

Les b_n, g_n satisfont aux inégalités

$$(7) \quad |2b_n| \leq K^n, \quad |g_n| \leq K^n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

3. Développons

$$(8) \quad \Theta(s) = \sum_0^{\infty} \lambda^n \Theta_n(s),$$

où les Θ_n sont donnés par les équations intégrales

$$(9) \quad \Theta_n(s) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Theta_n(t) dt = -2b_n + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_0^{n-1} \Theta_n(t) g_n(s, t) dt = B_n(s)$$

$$(n = 0, 1, \dots).$$

On a

$$(10) \quad \Theta_n(s) = B_n(s) + C_n \quad (n = 0, \dots),$$

$$(11) \quad |\Theta_n(s)| \leq K^n (1 + \pi)^n \quad (n = 0, 1, \dots; K \geq 1).$$

4. La fonction représentative $\omega(\zeta)$ est donnée par la formule

$$(12) \quad \omega(\zeta) = - \frac{\zeta}{(1-\zeta) \left(1 + \frac{\lambda \varphi_0}{1-\zeta}\right)} e^{S(\zeta)},$$

$$(13) \quad S(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\tau - \zeta} \sum_0^{\infty} \lambda^n \mathfrak{S}_n(t) [1 + \lambda(\varphi_t - i\varphi'_t)] \frac{1}{1 + \frac{\lambda \varphi_t}{t - \zeta}},$$

$$(14) \quad \mathfrak{S}_n(t) = \Theta_n(t) - \Theta_n(0).$$

Elle est développable en série entière de ζ, λ pour

$$(15) \quad 1 - |\zeta| \leq k,$$

$$(16) \quad \lambda < \frac{k}{\text{Max} |\varphi_t|},$$

$$(17) \quad \lambda < \frac{1}{K(1+\pi)}.$$

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur les groupes des classes de transformations continues.* Note (1) de M. KAROL BORSUK, transmise par M. Émile Borel.

Les propriétés de transformations continues se prêtent souvent pour exprimer des invariants topologiques. Ainsi, par exemple, l'étude des

(1) Séance du 15 avril 1936.

transformations continues de la circonférence S_1 en espace donné M a conduit H. Poincaré à un des plus importants invariants topologiques, le groupe fondamental. On parvient aussi aux résultats intéressants en considérant les transformations continues de M en S_1 (¹).

La généralisation de ces deux procédés conduit à l'étude de l'ensemble M^{S_n} des transformations continues de la sphère euclidienne n -dimensionnelle S_n en M (²) et de l'ensemble S_n^M des transformations continues de M en S_n (³). Or la différence essentielle par rapport au cas $n=1$ consiste en la difficulté de considérer M^{S_n} ou S_n^M , comme un groupe.

M. H. Freudenthal (⁴) a réussi cependant à définir un groupe des classes de transformations d'un espace compact M à $\leq n$ dimensions en S_n . Le problème semblable pour M^{S_n} [dans le cas où M est un espace compact et localement contractile (⁵), de dimension quelconque] a été récemment résolu par M. W. Hurewicz (⁶). Les deux méthodes appliquées sont d'ailleurs tout à fait différentes.

Dans cette Note, j'introduis un simple procédé permettant de définir des groupes de transformations continues et qui est assez général pour embrasser simultanément les cas de MM. Freudenthal et Hurewicz.

