11

ENTWURF EINER VERALLGEMEINERTEN RELATIVITÄTSTHEORIE UND EINER THEORIE DER GRAVITATION

I. PHYSIKALISCHER TEIL

VON

ALBERT EINSTEIN

IN ZÜRICH

II. MATHEMATISCHER TEIL

VON

MARCEL GROSSMANN

IN ZÜRICH

Gálffy Lajos
okl. gépészmérnök

LEIPZIG UND BERLIN

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1913

Pola, 1918.

Separatabdruck aus
„Zeitschrift für Mathematik und Physik“ Band 62.

I.

Physikalischer Teil.

Von Albert Einstein.

Die im folgenden dargelegte Theorie ist aus der Überzeugung hervorgegangen, daß die Proportionalität zwischen der trägen und der schweren Masse der Körper ein exakt gültiges Naturgesetz sei, das bereits in dem Fundamente der theoretischen Physik einen Ausdruck finden müsse. Schon in einigen früheren Arbeiten[1]) suchte ich dieser Überzeugung dadurch Ausdruck zu verleihen, daß ich die schwere auf die träge Masse zurückzuführen suchte; dieses Bestreben führte mich zu der Hypothese, daß ein (unendlich wenig ausgedehntes homogenes) Schwerefeld sich durch einen Beschleunigungszustand des Bezugssystems physikalisch vollkommen ersetzen lasse. Anschaulich läßt sich diese Hypothese so aussprechen: Ein in einem Kasten eingeschlossener Beobachter kann auf keine Weise entscheiden, ob der Kasten sich ruhend in einem statischen Gravitationsfelde befindet, oder ob sich der Kasten in einem von Gravitationsfeldern freien Raume in beschleunigter Bewegung befindet, die durch an dem Kasten angreifende Kräfte aufrecht erhalten wird (Äquivalenz-Hypothese).

Daß das Gesetz der Proportionalität der trägen und der schweren Masse jedenfalls mit außerordentlicher Genauigkeit erfüllt ist, wissen wir aus einer fundamental wichtigen Untersuchung von Eötvös[2]), die auf folgender Überlegung beruht. Auf einen an der Erdoberfläche ruhenden Körper wirkt sowohl die Schwere als auch die von der Drehung der Erde herrührende Zentrifugalkraft. Die erste dieser Kräfte ist proportional der schweren, die zweite der trägen Masse. Die Richtung der Resultierenden dieser beiden Kräfte, d. h. die Richtung der scheinbaren Schwerkraft (Lotrichtung) müßte also von der physikalischen Natur des ins Auge gefaßten Körpers abhängen, falls die Proportionalität der trägen und schweren Masse nicht erfüllt wäre. Es ließen sich dann die scheinbaren Schwerkräfte, welche auf Teile eines heterogenen starren Systems wirken, im allgemeinen nicht zu einer Resultierenden vereinigen; es bliebe vielmehr im allgemeinen ein Drehmoment der scheinbaren

---

1) A. Einstein, Ann. d. Physik **4. 35.** S. 898; **4. 38.** S. 355; **4. 38.** S. **443.**

2) B. Eötvös, Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn VIII **1890.** Wiedemann, Beiblätter XV. S. 688 (1891).

Schwerkräfte übrig, das sich beim Aufhängen des Systems an einem torsionsfreien Faden hätte bemerkbar machen müssen. Indem Eötvös die Abwesenheit solcher Drehmomente mit großer Sorgfalt feststellte, bewies er, daß das Verhältnis beider Massen für die von ihm untersuchten Körper mit solcher Genauigkeit von der Natur des Körpers unabhängig war, daß die relativen Unterschiede die dies Verhältnis von Stoff zu Stoff noch besitzen könnte, kleiner als ein Zwanzigmilliontel sein müßte.

Beim Zerfall radioaktiver Stoffe werden so bedeutende Energiemengen abgegeben, daß die Änderung der trägen Masse des Systems, welche nach der Relativitätstheorie jener Energieabnahme entspricht, gegenüber der Gesamtmasse nicht sehr klein ist.[1]) Beim Zerfall von Radium beträgt z. B. jene Abnahme $\frac{1}{10000}$ der Gesamtmasse. Würden jenen Änderungen der trägen Masse nicht Änderungen der schweren Masse entsprechen, so müßten Abweichungen der trägen von der schweren Masse bestehen, die weit größer sind, als es die Eötvösschen Versuche zulassen. Es muß also als sehr wahrscheinlich betrachtet werden, daß die Identität der trägen und der schweren Masse exakt erfüllt ist. Aus diesen Gründen scheint mir auch die Äquivalenzhypothese, welche die physikalische Wesengleicheit der schweren mit der trägen Masse ausspricht, einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit zu besitzen.[2])

§ 1. Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes im statischen Schwerefeld.

Gemäß der gewöhnlichen Relativitätstheorie[3]) bewegt sich ein kräftefrei bewegter Punkt nach der Gleichung

$$\delta\left\{\int ds\right\} = \delta\left\{\int\sqrt{-dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2}\right\} = 0. \tag{1}$$

Denn es besagt diese Gleichung nichts anderes, als daß sich der materielle Punkt geradlinig und gleichförmig bewegt. Es ist dies die Bewegungsgleichung in Form des Hamiltonschen Prinzipes; denn wir können auch setzen

$$\delta\left\{\int H dt\right\} = 0, \tag{1a}$$

wobei

$$H = -\frac{ds}{dt} m$$

1) Die Abnahme der trägen Masse, die der abgegebenen Energie E entspricht, ist bekanntlich $\frac{E}{c^2}$, wenn mit c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet wird.

2) Vgl. auch § 7 dieser Arbeit.

3) Vgl. M. Planck, Verh. d. deutsch. phys. Ges. 1906. S. 136.

gesetzt ist, falls m die Ruhemasse des materiellen Punktes bedeutet. Hieraus ergeben sich in bekannter Weise Impuls J_x, J_y, J_z und Energie E des bewegten Punktes:

$$
(2) \qquad \left\{
\begin{aligned}
J_x &= m\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} = m\frac{\dot{x}}{\sqrt{c^2-q^2}}\,; \text{ etc}\\
E &= \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}\dot{y} + \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}\dot{z} - H = m\frac{c^2}{\sqrt{c^2-q^2}}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Darstellungsweise unterscheidet sich von der üblichen nur dadurch, daß in letzterer J_x, J_y, J_z und E noch einen Faktor c aufweisen. Da aber c in der gewöhnlichen Relativitätstheorie konstant ist, so ist das hier gegebene System dem gewöhnlich gegebenen äquivalent. Der einzige Unterschied ist der, daß J und E andere Dimensionen besitzen als in der üblichen Darstellungsweise.

In früheren Arbeiten habe ich gezeigt, daß die Äquivalenzhypothese zu der Folgerung führt, daß in einem statischen Gravitationsfelde die Lichtgeschwindigkeit c vom Gravitationspotential abhängt. Ich gelangte so zu der Meinung, daß die gewöhnliche Relativitätstheorie nur eine Annäherung an die Wirklichkeit gebe; sie sollte in dem Grenzfalle gelten, daß in dem betrachteten Raum-Zeitgebiete keine zu große Verschiedenheiten des Gravitationspotentials auftreten. Außerdem fand ich als Gleichungen der Bewegung eines Massenpunktes in einem statischen Gravitationsfelde wieder die Gleichungen (1) bzw. (1a); es ist aber dabei c nicht als eine Konstante, sondern als eine Funktion der Raumkoordinaten aufzufassen, die ein Maß für das Gravitationspotential darstellt. Aus (1a) folgen in bekannter Weise die Bewegungsgleichungen

$$
(3) \qquad \frac{d}{dt}\left\{\frac{m\dot{x}}{\sqrt{c^2-q^2}}\right\} = -\frac{mc\dfrac{\partial c}{\partial x}}{\sqrt{c^2-q^2}}\,.
$$

Man sieht, daß die Bewegungsgröße durch den nämlichen Ausdruck dargestellt wird wie oben. Überhaupt gelten für den im statischen Schwerefelde bewegten materiellen Punkt die Gleichungen (2). Die rechte Seite von (3) stellt die vom Gravitationsfelde auf den Massenpunkt ausgeübte Kraft $\mathfrak{K}_x$ dar. Für den Spezialfall der Ruhe ($q=0$) ist

$$
\mathfrak{K}_x = -m\frac{\partial c}{\partial x}\,.
$$

Hieraus erkennt man, daß c die Rolle des Gravitationspotentials spielt.

Aus (2) folgt für einen langsam bewegten Punkt

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
J_x &= \frac{m\dot{x}}{c}\,,\\
E - mc &= \frac{\frac{1}{2}mq^2}{c}\,.
\end{aligned}
$$

Bei gegebener Geschwindigkeit sind also Impuls und kinetische Energie der Größe c umgekehrt proportional; anders ausgedrückt: Die träge Masse, so wie sie in Impuls und Energie eingeht, ist $\frac{m}{c}$, wobei m eine für den Massenpunkt charakteristische, vom Gravitationspotential unabhängige Konstante bedeutet. Es paßt dies zu Machs kühnem Gedanken, daß die Trägheit in einer Wechselwirkung des betrachteten Massenpunktes mit allen übrigen ihren Ursprung habe; denn häufen wir Massen in der Nähe des betrachteten Massenpunktes an, so verkleinern wir damit das Gravitationspotential c, erhöhen also die für die Trägheit maßgebende Größe $\frac{m}{c}$.

§ 2. Gleichungen für die Bewegung des materiellen Punktes im beliebigen Schwerefeld. Charakterisierung des letzteren.

Mit der Einführung einer räumlichen Veränderlichkeit der Größe c haben wir den Rahmen der gegenwärtig als „Relativitätstheorie" bezeichneten Theorie durchbrochen; denn es verhält sich nun der mit ds bezeichnete Ausdruck orthogo nalenlinearen Transformationen der Koordinaten gegenüber nicht mehr als Invariante. Soll also — woran nicht zu zweifeln ist — das Relativitätsprinzip aufrecht erhalten werden, so müssen wir die Relativitätstheorie derart verallgemeinern, daß sie die im vorigen in ihren Elementen angedeutete Theorie des statischen Schwerefeldes als Spezialfall enthält.

