{C} \rightarrow 1$$

$$(D^{\psi} = C^*).$$

- 1) On montre qu'avec les hypothèses du théorème la catégorie $D_1^C = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D) = \bar{D}(C)$ est algébrique sur $D(C_0)$. Nous aurons alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{D}(C') & \xrightarrow{\psi^* = (\) \circ \psi = D_1^{\psi}} & \bar{D}(C) \\
 \left. \begin{array}{c} \downarrow U' \\ \uparrow F' \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sum_{d_0} \psi_0} & \left. \begin{array}{c} \downarrow U \\ \uparrow F \end{array} \right\} \\
 D(C'_0) & \xrightarrow{\psi_0^*} & D(C_0)
 \end{array}$$

où (F, U) et (F', U') sont triplables et $\sum_{d_0} \psi_0 \rightarrow \psi_0^*$. $\bar{D}(C')$ a des conoyaux.

On sait qu'alors $\psi^* = D_1^{\psi}$ a un adjoint à gauche noté $\lim_{\psi} I$. Plus généralement, pour tout I , il existe $\lim_{\psi} I \rightarrow D_I^{\psi}$.

a) $\bar{D}(C)$ est une catégorie d'algèbres sur $D(C_0)$, le triple $\sum_{d_1} d_0^*$ a pour foncteur sous-jacent $\sum_{d_1} d_0^*$.

Un objet de $\bar{D}(C) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)$ est la donnée de $\delta_0 \in |D(C_0)|$ et $\bar{\lambda}_1 : d_0^* \delta_0 \rightarrow d_1^* \delta_0$, $\bar{\lambda}_1 \in \text{Fl } D(C_1)$, vérifiant les conditions de (2.5.2.).

Dans les conditions de l'hypothèse c'est donc un couple :

$$(\delta_0, \sum_{d_1} d_0^* \delta_0 \xrightarrow{\bar{\lambda}_1} \delta_0), \bar{\lambda}_1 \text{ étant une flèche au-dessus de } 1_{C_0}.$$

On définit la flèche $n : |D(C_0)| \rightarrow \sum_{d_1} d_0^*$ de la façon suivante.

Avec les notations de (2.5), $d_0 \varepsilon = d_1 \varepsilon = 1_{C_0}$

$$C_0 \xrightarrow{\varepsilon} C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} C_0$$

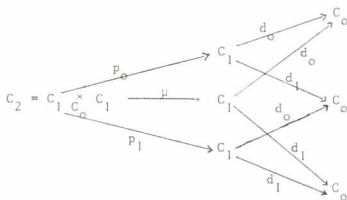
Donc, $\delta_o = \varepsilon^* d_o^* \delta_o$, on en tire une flèche

$$\sum_{\varepsilon} \delta_o \rightarrow d_o^* \delta_o, \text{ d'où } \sum_{d_1} \sum_{\varepsilon} \delta_o \rightarrow \sum_{d_1} d_o^* \delta_o.$$

finalement $\delta_o \rightarrow \sum_{d_1} d_o^* \delta_o$ qui est la flèche π_{δ_o} cherchée.

On construit la flèche $\rho : \sum_{d_1} d_o^* \sum_{d_1} d_o^* \delta_o \rightarrow \sum_{d_1} d_o^* \delta_o$.

Les notations sont toujours celles de (2.5)



De $d_o p_o = d_o \mu$, on tire

$$p_o^* d_o^* \delta_o = \mu^* d_o^* \delta_o, \text{ d'où une flèche } \sum_{\mu} p_o^* d_o^* \delta_o \rightarrow d_o^* \delta_o,$$

$$\text{et } \sum_{d_1} \sum_{\mu} p_o^* d_o^* \delta_o \rightarrow \sum_{d_1} d_o^* \delta_o.$$

Mais $d_1 \mu = d_1 p_1$. La flèche précédente est donc : $\sum_{d_1} \sum_{p_1} p_o^* d_o^* \delta_o \rightarrow \sum_{d_1} d_o^* \delta_o$.

Appliquant enfin la condition de Chevalley :

$$\sum_{p_1} p_o^* = d_o^* \sum_{d_1},$$

on trouve la flèche

$$\rho_{\delta_o} : \sum_{d_1} d_o^* \sum_{d_1} d_o^* \delta_o \rightarrow \sum_{d_1} d_o^* \delta_o.$$

On vérifie que $(\Gamma = \sum_{d_1} d_o^*, \eta, \rho)$ ainsi défini forme un triple dont les algèbres (diagrammes $(*)$ et $(**)$ de 2.5.2) sont les objets de $\bar{D}(C)$.

On a donc une paire d'adjoints triplable :

$$D^C(I) = \bar{D}(C) \begin{array}{c} \xleftarrow{F^\Gamma} \\ \xrightarrow{U^\Gamma} \end{array} D(C_o)$$

b) On en déduit, pour tout I (2.7.3.3) une paire d'adjoints triplable.

$$D^C(I) = D_I^{i^*} C(I_I) = \text{Cart}_B(I \times C, D) \begin{array}{c} \xleftarrow{F_I^\Gamma} \\ \xrightarrow{U_I^\Gamma} \end{array} D_I(i^* C_o) = D(I \times C_o) \\ = D_{C_o}^C(I)$$

(où on note $D_{C_o}^C$ la fibration obtenue comme exponentielle à partir de $\mathbb{B}(C_o) = \mathbb{B}/C_o \rightarrow \mathbb{B}$ et D).

On a alors un \mathbb{B} -triple sur $D_{C_o}^C$.

Preuve : On montre que $\sum_{d_1} d_o^*$ est compatible aux changements de bases, et que η et ρ sont des \mathbb{B} -transformations naturelles.

La compatibilité de $\sum_{d_1} d_o^*$ aux changements de bases s'obtient à partir du diagramme ci-dessous en appliquant la condition de Chevalley

$$\begin{array}{ccc} D(C_I \times J) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\sum_{d_1}} \\ \xrightarrow{d_o^*} \end{array} & D(C_o \times J) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ D(C_I \times I) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\sum_{d_1}} \\ \xrightarrow{d_o^*} \end{array} & D(C_o \times I) \end{array}$$

$I \xrightarrow{f} J$

La fin de la preuve est triviale .

Il en résulte qu'il existe deux foncteurs cartésiens \mathcal{B} -adjoints (encore notés F^{Γ} et U^{Γ}) dont les restrictions aux fibres au-dessus de I sont F_I^{Γ} et U_I^{Γ} .

c) On construit les conoyaux dans $D^C(I) = \bar{D}(C)$ en utilisant le caractère universel des conoyaux dans les $D(I)$.

Soient $\delta \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{G} \end{array} \gamma$ dans $D^C(I)$

F (resp. G) est un couple (F_0, F_1) $F_0 : \delta_0 \rightarrow \gamma_0$, $F_1 = d_0^* F_0$ (resp. $(G_0, G_1 = d_0^* G_0)$), rendant commutatifs les carrés ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} & & K_1 \xrightleftharpoons[\theta_0]{\lambda''_1} K_0 \\ & \nearrow & \\ & \gamma_1 = d_0^* \gamma_0 \xrightleftharpoons[\theta_0]{\lambda'_1} \gamma_0 & \\ & \nearrow \quad \searrow & \\ G_1 = d_0^* G_0 \quad F_1 = d_0^* F_0 & & G_0 \quad F_0 \\ \delta_1 = d_0^* \delta_0 \xrightleftharpoons[\theta_0]{\lambda_1} \delta_0 & & \delta_0 \end{array}$$

$\lambda''_1 G_1 = G_0 \lambda_1$
 $\lambda''_1 F_1 = F_0 \lambda_1$
 $\theta_0 G_1 = G_0 \theta_0$
 $\theta_0 F_1 = F_0 \theta_0$

F_0, G_0 au-dessus de 1_{C_0}
 F_1, G_1 au-dessus de 1_{C_1}

$$C_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{d_1} \\ \xrightarrow{d_0} \end{array} C_0$$

Les conoyaux étant universels, $d_0^*(\text{Coker}_{D(C_0)}(F_0, G_0)) = \text{Coker}_{D(C_1)}(F_1, G_1)$

Comme $\lambda''_1 G_1 = G_0 \lambda_1$ et $\lambda''_1 F_1 = F_0 \lambda_1$, il existe $\lambda'' : K_1 \rightarrow K_0$ au-dessus de d_1 .

On vérifie simplement que $K_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\lambda''} \\ \xrightarrow{\theta_0} \end{array} K_0$ est un objet de $\bar{D}(C)$ évidemment conoyau de F et G .

d) La fibration D^C a des conoyaux.

Il suffit de vérifier que les conoyaux des $D^C(1) = D_I^{i^*C}(1_I)$ qu'on vient de construire sont compatibles aux changements de base, ce qui est évident d'après l'hypothèse.

- 2) Soit $\psi : \underline{C} \rightarrow 1$.

On montre que les $\lim_{\psi, I}$ (notés ici $\lim_{\underline{C}}^I$) définissent un foncteur cartésien $\lim_{\underline{C}}$ qui sera ainsi \mathcal{B} -adjoint à gauche de D^{ψ} (noté ici C^*).

On montre que les foncteurs $\lim_{\underline{C}}^I$ commutent aux changements de base.

5.8.1.- Lemme.- Si $F \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(C, D)| (= |D^C(1)|)$, $\lim_{\underline{C}}^I F$ (noté $\lim_{\underline{C}} F$) est dans $D(1)$ un conoyau construit de la façon suivante.

F est représenté par le diagramme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} F_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & F_0 \\ & \searrow_{\theta_0} & \\ C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \end{array}$$

D étant à \mathcal{B} -sommes, λ_1 et θ_0 correspondent dans $D(C_0)$:

$$\sum_{d_1} F_1 \longrightarrow F_0 \quad \text{et} \quad \sum_{d_0} F_1 \longrightarrow F_0 \quad \text{puis dans } D(1) :$$

$$\sum_{C_0} \sum_{d_1} F_1 = \sum_{C_0} \sum_{d_0} F_1 \xrightarrow[\theta_0]{\lambda_1} \sum_{C_0} F_0 .$$

$$\text{On a :} \quad \lim_{\underline{C}} F = \text{Coker}(\lambda_1, \theta_0) .$$

En effet, on a : $D(1)(\lim_{\underline{C}} F, d) = D^C(1)(F, \underline{C}^* d)$.

Or un morphisme de $D^C(1)$, $F \rightarrow \underline{C}^* d$ est un morphisme α de $D(C_0)$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & C_1^* d & \xrightarrow{\theta_1} C_0^* d \\
 & \nearrow^{d_0^* \alpha} & \xrightarrow{\theta_0} \\
 d_0^* F_0 = F_1 & \xrightarrow{\lambda_1} F_0 & \xrightarrow{\alpha} C_0^* d \\
 & \xrightarrow{\theta_0} & \\
 & C_1 & \xrightarrow{d_1} C_0 \\
 & \xrightarrow{d_0} &
 \end{array}$$

A la flèche $F_1 \xrightarrow{\theta_0} F_0 \xrightarrow{\alpha} C_0^* d$ correspond

$$\begin{array}{ccc}
 \sum_{d_0} F_1 & \xrightarrow{\alpha} F_0 & \xrightarrow{\alpha} C_0^* d \quad (D \text{ est une cofibration soit (adjonction } \square_{d_0} \rightarrow c_0^*)) : \\
 F_1 & \xrightarrow{d_0^* \alpha} d_0^* C_0^* d = C_1^* d .
 \end{array}$$

A la flèche $F_1 \xrightarrow{\lambda_1} F_0 \xrightarrow{\alpha} C_0^* d$ correspond

$$\sum_{d_1} F_1 \xrightarrow{\alpha} F_0 \xrightarrow{\alpha} C_0^* d, \text{ soit : } F_1 \xrightarrow{d_0^* \alpha} d_0^* C_0^* d = d_1^* C_0^* d = C_1^* d .$$

Finalement (à α correspond $\alpha : \sum_{C_0} F_0 \rightarrow d$), la commutativité du diagramme précédent équivaut à celle de :

$$\sum_{C_0} \sum_{d_1} F_1 \xrightarrow{\lambda_1} \sum_{C_0} \sum_{d_0} F_1 \xrightarrow{\theta_0} \sum_{C_0} F_0 \xrightarrow{\alpha} d$$

D'où le résultat.

Conséquence. - Soit $I \in |\mathbb{B}|$ ($i : I \rightarrow 1$) et $F \in |D^C(I)|$.

On a : $i^* F \in |D^C(I)|$ représenté par le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
 & i^* \lambda_1 & \\
 i^* F_1 & \xrightarrow{\quad} & i^* F_0 \\
 & i^* \theta_0 & \\
 & I \times d_1 & \\
 I \times C_1 & \xrightarrow{\quad} & I \times C_0 \\
 & I \times d_0 & \\
 & & \searrow \\
 & & I
 \end{array}$$

$\lim_{\underline{C}} (i^* F) \in |D(I)|$ est le conoyau dans $D(I)$ de :

$$\sum_{I \times C_1} i^* F_1 \xrightarrow{i^* \lambda_1} \sum_{I \times C_0} i^* F_0$$

(où $\sum_{I \times C_1}$ et $\sum_{I \times C_0}$ correspondent aux flèches $I \times C_1 \rightarrow I$ et $I \times C_0 \rightarrow I$).