Soit A un sous-ensemble fermé d'un espace compact M et p un point d'un continu localement contractile N de dimension finie. $N^M(A, p)$ désigne l'espace dont les éléments sont des fonctions continues φ transformant M en sous-ensembles de N et telles que $\varphi(x) = p$ pour tout $x \in A$; cet espace étant entendu comme métrisé par la formule $\rho(\varphi, \varphi') = \text{Sup}_x \rho[\varphi(x), \varphi'(x)]$. En particulier, l'ensemble $N(o, p)$ coïncide avec l'espace N^M de toutes les transformations continues de M en sous-ensembles de N . Les fonctions φ et φ' sont dites *homotopes* dans $N^M(A, p)$ lorsqu'elles appartiennent à la même composante de $N^M(A, p)$; elles sont *homologues*, lorsque tout vrai cycle (⁶) \mathfrak{J} de M est transformé par φ et φ' en vrais cycles \mathfrak{J}_φ et $\mathfrak{J}_{\varphi'}$, homologues dans N . La fonction $\varphi \in N^M(A, p)$ s'appelle *inessentielle* rel. à A

(¹) *Fundamenta Mathematicae*, 17, 1931, p. 171-209. Voir aussi S. EILENBERG, *Fundamenta Mathematicae*, 26, 1936, p. 61-112.

(²) Cf. W. HUREWICZ, *Proceedings Akademie Amsterdam*, 38, 1935, p. 112-119.

(³) Cf. *Fundamenta Mathematicae*, 17, 1931, p. 196.

(⁴) *Compositio Mathematica*, 2, 1935, p. 134-162.

(⁵) Au sens de ma Note des *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 952.

(⁶) Quant aux définitions de vrais cycles, etc., voir par exemple, P. ALEXANDROFF, *Mathematische Annalen*, 106, 1932, p. 161-238.

et à p dans un ensemble $M' \subset M$, lorsqu'il existe une fonction φ' homotope à φ dans $N^M(A, p)$ et normée rel. à M et p , c'est-à-dire transformant M' en seul point p .

Considérons maintenant une décomposition de M en deux ensembles compacts M_1 et M_2 . Désignons par $N(M_1, M_2, A, p)$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in N^M(A, p)$ inessentiels rel. à A et p dans les deux ensembles M_i ⁽¹⁾. Pour tout $\varphi \in N(M_1, M_2, A, p)$, il existe alors deux fonctions $\varphi^{(1)}$ et $\varphi^{(2)}$ homotopes à φ dans $N^M(A, p)$ et telles que $\varphi^{(i)}$ est normée rel. à M_i et à p .

Étant donné deux éléments φ_1 et φ_2 de $N(M_1, M_2, A, p)$, désignons par $\alpha(\varphi_1, \varphi_2)$ la classe de toutes les fonctions ψ qui sont homotopes dans $N^M(A, p)$ aux fonctions ψ' de la forme

$$\psi'(x) = \varphi_1^{(1)}(x) \text{ pour } x \in M_1, \quad \text{et} \quad \psi'(x) = \varphi_2^{(1)}(x) \text{ pour } x \in M_2,$$

où $\varphi_j^{(i)}$ désigne une fonction homotope à φ_j , normée rel. à M_i et à $p \in N$. On a évidemment $\alpha(\varphi_1, \varphi_2) \subset N(M_1, M_2, A, p)$. On démontre en outre que :

Étant donné dans M un vrai cycle \mathfrak{F} de dimension ≥ 1 , le vrai cycle \mathfrak{F}_ψ , où $\psi \in \alpha(\varphi_1, \varphi_2)$ est homologue dans N à $\mathfrak{F}_{\varphi_1} + \mathfrak{F}_{\varphi_2}$.

Il en résulte sans peine que Φ_1 et Φ_2 désignant deux classes des fonctions homologues appartenant à $N(M_1, M_2, A, p)$, l'ensemble

$$\alpha(\Phi_1, \Phi_2) = E_\psi[\Psi \in \alpha(\varphi_1, \varphi_2); \varphi_1 \in \Phi_1; \varphi_2 \in \Phi_2]$$

est aussi une classe de fonctions homologues. On parvient ainsi au

THÉORÈME I. — Les classes des fonctions homologues appartenant à $N(M_1, M_2, A, p)$ constituent un groupe abélien avec l'opération α comme l'addition.