Führen wir ein neues Raum-Zeitsystem $K'(x', y', z', t')$ ein durch irgend eine Substitution

$$\begin{aligned} x' &= x'(x, y, z, t) \\ y' &= y'(x, y, z, t) \\ z' &= z'(x, y, z, t) \\ t' &= t'(x, y, z, t), \end{aligned}$$

und war das Schwerefeld im ursprünglichen System K ein statisches, so geht bei dieser Substitution die Gleichung (1) in eine Gleichung von der Form

$$\delta\left\{\int ds'\right\} = 0$$

über, wobei

$$ds'^2 = g_{11}\,dx'^2 + g_{22}\,dy'^2 + \ldots + 2\,g_{12}\,dx'\,dy' + \ldots$$

gesetzt ist, und die Größen $g_{\mu\nu}$ Funktionen von x', y', z', t' sind. Setzen wir x_1, x_2, x_3, x_4 statt x', y', z', t' und schreiben wir wieder ds statt ds', so erhalten die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes in bezug auf K' die Gestalt

$$(1'') \qquad \begin{cases} \delta\left\{\int ds\right\} = 0, \quad \text{wobei} \\ ds^2 = \sum\limits_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu. \end{cases}$$

Wir gelangen so zu der Auffassung, daß **im allgemeinen Falle das Gravitationsfeld durch zehn Raum-Zeit-Funktionen**

$$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{matrix} \qquad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu})$$

charakterisiert ist, welche sich im Falle der gewöhnlichen Relativitätstheorie auf

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +c^2 \end{matrix}$$

reduzieren, wobei c eine Konstante bedeutet. Dieselbe Art der Degeneration zeigt sich bei dem statischen Schwerefelde der vorhin betrachteten Art, nur daß bei diesem $g_{44} = c^2$ eine Funktion von x_1, x_2, x_3 ist.

Die Hamiltonsche Funktion H hat daher im allgemeinen Fall den Wert

$$H = -m\frac{ds}{dt} = -m\sqrt{g_{11}\dot{x}_1^2 + \cdot + \cdot + 2g_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \cdot + \cdot + 2g_{14}\dot{x}_1 + \cdot + \cdot + g_{44}}. \tag{5}$$

Die zugehörigen Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

ergeben sofort den Ausdruck für den Impuls J des Punktes und für die vom Schwerefelde auf ihn ausgeübte Kraft $\mathfrak{K}$:

$$J_x = -m\frac{g_{11}\dot{x}_1 + g_{12}\dot{x}_2 + g_{13}\dot{x}_3 + g_{14}}{\frac{ds}{dt}} = -m\frac{g_{11}d_1x + g_{12}dx_2 + g_{13}dx_3 + g_{14}dx_4}{ds}, \tag{7}$$

$$\mathfrak{K}_x = -\tfrac{1}{2}m\frac{\sum\limits_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1}dx_\mu dx_\nu}{ds \cdot dt} = -\tfrac{1}{2}m \cdot \sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{dt} \tag{8}$$

Ferner ergibt sich für die Energie E des Punktes

$$-E = -\left(\dot{x}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}} + \cdot + \cdot\right) + H = -m\left(g_{41}\frac{dx_1}{ds} + g_{42}\frac{dx_2}{ds} + g_{43}\frac{dx_3}{ds} + g_{44}\frac{dx_4}{ds}\right). \tag{9}$$

Im Falle der gewöhnlichen Relativitätstheorie sind nur lineare orthogonale Substitutionen zulässig. Es wird sich zeigen, daß wir für die Einwirkung des Schwerefeldes auf die materiellen Vorgänge Gleichungen aufzustellen vermögen, die beliebigen Substitutionen gegenüber sich kovariant verhalten.

Zunächst können wir aus der Bedeutung, welche ds im Bewegungsgesetz des materiellen Punktes spielt, den Schluß ziehen, daß ds eine absolute Invariante (Skalar) sein muß; hieraus ergibt sich, daß die Größen $g_{\mu\nu}$ einen kovarianten Tensor zweiten Ranges bilden[1]), den wir als den kovarianten Fundamentaltensor bezeichnen. Dieser bestimmt das Schwerefeld. Es ergibt sich ferner aus (7) und (9), daß Impuls und Energie des materiellen Punktes zusammen einen kovarianten Tensor ersten Ranges, d. h. einen kovarianten Vektor bilden.[2])

§ 3. Bedeutung des Fundamentaltensors der $g_{\mu\nu}$ für die Messung von Raum und Zeit.

Aus dem Früheren kann man schon entnehmen, daß zwischen den Raum-Zeit-Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 und den mittelst Maßstäben und Uhren zu erhaltenden Meßergebnissen keine so einfachen Beziehungen bestehen können, wie in der alten Relativitätstheorie. Es ergab sich dies bezüglich der Zeit schon beim statischen Schwerefelde.[3]) Es erhebt sich deshalb die Frage nach der physikalischen Bedeutung (prinzipiellen Meßbarkeit) der Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4.

Hierzu bemerken wir, daß ds als invariantes Maß für den Abstand zweier unendlich benachbarter Raumzeitpunkte aufzufassen ist. Es muß daher ds auch eine vom gewählten Bezugssystem unabhängige physikalische Bedeutung zukommen. Wir nehmen an, ds sei der „natürlich gemessene" Abstand beider Raumzeitpunkte und wollen darunter folgendes verstehen.

Die unmittelbare Nachbarschaft des Punktes (x_1, x_2, x_3, x_4) wird bezüglich des Koordinatensystems durch die infinitesimalen Variabeln dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 bestimmt. Wir denken uns statt dieser durch eine lineare Transformation neue Variable $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$, $d\xi_4$ eingeführt, derart, daß

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_4^2$$

wird. Bei dieser Transformation sind die $g_{\mu\nu}$ als Konstanten zu betrachten; der reelle Kegel $ds^2 = 0$ erscheint auf seine Hauptachsen bezogen. In diesem elementaren $d\xi$-System gilt dann die gewöhnliche Relativitätstheorie, und es sei in diesem System die physikalische Bedeutung von Längen und Zeiten dieselbe wie in der gewöhnlichen Relativitätstheorie, d. h. ds^2 ist das Quadrat des vierdimensionalen Abstandes beider unendlich benachbarter Raumzeitpunkte, gemessen mittelst eines im $d\xi$-System nicht beschleunigten starren Körpers und mittelst relativ zu diesem ruhend angeordneter Einheitsmaßstäbe und Uhren.

1) Vgl. II. Teil, § 1. 2) Vgl. II. Teil, § 1.

3) Vgl. z. B. A. Einstein, Ann. d. Phys. 4. 35. S. 903ff.

Man sieht hieraus, daß bei gegebenen dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 der zu diesen Differentialen gehörige natürliche Abstand nur dann ermittelt werden kann, wenn die das Gravitationsfeld bestimmenden Größen $g_{\mu\nu}$ bekannt sind. Man kann dies auch so ausdrücken: Das Gravitationsfeld beeinflußt die Meßkörper und Uhren in bestimmter Weise.

Aus der Fundamentalgleichung

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

sieht man, daß es zur Festlegung der physikalischen Dimension der Größen $g_{\mu\nu}$ und x_ν noch einer Festsetzung bedarf. Der Größe ds kommt die Dimension einer Länge zu. Wir wollen die x_ν ebenfalls als Längen ansehen (auch x_4), den Größen $g_{\mu\nu}$ also keine physikalische Dimension zuschreiben.

§ 4. Bewegung kontinuierlich verteilter inkohärenter Massen im beliebigen Schwerefeld.

Zur Ableitung des Bewegungsgesetzes kontinuierlich verteilter inkohärenter Massen berechnen wir Impuls und ponderomotorische Kraft pro Volumeneinheit und wenden hierauf den Impulssatz an.

Dazu haben wir zunächst das dreidimensionale Volumen V unseres Massenpunktes zu berechnen. Wir betrachten ein unendlich kleines (vierdimensionales) Stück des Raumzeitfadens unseres materiellen Punktes. Sein Volumen ist

$$\iiiint dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = V dt.$$

Führen wir statt der dx die natürlichen Differentiale $d\xi$ ein, wobei der Meßkörper als gegen den materiellen Punkt ruhend angenommen wird, so haben wir

$$\iiint d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = V_0$$

zu setzen, d. h. gleich dem „Ruhvolumen" des materiellen Punktes. Ferner haben wir

$$\int d\xi_4 = ds,$$

wo ds dieselbe Bedeutung hat wie oben.

Sind die dx mit den $d\xi$ verbunden durch die Substitution

$$dx_\mu = \sum_\sigma \alpha_{\mu\sigma} d\xi_\sigma,$$

so hat man

$$\iiiint dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \iiiint \frac{\partial(dx_1, dx_2, dx_3, dx_4)}{\partial(d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3, d\xi_4)} \cdot d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4$$

oder

$$V dt = V_0 ds \cdot |\alpha_{\varrho\sigma}|.$$

Da aber

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = \sum_{\mu\nu\varrho\sigma} g_{\mu\nu} \alpha_{\mu\varrho} \alpha_{\nu\sigma} d\xi_\varrho d\xi_\sigma = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 - d\xi_4^2$$

ist, so besteht zwischen der Determinante

$$g = |g_{\mu\nu}|,$$

d. h. der Diskriminante der quadratischen Differentialform ds^2 und der Substitutionsdeterminante $|\alpha_{\varrho\sigma}|$ die Beziehung

$$g \cdot (|\alpha_{\varrho\sigma}|)^2 = -1,$$

$$|\alpha_{\varrho\sigma}| = \frac{1}{\sqrt{-g}}.$$

Man erhält also für V die Beziehung

$$V dt = V_0 ds \cdot \frac{1}{\sqrt{-g}}.$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (7), (8) und (9), wenn man $\frac{m}{V_0}$ durch ϱ_0 ersetzt

$$\frac{J_x}{V} = -\varrho_0 \sqrt{-g} \cdot \sum_\nu g_{1\nu} \frac{dx_\nu}{ds} \cdot \frac{dx_4}{ds},$$

$$-\frac{E}{V} = -\varrho_0 \sqrt{-g} \cdot \sum_\nu g_{4\nu} \frac{dx_\nu}{ds} \cdot \frac{dx_4}{ds},$$

$$\frac{\mathfrak{K}_x}{V} = -\frac{1}{2} \varrho_0 \sqrt{-g} \cdot \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds}.$$

Wir bemerken, daß

$$\Theta_{\mu\nu} = \varrho_0 \frac{dx_\mu}{ds} \cdot \frac{dx_\nu}{ds}$$

ein kontravarianter Tensor zweiten Ranges bezüglich beliebiger Substitutionen ist. Man vermutet aus dem Vorhergehenden, daß der Impuls-Energiesatz die Form haben wird:

$$(10) \quad \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} \Theta_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \Theta_{\mu\nu} = 0. \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4)$$

Die ersten drei dieser Gleichungen ($\sigma = 1, 2, 3$) drücken den Impulssatz, die letzte ($\sigma = 4$) den Energiesatz aus. Es erweist sich in der Tat, daß diese Gleichungen beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant sind.[1] Ferner lassen sich die Bewegungsgleichungen des materiellen Punktes, von denen wir ausgegangen sind, aus diesen Gleichungen durch Integration über den Stromfaden wieder ableiten.

---

1) Vgl. II. Teil, § 4, Nr. 1.