Fin de la preuve de 5.8. - Dans les conditions précédentes, on a :

$$\lim_{\underline{C}} (i^* F) = i^* (\lim_{\underline{C}} F)$$

(On utilise le fait que les $D(I)$ ont des conoyaux universels et la condition de Chevalley appliquée au carré fibré ci-dessous).

$$\begin{array}{ccc} I \times C_1 & \xrightarrow{\text{Pr}_I} & C_1 \\ \text{Pr}_{C_1} \downarrow & & \downarrow \\ I & \xrightarrow{\quad} & I \end{array}$$

Pour $f : I \rightarrow J$ et $F \in |D^{\underline{C}}(J)|$ on obtient alors aisément le résultat cherché :

$$\lim_{\underline{C}} f^* F = f^* (\lim_{\underline{C}} F) .$$

(Il suffit de remarquer que $D^{\underline{C}}(J) = D^{\underline{C} \times J}(1)$ et que f définit un objet au-dessus de J .)

On a alors : $\lim_{\underline{C}} f^* F = \lim_{\underline{C} \times J} f^* F$ et on est ramené au cas précédent).

Remarque. - Le théorème 5.8 montre en particulier, que si $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ a des \mathcal{B} -sommes et des conoyaux, $\bar{D} : \bar{\mathcal{D}} \rightarrow \text{Cat } \mathcal{B}$ a des conoyaux et les foncteurs de changements de bases ont des adjoints à gauche.

Mais \bar{D} ne vérifie pas la condition de Chevalley et n'a donc pas de Cat \mathcal{B} -sommes.

5.8 bis - Théorème. - Si $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ est à \mathcal{B} -produits et a des noyaux, pour tout foncteur interne $\mathcal{J} : \underline{C} \rightarrow \underline{C}'$, $D^{\mathcal{J}} : D^{\underline{C}'} \rightarrow D^{\underline{C}}$ a un \mathcal{B} -adjoint à droite.

On dit que D est \mathcal{B} -complète à gauche.

5.9. - Corollaire. - Dans les conditions du théorème 4.8, le foncteur $\lim_{\mathcal{J}} : D^{\underline{C}} \rightarrow D^{\underline{C}'}$ est cocartésien, (en particulier $D^{\underline{C}}$ et $D^{\underline{C}'}$ sont cofibrées).

Preuve :

a) On remarque d'abord que si D est \mathcal{B} -complète à droite $D^{\underline{C}}$ et $D^{\underline{C}'}$ sont cofibrées sur \mathcal{B} .

En effet, soit $f : I \rightarrow J$ on définit $\sum_f : D^{\underline{C}}(I) \rightarrow D^{\underline{C}}(J)$ comme suit :

$$D^{\underline{C}}(I) = \text{Cart}_{\mathcal{B}}(C \times I, D) = D^{C \times I}(1).$$

$$D^{\underline{C}}(J) = D^{C \times J}(1)$$

A $f : I \rightarrow J$ correspond un morphisme $\mathcal{J}_f : \underline{C} \times I \rightarrow \underline{C} \times J$ de Cat \mathcal{B} .

On pose $\sum_f = \lim_{\mathcal{J}_f} 1$ (restriction de $\lim_{\mathcal{J}_f}$ à la fibre au-dessus de 1).

On vérifie aisément que le foncteur de changement de base f^* , pour la fibration $D^{\underline{C}}$, se confond avec $() \circ \mathcal{J}_f = D^{\mathcal{J}_f}$. Il en résulte que \sum_f est une image directe et que $D^{\underline{C}}$ est cofibrée.

b) On montre alors facilement que $\lim_{\mathcal{J}}$ est cocartésien. Notant $\lim_{\mathcal{J}_I}$ et $\lim_{\mathcal{J}_J}$ les restrictions aux fibres $D^{\underline{C}}(I)$ et $D^{\underline{C}}(J)$, $\gamma_I \in |D^{\underline{C}}(I)|$ et $\delta'_J \in |D^{\underline{C}'}(J)|$, on a successivement :

$$\begin{aligned}
(\lim_{\mathcal{J}} \sum_f \gamma_I, \delta_{\mathcal{J}}^!) &= (\sum_f \gamma_I, D_{\mathcal{J}}^{\beta}(\delta_{\mathcal{J}}^!)) && \text{(adjonction)} \\
&= (\gamma_I, f^* D_{\mathcal{J}}^{\beta}(\delta_{\mathcal{J}}^!)) && \text{(adjonction } \sum_f \dashv f^*) \\
&= (\gamma_I, D_I^{\beta} f^*(\delta_{\mathcal{J}}^!)) && (D^{\beta} \text{ cartésien)} \\
&= (\lim_{\mathcal{I}} \gamma_I, f^*(\delta_{\mathcal{J}}^!)) && \text{(adjonction)} \\
&= (\sum_f \lim_{\mathcal{I}} \gamma_I, \delta_{\mathcal{J}}^!) && \text{(adjonction } \sum_f \dashv f^*)
\end{aligned}$$

5.10.- Proposition.- Etant donné deux fibrations D, D' , \mathcal{B} -complètes à droite, $\mathcal{J} : \underline{C} \rightarrow \underline{C}'$ un morphisme de $\text{Cat } \mathcal{B}$, $L : D \rightarrow D'$ un foncteur cartésien ayant un \mathcal{B} -adjoint à droite R , L commute aux \mathcal{B} -limites inductives, c'est-à-dire :

- la flèche canonique : $\lim_{\mathcal{J}} L^C \rightarrow L^C \lim_{\mathcal{J}}$ est un \mathcal{B} -isomorphisme,
- L commute à la flèche $\epsilon : \lim_{\mathcal{J}} D^{\mathcal{J}} \rightarrow \text{Id}$.

$$\begin{array}{ccc}
D^{C'} & \xrightarrow{D^{\mathcal{J}}} & D^C \\
\uparrow L^{C'} & \xrightarrow{\lim_{\mathcal{J}}} & \uparrow L^C \\
R^{C'} & & R^C \\
\downarrow & & \downarrow \\
D', C' & \xrightarrow{D', \mathcal{J}} & D', C \\
& \xrightarrow{\lim_{\mathcal{J}}} &
\end{array}$$

Preuve : Il suffit de montrer que si $L \dashv R$ est une \mathcal{B} -adjonction, pour tout $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathcal{B}|$, $L^C \dashv R^C$ est une \mathcal{B} -adjonction. On a, en effet $R^C D', \mathcal{J} = D^{\mathcal{J}} R^{C'}$ (2.6 et 2.7.5).

On sait que pour toute fibration $X : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{B}$

$$\text{Cart}_{\mathcal{B}}(X, L) \dashv \text{Cart}_{\mathcal{B}}(X, R), (\text{Cart}_{\mathcal{B}}(X, D) \xrightarrow{\text{Cart}_{\mathcal{B}}(X, L)} \text{Cart}_{\mathcal{B}}(X, D')) .$$

$$\text{Cart}_{\mathcal{B}}(X, R)$$

Il suffit de faire $X = C \times I : \mathbb{B}(\underline{C} \times I) \rightarrow \mathbb{B}$ pour en déduire :

$$L_I^C \rightarrow R_I^C$$

On applique alors 5.2 pour conclure.

5.10.- Exemples.- D'après 5.5, si \mathbb{B} a des conoyaux universels, $B : \mathcal{F}\ell \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ est \mathbb{B} -complète à droite.

Le théorème 5.8 permet d'en déduire que

$$B^{C^{OP}} : (\underline{C}, c^*) \rightarrow \mathbb{B}$$

a des conoyaux universels. Comme cette fibration a des \mathbb{B} -sommets (5.5) elle est \mathbb{B} -complète à droite.

5.11.- Proposition.- Etant donné deux fibrations D, D' , \mathbb{B} -complètes à gauche, $\psi : \underline{C} \rightarrow \underline{C}'$ un morphisme de $\text{Cat } \mathbb{B}$, R un foncteur cartésien ($R : D \rightarrow D'$) ayant un \mathbb{B} -adjoint à gauche, R commute aux \mathbb{B} -limites projectives

Notation.- Nous adopterons dans la suite les notations utilisées dans ce chapitre. Si $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$, D une fibration sur \mathbb{B} , \bar{D} la fibration sur $\text{Cat } \mathbb{B}$ correspondante, $C^* : D \rightarrow D^C$ le foncteur cartésien "foncteur constant" et $\underline{C}^* : D(1) \rightarrow D^C(1) = \bar{D}(\underline{C})$ sa restriction à la fibre au-dessus de 1, (4.3), on notera $\underline{\lim}_C$ (resp. $\underline{\lim}$) le \mathbb{B} -adjoint à gauche (resp. à droite) éventuel de C^* et $\underline{\lim}_C$ (resp. $\underline{\lim}$) sa restriction à la fibre au-dessus de 1 : $\underline{\lim}_C = \underline{\lim}_C|_1$, $\underline{\lim} = \underline{\lim}|_1$.

De même, si $\psi : \underline{C}' \rightarrow \underline{C}$ nous noterons $\underline{\lim}_\psi$ (resp. $\underline{\lim}_\psi$) l'adjoint à gauche (resp. à droite) de $\psi^* = (\) \circ \psi : \bar{D}(\underline{C}') \rightarrow \bar{D}(\underline{C})$

CHAPITRE VI

THEOREME DE KAN

Etant donné une petite catégorie \mathbb{C} , $Y : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ le foncteur de Yoneda, \mathbb{D} une catégorie localement petite ($\forall X \forall Y \text{ Hom}_{\mathbb{D}}(X, Y) \in |\text{Ens}|$) et complète à droite, on sait qu'il existe une équivalence entre la catégorie des foncteurs de \mathbb{C} dans \mathbb{D} et la catégorie des foncteurs $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{D}$ qui commutent aux limites inductives. De plus, ces derniers foncteurs ont un adjoint à droite. On sait que le foncteur de $\hat{\mathbb{C}}$ dans \mathbb{D} correspondant à $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ est son extension de Kan par Y (théorème de Kan).

On veut traduire ce résultat dans notre \mathbb{B} -contexte. Pour cela :

1) étant donné C une petite \mathbb{B} -fibration, D une fibration \mathbb{B} -complète à droite et $g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)|$ nous construirons $L_g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}^{C^{\text{op}}}, D)|$ extension de Kan par le foncteur de Yoneda de g .

2) nous établirons que si D est localement petite, L_g a un \mathbb{B} -adjoint à droite.

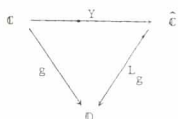
3) nous établirons une \mathbb{B} -équivalence analogue à l'équivalence citée plus haut.

6.1.- \mathbb{B} -Extension de Kan de $g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)|$ par le foncteur de Yoneda.

Pour $\mathbb{B} = \text{Ens}$, on sait que si g est un foncteur de \mathbb{C} (petite catégorie) dans \mathbb{D} , complète à droite l'extension de Kan (à gauche) de g par $Y : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est un foncteur $L_g : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{D}$ défini par :

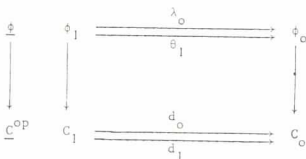
$$\forall \phi \in |\hat{\mathbb{C}}| \quad L_g(\phi) = \lim_{(Y, \phi)} g \circ P$$

où (Y, ψ) est la "catégorie comma" et $P : (Y, \psi) \rightarrow \mathbb{C}$ la foncteur de projection. (Y, ψ) est appelée catégorie de représentation de ψ



6.1.1.- Catégorie de représentation de $\psi \in |\hat{\mathbb{C}}|$ (\mathbb{B} quelconque).

On sait (2.5.2.) qu'un préfaisceau ψ peut se représenter par le diagramme ci-dessous



où $\underline{\mathbb{B}}$ est une catégorie dans \mathbb{B} (de flèche source θ_1 , de flèche but λ_0), au-dessus de $\underline{\mathbb{C}}^{op}$.

On note $P : \underline{\mathbb{B}}^{op} \rightarrow \underline{\mathbb{C}}$ le foncteur interne obtenu à partir du diagramme précédent en dualisant $\underline{\mathbb{B}}$ et $\underline{\mathbb{C}}^{op}$.

Pour $\mathbb{B} = \text{Ens}$ un objet de $\underline{\mathbb{B}}^{op}$ au-dessus de $c \in C_0$ est un $x \in \psi(c)$, c'est-à-dire une transformation naturelle encore notée $x : Yc = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(-, c) \rightarrow \psi$, (un objet de (Y, ψ)).