Le problème à quelles conditions la thèse de ce théorème subsiste aussi pour les classes des fonctions homotopes reste dans le cas général ouvert. Il se laisse cependant résoudre dans deux cas importants :

THÉORÈME II. — p étant un point de N et a un point de S_n , les classes des fonctions homotopes dans $N^{S_n}[(a), p]$ constituent un groupe ⁽²⁾ avec l'opération α ⁽³⁾ comme l'addition; ce groupe est pour $n > 1$ abélien.

⁽¹⁾ Comp. S. EILENBERG, *Fundamenta Mathematicæ*, 26, 1936, p. 94.

⁽²⁾ Ce groupe coïncide avec le groupe d'homotopie de la dimension n introduit par M. HUREWICZ, *loc. cit.*

⁽³⁾ Correspondant à une décomposition de S_n en deux demi-sphères dont chacune contient a .

THÉORÈME III. — p étant un point de S_n et A un sous-ensemble fermé d'un espace M de dimension $< 2n - 1$, les classes des fonctions homotopes de $S_n^M(A, p)$ constituent un groupe abélien ⁽¹⁾ avec l'opération α ⁽²⁾ comme l'addition.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Sur la répartition de certaines directions limites et son application à la théorie des fonctions de variable complexe.*
Note de M. FRÉDÉRIC ROGER, présentée par M. Élie Cartan.

Précédemment ⁽³⁾ je me suis efforcé de montrer comment le remarquable théorème de M. A. Denjoy sur les nombres dérivés des fonctions continues ⁽⁴⁾, puis ses diverses extensions découlaient de la répartition des directions d'accumulation ⁽⁵⁾ d'un ensemble euclidien quelconque ⁽⁶⁾. Je voudrais maintenant indiquer que cette même répartition vaut de directions limites beaucoup plus générales et donner des applications relatives aux fonctions de variable complexe.

Considérons un ensemble E de points d'un espace euclidien, et sa projection e faite sur une variété linéaire V à n dimensions, parallèlement à une variété linéaire complémentaire. En un point m de la fermeture de e ,

⁽¹⁾ Dans le cas $A = 0$ et $\dim. M \leq n$ ce groupe coïncide avec le groupe de Hopf introduit par M. FREUDENTHAL, *loc. cit.*

⁽²⁾ Qui ne dépend pas dans ce cas de la décomposition de M en M_1 et M_2 .

⁽³⁾ *Comptes rendus*, 201, 1935, p. 871 et 202, 1936, p. 377.

⁽⁴⁾ A. DENJOY, *Journ. de Math. pures et appl.*, 7^e série, 1, 1915, p. 194.

⁽⁵⁾ Leur faisceau forme ce que M. G. Bouligand appelle le *contingent*. Je préfère employer l'expression de *faisceau dérivé*, calquée sur celle d'ensemble dérivé, et rappelant en outre la représentation géométrique des nombres dérivés, comme l'*angle dérivé* de M. A. Denjoy (*loc. cit.*).

⁽⁶⁾ M. S. SAKS a bien voulu me communiquer tout récemment les épreuves d'un très intéressant article, destiné à paraître aux *Fund. Math.*, 27, 1936, p. 234, où il obtient des résultats qui sont à peu près ceux du plan dans mes deux Notes précitées : cette rencontre est de nature à souligner l'intérêt qui s'attache à ce genre de questions instauré par M. A. Denjoy. Les méthodes ne sont pas essentiellement différentes de celles que j'ai eu l'honneur d'exposer au Séminaire mathématique de M. Hadamard, au Collège de France, le 6 décembre 1935. Aussi n'est-il pas étonnant qu'elles conduisent, comme le fait remarquer l'Auteur dans un supplément à son article, aux plus simples de mes résultats de l'espace. Cependant la tournure plus géométrique des méthodes que j'ai employées permet peut-être une extension plus facile, notamment aux résultats d'où je vais tirer un critère d'analyticité et sur lesquels la remarque de M. Saks reste muette.