Den Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ nennen wir den (kontravarianten) **Spannungs-Energietensor der materiellen Strömung.** Der Gleichung (10) schreiben wir einen Gültigkeitsbereich zu, der über den speziellen Fall der Strömung inkohärenter Massen weit hinausgeht. Die Gleichung stellt allgemein die Energiebilanz zwischen dem Gravitationsfelde und einem beliebigen materiellen Vorgang dar; nur ist für $\Theta_{\mu\nu}$ der dem jeweilen betrachteten materiellen System entsprechende Spannungs-Energietensor einzusetzen. Die erste Summe in der Gleichung enthält die örtlichen Ableitungen der Spannungen bzw. Energiestromdichte und die zeitlichen Ableitungen der Impuls- bzw. Energiedichte; die zweite Summe ist ein Ausdruck für die Wirkungen, welche vom Schwerefelde auf den materiellen Vorgang übertragen werden.

§ 5. Die Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes.

Nachdem wir die Impuls-Energiegleichung für die materiellen Vorgänge (mechanische, elektrische und andere Vorgänge) mit bezug auf das Gravitationsfeld aufgestellt haben, bleibt uns noch folgende Aufgabe. Es sei der Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ für den materiellen Vorgang gegeben. Welches sind die Differentialgleichungen, welche die Größen g_{ik}, d. h. das Schwerefeld zu bestimmen gestatten? Wir suchen mit anderen Worten die Verallgemeinerung der Poissonschen Gleichung

$$\Delta\varphi = 4\pi k\varrho.$$

Zur Lösung dieser Aufgabe haben wir keine so vollkommen zwangläufige Methode gefunden, wie für die Lösung des vorhin behandelten Problems. Es war nötig, einige Annahmen einzuführen, deren Richtigkeit zwar plausibel erscheint, aber doch nicht evident ist.

Die gesuchte Verallgemeinerung wird wohl von der Form sein

$$\varkappa \cdot \Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}, \tag{11}$$

wo $\varkappa$ eine Konstante, $\Gamma_{\mu\nu}$ ein kontravarianter Tensor zweiten Ranges ist, der durch Differentialoperationen aus dem Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$ hervorgeht. Dem Newton-Poissonschen Gesetz entsprechend wird man geneigt sein zu fordern, daß diese Gleichungen (11) zweiter Ordnung sein sollen. Es muß aber hervorgehoben werden, daß es sich als unmöglich erweist, unter dieser Voraussetzung einen Differentialausdruck $\Gamma_{\mu\nu}$ zu finden, der eine Verallgemeinerung von $\Delta\varphi$ ist, und sich beliebigen Transformationen gegenüber als Tensor erweist.[1]) A priori kann allerdings nicht in Abrede gestellt werden, daß die endgültigen, genauen Gleichungen der Gravitation von höherer als zweiter Ordnung sein könnten. Es besteht daher immer noch die Möglichkeit, daß die

1) Vgl. II. Teil, § 4, Nr. 2.

vollkommen exakten Differentialgleichungen der Gravitation beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant sein könnten. Der Versuch einer Diskussion derartiger Möglichkeiten wäre aber bei dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnis der physikalischen Eigenschaften des Gravitationsfeldes verfrüht. Deshalb ist für uns die Beschränkung auf die zweite Ordnung geboten und wir müssen daher darauf verzichten, Gravitationsgleichungen aufzustellen, die sich beliebigen Transformationen gegenüber als kovariant erweisen. Es ist übrigens hervorzuheben, daß wir keinerlei Anhaltspunkte für eine allgemeine Kovarianz der Gravitationsgleichungen haben.[1])

Der Laplacesche Skalar $\Delta\varphi$ ergibt sich aus dem Skalar φ, indem man von diesem die Erweiterung (den Gradienten), und dann von diesem den inneren Operator (die Divergenz) bildet. Beide Operationen kann man derart verallgemeinern, daß sie an jedem Tensor von beliebig hohem Rang ausgeführt werden können, und zwar unter Zulassung beliebiger Substitutionen der Grundvariabeln.[2]) Aber es degenerieren diese Operationen, wenn sie an dem Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$ ausgeführt werden.[3]) Es scheint daraus hervorzugehen, daß die gesuchten Gleichungen nur bezüglich einer gewissen Gruppe von Transformationen kovariant sein werden, welche Gruppe uns aber vorläufig unbekannt ist.

Bei dieser Sachlage erscheint es mit Rücksicht auf die alte Relativitätstheorie natürlich, anzunehmen, daß in der gesuchten Transformationsgruppe die linearen Transformationen enthalten seien. Wir fordern also, daß $\Gamma_{\mu\nu}$ ein Tensor bezüglich beliebiger linearer Transformationen sein soll.

Man beweist nun leicht (durch Ausführung der Transformation) die folgenden Sätze:

1. Ist $\Theta_{\alpha\beta\ldots\lambda}$ ein kontravarianter Tensor vom Range n bezüglich linearer Transformationen, so ist

$$\sum_{\mu} \gamma_{\mu\nu} \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta\cdots\lambda}}{\partial x_{\mu}}$$

ein kontravarianter Tensor vom Range $n+1$ bezüglich linearer Transformationen (Erweiterung).[4])

2. Ist $\Theta_{\alpha\beta\ldots\lambda}$ ein kontravarianter Tensor vom Range n bezüglich linearer Transformationen, so ist

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial \Theta_{\alpha\beta\cdots\lambda}}{\partial x_{\lambda}}$$

1) Vgl. hierzu noch die am Anfange des § 6 gegebenen Überlegungen.

2) II. Teil, § 2. 3) Vgl. die Anm. auf S. 28 im II. Teil, § 2.

4) $\gamma_{\mu\nu}$ ist der zu $g_{\mu\nu}$ reziproke kontravariante Tensor (II. Teil, § 1).

ein kontravarianter Tensor vom Range $n-1$ bezüglich linearer Transformationen (Divergenz).

Führt man an einem Tensor der Reihe nach diese beiden Operationen aus, so erhält man einen Tensor, der wiederum vom gleichen Range ist, wie der ursprüngliche (Operation Δ, an einem Tensor vorgenommen). Für den Fundamental-Tensor $\gamma_{\mu\nu}$ erhält man

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right). \tag{a}$$

Daß dieser Operator mit dem Laplaceschen Operator verwandt ist, erkennt man ferner durch folgende Betrachtung. In der Relativitätstheorie (Fehlen des Gravitationsfeldes), wäre zu setzen

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=-1\,,\quad g_{44}=c^2,\quad g_{\mu\nu}=0\,,\ \text{für } \mu\neq\nu;$$

also

$$\gamma_{11}=\gamma_{22}=\gamma_{33}=-1\,,\quad \gamma_{44}=\frac{1}{c^2},\ \gamma_{\mu\nu}=0,\ \text{für } \mu\neq\nu\,.$$

Ist ein Gravitationsfeld vorhanden, welches genügend schwach ist, d. h. unterscheiden sich die $g_{\mu\nu}$ und $\gamma_{\mu\nu}$ von den soeben angegebenen Werten nur unendlich wenig, so erhält man an Stelle des Ausdruckes (a) unter Vernachlässigung der Glieder vom zweiten Grade

$$-\left(\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_3^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_4^2}\right).$$

Ist das Feld ein statisches und nur g_{44} variabel, so kommen wir also auf den Fall der Newtonschen Gravitationstheorie, falls wir den gebildeten Ausdruck bis auf eine Konstante für die Größe $\Gamma_{\mu\nu}$ setzen.

Man könnte demnach denken, es müsse der Ausdruck (a) bis auf einen konstanten Faktor bereits die gesuchte Verallgemeinerung von $\Delta\varphi$ sein. Dies wäre aber ein Irrtum; denn es könnten neben jenem Ausdruck noch solche Terme in einer derartigen Verallgemeinerung auftreten, die selbst Tensoren sind und bei Durchführung der eben angeführten Vernachlässigungen verschwinden. Es tritt dies immer dann ein, wenn zwei erste Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ bzw. $\gamma_{\mu\nu}$ miteinander multipliziert erscheinen. So ist z. B.

$$\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}$$

ein kovarianter Tensor zweiten Ranges (gegenüber linearen Transformationen); derselbe wird unendlich klein zweiter Ordnung, wenn die Größen $g_{\alpha\beta}$ und $\gamma_{\alpha\beta}$ von Konstanten nur um Unendlich-Kleine erster Ordnung abweichen. Wir müssen daher zulassen, daß in $\Gamma_{\mu\nu}$ neben (a) noch andere Terme auftreten, die vorläufig nur die Bedingung erfüllen müssen, daß sie zusammen linearen Transformationen gegenüber Tensorcharakter besitzen müssen.

Zur Auffindung dieser Terme dient uns der Impulsenergiesatz. Damit die benutzte Methode klar hervortrete, will ich sie zunächst an einem allgemein bekannten Beispiel anwenden.

In der Elektrostatik ist $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\varrho$ die ν^{te} Komponente des pro Volumeneinheit auf die Materie übertragenen Impulses, falls φ das elektrostatische Potential, ϱ die elektrische Dichte bedeutet. Es ist eine Differentialgleichung für φ gesucht, derart, daß der Impulssatz stets erfüllt ist. Es ist wohlbekannt, daß die Gleichung

$$\sum_\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu^2} = \varrho$$

die Aufgabe löst. Daß der Impulssatz erfüllt ist, geht hervor aus der Identität

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\frac{1}{2}\sum_\mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right)^2\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\sum_\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu^2}\left(= -\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\cdot\varrho\right).$$

Wenn also der Impulssatz erfüllt ist, muß für jedes ν eine identische Gleichung von folgendem Bau existieren: Auf der rechten Seite steht $-\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}$ multipliziert mit der linken Seite der Differentialgleichung, auf der linken Seite der Identität steht eine Summe von Differentialquotienten.

Wäre die Differentialgleichung für φ noch nicht bekannt, so ließe sich das Problem von deren Auffindung auf dasjenige der Auffindung jener identischen Gleichung zurückführen. Es ist nun für uns die Erkenntnis wesentlich, daß jene Identität sich ableiten läßt, wenn einer der in ihr auftretenden Terme bekannt ist. Man hat nichts weiteres zu tun, als die Regel von der Differentiation eines Produktes in den Formen

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_\nu}v + \frac{\partial v}{\partial x_\nu}u$$

und

$$u\frac{\partial v}{\partial x_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu}(uv) - \frac{\partial u}{\partial x_\nu}v$$

wiederholt anzuwenden und schließlich die Glieder, welche Differentialquotienten sind, auf die linke Seite, die übrigen auf die rechte Seite zu stellen. Geht man z. B. von dem ersten Glied der obigen Identität aus, so erhält man der Reihe nach

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right) = \sum_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu^2} + \sum_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\nu \partial x_\mu}$$
$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\cdot\sum_\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu^2} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\frac{1}{2}\sum_\mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right)^2\right\},$$

woraus durch Anordnen die obige Identität hervorgeht.