Une flèche de $\underline{\mathbb{B}}^{op}$ de $x(\in \psi(c))$ dans $x'(\in \psi(c'))$ est une flèche $f : c \rightarrow c'$ telle que $\psi(f)x' = x$, c'est-à-dire rendant le diagramme

ci-dessous commutatif. Il s'agit donc d'une flèche de (Y, ψ) .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\underline{C}}(-, c) = Yc & & \\
 \downarrow & \searrow x & \\
 \text{Hom}_{\underline{C}}(-, f) = Yf & & \psi \\
 \downarrow & \nearrow x' & \\
 \text{Hom}_{\underline{C}}(-, c') = Yc' & &
 \end{array}$$

Finalement $\underline{C}^{\text{OP}}$ est la catégorie de représentation de ψ et $P : \underline{C}^{\text{OP}} \rightarrow \underline{C}$ est le foncteur de projection précédent.

On en déduit la définition suivante (B quelconque).

6.1.2.- Définition.

Soit $g \in |\text{Cart}_B(C, D)|$, C étant une petite fibration. On appelle B -extension de Kan par Yoneda de g , le foncteur cartésien $L_g \in |\text{Cart}_B(B^{\text{COP}}, D)|$ défini de la façon suivante :

- sa fibre au-dessus de 1 , $L_g 1$ est telle que pour $\psi \in |\hat{C}| (= B^{\text{COP}}(1))$

$$L_g 1(\psi) = \varinjlim_{\underline{C}^{\text{OP}}} (g) \circ P$$

où $\underline{C}^{\text{OP}}$ est la catégorie de représentation, $P : \underline{C}^{\text{OP}} \rightarrow \underline{C}$ le foncteur interne définis ci-dessus, $(g) \circ P \in |\text{Cart}_B(\psi^{\text{OP}}, D)|$ le foncteur cartésien obtenu par composition (2.6.1.) et (§ 5), $\varinjlim_{\underline{C}^{\text{OP}}} : \text{Cart}_B(\psi^{\text{OP}}, D) \rightarrow D(1)$ le foncteur défini en (§ 5).

- sa fibre au-dessus de I est définie en utilisant (2.7.3.) et (2.7.5.) remarques).

$$\text{Soit } \psi_I \in |\hat{C}/c^* I| (= B^{\text{COP}}(I) = B_1^{(i^* C)^{\text{OP}}}(1_I)) \quad (2.8.)$$

$(B_I : F\tilde{L} B/I \rightarrow \mathbb{B}/I$ obtenue à partir de B par produit fibré par Y_I est la fibration But sur \mathbb{B}/I).

$\tilde{\vartheta}_I$ est déterminé par $P_I : \phi_I^{OP} \rightarrow i^*C$ (foncteur \mathbb{B}/I -cartésien). A g correspond i^*g par produit fibré par Y_I (2.7.5. remarque).

On a alors

$$L_g I(\tilde{\vartheta}_I) = \lim_{\phi_I^{OP}} (i^*g) \circ P_I .$$

(Tous les foncteurs cartésiens et fibrations intervenant ici, sont sur \mathbb{B}/I ; il est clair que si \mathbb{D} a des \mathbb{B} - \lim , D_I a des \mathbb{B}/I - \lim).

On a ainsi défini :

$$L_g I : B^{C^{OP}}(I) = \hat{C}/c^* I \rightarrow D(I).$$

Remarque. - g est un objet de $\bar{D}(C)$ (4.1.) et $(g) \circ P = P^*(g)$, (où P^* est le changement de bases associé à P dans la fibration \bar{D}).

De même $i^*g \in |\bar{D}_I(i^*C)|$ et $(i^*g) \circ P_I = P_I^*(i^*g)$.

$$\begin{array}{ccc} P_I^*(i^*C) & \longrightarrow & i^*C \\ & & \underline{C} \\ \phi_I^{OP} & \xrightarrow{P_I} & i^*C \\ & & \underline{C} \end{array}$$

6.1.3.- Proposition. - Les $L_g I$ engendrent un foncteur cartésien

$$L_g : B^{C^{OP}} \rightarrow D.$$

On vérifie qu'ils commutent aux changements de bases.

Nous utiliserons le caractère cartésien des foncteurs \lim_C (5.8.).

Soit $f : I \rightarrow J$ et $g \in |\overline{D}(C)|$.

On vérifie que pour tout $\psi_J \in |\widehat{C}/c^*J|$ (ψ_J défini par $\underline{\xi}_J^{\text{op}} \xrightarrow{p_J} j^*C$) on a

$$f^*(L_g J(\psi_J)) = L_g I(\widehat{C}/c^*f(\psi_J)).$$

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C}/c^*J & \xrightarrow{L_g J} & D(J) \\ \downarrow \widehat{C}/c^*f = f^* & & \downarrow f^* \\ \widehat{C}/c^*I & \xrightarrow{L_g I} & D(I) \end{array}$$

On considère le diagramme ci-dessous, dans $\text{Cat } \mathcal{B}$, commutatif, où les deux carrés sont des produits fibrés.

$$\begin{array}{ccccc} \underline{\xi}_I^{\text{op}} & \xrightarrow{\quad} & \underline{\xi}_J^{\text{op}} & & \\ \downarrow p_I & \text{p.f.} & \downarrow p_J & & \underline{G} \\ I \times C & \xrightarrow{f \times C} & J \times C & \xrightarrow{p_J} & C \\ \downarrow i^*C & \text{p.f.} & \downarrow j^*C & & \\ I & \xrightarrow{f} & J & & \end{array}$$

Avec les notations de ce diagramme :

$$j^*g = p_J^*g, \quad i^*g = p_I^*g.$$

On forme : $L_g J(\psi_J) = \lim_{\underline{\xi}_J^{\text{op}}} (p_J^* p_J^* g)$ ($g \in |D(J)|$)

$\lim_{\substack{\phi_J \\ \phi_J^{\text{op}}}} : D_J^{\phi_J^{\text{op}}} \rightarrow D$ commute aux changements de bases

$$\begin{aligned} f^*(L_g J(\phi_J)) &= f^* \lim_{\substack{\phi_J \\ \phi_J^{\text{op}}}} (P_J^* P_J^* g) = \lim_{\phi_J^{\text{op}}} f^*(P_I^*(f \times \mathcal{C})^* P_J^* g) \\ &= \lim_{\phi_I^{\text{op}}} P_I^* P_I^* g. \end{aligned}$$

Finalement $f^*(L_g J(\phi_J)) = (L_g I(f^* \psi_J))$.

Conclusion.-

On a donc construit, pour $g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)|$ l'extension de Kan, $L_g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}^{\text{C}^{\text{op}}}, D)|$, D étant une \mathbb{B} -fibration \mathbb{B} -complète à droite.

6.1.4.- Autre formulation dans le cas où $D = \mathbb{B}$.

Pour $\mathbb{B} = \text{Ens}$, on considère g foncteur de \mathbb{C} dans Ens (\mathbb{C} petite catégorie) comme un distributeur ($[3]$) $g : \mathbb{C} \Rightarrow 1$. On sait que si \circ désigne la composition des distributeurs, $g \circ ()$ est un foncteur de $\text{Dist}(1, \mathbb{C}) = \widehat{\mathbb{C}}$ dans $\text{Dist}(1, 1) = \text{Ens}$ qui représente l'extension de Kan de g par le foncteur de Yoneda.

\mathbb{B} est une catégorie à lim finies et à conoyaux universels. On peut introduire la bicatégorie $\text{Dist}_{\mathbb{B}}$ des distributeurs internes à \mathbb{B} ($[3]$) (la composition des \mathbb{B} -distributeurs est notée $\circ_{\mathbb{B}}$).

Soit $g \in \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, \mathbb{B})$ ($C \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$).

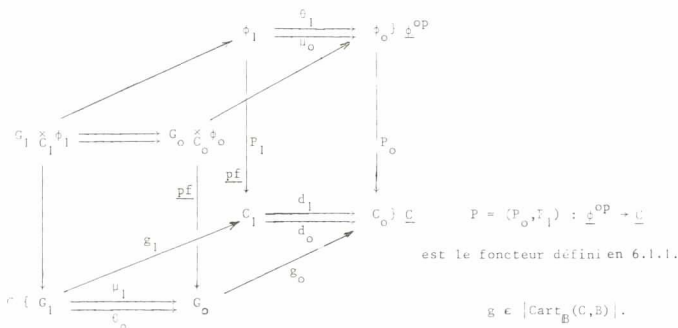
g est un "préfaisceau interne" de C dans \mathbb{B} (2.5.) et peut être considéré comme un \mathbb{B} -distributeur : $C \Rightarrow 1$, $g \circ_{\mathbb{B}} (-)$ est alors un foncteur de $\text{Dist}_{\mathbb{B}}(1, C) = \widehat{C}$ dans $\text{Dist}_{\mathbb{B}}(1, 1) = \mathbb{B}$

$$g \circ_{\mathbb{B}} (-) : \widehat{C} \rightarrow \mathbb{B}.$$

Lemme. - Si $g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, B)| (= |\text{Dist}_{\mathbb{B}}(\underline{C}, 1)|)$ et $\psi \in |\hat{C}| (= |\text{Dist}_{\mathbb{B}}(1, \underline{C})|)$, on a :

$$g \circ_{\mathbb{B}} \psi = L. I(\psi).$$

On montre que $g \circ_{\mathbb{B}} \psi = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \underline{\psi}^{\text{op}}}} (g) \circ P$



Preuve : En effet, si $g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, B)|$ est déterminé par le couple (g_0, λ_1) et $\psi \in |\hat{C}|$ par le couple (P_0, μ_0) on sait que :

$$g \circ_{\mathbb{B}} \psi = \text{Coker}(G_0 \times_{C_0} C_1 \times_{C_0} \psi_0 \xrightarrow[G_0 \times_{C_0} \mu_0]{\lambda_1 \times_{C_0} \psi_0} G_0 \times_{C_0} \psi_0).$$

On remarque que les deux flèches ci-dessus sont les flèches source et but de la catégorie $\underline{G} \times_{\underline{C}} \psi^{\text{op}}$ (produit fibré dans $\text{Cat } \mathbb{B}$). Le carré supérieur du diagramme ci-dessus définit (2.6.2.)

$$(g) \circ P \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\psi^{\text{op}}, B)|.$$

Le conoyau précédent est alors

$$\lim_{\substack{\text{op} \\ \downarrow}} (g) \circ P \quad (5.8.1.)$$

6.2.- Théorème.- Si D , \mathcal{B} -complète à droite, est de plus, localement petite, L_g a un \mathcal{B} -adjoint à droite.

On doit utiliser le dual de la proposition 5.2. Il faut donc remplacer fibration par cofibration, cartésien par cocartésien.

D'après 5.10., \mathcal{B} étant \mathcal{B} -complète à droite, \mathcal{B}^{COP} est cofibrée. Il en est évidemment de même pour D .

6.2.1.- Lemme.- L_g est cocartésien.

Soit $\psi_I \in |\widehat{C}/c^*I|$ auquel est associé $P_I : \underline{C}^{\text{OP}} \rightarrow \underline{C} \times I$ (6.1.3.) et $g \in |\overline{D}(C)|$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \underline{C}^{\text{OP}} & & & & \underline{C} \\
 \downarrow P_I & & & & \\
 \underline{C} \times I & \xrightarrow{\underline{C} \times f} & \underline{C} \times J & \xrightarrow{P_J} & \underline{C} \\
 P_C \downarrow & & \downarrow & \searrow P_I & \\
 I & \xrightarrow{f} & J & &
 \end{array}$$

On doit montrer que : $\sum_f (L_g I(\psi_I)) = L_g J(\sum_f \psi_I)$.