Wir wenden uns nun unserem Problem wieder zu. Aus Gleichung (10) geht hervor, daß

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\Theta_{\mu\nu}, \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4)$$

der pro Volumeneinheit auf die Materie vom Gravitationsfeld übertragene Impuls (bzw. Energie) ist. Damit der Energie-Impulssatz erfüllt sei, müssen die Differentialausdrücke $\Gamma_{\mu\nu}$ der Fundamentalgrößen $\gamma_{\mu\nu}$, welche in die Gravitationsgleichungen

$$\varkappa\cdot\Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}$$

eingehen, so gewählt werden, daß

$$\frac{1}{2\varkappa}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\Gamma_{\mu\nu}$$

sich derart umformen läßt, daß er als Summe von Differentialquotienten erscheint. Es ist andererseits bekannt, daß in dem für $\Gamma_{\mu\nu}$ zu suchenden Ausdruck der Term (a) erscheint. Die gesuchte identische Gleichung ist also von folgender Gestalt:

Summe von Differentialquotienten

$$= \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\left\{\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)\right.$$

+ weitere Glieder, die bei Bildung der ersten Annäherung wegfallen.}

Hierdurch ist die gesuchte Identität eindeutig bestimmt; bildet man sie nach dem angedeuteten Verfahren[1]), so erhält man:

$$(12)\left\{\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}\cdot\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\sigma}\right) - \frac{1}{2}\cdot\sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\sqrt{-g}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}\right)\\
&= \sum_{\mu\nu}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\left\{\sum_{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) - \sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\gamma_{\alpha\beta}g_{\tau\varrho}\frac{\partial\gamma_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\nu\varrho}}{\partial x_\beta}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\nu}\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{4}\sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Der in der geschweiften Klammer der rechten Seite stehende Ausdruck $\Gamma_{\mu\nu}$ ist demnach der von uns gesuchte Tensor, der in die Gravitationsgleichungen

$$\varkappa\Theta_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}$$

eintritt. Um diese Gleichungen besser überblicken zu können, führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$(13)\qquad -2\varkappa\cdot\vartheta_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta\tau\varrho}\left(\gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\nu}\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta}\right).$$

1) Vgl. II. Teil, § 4, Nr. 3.

$\vartheta_{\mu\nu}$ sei als „kontravarianter Spannungs-Energietensor des Gravitationsfeldes“ bezeichnet. Den zu ihm reziproken kovarianten Tensor bezeichnen wir mit $t_{\mu\nu}$; es ist also

$$(14)\qquad -2\varkappa \cdot t_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \left(\frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\mu} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\tau\varrho}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\tau\varrho}}{\partial x_\beta} \right).$$

Ebenfalls zur Abkürzung führen wir folgende Bezeichnungen ein für Differentialoperationen, ausgeführt an den Fundamentaltensoren γ bzw. g:

$$(15)\quad \varDelta_{\mu\nu}(\gamma) = \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\gamma_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) - \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\alpha\beta} g_{\tau\varrho} \frac{\partial \gamma_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{\nu\varrho}}{\partial x_\beta},$$

bzw.

$$(16)\quad D_{\mu\nu}(g) = \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\gamma_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \right) - \sum_{\alpha\beta\tau\varrho} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\tau\varrho} \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial g_{\nu\varrho}}{\partial x_\beta}.$$

Jeder dieser Operatoren liefert wieder einen Tensor der gleichen Art (bezügl. linearer Transformationen).

Bei Verwendung dieser Abkürzungen nimmt die Identität (12) die Form an:

$$(12\text{a})\ \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \varkappa \vartheta_{\mu\nu} \right\} = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \left\{ -\varDelta_{\mu\nu}(\gamma) + \varkappa \vartheta_{\mu\nu} \right\},$$

oder auch

$$(12\text{b})\ \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \sqrt{-g} \cdot \gamma_{\mu\nu} \cdot \varkappa t_{\mu\sigma} \right\} = \tfrac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \left\{ -D_{\mu\nu}(g) - \varkappa \cdot t_{\mu\nu} \right\}.$$

Schreiben wir die Erhaltungsgleichung (10) der Materie und die Erhaltungsgleichung (12a) für das Gravitationsfeld in der Form

$$(10)\qquad \sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \Theta_{\mu\nu} \right) - \tfrac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \Theta_{\mu\nu} = 0$$

$$(12\text{c})\qquad \begin{aligned} &\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu} \cdot \vartheta_{\mu\nu} \right) - \tfrac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} \cdot \vartheta_{\mu\nu} \\ &\qquad = -\frac{1}{2\varkappa} \cdot \sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \varDelta_{\mu\nu}(\gamma), \end{aligned}$$

so erkennt man, daß der Spannungs-Energie-Tensor $\vartheta_{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes in den Erhaltungssatz für das Gravitationsfeld genau ebenso eintritt, wie der Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ des materiellen Vorganges in den Erhaltungssatz für diesen Vorgang, ein bemerkenswerter Umstand bei der Verschiedenheit der Ableitungen beider Sätze.

Aus der Gleichung (12a) folgt als Ausdruck für den Differentialtensor, der in die Gravitationsgleichungen eingeht

$$\Gamma_{\mu\nu} = \Delta_{\mu\nu}(\gamma) - \varkappa \cdot \vartheta_{\mu\nu}. \tag{17}$$

Die Gravitationsgleichungen (11) lauten also

$$\Delta_{\mu\nu}(\gamma) = \varkappa(\Theta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu}). \tag{18}$$

Diese Gleichungen erfüllen eine Forderung, die unseres Erachtens an eine Relativitätstheorie der Gravitation notwendig gestellt werden muß; sie zeigen nämlich, daß der Tensor $\vartheta_{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes in gleicher Weise felderregend auftritt, wie der Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ der materiellen Vorgänge. Eine Ausnahmestellung der Gravitationsenergie gegenüber allen anderen Energiearten würde ja zu unhaltbaren Konsequenzen führen.

Durch Addition der Gleichungen (10) und (12a) findet man mit Rücksicht auf die Gleichung (18)

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\sqrt{-g} \cdot g_{\sigma\mu}(\Theta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu})\right\} = 0. \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4) \tag{19}$$

Hieraus ersieht man, daß für Materie und Gravitationsfeld zusammen die Erhaltungssätze gelten.

Bei der bisher gegebenen Darstellung haben wir die kontravarianten Tensoren bevorzugt, weil sich der kontravariante Spannungsenergietensor der Strömung inkohärenter Massen in besonders einfacher Weise ausdrücken läßt. Indessen können wir die gewonnenen Fundamentalbeziehungen ebenso einfach unter Benutzung kovarianter Tensoren ausdrücken. Statt $\Theta_{\mu\nu}$ haben wir dann $T_{\mu\nu} = \sum_{\alpha\beta} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \Theta_{\alpha\beta}$ als Spannungs-Energietensor des materiellen Vorganges zugrunde zu legen. Statt Gleichung (10) erhalten wir durch gliedweise Umformung

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g} \cdot \gamma_{\mu\nu} T_{\mu\sigma}) + \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} \sqrt{-g} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot T_{\mu\nu} = 0. \tag{20}$$

Aus dieser Gleichung und (16) folgt, daß die Gleichungen des Gravitationsfeldes auch in der Form

$$-D_{\mu\nu}(g) = \varkappa(t_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \tag{21}$$

geschrieben werden können, welche Gleichungen auch direkt aus (18) abgeleitet werden können. Analog (19) besteht die Beziehung

$$\sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\sqrt{-g} \cdot \gamma_{\sigma\mu}(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu})\right\} = 0. \tag{22}$$

§ 6. Einfluß des Gravitationsfeldes auf physikalische Vorgänge, speziell auf die elektromagnetischen Vorgänge.

Weil bei jeglichem physikalischen Vorgang Impuls und Energie eine Rolle spielen, diese letzteren aber ihrerseits das Gravitationsfeld bestimmen und von ihm beeinflußt werden, müssen die das Schwerefeld bestimmenden Größen $g_{\mu\nu}$ in allen physikalischen Gleichungssystemen auftreten. So haben wir gesehen, daß die Bewegung des materiellen Punktes durch die Gleichung

$$\delta\{\int ds\} = 0$$

bestimmt ist, wobei

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu.$$

ds ist eine Invariante beliebigen Substitutionen gegenüber. Die gesuchten Gleichungen, welche den Ablauf irgend eines physikalischen Vorganges bestimmen, müssen nun so gebaut sein, daß die Invarianz von ds die Kovarianz des betreffenden Gleichungssystems zur Folge hat.

Bei der Verfolgung dieser allgemeinen Aufgaben stoßen wir aber zunächst auf eine prinzipielle Schwierigkeit. Wir wissen nicht, bezüglich welcher Gruppe von Transformationen die gesuchten Gleichungen kovariant sein müssen. Am natürlichsten erscheint es zunächst, zu verlangen, daß die Gleichungssysteme beliebigen Transformationen gegenüber kovariant sein sollen. Dem steht aber entgegen, daß die von uns aufgestellten Gleichungen des Gravitationsfeldes diese Eigenschaft nicht besitzen. Wir haben für die Gravitationsgleichungen nur beweisen können, daß sie beliebigen linearen Transformationen gegenüber kovariant sind; wir wissen aber nicht, ob es eine allgemeine Transformationsgruppe gibt, der gegenüber die Gleichungen kovariant sind. Die Frage nach der Existenz einer derartigen Gruppe für das Gleichungssystem (18) bzw. (21) ist die wichtigste, welche sich an die hier gegebenen Ausführungen anknüpft. Jedenfalls sind wir bei dem gegenwärtigen Stande der Theorie nicht berechtigt, die Kovarianz physikalischer Gleichungen beliebigen Substitutionen gegenüber zu fordern.

Anderseits aber haben wir gesehen, daß sich eine Energie-Impuls-Bilanzgleichung für materielle Vorgänge hat aufstellen lassen (§ 4, Gleichung 10), welche beliebige Transformationen gestattet. Es scheint deshalb doch natürlich, wenn wir voraussetzen, daß alle physikalischen Gleichungssysteme mit Ausschluß der Gravitationsgleichungen so zu formulieren sind, daß sie beliebigen Substitutionen gegenüber kovariant sind. Die diesbezügliche Ausnahmestellung der Gravitationsgleichungen gegenüber allen anderen Systemen hängt nach meiner Meinung damit zusammen, daß nur erstere zweite Ableitungen der Komponenten des Fundamentaltensors enthalten dürften.

Die Aufstellung derartiger Gleichungssysteme erfordert die Hilfsmittel der verallgemeinerten Vektoranalysis, wie sie im II. Teil dargestellt ist.

Wir beschränksn uns hier daranf, anzugeben, wie man auf diesem Wege die elektromagnetischen Feldgleichungen für das Vakuum gewinnt.[1]) Wir gehen davon aus, daß die elektrische Ladung als etwas unveränderliches anzusehen ist. Ein unendlich kleiner, beliebig bewegter Körper habe die Ladung e und für einen mitbewegten Körper das Volumen $d V_0$ (Ruhvolumen). Wir definieren $\frac{e}{d V_0} = \varrho_0$ als die wahre Dichte der Elektrizität; diese ist ihrer Definition nach ein Skalar. Es ist daher

$$\varrho_0 \frac{d x_\nu}{d s} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4)$$

ein kontravarianter Vierervektor, den wir umformen, indem wir die Dichte ϱ der Elektrizität, aufs Koordinatensystem bezogen, durch die Gleichung

$$\varrho_0 d V_0 = \varrho d V$$

definieren. Unter Benutzung der Gleichung

$$d V_0 d s = \sqrt{-g} \cdot d V \cdot d t$$

des § 4 erhält man

$$\varrho_0 \frac{d x_\nu}{d s} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varrho \frac{d x_\nu}{d t},$$

d. h. den kontravarianten Vektor der elektrischen Strömung.

Das elektromagnetische Feld führen wir zurück auf einen speziellen, kontravarianten Tensor zweiten Ranges $\varphi_{\mu\nu}$ (einen Sechservektor) und bilden den „dualen" kontravarianten Tensor zweiten Ranges $\varphi^*_{\mu\nu}$ nach der Methode, die im II. Teil, § 3, auseinandergesetzt ist (Formel 42). Die Divergenz eines speziellen kontravarianten Tensors zweiten Ranges ist nach Formel 40 des II. Teiles, § 3

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{-g} \cdot \varphi_{\mu\nu}\right).$$

Als Verallgemeinerung der Maxwell-Lorentzschen Feldgleichungen setzen wir die Gleichungen an

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{-g} \cdot \varphi_{\mu\nu}\right) = \varrho \frac{d x_\mu}{d t}, \qquad (d t = d x_4) \tag{23}$$

$$\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{-g} \cdot \varphi^*_{\mu\nu}\right) = 0, \tag{24}$$

deren Kovarianz demnach evident ist. Setzen wir

$$\sqrt{-g} \cdot \varphi_{23} = \mathfrak{H}_x,\ \sqrt{-g} \cdot \varphi_{31} = \mathfrak{H}_y,\ \sqrt{-g} \cdot \varphi_{12} = \mathfrak{H}_z;$$
$$\sqrt{-g} \cdot \varphi_{14} = -\mathfrak{E}_x,\ \sqrt{-g} \cdot \varphi_{24} = -\mathfrak{E}_y,\ \sqrt{-g} \cdot \varphi_{34} = -\mathfrak{E}_z,$$

1) Vgl. hierzu auch die auf S. 23 zitierte Abhandlung von Kottler, § 3.

und
$$\varrho \frac{d x_\mu}{d t} = u_\mu ,$$

so nimmt das Gleichungssystem (23) in ausführlicher Schreibweise die Form an
$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{d t} = u_x$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z} = \varrho ,$$

welche Gleichungen bis auf die Wahl der Einheiten mit dem ersten Maxwellschen System übereinstimmen. Für die Bildung des zweiten Systems ist zunächst zu beachten, daß zu den Komponenten
$$\mathfrak{H}_x,\ \mathfrak{H}_y,\ \mathfrak{H}_z,\ -\mathfrak{E}_x,\ -\mathfrak{E}_y,\ -\mathfrak{E}_z$$
von
$$\sqrt{-g} \cdot \varphi_{\mu\nu}$$
die Komponenten
$$-\mathfrak{E}_x,\ -\mathfrak{E}_y,\ -\mathfrak{E}_z,\ \mathfrak{H}_x,\ \mathfrak{H}_y,\ \mathfrak{H}_z$$
der Ergänzung $f_{\mu\nu}$ gehören (II. Teil, § 3, Formeln 41a). Für den Fall des Fehlens des Gravitationsfeldes ergibt sich hieraus das zweite System, d. h. Gleichung (24) in der Form
$$-\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} = 0.$$

Damit ist erwiesen, daß die aufgestellten Gleichungen wirklich eine Verallgemeinerung derjenigen der gewöhnlichen Relativitätstheorie bilden.

§ 7. Kann das Gravitationsfeld auf einen Skalar zurückgeführt werden?

Bei der unleugbaren Kompliziertheit der hier vertretenen Theorie der Gravitation müssen wir uns ernstlich fragen, ob nicht die bisher ausschließlich vertretene Auffassung, nach welcher das Gravitationsfeld auf einen Skalar Φ zurückgeführt wird, die einzig naheliegende und berechtigte sei. Ich will kurz darlegen, warum wir diese Frage verneinen zu müssen glauben.

Es bietet sich bei Charakterisierung des Gravitationsfeldes durch einen Skalar ein Weg dar, welcher dem im Vorhergehenden eingeschlagenen ganz analog ist. Man setzt als Bewegungsgleichung des materiellen Punktes in Hamiltonscher Form an
$$\delta \left\{ \int \Phi \, d s \right\} = 0,$$

wobei ds das vierdimensionale Linienelement der gewöhnlichen Relativitätstheorie und Φ ein Skalar ist, und geht dann ganz analog vor wie im Vorhergehenden, ohne die gewöhnliche Relativitätstheorie verlassen zu müssen.

Auch hier ist der materielle Vorgang beliebiger Art durch einen Spannungs-Energie-Tensor $T_{\mu\nu}$ charakterisiert. Aber es ist bei dieser Auffassung ein Skalar maßgebend für die Wechselwirkung zwischen Gravitationsfeld und materiellem Vorgang. Dieser Skalar kann, worauf mich Herr Laue aufmerksam machte, nur

$$\sum_{\mu} T_{\mu\mu} = P$$

sein, den ich als den „Laueschen Skalar" bezeichnen will[1]). Dann kann man dem Satz von der Äquivalenz der trägen und der schweren Masse auch hier bis zu einem gewissen Grade gerecht werden. Herr Laue wies mich nämlich darauf hin, daß für ein abgeschlossenes System

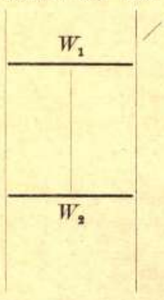
$$\int P\, dV = \int T_{44}\, d\tau$$

ist. Hieraus ersieht man, das für die Schwere eines abgeschlossenen Systems auch nach dieser Auffassung seine Gesamtenergie maßgebend ist.

Die Schwere nicht abgeschlossener Systeme würde aber von den orthogonalen Spannungen T_{11} usw. abhängen, denen das System unterworfen ist. Daraus entstehen Konsequenzen, die mir unannehmbar erscheinen, wie an dem Beispiel der Hohlraumstrahlung gezeigt werden soll.

Für die Strahlung im Vakuum verschwindet bekanntlich der Skalar P. Ist die Strahlung in einem masselosen spiegelnden Kasten eingeschlossen, so erfahren deren Wände Zugspannungen, die bewirken, daß dem System, — als Ganzes genommen — eine schwere Masse $\int P\, d\tau$ zukommt, die der Energie E der Strahlung entspricht.

Statt nun aber die Strahlung in einen Hohlkasten einzuschließen, denke ich mir dieselbe begrenzt



1. durch die spiegelnden Wände eines festangeordneten Schachtes S,
2. durch zwei vertikal verschiebbare spiegelnde Wände W_1 und W_2, welche durch einen Stab fest miteinander verbunden sind.

In diesem Falle beträgt die schwere Masse $\int P\, d\tau$ des beweglichen Systems nur den dritten Teil des Wertes, der bei einem als Ganzes beweglichen Kasten auftritt. Man würde also zum Emporheben der Strah-

1) Vgl. II. Teil, § 1, letzte Formel.

lung entgegen einem Schwerefelde nur den dritten Teil der Arbeit aufwenden müssen als in dem vorhin betrachteten Falle, daß die Strahlung in einem Kasten eingeschlossen ist. Dies erscheint mir unannehmbar.

Ich muß freilich zugeben, daß für mich das wirksamste Argument dafür, daß eine derartige Theorie zu verwerfen sei, auf der Überzeugung beruht, daß die Relativität nicht nur orthogonalen linearen Substitutionen gegenüber besteht, sondern einer viel weiteren Substitutionsgruppe gegenüber. Aber wir sind schon deshalb nicht berechtigt, dieses Argument geltend zu machen, weil wir nicht imstande waren, die (allgemeinste) Substitutionsgruppe ausfindig zu machen, welche zu unseren Gravitationsgleichungen gehört.

II.

Mathematischer Teil.

Von Marcel Grossmann.

Die mathematischen Hilfsmittel für die Entwicklung der Vektoranalysis eines Gravitationsfeldes, das durch die Invarianz des Linienelementes

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$$

charakterisiert ist, gehen zurück auf die fundamentale Abhandlung von Christoffel[1]) über die Transformation der quadratischen Differentialformen. Ricci und Levi-Civitá[2]) haben, ausgehend von den Christoffelschen Resultaten, ihre Methoden der absoluten, d. h. vom Koordinatensystem unabhängigen Differentialrechnung entwickelt, die gestatten, den Differentialgleichungen der mathematischen Physik eine invariante Form zu geben. Da aber die Vektoranalysis des auf beliebige krummlinige Koordinaten bezogenen euklidischen Raumes formal identisch ist mit der Vektoranalysis einer beliebigen, durch ihr Linienelement gegebenen Mannigfaltigkeit, so bietet es keine Schwierigkeiten, die vektoranalytischen Begriffsbildungen, wie sie in den letzten Jahren von Minkowski, Sommerfeld, Laue u. a. für die Relativitätstheorie entwickelt worden sind, auszudehnen auf die vorstehende allgemeine Theorie von Einstein.

Die allgemeine Vektoranalysis, die man so erhält, erweist sich bei einiger Übung als ebenso einfach zu handhaben, wie die spezielle des drei- oder vierdimensionalen euklidischen Raumes; ja die größere Allgemeinheit ihrer Begriffsbildungen verleiht ihr eine Übersichtlichkeit, die dem Spezialfall häufig genug abgeht.

Die Theorie der speziellen Tensoren (§ 3) ist in einer während des Entstehens dieser Arbeit erschienenen Abhandlung von Kottler[3])

1) Christoffel, Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades, J. f. Math. 70 (1869), S. 46.

2) Ricci et Levi-Civitá, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, Math. Ann. 54 (1901), S. 125.

3) Kottler, Über die Raumzeitlinien der Minkowskischen Welt, Wien. Ber. 121 (1912).

vollständig behandelt worden und zwar, was im allgemeinen Falle nicht möglich ist, auf Grund der Theorie der Integralformen.

Da sich an die Gravitationstheorie von Einstein, insbesondere aber an das Problem der Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes, eingehendere mathematische Untersuchungen werden knüpfen müssen, mag eine systematische Darstellung der allgemeinen Vektoranalysis am Platze sein. Dabei habe ich mit Absicht geometrische Hilfsmittel beiseite gelassen, da sie meines Erachtens wenig zur Veranschaulichung der Begriffsbildungen der Vektoranalysis beitragen.

§ 1. Allgemeine Tensoren.

Es sei

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu \tag{1}$$

das Quadrat des Linienelementes, welches als invariantes Maß des Abstandes zweier unendlich-benachbarter Raum-Zeitpunkte betrachtet wird. Die folgenden Entwicklungen sind, so weit keine andere Bemerkung gemacht wird, von der Anzahl der Variabeln unabhängig; diese möge mit n bezeichnet sein.