On a successivement :

$$\sum_f (L_g I(\psi_I)) = \sum_f \lim_{\substack{\text{op} \\ \downarrow}} (P_I^* P_I^* g).$$

Mais, notant $\psi = P_C \cdot P_I : \underline{C}^{\text{OP}} \rightarrow I$ dans $\text{Cat } \mathcal{B}$

$$\text{on a : } \underline{\lim}_{\underline{\phi}_I^{\text{op}}} = \underline{\lim}_{\psi} \mathbb{1}$$

$$\left(\underline{\lim}_{\psi} : \bar{D}(\underline{\phi}_I^{\text{op}}) \rightarrow \bar{D}(I) = D(I) \text{ et } \underline{\lim}_{\psi} : D^{\phi_I^{\text{op}}} \rightarrow D_I \text{ (5.11.)} \right)$$

$$\underline{\sum}_f = \underline{\lim}_f \mathbb{1}$$

($\underline{\sum}_f : D(I) \rightarrow D(J)$, $f : I \rightarrow J$ considéré comme morphisme de $\text{Cat } \mathcal{B}$).

$$\text{Finalement : } \underline{\sum}_f \underline{\lim}_{\underline{\phi}_I^{\text{op}}} = \underline{\lim}_{f, \psi} \mathbb{1}$$

soit en introduisant $\underline{\sum}_f : \widehat{C}/c^*I \rightarrow \widehat{C}/c^*J$ (composition par c^*f) et

$$\text{notant } \underline{\lim}_{\underline{\phi}_I^{\text{op}}} : \bar{D}(\underline{\phi}_I^{\text{op}}) \rightarrow \bar{D}(J) \text{ le foncteur associé à } \underline{\sum}_f \psi_I :$$

$$\underline{\sum}_f \underline{\lim}_{\underline{\phi}_I^{\text{op}}} = \underline{\lim}_{\underline{\phi}_I^{\text{op}}} \cdot \underline{\sum}_f \psi_I$$

$$\text{D'où : } \underline{\sum}_f \underline{\lim}_{\underline{\phi}_I^{\text{op}}} (P_I^* P_I^* g) = \underline{\lim}_{\underline{\phi}_I^{\text{op}}} (P_I^* P_I^* g)$$

$$\text{et : } \underline{\sum}_f L_g(\psi_I) = L_g(\underline{\sum}_f \psi_I) .$$

Preuve du théorème.-

a) On montre que pour tout I , $L_g I$ a un adjoint à droite $R_g I$.
D'après (2.7.3.) et (6.1.2.) on peut se borner à la restriction $L_g I$ aux fibres au-dessus de 1 .

Soit $\psi \in |\widehat{C}|$ (ψ s'écrit $P : \underline{\phi}^{\text{op}} \rightarrow \underline{C}$ dans $\text{Cat } \mathcal{B}$),
 $\delta \in |D(I)|$ et $g \in |\bar{D}(\underline{C})|$.

On a :

$$D(1)(L_g 1(\psi), \delta) = D(1)(\varinjlim_{\underline{C}^{OP}} P^*(g), \delta) = D(1)(\varinjlim_{\underline{C}} \varinjlim_{\underline{P}} P^*(g), \delta)$$

$$P^*(g) \xrightarrow{f^*(C)} g \quad (\text{où } \varinjlim_{\underline{P}} : \bar{D}(\underline{C}^{OP}) \rightarrow \bar{D}(\underline{C})) \quad (5.11.)$$

$$\underline{C}^{OP} \xrightarrow{P} \underline{C}$$

$$= (\text{adjonction } \varinjlim_{\underline{C}} \dashv \underline{C}^*) \bar{D}(\underline{C})(\varinjlim_{\underline{P}} P^*g, \underline{C}^*(\delta))$$

$$= (\text{adjonction } \varinjlim_{\underline{P}} \dashv \underline{P}^*) \bar{D}(\underline{C}^{OP})(\underline{P}^*g, \underline{P}^*\underline{C}^*(\delta)).$$

Le cas particulier du théorème 4.4. montre qu'il existe

$$\underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(g, \underline{C}^*(\delta)) \in |\text{Cat } \mathcal{B}/\underline{C}|$$

qui est un objet de \hat{C} et qui vérifie :

$$D(1)(L_g 1(\psi), \delta) = \hat{C}(\psi, \underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(g, \underline{C}^*(\delta))).$$

L_g a donc un adjoint à droite R_g défini sur les objets par

$$R_g(\delta) = \underline{\text{Hom}}_{\underline{C}}(g, \underline{C}^*(\delta)).$$

b) Il faut montrer que les R_g commutent aux changements de bases.

$$\text{On a (2.7.3.) } R_g I = \underline{\text{Hom}}_{\underline{I}}(i_g^* \underline{C}^*(\delta)).$$

Montrons que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} D_J & \xrightarrow{f^*} & D_I & f : I \rightarrow J \\ \downarrow R_g J & & \downarrow R_g I & \\ \hat{C}/c^* J & \xrightarrow{\hat{f}^* = \hat{C}/c^* f} & \hat{C}/c^* I & \end{array}$$

$$R_1.f^* = \underline{\text{Hom}}_{i^* \underline{C}} (i^* g, \underline{C}^* f^* ())$$

$$f^* . R_1.J = f^* . \underline{\text{Hom}}_{j^* \underline{C}} (j^* g, \underline{C}^* ()) .$$

D'après 3.3. :

$$\begin{aligned} f^* \underline{\text{Hom}}_{j^* \underline{C}} (j^* g, \underline{C}^* ()) &= \underline{\text{Hom}}_{i^* \underline{C}} (f^* j^* g, f^* \underline{C}^* ()) \\ &= \underline{\text{Hom}}_{i^* \underline{C}} (i^* g, f^* \underline{C}^* ()) . \end{aligned}$$

$$\text{Mais } \underline{C}^* f^* = f^* \underline{C}^* : D_J = \bar{D}(J) \rightarrow \bar{D}(I \times C) = \bar{D}_I(i^* C) \quad (2.7.3 \text{ et } \S 4).$$

D'où le résultat.

Remarque. - D'après 5.10., le foncteur cartésien $L_g : \mathcal{B}^{C^{op}} \rightarrow D$ commute aux B -limites inductives.

6.3.- Théorème. (Première forme du théorème de Kan).

Soit B une catégorie à $\underline{\lim}$ finies et à conoyaux universels.
 D une fibration de base B , B -complète à droite et B -localement petite. Soit $\underline{C} \in |\text{Cat } B|$.

Il y a une équivalence de catégories entre $\text{Cart}_B(C, D) = \bar{D}(\underline{C})$ et la sous-catégorie pleine de $\text{Cart}_B(B^{C^{op}}, D)$ dont les objets sont les foncteurs cartésiens qui commutent aux B -limites inductives. Ces foncteurs ont des B -adjoints à droite.

On montre l'équivalence sur les objets.

Soit $g \in |\bar{D}(\underline{C})|$; d'après 6.1. et 6.2., on peut construire $L_g \in |\text{Cart}_B(B^{C^{op}}, D)|$ qui a un B -adjoint à droite donc commute aux B -limites inductives.

Inversement, si $F \in |\text{Cart}_B(B^{C^{op}}, D)|$, on introduit (2.9.) le

foncteur de Yoneda $Y \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, B^{C^{\text{OP}}})|$ et le composé
 $\text{Fo}(Y) \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)| = |\overline{D}(\underline{C})|$.

Il suffit donc, pour établir le théorème de montrer que :

1) Si F commute aux \mathbb{B} -limites inductives

$$L_{\text{Fo}(Y)} \cong F \quad (\mathbb{B}\text{-isomorphisme}).$$

2) $L_{\text{go}(Y)} = g$ (\mathbb{B} -isomorphisme).

1) Si F commute aux \mathbb{B} -limites inductives $L_{\text{Fo}(Y)} = F$.

a) Si ϕ est un distributeur interne à \mathbb{B} de \underline{A} dans \underline{C} (on notera $\phi : \underline{A} \Rightarrow \underline{C}(\mathbb{B})$), on sait que ϕ est un bifoncteur interne $\underline{A} \times \underline{C}^{\text{OP}} \rightarrow \mathbb{B}$ et peut donc s'écrire dans $\text{Cat } \mathbb{B}$.

$$\phi \longrightarrow \underline{A} \times \underline{C}^{\text{OP}}$$

On lui associe de façon évidente un diagramme de $\text{Cat } \mathbb{B}$

$$\begin{array}{ccc} \phi_1 & \xRightarrow{\quad} & \phi_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{C}^{\text{OP}} \times \underline{A}_1 & \xRightarrow[\underline{C}^{\text{OP}} \times d_0]{\underline{C}^{\text{OP}} \times d_1} & \underline{C}^{\text{OP}} \times \underline{A}_0 \end{array}$$

$$\text{où } \underline{A} = \underline{A}_1 \xRightarrow[d_0]{d_1} \underline{A}_0.$$

Ce diagramme définit un préfaisceau interne, dans \hat{C} , (\hat{C} a des $\underline{\lim}$ finies) de $c^*(A)$ dans \hat{C} , (où c^* (2.8.2.) étant exact à gauche est prolongé en un foncteur : $\text{Cat } \mathbb{B} \rightarrow \text{Cat } \hat{C}$).

Ce dernier préfaisceau peut être considéré comme un distributeur interne à \hat{C} , $\bar{\phi} : c^*(A) \Rightarrow 1(\hat{C})$. (D'après 5.10., \hat{C} a outre des $\underline{\lim}$ finies, des conoyaux universels, on peut donc parler de la bicatégorie $\text{Dist}(\hat{C})$).

Le foncteur de Yoneda n'est autre que $\bar{Y}_C : c^* C \Rightarrow 1 (\hat{C})$ où $\bar{Y}_C : \underline{C} \Rightarrow \underline{C}$ (B) est le distributeur identique (remarque 2.9.).

Lemme. - Si $\phi : \underline{A} \Rightarrow \underline{C}$ (B), $\bar{\phi}$ est le composé dans $\text{Dist}(\hat{C})$

$$c^* \underline{A} \xrightarrow{c^* \phi} c^* \underline{C} \xrightarrow{Y} 1, \text{ noté } Y \underset{\hat{C}}{\theta} c^* \phi.$$

(c^* associe à un distributeur dans B, un distributeur dans \hat{C}).

La vérification ne présente pas de difficultés mais est fastidieuse. On est amené à construire des produits fibrés dans \hat{C} , donc des produits fibrés dans Cat B au-dessus de $\underline{C}^{\text{OP}}$ (un objet de \hat{C} est de la forme $\underline{Y} + \underline{C}^{\text{OP}}$) puis un conoyau dans \hat{C} ; pour cela on applique la construction faite en (5.8.1.) et on se ramène aux conoyaux dans B.

En particulier, si $\psi \in |\hat{C}|$ ($\psi : 1 \Rightarrow \underline{C}$ (B))

$$Y \underset{\hat{C}}{\theta} c^* \psi = \bar{\psi}.$$

Mais $\bar{\psi} : c^* 1 = 1 \Rightarrow 1 (\hat{C})$ est l'objet $\psi \in |\hat{C}|$.

On a donc :

$$\underline{Y \underset{\hat{C}}{\theta} c^* \psi} = \psi.$$

b) Pour $\psi \in |\hat{C}|$ et $F \in |\text{Cart}_B(B^{\text{COP}}, D)|$ commutant aux B-limites inductives :

$$F_1(\psi) = F_1(Y \underset{\hat{C}}{\theta} c^* \psi) = L_{\text{Fo}(Y)}^1(\psi).$$

Preuve :

Soit $\psi (P : \underline{A}^{\text{OP}} + \underline{C}$ dans Cat B) un objet de \hat{C} .

On note dans $\text{Cat } \hat{C}$, $Y : \underline{C}^{\text{OP}} + c^* \underline{C}$ le foncteur de Yoneda ($Y \in |\text{Cart}_B(C, B^{\text{COP}})| (= B^{\text{COP}}(\underline{C}))$ (2.9.) et (4.1.)).

Le composé $Y \underset{\hat{C}}{\theta} c^* \psi$ se construit comme en 6.1.4. en remplaçant \mathcal{B} par \hat{C} .

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{H} & \xrightarrow{\quad} & \underline{\Gamma} \\
 \zeta \downarrow & \text{p.f.} & \downarrow Y \\
 c^* \underset{\hat{\phi}}{\text{OP}} & \xrightarrow{c^* P} & c^* \underline{C} \\
 \hat{\phi}^{\text{OP}} \xrightarrow{P} & & \underline{C}
 \end{array}$$

$$\text{On a : } Y \underset{\hat{C}}{\theta} c^* \psi = \varinjlim_{\hat{\phi}^{\text{OP}}} \zeta \text{ avec } \zeta = P^* Y$$

($\zeta \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(\hat{\phi}^{\text{OP}}, B^{\text{COP}})| (= B^{\text{COP}}(\hat{\phi}^{\text{OP}}))$ (2.5.2.), $\hat{\phi}^{\text{OP}} \in |\text{Cat } \mathcal{B}|$ et

$$\varinjlim_{\hat{\phi}^{\text{OP}}} : B^{\text{COP}}(\hat{\phi}^{\text{OP}}) \longrightarrow B^{\text{COP}}(1) = \hat{C}, \quad (\S 4).$$

Finalement :

$$F_1(\psi) = F_1(Y \underset{\hat{C}}{\theta} c^* \psi) = F_1(\varinjlim_{\hat{\phi}^{\text{OP}}} P^* Y).$$

F commutant aux \mathcal{B} -limites inductives

$$F_1(\varinjlim_{\hat{\phi}^{\text{OP}}} P^* Y) = \varinjlim_{\hat{\phi}^{\text{OP}}} F_1^{\hat{\phi}^{\text{OP}}}(P^* Y) \quad (5.10.) = \varinjlim_{\hat{\phi}^{\text{OP}}}(F \circ (P^* Y))$$

(où $F \circ (P^* Y)$ est le composé de $P^* Y \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(\hat{\phi}^{\text{OP}}, B^{\text{COP}})|$ et $F \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(B^{\text{COP}}, D)|$ (2.6.3.)).