Bei einer Transformation

$$x_i = x_i\,(x_1', x_2', \ldots x_n') \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{2}$$

der Variabeln, oder einer Transformation

$$\begin{cases} dx_i = \sum_k \dfrac{\partial x_i}{\partial x_k'}\, dx_k' = \sum_k p_{ik} dx_k' \\ dx_i' = \sum_k \dfrac{\partial x_i'}{\partial x_k}\, dx_k = \sum_k \pi_{ki} dx_k \end{cases} \tag{3}$$

ihrer Differentiale, transformieren sich die Koeffizienten des Linienelementes gemäß der Formeln

$$g_{rs}' = \sum_{\mu\nu} p_{\mu r} p_{\nu s} g_{\mu\nu}. \tag{4}$$

Es sei g die Diskriminante der Differentialform (1), d. h. die Determinante

$$g = |g_{\mu\nu}|.$$

Ist $\gamma_{\mu\nu}$ die durch die Diskriminante dividierte („normierte"), dem Element $g_{\mu\nu}$ adjungierte Unterdeterminante von g, so transformieren sich diese Größen $\gamma_{\mu\nu}$ nach den Formeln

$$\gamma_{rs}' = \sum_{\mu\nu} \pi_{\mu r} \pi_{\nu s} \gamma_{\mu\nu}. \tag{5}$$

Wir definieren nun:

I. Der Inbegriff eines Systems von Funktionen $T_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda}$ der Variabeln x heiße ein **kovarianter Tensor vom Range** λ, wenn diese Größen sich transformieren gemäß den Formeln

$$T'_{r_1 r_2 \cdots r_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \cdots p_{i_\lambda r_\lambda} \cdot T_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda}. \tag{6}$$

II. Der Inbegriff eines Systems von Funktionen $\Theta_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda}$ der Variabeln x heiße ein **kontravarianter Tensor vom Range** λ, wenn diese Größen sich transformieren gemäß den Formeln

$$\Theta'_{r_1 r_2 \cdots r_\lambda} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} \pi_{i_1 r_1} \pi_{i_2 r_2} \ldots \pi_{i_\lambda r_\lambda} \cdot \Theta_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda}. \tag{7}$$ [1]

III. Der Inbegriff eines Systems von Funktionen $\mathfrak{T}_{i_1 i_2 \cdots i_\mu / k_1 k_2 \cdots k_\nu}$ der Variabeln x heiße ein **gemischter Tensor**, kovariant vom Range μ, kontravariant vom Range ν, wenn diese Größen sich transformieren nach den Formeln

$$\mathfrak{T}'_{r_1 r_2 \cdots r_\mu / s_1 s_1 \cdots s_\nu} = \sum_{\substack{i_1 i_2 \ldots i_\mu \\ k_1 k_2 \ldots k_\nu}} p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \ldots p_{i_\mu r_\mu} \cdot \pi_{k_1 s_1} \pi_{k_1 s_2} \ldots \pi_{k_\nu s_\nu} \cdot \mathfrak{T}_{i_1 i_2 \cdots i_\mu / k_1 k_2 \cdots k_\nu}. \tag{8}$$

Aus diesen Definitionen und den Gleichungen (4) und (5) folgt:

Die Größen $g_{\mu\nu}$ bilden einen kovarianten, die Größen $\gamma_{\mu\nu}$ einen kontravarianten Tensor zweiten Ranges, die Fundamentaltensoren des Gravitationsfeldes im Falle $n = 4$.

Die Größen dx_i bilden nach Gleichung (3) einen kontravarianten Tensor ersten Ranges. Tensoren ersten Ranges nennt man auch Vektoren erster Art oder Vierervektoren bei $n = 4$.

Unmittelbar aus der Definition der Tensoren ergeben sich die folgenden algebraischen Tensoroperationen:

1. Die Summe zweier gleichartiger Tensoren vom Range λ ist wieder ein gleichartiger Tensor vom Range λ, dessen Komponenten durch Addition der entsprechenden Komponenten beider Tensoren entstehen.

---

1) Unsere kovarianten (kontravarianten) Tensoren vom Range λ sind also identisch mit den „kovarianten (kontravarianten) Systemen λ^{ter} Ordnung" von Ricci und Levi-Cività und werden von diesen Autoren bezeichnet mit $X_{r_1 r_2 \cdots r_\lambda}$ bzw. $X^{r_1 r_2 \cdots r_\lambda}$. So viele Vorteile diese letztere Bezeichnung auch bietet, so haben uns doch Komplikationen in zusammengesetzteren Gleichungen gezwungen, die obigen Bezeichnungen zu wählen, also kovariante Tensoren mit lateinischen, kontravariante mit griechischen, gemischte mit deutschen Buchstaben zu bezeichnen. Kovariante und kontravariante Tensoren sind besondere Fälle der gemischten Tensoren.

2. Das äußere Produkt zweier kovarianter (kontravarianter) Tensoren vom Range λ bzw. μ ist ein kovarianter (kontravarianter) Tensor vom Range $\lambda + \mu$ mit den Komponenten

$$T_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda k_1 k_2 \cdots k_\mu} = A_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda} \cdot B_{k_1 k_2 \cdots k_\mu}, \tag{9}$$

bzw.

$$\Theta_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda k_1 k_2 \cdots k_\mu} = \Phi_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda} \cdot \Psi_{k_1 k_2 \cdots k_\mu}. \tag{9'}$$

3. Als inneres Produkt zweier Tensoren bezeichnen wir

a) den kovarianten Tensor

$$T_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_\mu} \Phi_{k_1 k_2 \cdots k_\mu} \cdot A_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda k_1 k_2 \cdots k_\mu}, \tag{10}$$

b) den kontravarianten Tensor

$$\Theta_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_\mu} A_{k_1 k_2 \cdots k_\mu} \cdot \Phi_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda k_1 k_2 \cdots k_\mu}, \tag{11}$$

c) den gemischten Tensor

$$\mathfrak{T}_{r_1 r_2 \cdots r_\mu / s_1 s_2 \cdots s_\nu} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda} A_{k_1 k_2 \cdots k_\lambda r_1 r_2 \cdots r_\mu} \cdot \Phi_{k_1 k_2 \cdots k_\lambda s_1 s_2 \cdots s_\nu}, \tag{12}$$

oder ganz allgemein, die drei Fälle a) bis c) mit enthaltend

d) $$\mathfrak{T}_{r_1 r_2 \cdots r_\mu u_1 u_2 \cdots u_\alpha s_1 s_2 \cdots s_\nu v_1 v_2 \cdots v_\beta} = \sum_{k_1 k_2 \ldots k_\lambda} \mathfrak{A}_{r_1 r_2 \cdots r_\mu / k_1 k_2 \cdots k_\lambda v_1 v_2 \cdots v_\beta} \cdot \mathfrak{B}_{k_1 k_2 \cdots k_\lambda u_1 u_2 \cdots u_\alpha / s_1 s_2 \cdots s_\nu}.$$

Die der gewöhnlichen Vektoranalysis entnommenen Bezeichnungen „äußeres und inneres Produkt" rechtfertigen sich, weil jene Operationen sich letzten Endes als besondere Fälle der hier betrachteten ergeben.

Ist in den Fällen a) oder b) der Rang λ gleich Null, so ist das innere Produkt ein Skalar.

4. Reziprozität eines kovarianten und eines kontravarianten Tensors. Aus einem kovarianten Tensor vom Range λ bildet man den reziproken kontravarianten Tensor vom Range λ durch λ-fache innere Multiplikation mit dem kontravarianten Fundamentaltensor:

$$\Theta_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \cdots k_\lambda} \gamma_{i_1 k_1} \gamma_{i_2 k_2} \cdots \gamma_{i_\lambda k_\lambda} \cdot T_{k_1 k_2 \cdots k_\lambda}, \tag{13}$$

woraus durch Auflösung

$$T_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda} = \sum_{k_1 k_2 \cdots k_\lambda} g_{i_1 k_1} g_{i_2 k_2} \cdots g_{i_\lambda k_\lambda} \cdot \Theta_{k_1 k_2 \cdots k_\lambda}. \tag{14}$$

Man findet daher aus einem Tensor einen Skalar, in dem man ihn mit seinem reziproken Tensor multipliziert nach der Formel

$$\sum_{i_1 i_2 \ldots i_\lambda} T_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda} \cdot \Theta_{i_1 i_2 \cdots i_\lambda}. \tag{15}$$

Ein kovarianter (kontravarianter) Tensor ersten Ranges (Vierervektor bei $n = 4$) hat die Invariante

$$\sum_{ik} \gamma_{ik} T_i T_k$$

beziehungsweise

$$\sum_{ik} g_{ik} \Theta_i \Theta_k.$$

In der gewöhnlichen Relativitätstheorie ist die Kontravarianz identisch der Kovarianz und obige Invariante wird zum Quadrat des Betrages des Vierervektors

$$T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 + T_l^2.$$

Ein kovarianter (kontravarianter) Tensor zweiten Ranges hat die Invariante

$$\sum_{ik} \gamma_{ik} T_{ik}$$

beziehungsweise

$$\sum_{ik} g_{ik} \Theta_{ik},$$

die im Falle der bisherigen Relativitätstheorie zu

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} + T_{ll}$$

wird.[1])

§ 2. Differentialoperationen an Tensoren.

Wir führen folgende allgemeine Definitionen ein:

I. Als **Erweiterung** eines kovarianten (kontravarianten) Tensors vom Range λ bezeichnen wir den kovarianten (kontravarianten) Tensor vom Range $\lambda + 1$, der durch „kovariante (kontravariante) Differentiation“ aus jenem hervorgeht.

Nach Christoffel (l. c.) ist

$$(16) \qquad T_{r_1 r_2 \cdots r_\lambda s} = \frac{\partial T_{r_1 r_2 \cdots r_\lambda}}{\partial x_s} - \\ - \sum_k \left(\begin{Bmatrix} r_1 s \\ k \end{Bmatrix} T_{k r_2 \cdots r_\lambda} + \begin{Bmatrix} r_2 s \\ k \end{Bmatrix} T_{r_1 k \cdots r_\lambda} + \cdots + \begin{Bmatrix} r_\lambda s \\ k \end{Bmatrix} T_{r_1 r_2 \cdots k} \right)$$

1) Wir verzichten im folgenden darauf, jeweilen die besondere Form anzugeben, welche unsere Formeln im Falle der gewöhnlichen Relativitätstheorie annehmen, begnügen uns vielmehr damit, hinzuweisen auf die nachstehenden Darstellungen:

1. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern, Göttinger Nachrichten 1908.

2. Sommerfeld, Zur Relativitätstheorie I und II, Ann. d. Physik, vierte Folge, 32 (1910) und 33 (1910).

3. Laue, Das Relativitätsprinzip. Die Wissenschaft, Heft 38, 2. A. (1913).

ein kovarianter Tensor vom Range $\lambda+1$, der aus dem kovarianten Tensor vom Range λ hervorgeht. Ricci und Levi-Cività nennen die Differentialoperation der rechten Seite dieser Gleichung die „kovariante Differentiation" des Tensors $T_{r_1 r_2 \cdots r_\lambda}$. Hierbei bedeutet

$$\left\{ {r s \atop u} \right\} = \sum_t \gamma_{ut} \left[{r s \atop t} \right], \tag{17}$$

$$\left[{r s \atop t} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{st}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_t} \right). \tag{18}$$

$\left[{r s \atop t} \right]$ und $\left\{ {r s \atop u} \right\}$ sind die Christoffelschen Drei-Indizes-Symbole erster bzw. zweiter Art; durch Auflösung der Gleichungen (17) findet man

$$\left[{r s \atop u} \right] = \sum_t g_{ut} \left\{ {r s \atop t} \right\}.\text{[1]} \tag{19}$$

Führt man in die Gleichung (16) an Stelle der kovarianten Tensoren die zu ihnen reziproken kontravarianten Tensoren ein, so erhält man als „kontravariante Erweiterung"

$$\Theta_{r_1 r_2 \cdots r_\lambda s} = \sum_{ik} \gamma_{si} \left(\frac{\partial \Theta_{r_1 r_2 \cdots r_\lambda}}{\partial x_i} + \left\{ {i k \atop r_1} \right\} \Theta_{k r_2 \cdots r_\lambda} + \left\{ {i k \atop r_2} \right\} \Theta_{r_1 k \cdots r_\lambda} + \cdots + \left\{ {i k \atop r_\lambda} \right\} \Theta_{r_1 r_2 \cdots k} \right). \tag{20}$$

II. Als **Divergenz** eines kovarianten (kontravarianten) Tensors vom Range λ bezeichnen wir den kovarianten (kontravarianten) Tensor vom Range $\lambda - 1$, der durch innere Multiplikation der Erweiterung mit dem kontravarianten (kovarianten) Fundamentaltensor entsteht.

Somit ist die Divergenz des kovarianten Tensors $T_{r_1 r_2 \cdots r_\lambda}$ der Tensor

$$T_{r_2 r_3 \cdots r_\lambda} = \sum_{s r_1} \gamma_{s r_1} T_{r_1 \cdots r_\lambda s}, \tag{21}$$

und die Divergenz des kontravarianten Tensors $\Theta_{r_1 r_2 \cdots r_\lambda}$ ist der Tensor

$$\Theta_{r_2 r_3 \cdots r_\lambda} = \sum_{s r_1} g_{s r_1} \Theta_{r_1 \cdots r_\lambda s}. \tag{22}$$

Die Divergenz eines Tensors geht nicht eindeutig aus diesem hervor; das Resultat ändert sich im allgemeinen, wenn man in den Gleichungen (21) und (22) r_1 durch einen der Indizes $r_2, r_3 \ldots r_\lambda$ ersetzt.

III. Als **verallgemeinerte Laplacesche Operation** an einem Tensor bezeichnen wir die Aufeinanderfolge der Erweiterung und der Divergenz. Die verallgemeinerte Laplacesche Operation läßt daher aus einem Tensor einen gleichartigen gleichen Ranges hervorgehen.

Von besonderem Interesse sind die Fälle $\lambda = 0, 1, 2$.

1) Auf Grund dieser Formeln beweist man leicht, daß die Erweiterung des Fundamentaltensors identisch verschwindet.

a) $\lambda = 0$.

Der Ausgangstensor ist ein **Skalar** T, den wir als ko- oder kontravarianten Tensor vom Range 0 betrachten können.

$$T_r = \frac{\partial T}{\partial x_r} \tag{23}$$

ist die kovariante Erweiterung des Skalars T, d. i. ein kovarianter Tensor ersten Ranges (kovarianter Vierervektor für $n = 4$), den man den **Gradienten** des Skalars nennt. Die Invariante

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} \frac{\partial T}{\partial x_r} \frac{\partial T}{\partial x_s} \tag{24}$$

ist der erste **Beltramische** Differentialparameter des Skalars T.

Um die **Divergenz des Gradienten** zu bilden, hat man aus seiner Erweiterung

$$T_{rs} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_k \begin{Bmatrix} rs \\ k \end{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

den Skalar

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs}$$

zu bilden, dem man die Form

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{rs} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{rs} \frac{\partial T}{\partial x_r} \right) \tag{25}$$

geben kann.[1]) Die Divergenz des Gradienten ist das Resultat der verallgemeinerten **Laplaceschen** Operation ausgeführt am Skalar T und ist identisch mit dem zweiten **Beltramischen** Differentialparameter des Skalars T.

b) $\lambda = 1$.

Der Ausgangstensor sei ein kovarianter Vierervektor, könnte aber ebensogut ein kontravarianter Vierervektor sein.

Die kovariante Erweiterung ist nach (16)

$$T_{rs} = \frac{\partial T_r}{\partial x_s} - \sum_k \begin{Bmatrix} rs \\ k \end{Bmatrix} T_k. \tag{26}$$

Die Divergenz ist

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs} = \sum_{rsk} \gamma_{rs} \left(\frac{\partial T_r}{\partial x_s} - \begin{Bmatrix} rs \\ k \end{Bmatrix} T_k \right), \tag{27}$$

der wir nach (17) die Form geben:

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs} = \sum_{rskl} \left(\frac{\partial}{\partial x_s} (\gamma_{rs} T_r) - \frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_s} \cdot T_r - \frac{1}{2} \gamma_{rs} \gamma_{kl} \left(\frac{\partial g_{rl}}{\partial x_s} + \frac{\partial g_{sl}}{\partial x_r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_l} \right) T_k \right). \tag{28}$$

---

1) Siehe z. B. **Bianchi-Lukat**, Vorlesungen über Differentialgeometrie, **erste** Auflage, S. 47; oder auch die Umrechnung der Divergenz eines Vierervektors im nachstehenden Falle b).

Eliminiert man $\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_s}$ vermöge der Formel[1])

$$\frac{\partial \gamma_{rs}}{\partial x_t} = -\sum_{\varrho\sigma} \gamma_{r\varrho} \gamma_{s\sigma} \frac{\partial g_{\varrho\sigma}}{\partial x_t}, \tag{29}$$

so heben sich in Gleichung (28) die drei mittleren Glieder unter dem Summenzeichen auf und es bleibt neben dem ersten Gliede

$$\sum_{rskl} \tfrac{1}{2} \gamma_{rs} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_l} \cdot \gamma_{kl} T_k = \sum_{kl} \gamma_{kl} T_k \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x_l},$$

so daß man für die Divergenz des kovarianten Vierervektors[2]) findet

$$\sum_{rs} \gamma_{rs} T_{rs} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{rs} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{rs} T_r\right). \tag{30}$$

c) $\lambda = 2$.

Der Ausgangstensor sei ein kontravarianter Tensor zweiten Ranges Θ_{rs}, dessen Erweiterung nach Formel (20) lautet

$$\Theta_{rst} = \sum_{ik} \gamma_{ti} \left(\frac{\partial \Theta_{rs}}{\partial x_i} + \left\{ {ik \atop r} \right\} \Theta_{ks} + \left\{ {ik \atop s} \right\} \Theta_{rk} \right). \tag{31}$$

Hieraus ergibt sich als Divergenz des kontravarianten Tensors Θ_{rs} entweder die Zeilendivergenz

$$\Theta_r = \sum_{st} g_{st} \Theta_{rst} = \sum_{sk} \left(\frac{\partial \Theta_{rs}}{\partial x_s} + \left\{ {sk \atop r} \right\} \Theta_{ks} + \left\{ {sk \atop s} \right\} \Theta_{rk} \right), \tag{32}$$

oder die Kolonnendivergenz

$$\Theta_s = \sum_{rt} g_{rt} \Theta_{rst} = \sum_{rk} \left(\frac{\partial \Theta_{rs}}{\partial x_r} + \left\{ {rk \atop r} \right\} \Theta_{ks} + \left\{ {rk \atop s} \right\} \Theta_{rk} \right), \tag{33}$$

---

1) Diese Formel, die wir auch in § 4 bei der Aufstellung der Differentialgleichungen des Gravitationsfeldes verwenden, beweisen wir folgendermaßen:

Es ist

$$\sum_l g_{il} \gamma_{kl} = \delta_{ik} \ (0 \text{ oder } 1),$$

also

$$\sum_l g_{il} \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_t} = -\sum_l \gamma_{kl} \frac{\partial g_{il}}{\partial x_t},$$

wo t irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots n$ ist.

Für ein bestimmtes k erhält man so n Gleichungen $(i = 1, 2, \ldots n)$ mit den n Unbekannten $\frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_t}$, $(l = 1, 2, \ldots n)$, deren Auflösung die Formel des Textes liefert.

2) Zu dem nämlichen Ergebnis gelangt Kottler (l. c. pag. 21) ausgehend von einem speziellen Tensor dritten Ranges (vgl. § 3 dieser Abhandlung) mit Hilfe der Theorie der Integralformen.

zwei Differentialoperationen, die für symmetrische Tensoren zusammenfallen. Weil

$$(34)\qquad \sum_r \begin{Bmatrix} rk \\ r \end{Bmatrix} = \sum_{rs} \gamma_{rs} \begin{bmatrix} rk \\ s \end{bmatrix} = \sum_{rs} \tfrac{1}{2} \gamma_{rs} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x_k} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x_k}$$

ist, so läßt sich die Formel (33) auch zusammenfassen in

$$(35)\qquad \Theta_s = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_r \frac{\partial}{\partial x_r} (\sqrt{g} \cdot \Theta_{rs}) + \sum_{rk} \begin{Bmatrix} rk \\ s \end{Bmatrix} \Theta_{rk}.$$

§ 3. Spezielle Tensoren (Vektoren).

Ein kovarianter (kontravarianter) Tensor heiße speziell, wenn seine Komponenten ein System von alternierenden Funktionen der Grundvariabeln bilden.

Die Komponenten eines speziellen Tensors sind demnach den folgenden Bedingungen unterworfen:

1. Es ist $T_{r_1 r_2 \cdots r_\lambda} = 0$, wenn zwei der Indizes $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ einander gleich sind.

2. Unterscheiden sich $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ und $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ nur durch die Reihenfolge der Indizes, so ist $T_{r_1 r_2 \cdots r_\lambda} = \pm T_{s_1 s_2 \cdots s_\lambda}$, je nachdem $r_1, r_2, \ldots r_\lambda$ und $s_1, s_2, \ldots s_\lambda$ Permutationen derselben Klasse sind oder nicht. Zwei Permutationen gehören bekanntlich zu der gleichen Klasse, wenn beide durch eine gerade bezw. ungerade Anzahl von bloßen Vertauschungen zweier Indizes aus der Grundpermutation $1, 2, \ldots n$ hervorgehen.

Die Anzahl der linear unabhängigen Komponenten eines speziellen Tensors vom Range λ ist demnach $\binom{n}{\lambda}$.