Ainsi, (4.2.) :

$$F_1 \left(\lim_{\underline{\mathcal{C}} \text{ op}} P^* Y \right) = \lim_{\underline{\mathcal{C}} \text{ op}} \bar{F}(P^* Y).$$

\bar{F} étant cartésien au-dessus de $\text{Cat } \mathcal{B}$ de $\overline{B^{\mathcal{C} \text{ op}}}$ dans \bar{D}

$$\bar{F}(P^* Y) = P^* [\bar{F}(Y)].$$

Soit :

$$F_1(\emptyset) = \lim_{\underline{\mathcal{C}} \text{ op}} P^* [\bar{F}(Y)] = \lim_{\underline{\mathcal{C}} \text{ op}} P^* [F_0(Y)] = L_{F_0(Y)}(\emptyset).$$

On a ainsi montré - sur les objets -

$$F_1 = L_{F_0(Y)}.$$

c) Pour tout $I \in |\mathcal{B}|$, on montre que :

$$F_I = L_{F_0(Y)} I.$$

Etant donné $F \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(B^{\mathcal{C} \text{ op}}, D)|$ le produit fibré par

$Y_I : \mathcal{B}/I \rightarrow \mathcal{B}$ donne un foncteur cartésien (noté $i^* F$)

$i^* F \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}/I}(B_I^{\mathcal{C} \text{ op}}, D_I)| = |\text{Cart}_{\mathcal{B}/I}(B_I^{(i^* \mathcal{C}) \text{ op}}, D_I)|$, dont la restriction à la fibre au-dessus de 1_I est la restriction à la fibre au-dessus de I de F , (2.7.5., remarque 3) :

$$i^* F|_{1_I} = F_I.$$

Par ailleurs (6.1.2.) montre que pour $g \in |\text{Cart}_{\mathcal{B}}(C, D)|$

$$L_{\mathcal{B}} I = L_{i^* g} 1_I.$$

L_{i^*g} est la \mathbb{B}/I -extension de Kan par Yoneda de :

$$i^*g \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(i^*C, D_I)|.$$

Ainsi :

$$L_{\text{Fo}(Y)}^I = L_{i^*[\text{Fo}(Y)]}^I.$$

Mais $i^*[\text{Fo}(Y)] = F_I \circ (i^*Y)$ (où i^*F est le foncteur \mathbb{B}/I -cartésien défini ci-dessus, et où i^*Y est le \mathbb{B}/I -foncteur de Yoneda :

$$i^*Y \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(i^*C, B_I^{C^{OP}})| = |\text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(i^*C, B_I^{(i^*C)^{OP}})|.$$

Finalement $L_{\text{Fo}(Y)}^I = L_{i^*F \circ i^*Y}^I$.

Si $F \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(B_I^{C^{OP}}, D)|$ commute aux \mathbb{B} -limites inductives, les définitions de $i^*F, B_I^{C^{OP}}, D_I$ montrent que $i^*F \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(B_I^{C^{OP}}, D_I)|$ commute aux \mathbb{B}/I limites inductives.

Il suffit alors d'appliquer (b) aux fibrations sur \mathbb{B}/I pour avoir le résultat.

2) Il existe un \mathbb{B} -isomorphisme $L_g \circ (Y) = g$.

Définition. - $C \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$ a un objet final x , ssi pour tout $I \in |\mathbb{B}|$, $C(I)$ a un objet final x_I , et si ces objets commutent aux changements de base.

$$\text{Pour } f : I \rightarrow J, f^*x_J = x_I.$$

On note $x = x_1$. On a alors $x_I = i^*x$ ($i = I + 1$).

Proposition. - Soit $g \in |\overline{D}(C)| = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)$. Si \underline{C} a un objet final x , $\varinjlim_{\underline{C}} g = g_1(x)$.

Preuve : Si $d \in |D|$ un morphisme $\varinjlim_{\underline{C}} g \rightarrow d$ dans D correspond à un morphisme $g \rightarrow \underline{C}^* d$ de $\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)$.

C'est-à-dire pour tout $I \in |\mathbb{B}|$ à un morphisme

$$g_I \rightarrow C(I)^* i^* d$$

dans $\text{Fonct}(C(I), D_I)$.

En particulier, on considère le morphisme

$$g_I \rightarrow C(I)^* d$$

auquel correspond :

$$\varinjlim_{C(I)} g_I \rightarrow d$$

c'est-à-dire puisque x est objet final de $C(I)$

$$g_I(x) \rightarrow d.$$

Inversement.

Partant de $g_I(x) \rightarrow d$, on en déduit une famille de morphismes, stable par changements de bases :

$$\forall I \quad g_I(x_I) \rightarrow i^* d$$

(g est cartésien et $x_I = i^* x$).

x_I étant final dans $C(I)$

$$g_I(x_I) = \varinjlim_{C(I)} g_I$$

D'où la famille de morphismes

$$g_I \rightarrow C(I) \overset{*}{i} \overset{*}{d}$$

$$\text{et } g \rightarrow \underline{C} \overset{*}{d}$$

$$\text{soit } \varinjlim_{\underline{C}} g \rightarrow d.$$

Lemme. - Soit $x \in |C(I)|$ ($x : I \rightarrow C_0$).

On construit, à l'aide du foncteur de Yoneda (2.9.) $Y_1(x)$.

$$\text{On a : } Y_1(x) \in |\text{Cart}_{\underline{B}}(C^{\text{OP}}, \underline{B})| (= |\underline{B}^{C^{\text{OP}}}(1)|)$$

$Y_1(x)$ peut s'écrire $\underline{\phi}^{\text{OP}} \rightarrow \underline{C}$ dans $\text{Cat } \underline{B}$, ($\underline{\phi}^{\text{OP}}$ catégorie de représentation de $Y_1(x)$). $\underline{\phi}^{\text{OP}}$ a un objet final.

Preuve : $P : \underline{\phi}^{\text{OP}} \rightarrow \underline{C}$ est donné par le diagramme suivant, (détermination de Y_0 , (2.9.)) :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow[\mu]{P_1} & C_1 \\
 & \nearrow & \downarrow (p_0, d_1, p_1) & & \downarrow (d_0, d_1) \\
 \phi_1^{\text{OP}} & \xrightarrow{\quad} & \phi_0^{\text{OP}} & \xrightarrow{\quad} & C_1 \\
 \downarrow P_1 & & \downarrow & & \downarrow \\
 C_1 & \xrightarrow{(C_1, x)} & C_1 \times C_0 & \xrightarrow[\begin{smallmatrix} d_1 \times C_0 \\ d_0 \times C_0 \end{smallmatrix}]{\quad} & C_0 \times C_0 \\
 & \nearrow & \downarrow p_0 & & \downarrow \\
 C_1 & \xrightarrow[\quad]{d_1} & C_0 & \xrightarrow{(C_0, x)} & C_0
 \end{array}$$

On vérifie immédiatement que le couple

$$I \xrightarrow{x} C_0 \quad I \xrightarrow{\varepsilon x} C_1 \quad (\text{où } \varepsilon : C_0 \rightarrow C_1 \text{ est la}$$

flèche unité) se factorise par ϕ_0^{OP} .

On note x' cet objet de $\phi_0^{\text{OP}}(I)$. On a $F(x') = x$.
La construction ci-dessus montre qu'il s'agit d'un objet final.

Fin de la preuve de 2).

. On montre que pour $x : I \rightarrow C_0$

$$L_g I(Y(x)) = g_1(x).$$

$$\text{On a : } L_g I(Y(x)) = \lim_{\phi^{\text{OP}}} P^* g.$$

Mais x' est final dans ϕ^{OP} , donc :

$$L_g I(Y(x)) = \lim_{\phi^{\text{OP}}} P^* g = (P^* g)_1(x') = [(g) \circ P](x') = g(x)$$

. Pour $x \in |C(I)|$ ($x : I \rightarrow C_0$), x s'écrit
 $i_1 \rightarrow i^* C_0$, ($x \in |i^* C(I_1)|$).

On tire de l'étude précédente $L_g I(Y_1(x)) = g_1(x)$.

On a établi (sur les objets) l'isomorphisme

$$L_g \circ (Y) = g$$

pour lequel seule l'hypothèse, D \mathcal{B} -complète à droite est nécessaire.

6.4.- Théorème. (Forme définitive du théorème de Kan.)

Sous les hypothèses de 6.3., il y a une \mathcal{B} -équivalence entre D^C
et une \mathcal{B} -fibration λ munie d'un foncteur cartésien \mathcal{B} -plein

et fidèle : $K \rightarrow D^{(B^C)^{OP}}$; les objets de la fibre K_I sont les foncteurs cartésiens, objets de $D^{(B^C)^{OP}}(I)$ qui commutent aux \mathbb{B} -limites inductives.

Il suffit de faire la démonstration sur les fibres au-dessus de I . En utilisant 2.7.3., on se ramène au théorème 6.3.

$$D^C(I) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C \times I, D) = \text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(i^*C, D_I)$$

$$D^{B^C^{OP}}(I) = \text{Cart}_{\mathbb{B}}(B^{C^{OP}} \times I, D) = \text{Cart}_{\mathbb{B}/I}(B_I^{(i^*C)^{OP}}, D_I)$$

Ainsi la démonstration se ramène à celle de 6.3. en remplaçant \mathbb{B} par \mathbb{B}/I , C par i^*C , D par D_I . Ces données vérifient évidemment les hypothèses requises. D'où le résultat.

Application. - Si $D = B$, le théorème 6.3. s'applique à condition que B soit \mathbb{B} -complète à droite (c'est-à-dire ait des conoyaux universels - l'existence des \mathbb{B} -sommes est évidente) et soit \mathbb{B} -localement petite, c'est-à-dire (3.6.) ait des Π .

En particulier, si \mathbb{B} est un topos le théorème s'applique. On note E ce topos.

Théorème de Diaconescu [5].

Soit $\underline{A} \in |\text{Cat } E|$ et \mathbb{F} un topos sur E ($\mathbb{F} \xrightarrow{p} E$ est un morphisme géométrique $p^* \rightarrow p_*$), il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des morphismes géométriques de \mathbb{F} sur \hat{A} ($= \text{Cart}_{\mathbb{F}}(A^{OP}, \mathbb{F})$) au-dessus de E et la sous-catégorie pleine de $\bar{\mathbb{F}}(p^* \underline{A})$ (5.1.) ($= \text{Cart}_{\mathbb{F}}(p^* \underline{A}, \mathbb{F})$) formée des préfaisceaux internes que Diaconescu nomme plats.

Un morphisme géométrique de \mathbb{F} dans \hat{A} au-dessus de E est un morphisme géométrique ($f^* \rightarrow f_*$) qui rend le triangle ci-après commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{F} & \xleftarrow{f^*} & \widehat{A} \\
 & \searrow p_* & \nearrow \text{lim}_{\widehat{A}^{OP}} \\
 & & \mathbb{E}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 f_* \\
 a_* = (\widehat{A}^{OP})_* \\
 \text{lim}_{\widehat{A}^{OP}}
 \end{array}$$

Ce théorème peut être considéré comme un cas particulier de (6.3.), en effet :

1) Il existe un produit fibré de morphismes géométriques :

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{\mathbb{F}}((p^* \widehat{A})^{OP}) & \xrightarrow{\quad} & \widehat{A} = \overline{E}(\widehat{A}^{OP}) \\
 \downarrow b = ((p^* \widehat{A})^{OP})_* \text{lim}_{(p^* \widehat{A})^{OP}} & & \downarrow a = (a^*)_* \text{lim}_{\widehat{A}^{OP}} \\
 \mathbb{F} & \xrightarrow{p = (p^*, p_*)} & \mathbb{E}
 \end{array}$$

Ainsi l'étude des morphismes géométriques au-dessus de \mathbb{E} de \mathbb{F} dans \widehat{A} se ramène à l'étude des morphismes géométriques $q : \mathbb{F} \rightarrow \overline{\mathbb{F}}(p^* \widehat{A}^{OP})$ tels que $bq = \text{Id}$ (i.e. $b_* q_* = 1_{\mathbb{F}}$ ou $q^* b^* = 1_{\mathbb{F}}$).

Changeant de notation, on est amené à examiner les foncteurs $r^* : \widehat{A} \rightarrow \mathbb{E}$, ayant un adjoint à droite, exacts à gauche et tels que :

$$r^* a^* = 1_{\mathbb{E}}.$$

2) Un tel foncteur r^* permet de définir un foncteur cartésien sur \mathbb{E} , $\rho : E^{\widehat{A}^{OP}} \rightarrow E$.

On a : $\rho_I : \widehat{A}/a^* I \rightarrow \mathbb{E}/I = E(I)$ donné par :

$$\rho_I(\vartheta + a^* I) = r^*(\vartheta + a^* I) = r^* \vartheta + I.$$

La commutation des ρ_I aux changements de bases, vient de ce que r^* est exact à gauche.

(Bien entendu les conditions sur r^* ne sont nullement nécessaires pour qu'un foncteur puisse s'étendre à un foncteur cartésien sur E . Pour $E = \text{Ens}$, tout foncteur $\hat{A} \rightarrow \text{Ens}$ s'étend à un foncteur cartésien mais n'est pas nécessairement exact à gauche).

Ainsi l'étude des morphismes géométriques envisagés par Diaconescu se ramène à celle de certains foncteurs cartésiens : $E^{A \text{ op}} \rightarrow E$ qui ont un adjoint à droite (en fait un E -adjoint à droite).

Le théorème 6.3. montre qu'il existe une équivalence de catégories entre ces foncteurs et une sous-catégorie pleine de $\bar{E}(A) = \text{Cart}_E(A, E)$. Les objets de cette sous-catégorie sont les préfaisceaux internes dont l'extension de Kan par Y , L_g , est exacte à gauche et telle que $L_g \cdot a^* = 1_E$.

CHAPITRE VII

THÉOREMES DE REPRESENTABILITE ET DU FONCTEUR ADJOINT.

7.1.- Objet initial dans une catégorie fibrée.-

Un objet initial (ou initial strict) est un cas particulier de \lim , d'où la définition.

7.1.1.- Définition.- Une fibration D a un objet initial si et seulement si chaque fibre $D(I)$ a un objet initial et si ces objets (et les flèches canoniques) commutent aux changements de base.

Soit $f : I \rightarrow J$, v_J (resp. v_I) l'objet initial dans $D(J)$ (resp. $D(I)$)

$$v_I = f^* v_J$$

La donnée de l'objet initial v dans $D(I)$ détermine donc la famille des v_I

$$v_I = i^* v.$$

7.1.2.- Définition.- Une fibration D a des produits si et seulement si chaque fibre $D(I)$ a des produits qui commutent aux changements de bases, (5)

7.1.3.- Théorème.- Pour que D , \mathcal{B} -complète à gauche, ayant des produits, et \mathcal{B} -localement petite ait un objet initial il faut et il suffit qu'il existe $I \in |\mathcal{B}|$, $S \in |D(I)|$ tels que :

$$\forall T \in |\mathcal{B}| \quad \forall X \in |D(T)| \quad \exists \tau : T \rightarrow I \quad \exists u_\tau : \tau^* S \rightarrow X \quad (\text{au-dessus de } 1_T).$$

Remarque.- D étant \mathbb{B} -complète à gauche la condition de l'"ensemble solution" équivaut à :

$$\exists I \in |\mathbb{B}| \quad \exists S \in |D(I)| \quad \forall X \in |D(I)| \quad \exists \sigma : I \rightarrow I \quad \exists \sigma^* S \rightarrow X$$

(au-dessus de I).

En effet. Pour tout $T (t : T \rightarrow I)$ et $X \in |D(T)|$, on forme $\pi_t X$. Il existe $\sigma : I \rightarrow I$ et $\sigma^* S \rightarrow \pi_t X$, soit $t^* \sigma^* S \rightarrow X$ au-dessus de T . On prend alors $\tau = \sigma t$ et on a la condition du théorème.

7.1.3.- Preuve du théorème.- Il est clair que si D a un objet initial la condition de l'"ensemble solution" est vérifiée. Si $v \in |D(I)|$ "est" cet objet (en fait il détermine les v_I) la condition plus haut est trivialement vérifiée pour $I = 1$ et $S = v$.

Pour établir la réciproque

- On construit la "petite fibration" engendrée par $S \in |D(I)|$ (3.7).
- On établit une condition suffisante pour que le sommet d'un cône sur D (voir définition plus loin) soit objet initial.
- A l'aide d'une \mathbb{B} -limite projective on construit un cône dont le sommet a la propriété précédente.

7.1.3.1.- Cône sur une \mathbb{B} -fibration.

Définition.- Soit D une fibration et $d \in |D(I)|$; on note $\Gamma_D \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(D, D)|$ le foncteur cartésien identique et $\Gamma_d \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(D, D)|$ le foncteur cartésien constant égal à d (i.e. pour $I \in |\mathbb{B}|$ $\Gamma_d I : D(I) \rightarrow D(I)$ envoie tout objet de $D(I)$ sur $t^* d = d_I$). On appelle cône sur D , de sommet d , toute transformation \mathbb{B} -naturelle $\Gamma_d \rightarrow \text{Id}_D$.

On note $\lambda : d \rightarrow D$ un tel cône.

La définition équivaut à, pour tout $T \in |\mathbb{B}|$, d_T est sommet d'un cône (sens usuel) de base $\Gamma_{D(T)}$

$$\lambda_T : d_T \rightarrow D(T)$$

et les λ commutent aux changements de bases.

Notation.- Pour $A \in |D(1)|$ on note $\lambda(A)$ la flèche $d \rightarrow A$ du cône.

7.1.3.2.- Lemme.- Soit $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$; dans les conditions de la définition précédente, $d_{\underline{C}} = \underline{C}^* d$ est sommet d'un cône sur $D^{\underline{C}}$.

Preuve : On vérifie que, pour tout T , $d_{CT} = (t^* C)^* d_T$ est sommet d'un cône sur $D^{\underline{C}}(T) = \text{Cart}_{\mathbb{B}/T}(t^* C, D_T)$ (2.7.3).

On peut alors ramener la démonstration au cas où $T = 1$.

Pour montrer que $d_{\underline{C}} = C^* d(\epsilon | \text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D))$ est sommet d'un cône sur $\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)$, il faut déterminer une famille $(\lambda_J)_{J \in |\mathbb{B}|}$ de cônes (au sens usuel).

λ_J a pour sommet le foncteur $C(J) \rightarrow D(J)$ constamment égal à $j^* d = d_j \cdot (\lambda_J)$ est un cône sur $\text{Fonct}(C(J), D(J))$.

Mais l'hypothèse montre trivialement l'existence des cônes λ_J .

La commutation aux changements de bases est évidente.

7.1.3.3.- Lemme [12].- Si d est sommet d'un cône sur D et si il existe $\underline{C} \in |\text{Cat } \mathbb{B}|$ et $U \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)|$ tel que $d = \varinjlim U$ et tel que dans le cône de sommet $d_{\underline{C}}$ construit en 7.1.3.2, $\lambda(U) = \epsilon \frac{C}{\underline{C}}$ (flèche de coadjonction $C^* \varinjlim_C U \rightarrow U$) alors d est initial dans D .

Preuve :

a) On montre que d est initial dans $D(1)$. La construction précédente montre que

$$\lambda(\underline{C}^* d) : \underline{C}^* d \longrightarrow \underline{C}^* d \quad (\text{dans le cône de sommet } \underline{C}^* d)$$

est tel que $\lambda(\underline{C}^*d) = \underline{C}^*(\lambda(d))$

où $\lambda(d) : d \rightarrow d$ (dans le cône donné).

La commutativité du carré ci-dessous (propriété du cône), le fait que ε est une flèche de coadjonction, montrent que :

$$\begin{array}{ccc} & \underline{C}^*d & \\ \lambda(\underline{C}^*d) = \underline{C}^*(\lambda(d)) \swarrow & & \searrow \varepsilon = \lambda(U) \\ \underline{C}^*d & \xrightarrow{\varepsilon} & U \end{array}$$

$\lambda(d) = I_d$

Si $\delta \in |D(I)|$ et $f : d \rightarrow \delta$, le diagramme commutatif ci-dessous montre que $\lambda(\delta) = f$.

$$\begin{array}{ccc} & d & \\ \lambda(d) = I_d \swarrow & & \searrow \lambda(\delta) \\ d & \xrightarrow{f} & \delta \end{array}$$

d est donc initial dans $D(I)$.

b) Pour tout T ($t : T \rightarrow I$) $d_T = t^*d$ est initial dans $D(T)$.

On a :

$$\begin{aligned} \lambda_T(d_T) &= \lambda_T(t^*d) = t^*(\lambda(d)) \quad (\text{définition d'un cône}) \\ &= t^*(I_d) = I_{d_T} \end{aligned}$$

La deuxième partie de la démonstration s'applique alors sans changement.

7.1.3.4.- Fin de la preuve du théorème 7.1.3.-

On considère $U \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\underline{\Sigma}, D)|$ construit en (3.7). D étant \mathbb{B} -complète à gauche, il existe

$$v = \varinjlim U \quad (v \in |D(1)|)$$

On montre que v est sommet d'un cône vérifiant les hypothèses de 7.1.3.3.

- $\forall T \quad v_T$ est sommet d'un cône sur $D(T)$.

On utilise l'hypothèse de "l'ensemble solution" par exemple sous sa première forme.

Soit $T \in |\mathbb{B}|$ $t : T \rightarrow 1$ $X, X' \in |D(T)|$ et $f : X \rightarrow X' \in \text{F}\ell D(T)$.

Il existe $\tau, \tau' : T \rightarrow I$ $u_\tau : \tau^* S \rightarrow X$ et $u_{\tau'} : \tau'^* S \rightarrow X'$.

$v = \varinjlim U$, il existe donc une \mathbb{B} -transformation naturelle

$$\varepsilon : \varinjlim v \longrightarrow U \quad (\varepsilon \in \text{F}\ell(\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\underline{\Sigma}, D)))$$

On en déduit l'existence d'une transformation naturelle

$$\varepsilon_T : \varinjlim(T)^* v_T \longrightarrow U_T$$

(où $\varinjlim(T)^* v_T$ est le foncteur $\varinjlim(T) \rightarrow D(T)$ constamment égal à $v_T = t^* v$).

Pour X (resp. X') $\lambda_T(X) : v_T \longrightarrow X$ est donné par :

$$\lambda_T(X) = u_\tau \cdot \varepsilon_T(\tau)$$

(en effet $\varepsilon_T(\tau) : v_T \rightarrow U_T(\tau) = \tau^* S$).

$$\lambda_T(X') = u_{\tau'} \cdot \varepsilon_T(\tau') .$$

7.1.3.4.- Fin de la preuve du théorème 7.1.3.-

On considère $U \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\underline{\Sigma}, D)|$ construit en (3.7). D étant \mathbb{B} -complète à gauche, il existe

$$v = \varinjlim_{\Sigma} U \quad (v \in |D(1)|)$$

On montre que v est sommet d'un cône vérifiant les hypothèses de 7.1.3.3.

- $\forall T \quad v_T$ est sommet d'un cône sur $D(T)$.

On utilise l'hypothèse de "l'ensemble solution" par exemple sous sa première forme.

Soit $T \in |\mathbb{B}|$ $t : T \rightarrow I \ X, X' \in |D(T)|$ et $f : X \rightarrow X' \in \text{Fl } D(T)$. Il existe $\tau, \tau' : T \rightarrow I \ u_{\tau} : \tau^* S \rightarrow X$ et $u_{\tau'} : \tau'^* S \rightarrow X'$.

$v = \varinjlim_{\Sigma} U$, il existe donc une \mathbb{B} -transformation naturelle

$$\varepsilon : \varinjlim_{\Sigma}^* v \longrightarrow U \quad (\varepsilon \in \text{Fl}(\text{Cart}_{\mathbb{B}}(\underline{\Sigma}, D)))$$

On en déduit l'existence d'une transformation naturelle

$$\varepsilon_T : \varinjlim_{\Sigma(T)}^* v_T \longrightarrow U_T$$

(où $\varinjlim_{\Sigma(T)}^* v_T$ est le foncteur $\varinjlim_{\Sigma(T)} \rightarrow D(T)$ constamment égal à $v_T = t^* v$).

Pour X (resp. X') $\lambda_T(X) : v_T \longrightarrow X$ est donné par :

$$\lambda_T(X) = u_{\tau} \cdot \varepsilon_T(\tau)$$

(en effet $\varepsilon_T(\tau) : v_T \rightarrow U_T(\tau) = \tau^* S$).

$$\lambda_T(X') = u_{\tau'} \cdot \varepsilon_T(\tau')$$

On montre qu'on a ainsi défini un cône sur $D(T)$, de sommet v_T .

Il faut montrer :

$$f \cdot \lambda_T(X) = \lambda_T(X').$$

On construit dans $D(T)$ le produit fibré ci-dessous, (D a des noyaux et des produits) :

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{p'} & \tau'^* S \\
 \downarrow p & & \downarrow u_{\tau'} \\
 \tau^* S & \xrightarrow{u_\tau} X \xrightarrow{f} & X'
 \end{array}$$

La condition de l'ensemble solution montre l'existence de

$\tau'' : T \rightarrow I$ et $u_{\tau''} : \tau''^* S \rightarrow Z$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tau''^* S & \xleftarrow{\varepsilon_T(\tau'')} & v_T \\
 & \swarrow u_{\tau''} & & & \swarrow \varepsilon_T(\tau) \\
 Z & & & & \tau'^* S \\
 \downarrow p & \searrow p' & & \swarrow \varepsilon_T(\tau') & \\
 \tau^* S & & & & \tau'^* S \\
 \downarrow u_\tau & & & & \downarrow u_{\tau'} \\
 X & \xrightarrow{f} & & & X'
 \end{array}$$

$$\text{On a : } p \cdot u_{\tau} \in D(T)(\tau^* S, \tau^* S) = (3.8) \int(T) (\tau'', \tau)$$

$$p' \cdot u_{\tau} \in D(T)(\tau^* S, \tau^* S) = \int(T) (\tau'', \tau')$$

ε_T étant une transformation naturelle, on a :

$$(p \cdot u_{\tau}) \cdot \varepsilon_T(\tau'') = \varepsilon_T(\tau)$$

$$(p' \cdot u_{\tau}) \cdot \varepsilon_T(\tau'') = \varepsilon_T(\tau')$$

De la commutativité du produit fibré

$$u_{\tau} \cdot p' = f \cdot u_{\tau} p$$

on déduit alors la condition cherchée :

$$f \cdot \lambda_T(X) = \lambda_T(X')$$

- La commutation des λ aux changements de bases se déduit immédiatement de celle des ε_T (ε est une transformation \mathcal{B} -naturelle).

v est donc le sommet d'un cône sur D .

- Reprenant la construction faite en 7.1.3.2. on introduit le cône associé de sommet $\sum_{\mathcal{L}}^* v = \sum_{\mathcal{L}}^* \varprojlim_{\mathcal{L}} U$.
On a alors $\lambda(U) = \varepsilon : \sum_{\mathcal{L}}^* \varprojlim_{\mathcal{L}} U \rightarrow \bar{U}$ (si $\tau : T \rightarrow I$ il suffit de prendre $u_{\tau} = l_{\tau^* S} : \tau^* S \rightarrow \tau^* S$ comme flèche donnée par la condition de l'ensemble solution, et de remarquer que $U_{\tau}(\tau) = \tau^* S$).

Les hypothèses du lemme 7.1.3.3. sont alors vérifiées et v est initial dans D .

7.2. - Théorème de représentabilité.-

Soit $K : D \rightarrow \mathcal{B}$ un \mathcal{B} -foncteur cartésien, D étant une fibration localement petite.

7.2.1.- Définition.- K est dit représentable si et seulement si il existe $A \in |D(I)|$ et une B -équivalence

$$K = \underline{\text{Hom}}(A, -)$$

(où $\underline{\text{Hom}}(A, -)$ désigne le B -foncteur cartésien tel que :

$$(\underline{\text{Hom}}(A, -))_I = \underline{\text{Hom}}_I(i^*A, -) \quad (3.1) \quad)$$

7.2.2.- Lemme.- K est représentable si et seulement si la catégorie $(*, K)$ (2.10.3) a un objet initial.

Preuve :

a) On montre que pour tout I , $((*)_I, \underline{\text{Hom}}_I(i^*A, -))$ a un objet initial, et que ces objets commutent aux changements de bases.

Un objet de $((*)_I, \underline{\text{Hom}}_I(i^*A, -))$ (2.10.3) est la donnée d'un couple (δ_I, α_I) avec $\delta_I \in |D(I)|$, $\alpha_I : 1_I \rightarrow \underline{\text{Hom}}_I(i^*A, \delta_I)$, $\alpha_I \in \text{Fl } \mathbb{B}/I$.

Une telle donnée équivaut à celle de δ_I et d'un morphisme γ_I de $D(I)$

$$\gamma_I : i^*A \rightarrow \delta_I.$$

L'objet initial cherché est donc le couple $(i^*A, 1_{i^*A} : i^*A \rightarrow i^*A)$.
La commutation aux changements de bases est évidente.

b) On montre que si $(*, K)$ a un objet initial, $(a : 1 \rightarrow KA)$ initial dans $(*, K)$ (1) , pour tout I ($i : I \rightarrow 1$), tout $X_I \in |D(I)|$

$$K_I X_I = \underline{\text{Hom}}_I(i^*A, X_I)$$

Soit $\tau : T \rightarrow I$, $\tau \in |\mathbb{B}/I|$, $(t : T \rightarrow 1)$

$$\mathbb{B}/I(\tau, K_I X_I) = \mathbb{B}/T(1_T, \tau^* K_I X_I) = \mathbb{B}/T(1_T, K_T \tau^* X_I)$$

Mais (7.1.1), $t^*a : I_T \rightarrow K_T t^*A$ est initial dans $((*)_T, K_T)$
d'où :

$$B/I(1_T, K_T t^*X_I) = D(I)(t^*A, t^*X_I) = B/I(\tau, \underline{\text{Hom}}_I(i^*A, X_I))$$

7.2.5.- Définition.- Si $A \in |D(I)|$, on note
 $\underline{\text{Hom}}_C(A, -) \in |\text{Cart}_B(D^C, B^C)|$ le foncteur cartésien défini de la façon suivante.

- sa restriction à la fibre au-dessus de 1 est définie comme en
4.2 à partir de $\underline{\text{Hom}}(A, -)$ de 7.2.1.

$$\text{On a, pour } \gamma \in |D^C(I)| = \bar{D}(C)$$

$$\underline{(\text{Hom}_C(A, -))}_I(\gamma) = \underline{\text{Hom}(A, -)} \circ (\gamma) \quad (2.6.3)$$

$$\text{- pour } I \in |B| \text{ et } \gamma_I \in |D^C(I)| = |\text{Cart}_{B/I}(i^*C, D_I)| \quad (2.7.3)$$

On pose :

$$\underline{(\text{Hom}_C(A, -))}_I(\gamma_I) = \underline{\text{Hom}_I(i^*A, -)} \circ (\gamma_I) \quad (2.6.3)$$

où $\text{Hom}_I(i^*A, -) \in |\text{Cart}_{B/I}(D_I, B/I)|$.

7.2.4.- Proposition.- Le foncteur cartésien $\underline{\text{Hom}}(A, -)$ (7.2.1)
commute aux B-limites projectives.

Preuve :

a) La définition précédente et (2.6.4) montrent que si
 $\gamma \in D^C(I) = \bar{D}(C)$ $\underline{(\text{Hom}_C(A, -))}_I(\gamma)$ s'écrit :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\text{Hom}}_{C_1}(C_1^*A, \gamma_1) & \xrightarrow{\alpha_1} & \underline{\text{Hom}}_{C_0}(C_0^*A, \gamma_0) \\
 \downarrow & \xrightarrow{\alpha_0} & \downarrow \\
 C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \\
 & \xrightarrow{d_0} &
 \end{array}$$

où γ est défini par :

$$\begin{array}{ccc}
 \gamma_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & \gamma_0 \\
 & \xrightarrow{\theta_0} & \\
 C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \\
 & \xrightarrow{d_0} &
 \end{array}$$

et où α_0 (et α_1) se déduisent de θ_0 (et λ_1), par les procédés du (§ 3).

b) Soit $T \in |\mathbf{B}|$ ($t : T \rightarrow 1$). On a :

$$B^C(1)(\underline{C}^*T, \underline{\text{Hom}}_C(A, \gamma)) = D^C(T)(\underline{C}^*t^*A, t^*\gamma)$$

La propriété se montre aisément en remarquant que la commutativité du diagramme (1) ci-dessous est équivalente à celle du diagramme (2) .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \underline{\text{Hom}}_{C_1}(C_1^*A, \gamma_1) & \xrightarrow{\alpha_1} & \underline{\text{Hom}}_{C_0}(C_0^*A, \gamma_0) \\
 & \nearrow r_1 & \downarrow & \xrightarrow{\alpha_0} & \downarrow \\
 C_1 \times T & \xrightarrow{d_1 \times T} & C_0 \times T & \xrightarrow{r_0} & \\
 & \searrow & \downarrow & & \\
 & & C_1 & \xrightarrow{d_1} & C_0 \\
 & & \xrightarrow{d_0} & &
 \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccc}
 C_1^* t^* A & \xrightarrow{\bar{r}_1} & t^* \gamma_1 \\
 \parallel & & \parallel \\
 C_0^* t^* A & \xrightarrow{\bar{r}_0} & t^* \gamma_0
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c}
 t^* \theta_0 \\
 t^* \lambda_1
 \end{array}
 \quad (2)$$

où \bar{r}_0 (resp. \bar{r}_1) se déduit de l'existence de r_0 (resp. r_1) par (3.1).

c) On montre que :

$$\underline{\underline{\text{Hom}_1(A, \varprojlim_{\underline{C}} \gamma)}} = \underline{\underline{\varprojlim_{\underline{C}} (\text{Hom}_C(A, \gamma))}} .$$

On forme pour tout $T \in |\mathcal{B}|$

$$\mathcal{B}(T, \text{Hom}_1(A, \varprojlim_{\underline{C}} \gamma)) = D_T(t^* A, t^* \varprojlim_{\underline{C}} \gamma) \quad (3.1)$$

Mais $\varprojlim_{\underline{C}}$ est un foncteur cartésien

$$t^* \varprojlim_{\underline{C}} \gamma = \varprojlim_{\underline{C}} t^* \gamma ;$$

$$\text{d'où : } \mathcal{B}(T, \text{Hom}_1(A, \varprojlim_{\underline{C}} \gamma)) = D(T)(t^* A, \varprojlim_{\underline{C}} t^* \gamma) = D^C(T)(C^* t^* A, t^* \gamma)$$

(adjonction $C^* \dashv \varprojlim_{\underline{C}}$)

$$= B^C(1)(\underline{C}^* T, \text{Hom}_C(A, \gamma)) \quad (b)$$

$$= \mathcal{B}(T, \varprojlim_{\underline{C}} \text{Hom}_C(A, \gamma))$$

7.2.5.- Théorème.- (théorème de représentabilité) \mathcal{B} est \mathcal{B} -localement petite (3.6).

Soit D une fibration \mathcal{B} -localement petite, \mathcal{B} -complète à gauche et ayant des produits, $K : D \rightarrow \mathcal{B}$ est représentable si et seulement si il commute aux \mathcal{B} -limites projectives et si il existe $I \in |\mathcal{B}|$ $S \in |D(I)|$ et $s_I : I \rightarrow K_I S$ ($s_I \in \text{Fl } \mathcal{B}/I$) tels que pour tout $X \in |D(I)|$ et $\varepsilon : I \rightarrow KX$, il existe $\sigma : I \rightarrow I$ et $u_\sigma : \sigma^* S \rightarrow X$ rendant le diagramme ci-dessous commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 I & \xrightarrow{\quad} & KX \\
 \sigma^* s_I \searrow & & \nearrow Ku_\sigma \\
 & \sigma^* K_I S = K\sigma^* S &
 \end{array}$$

Preuve : La deuxième partie de la condition exprime simplement que la fibration $(*,K)$ vérifie l'hypothèse de "l'ensemble solution" (remarque (7.1.3)).

a) Pour $K = \underline{\text{Hom}}(A, -)$, on sait (7.2.2) que $(*,K)$ a un objet initial, donc (7.1.2) vérifie la condition de "l'ensemble solution". De plus (7.2.4), $\underline{\text{Hom}}(A, -)$ commute aux \mathcal{B} -limites projectives.

b) On applique le théorème de l'objet initial (7.1.3) à la fibration $(*,K)$, puis le lemme (7.2.2).

- $(*,K)$ a des produits (chaque fibre a des produits ([12]) et ces produits commutent aux changements de bases (trivial)).

- $(*,K)$ est \mathcal{B} -complète à gauche.

Il suffit de construire le \mathcal{B} -adjoint à droite \lim_C du foncteur cartésien :

$$C^* : (*, K) \rightarrow (*, K)^C \quad (2.10.3)$$

On construit la restriction de \varinjlim_C à la fibre au-dessus de 1. Il suffit d'appliquer ensuite les procédés de (2.7.3) pour obtenir \varinjlim_C sur les autres fibres.

Par (2.10.3 a) un objet de $(*, K)^C(1)$ est un couple (δ, α)

$$\delta \in |\text{Cart}_{\mathbb{B}}(C, D)|$$

$$\alpha : C^*(1) \rightarrow K^C(\delta)$$

On pose $\varinjlim_C(\delta, \alpha) = (\varinjlim_C \delta, \bar{\alpha})$ (D a des \mathbb{B} - \varinjlim), où :

$$\bar{\alpha} : 1 \rightarrow \varinjlim_C K^C(\delta) = K(\varinjlim_C \delta)$$

correspond à α par l'adjonction $C^* \dashv \varinjlim_C (C^* : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}^C)$ et où K commute aux \mathbb{B} -limites projectives.

On vérifie immédiatement qu'on a ainsi construit un foncteur et que $\varinjlim_C(\delta, \alpha)$ a la propriété universelle désirée.

- $(*, K)$ est \mathbb{B} -localement petite.

Soient (X, ξ) et (Y, η) deux objets de $(*, K)_I$.

($\xi : 1_I \rightarrow K_I X$ et $\eta : 1_I \rightarrow K_I Y$). On construit $\text{Hom}_I(X, Y)$.

The diagram illustrates the construction of $\text{Hom}_I(X, Y)$ from objects (X, ξ) and (Y, η) in $(*, K)_I$. It features several nodes and arrows:

- Top node: J
- Left node: $j^* K_I X = K_J j^* X$
- Right node: $j^* K_I Y = K_J j^* Y$
- Bottom node: J
- Bottom-right node: I
- Far right node: $\text{Hom}_I(X, Y)$

Arrows and their labels:

- $J \rightarrow j^* K_I X$ labeled $j^* \xi$
- $J \rightarrow j^* K_I Y$ labeled $j^* \eta$
- $J \rightarrow j^* K_I Y$ labeled $(*)$
- $j^* K_I X \rightarrow j^* K_I Y$ labeled $K_J f$
- $J \rightarrow I$ labeled j
- $J \rightarrow \text{Hom}_I(X, Y)$ labeled \bar{f}
- $I \rightarrow \text{Hom}_I(X, Y)$ labeled k

Une flèche $j^* \xi \rightarrow j^* \eta$ dans $(*, K)_j$ est une flèche $f : j^* X \rightarrow j^* Y$ tel que le triangle $(*)$ soit commutatif.

A f , correspond $\bar{f} : j \rightarrow k$.

On obtient donc $\underline{\text{Hom}}_I(\xi, \eta)$ en prenant le noyau des deux flèches ci-dessous dans \mathbb{B}/I .

1^{ère} flèche

$$\underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \xrightarrow{K} (K_I Y)^{K_I X} = \underline{\text{Hom}}_I(K_I X, K_I Y) \xrightarrow{\lambda} (K_I Y)^{K_I X} \times (K_I X)^{I_I} \xrightarrow{\mu} (K_I Y)^{I_I}$$

où K est le morphisme défini en (3.4.a), puisque \mathbb{B} est \mathbb{B} -localement petit (on note $\underline{\text{Hom}}$ dans \mathbb{B}/I par une exponentielle).

$\lambda : (K_I Y)^{K_I X} \rightarrow (K_I Y)^{K_I X} \times (K_I X)^{I_I}$ est donné par $\lambda = 1 \times \mu$ où μ est la flèche de composition (3.3.a).

2^{ème} flèche

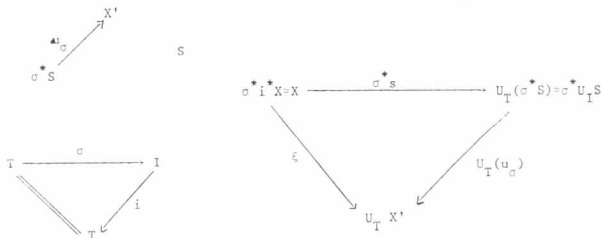
$$\underline{\text{Hom}}_I(X, Y) \xrightarrow{\text{flèche canonique}} I_I \xrightarrow{\eta} (K_I Y)^{I_I}$$

La vérification que $\underline{\text{Hom}}_I(\xi, \eta)$ a les propriétés voulues est triviale.

7.3.- Théorème du foncteur adjoint.-

Soit $U : D' \rightarrow D$ un \mathbb{B} -foncteur cartésien, D et D' étant deux fibrations localement petites, D' étant de plus \mathbb{B} -complète à gauche et ayant des produits.

Théorème.- Dans les conditions précédentes, U admet un \mathbb{B} -adjoint à gauche (i.e. cartésien sur \mathbb{B}) si et seulement si, U commute aux \mathbb{B} -limites projectives et si de plus, pour tout $T \in |\mathbb{B}|$ tout $X \in |D(T)|$ il existe $i : I \rightarrow T$, $S \in |D'(I)|$ et $s : i^* X \rightarrow U_I S$ tels que pour tout $\xi : X \rightarrow U_T X'$, il existe $\sigma : I_T \rightarrow i$ ($\sigma \in \text{Fl } \mathbb{B}/T$) et $u_\sigma : \sigma^* S \rightarrow X'$ tel que le triangle de droite soit commutatif : $U_T(u_\sigma) \circ \sigma^* s = \xi$.



Preuve : La deuxième partie de la condition exprime simplement que la fibration (X, U_T) (de base \mathcal{B}/T) (construite comme en 2.7.3) vérifie l'hypothèse de "l'ensemble solution" de 7.1.3. (remarque).

a) Si U a un \mathcal{B} -adjoint à gauche, pour tout T , et tout X , (X, U_T) a un objet initial, donc (7.1.3) vérifie la condition de "l'ensemble solution".

Par ailleurs (5.11) U commute aux \mathcal{B} -limites projectives.

b) On montre que, dans les conditions du théorème (X, U_T) a un objet initial, c'est-à-dire vérifie les hypothèses de 7.1.3. Il suffit de montrer que (X, U_T) est \mathcal{B}/T localement petite, \mathcal{B}/T complète à gauche, et a des produits.

- (X, U_T) est \mathcal{B}/T -localement petite.

Soient (X', ξ) et (Y', η) deux objets de $(X, U_T)_T$ ($\tau : T' \rightarrow T$) ($\xi : \tau^* X \rightarrow U_T, X'$ et $\eta : \tau^* X \rightarrow U_T, Y'$ dans $D_{T'}$).

On construit $\underline{\text{Hom}}_\tau(\xi, \eta)$.

$$\begin{array}{ccc}
 \rho^* \tau^* X & & \\
 \downarrow \rho^* \xi & \searrow \rho^* \eta & \\
 U_R, \rho^* X' = \rho^* U_T, X' & \xrightarrow{U_R, f} & U_R, \rho^* Y' = \rho^* U_T, Y' \\
 & \nearrow \bar{f} & \searrow k \\
 & \text{Hom}_T, (X', Y') & \\
 R' & \xrightarrow{\rho} & T' \xleftarrow{\tau} T
 \end{array}$$

Une flèche $\rho^* \xi(X', \xi) \rightarrow \rho^* (Y', \eta)$ dans $(X, U_T)_{\rho \tau}$ est une flèche $f : \rho^* X' \rightarrow \rho^* Y'$ telle que le triangle (*) commute.

A f correspond $\bar{f} : \rho + k$.

On obtient donc $\underline{\text{Hom}}_{\tau}(\xi, \eta)$ en prenant le noyau des deux flèches ci-dessous.

1^{ère} flèche

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\text{Hom}}_T, (X', Y') & \xrightarrow{U} & \underline{\text{Hom}}_T, (U_T, X', U_T, Y') \xrightarrow{\lambda} \underline{\text{Hom}}_T, (U_T, X', U_T, Y') \times \underline{\text{Hom}}_T, (\tau^* X, U_T, X') \\
 & & \searrow \mu \\
 & & \underline{\text{Hom}}_T, (\tau^* X, U_T, Y')
 \end{array}$$

où U est le morphisme défini en (3.4.a) (D et D' sont B -localement petites donc D_T et D'_T , B/T localement petites),

où $\lambda = 1_{\underline{\text{Hom}}_T, (U_T, X', U_T, Y')} \times \tau_{\xi}^{-1}$ (avec $\tau_{\xi}^{-1} : 1_T \rightarrow \underline{\text{Hom}}_T, (\tau^* X, U_T, X')$ qui correspond à $\xi : \tau^* X \rightarrow U_T, X'$) et où μ est la flèche de composition (3.3.a).

2^{ème} flèche

$$\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{T}}(X', Y') \xrightarrow{\text{flèche canonique}} \mathbb{1}_{\mathbb{T}}, \xrightarrow{\tau_n} \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{T}}(\tau^* X, U_{\mathbb{T}}, Y')$$

où τ_n correspond à $n : \tau^* X \rightarrow U_{\mathbb{T}}, Y'$.

- $(X, U_{\mathbb{T}})$ est B/T complète à gauche.

Remarque : U commutant aux B-lim, $U_{\mathbb{T}}$ commute aux B/T-lim.

En effet, soient $\Gamma \in |\text{Cat B/T}|$ et $\delta' \in |\text{Cart B/T}(\Gamma, D_{\mathbb{T}}^1)|$ représentés sur le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \delta'_1 & \xrightarrow{\quad} & \delta'_0 \\ \xrightarrow{\quad} & & \xrightarrow{\quad} \\ C_1 & \xrightarrow{\quad} & C_0 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \searrow \Gamma \\ \mathbb{T} \end{array}$$

Dire que $U_{\mathbb{T}}$ commute à \varprojlim_{Γ} (avec $\varprojlim_{\Gamma} \delta' \in |D^1(\mathbb{T})|$, $\Gamma \in |\text{Cat B/T}|$, revient à dire que U commute à \varprojlim_{Γ} (où Γ est considéré comme un morphisme de Cat B , $\Gamma : \underline{C} \rightarrow \mathbb{T}$).

Pour construire le B-adjoint à droite \varprojlim_{Γ} de

$$\Gamma^* : (X, U_{\mathbb{T}}) \longrightarrow (X, U_{\mathbb{T}})^{\Gamma},$$

on construit sa restriction à la fibre au-dessus de 1.

Par (2.10.3.b) un objet de $(X, U_{\mathbb{T}})^{\Gamma}(1)$ est un couple (δ', γ)

$$\delta' \in |\text{Cart B/T}(\Gamma, D_{\mathbb{T}}^1)|$$

$$\gamma : \Gamma^*(X) \rightarrow U_{\mathbb{T}}^{\Gamma}(\delta') = U_{\mathbb{T}} \cdot (\delta')$$

flèche dans $D_{\mathbb{T}}^{\Gamma}(1)$.

On pose $\varinjlim(\delta', \gamma) = (\varinjlim \delta', \bar{\gamma})$ (D' a des \mathcal{B} - \varinjlim , donc D'_T a des \mathcal{B}/T - \varinjlim), où $\bar{\gamma} : X \rightarrow \varinjlim U_T^{\Gamma}(\delta')$ est $U_T^{\Gamma} \varinjlim \delta'$ (remarque précédente) correspond à γ par l'adjonction $\Gamma^* \dashv \varinjlim$.

La vérification qu'on a bien ainsi construit une \mathcal{B}/T - \varinjlim est triviale.

- (X, U_T) a des produits (évident [12]).

c) L'étude faite en b permet de conclure que les \mathcal{B}/T fibrations (X, U_T) ont des objets initiaux. On sait qu'alors pour tout T il existe un foncteur F_T adjoint à gauche de U_T tel que, pour tout $X \in |D_T|$ $(F_T X, X \xrightarrow{\eta_X} U_T F_T X)$ soit initial dans $(X, U_T)_{I_T}$.

La définition 7.1.1 montre que pour $f : T' \rightarrow T$ l'objet initial de $(f^* X, U_{T'}) = (X, U_T)_f$ est $(f^* F_T X, f^* \eta_X)$.

On a donc en particulier, pour tout X ,

$$f^* F_T X = F_{T'} f^* X$$

et les F_T commutent aux changements de bases.

On a bien défini un \mathcal{B} -adjoint à gauche (cartésien) de U .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENABOU (Jean) - *Introduction to bicategories*,
Lectures Notes n° 47, Springer Verlag 1967.
- [2] BENABOU (Jean) - *Catégories multiplicatives*,
Institut de Mathématiques Pures et Appliquées,
Université Catholique de Louvain (n° 27) juillet 1970.
- [3] BENABOU (Jean) - *Distributeurs*,
Id. (n° 33) janvier 1971.
- [4] CELEYRETTE (Jean) - *Théorème de Kan et Catégories fibrées*,
(C.R.A.S.), à paraître.
- [5] DIACONESCU (Radu) - Thèse (multigraphiée).
- [6] GIRAUD (Jean) - *Cohomologie non abélienne*,
Springer Verlag 1971.
- [7] GIRAUD (Jean) - *Méthode de la descente*,
Bull. Soc. Math. de France, Mémoire 2 - 1964.
- [8] GRÖTHENDIECK (Alexander) - *Catégories fibrées et descente*,
Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S.,
Paris 1961.
- [9] KOCK (Anders) & WRAITH (Gavin) - *Elementary toposes*,
Aarhus Lecture notes n° 30 (septembre 1971).
- [10] LAWVERE (F.W.) - *Quantifiers and Sheaves*,
Actes Congrès International des Mathématiciens
Nice (1970).
- [11] LAWVERE (F.W.) - *Equality in hyperdoctrines and comprehension schema
as an adjoint functor*,
American Math. Society (1970).
- [12] MC LANE (Saunders) - *Categories for the working mathematicians*,
Graduate texts in Mathematics. Springer Verlag (1971).

.../...

[13] NEWELL & FISHER-PALMQUIST - *Triples on functor categories*,
Journal of algebra (25) (1973).

[14] Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I.H.E.S. SGA 4 dirigé par
M. ARTIN, A. GRÖTHENDIECK, J.L. VERDIER (1963-64).