Die Theorie der speziellen Tensoren gestaltet sich vermöge dieser Eigenschaften einfacher, aber auch reichhaltiger als die der allgemeinen Tensoren; sie ist von besonderer Bedeutung für die mathematische Physik, weil die Theorie der Vektoren λ^{ter} Art (Vierer-, Sechservektoren bei $n = 4$) sich zurückführen läßt auf die speziellen Tensoren vom Range λ. Vom Standpunkte der allgemeinen Theorie aus ist es zweckmäßiger von den Tensoren auszugehen und die Vektoren lediglich als spezielle Tensoren zu behandeln.

Wichtig für die Vektoranalysis der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu$$

ist ein spezieller Tensor n^{ten} Ranges, der mit der Diskriminante g des

Linienelementes verknüpft ist.[1]) Diese Diskriminante transformiert sich ja gemäß der Gleichung

$$g' = p^2 \cdot g, \tag{36}$$

wo

$$p = | p_{ik} | = \left| \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} \right|$$

die Funktionaldeterminante der Substitution ist. Gibt man $\sqrt{g}$ für das ursprüngliche Bezugssystem ein bestimmtes Vorzeichen, und setzt man fest, daß sich dieses Vorzeichen bei einer Transformation ändern soll oder nicht, je nachdem die Substitutionsdeterminante p negativ oder positiv ist, so hat die Gleichung

$$\sqrt{g'} = p \cdot \sqrt{g} \tag{37}$$

exakte Bedeutung mit Einschluß der Vorzeichen.

Es sei nun $\delta_{r_1 r_2 \cdots r_n}$ gleich Null, wenn zwei der Indizes einander gleich sind, dagegen ± 1, wenn dies nicht der Fall ist und die Permutation $r_1, r_2, \ldots r_n$ durch eine gerade bezw. ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Indizes aus der Grundpermutation $1, 2, \ldots n$ hervorgeht.

Dann sind

$$e_{r_1 r_2 \cdots r_n} = \delta_{r_1 r_2 \cdots r_n} \cdot \sqrt{g} \tag{38}$$

die Komponenten eines speziellen kovarianten Tensors n ten Ranges, den wir den kovarianten Diskriminantentensor nennen wollen. Denn eine Transformation liefert zunächst

$$e'_{r_1 r_2 \cdots r_n} = \delta_{r_1 r_2 \cdots r_n} \cdot \sqrt{g'} = \delta_{r_1 r_2 \cdots r_n} \cdot p \sqrt{g};$$

da aber

$$p = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} \delta_{i_1 i_2 \cdots i_n} \cdot p_{i_1 1} p_{i_2 2} \cdots p_{i_n n} = \delta_{r_1 r_2 \cdots r_n} \cdot \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} \delta_{i_1 i_2 \cdots i_n} \cdot p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \cdots p_{i_n r_n}$$

ist, so folgt

$$e'_{r_1 r_2 \cdots r_n} = \sqrt{g} \cdot \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} \delta_{i_1 i_2 \cdots i_n} \cdot p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \cdots p_{i_n r_n},$$

also wegen der Definition (38)

$$e'_{r_1 r_2 \cdots r_n} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_n} e_{i_1 i_2 \cdots i_n} \cdot p_{i_1 r_1} p_{i_2 r_2} \cdots p_{i_n r_n}.$$

Für den reziproken kontravarianten Tensor findet man nach (13)

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \sum_{r_1 r_2 \ldots r_n} \gamma_{i_1 r_1} \gamma_{i_2 r_2} \cdots \gamma_{i_n r_n} \cdot e_{r_1 r_2 \cdots r_n},$$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \sqrt{g} \cdot \sum_{r_1 r_2 \ldots r_n} \delta_{r_1 r_2 \cdots r_n} \cdot \gamma_{i_1 r_1} \gamma_{i_2 r_2} \cdots \gamma_{i_n r_n},$$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \delta_{i_1 i_2 \cdots i_n} \cdot \sqrt{g} \cdot \sum_{r_1 r_2 \ldots r_n} \delta_{r_1 r_2 \cdots r_n} \cdot \gamma_{1 r_1} \gamma_{2 r_2} \cdots \gamma_{n r_n}.$$

---

1) Das „System ε" von Ricci und Levi-Civitа̀, l. c., pag. 135.

Da aber die Determinante der normierten Unterdeterminanten γ_{ik}

$$|\gamma_{ik}| = \frac{1}{g}$$

ist, so folgt

(39) $$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \frac{\delta_{i_1 i_2 \cdots i_n}}{\sqrt{g}}.$$

Die Bedeutung des kovarianten (kontravarianten) Diskriminanten tensors liegt darin, daß seine innere Multiplikation mit einem kontravarianten (kovarianten) Tensor vom Range λ einen gleichartigen Tensor vom Range $\lambda - n$ liefert, wobei der Tensor von entgegengesetzter Art wird, wenn $\lambda - n$ negativ ist. (Ergänzung des Tensors.)

Wenn

$$n = 4$$

ist, so gibt es spezielle Tensoren bis zum vierten Rang, da alle speziellen Tensoren höheren Ranges identisch verschwinden.

Die nichtverschwindenden Komponenten eines speziellen kovarianten Tensors vierten Ranges sind alle einander gleich oder entgegengesetzt gleich. Die Ergänzung (innere Multiplikation mit dem kontravarianten Diskriminantentensor) ergibt einen Skalar, so daß die Differentialoperationen, die an einem speziellen Tensor vierten Ranges ausgeführt werden können, damit zurückgeführt sind auf die Differentialoperationen an einen Skalar.

Die Ergänzung eines speziellen kovarianten Tensors dritten Ranges ist ein kontravarianter Vektor erster Art.

Die Ergänzung eines speziellen kovarianten Tensors zweiten Ranges ist ein kontravarianter, spezieller Tensor zweiten Ranges.

Endlich führt die Ergänzung eines speziellen kovarianten Vektors erster Art auf einen kontravarianten Tensor dritten Ranges.

Die Untersuchung des Einflusses des Gravitationsfeldes auf die physikalischen Vorgänge (I. Teil, § 6) erfordert die eingehendere Behandlung der speziellen Tensoren zweiten Ranges (Sechservektoren).

Ist $\Theta_{\mu\nu}$ ein spezieller Tensor zweiten Ranges, so reduziert sich seine Divergenz (Formel 35)

$$\Theta_\mu = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{g} \cdot \Theta_{\mu\nu}) + \sum_{\nu\varkappa} \left\{ {\nu\varkappa \atop \mu} \right\} \Theta_{\nu\varkappa}$$

wegen

$$\Theta_{\nu\varkappa} = -\Theta_{\varkappa\nu}, \quad \Theta_{\nu\nu} = 0$$

auf

(40) $$\Theta_\mu = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\sqrt{g} \cdot \Theta_{\mu\nu}).$$

Wir leiten ferner aus einem kontravarianten Tensor zweiten Ranges $\Theta_{\mu\nu}$ folgendermaßen den dualen kontravarianten Tensor zweiten Ranges Θ^*_{rs} ab.

Wir bilden zuerst die Ergänzung[1]

$$T_{ik} = \tfrac{1}{2}\sum_{\mu\nu} e_{ik\mu\nu} \cdot \Theta_{\mu\nu}, \tag{41}$$

oder also

$$\begin{cases} T_{12} = \sqrt{g}\cdot\Theta_{34}, & T_{13} = \sqrt{g}\cdot\Theta_{42}, \quad T_{14} = \sqrt{g}\cdot\Theta_{23}; \\ T_{23} = \sqrt{g}\cdot\Theta_{14}, & T_{24} = \sqrt{g}\cdot\Theta_{31}, \quad T_{34} = \sqrt{g}\cdot\Theta_{12}. \end{cases} \tag{41a}$$

Der gesuchte duale Tensor ist nun reziprok zu dieser Ergänzung, lautet daher

$$\Theta^*_{rs} = \sum_{ik} \gamma_{ir}\gamma_{ks} \cdot T_{ik} = \tfrac{1}{2}\sum_{ik\mu\nu} \gamma_{ir}\gamma_{ks} e_{ik\mu\nu} \cdot \Theta_{\mu\nu}. \tag{42}$$

Die Reihenfolge der beiden Operationen — Ergänzung und Bildung des reziproken Tensors — ist wegen der Reziprozität der beiden Diskriminantentensoren vertauschbar. —

§ 4. Mathematische Ergänzungen zum physikalischen Teil.

1. Beweis der Kovarianz der Impuls-Energiegleichungen.

Es ist zu beweisen, daß sich die Gleichungen (10) des I. Teiles, S. 10, die vom Faktor $\sqrt{-1}$ abgesehen lauten

$$\sum_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{g}\cdot g_{\sigma\mu}\cdot\Theta_{\mu\nu}\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{g}\cdot\sum_{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot\Theta_{\mu\nu} = 0, \qquad (\sigma = 1,2,3,4)$$

beliebigen Transformationen gegenüber kovariant verhalten.

Nach Formel (35) ist die Divergenz des kontravarianten Tensors $\Theta_{\mu\nu}$

$$\Theta_\mu = \sum_\nu \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{g}\cdot\Theta_{\mu\nu}\right) + \sum_{\nu k}\left\{ {\nu k \atop \mu} \right\}\Theta_{\nu k}.$$

Der zu diesem kontravarianten Vektor Θ_μ reziproke kovariante Vektor T_σ ist also

$$T_\sigma = \sum_\mu g_{\sigma\mu}\Theta_\mu = \sum_{\mu\nu k}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sqrt{g}\cdot g_{\sigma\mu}\cdot\Theta_{\mu\nu}\right) - \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}\cdot\Theta_{\mu\nu} + g_{\sigma\mu}\left\{ {\nu k \atop \mu} \right\}\cdot\Theta_{\nu k}\right).$$

Das letzte Glied dieser Summe ist aber gleich

$$\sum_{\nu k}\left[{\nu k \atop \sigma} \right]\Theta_{\nu k} = \sum_{\mu\nu}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)\cdot\Theta_{\mu\nu}.$$

1) Der Faktor $\frac{1}{2}$ dient zur Vereinfachung des Resultates, ohne invariantentheoretisch von Belang zu sein.

Also bleibt

$$T_\sigma = \sum_{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\sqrt{g} \cdot g_{\sigma\mu} \Theta_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} \cdot \Theta_{\mu\nu},$$

d. h. bis auf den Faktor $\frac{1}{\sqrt{g}}$ die linke Seite der untersuchten Gleichung. Dividiert man also jene Gleichung durch $\sqrt{g}$, so stellt ihre linke Seite die σ-Komponente eines kovarianten Vektors dar, ist also in der Tat kovariant. Man kann daher den Inhalt jener vier Gleichungen auch so aussprechen:

Die Divergenz des (kontravarianten) Spannungs-Energietensors der materiellen Strömung bzw. des physikalischen Vorganges verschwindet.

2. Differentialtensoren einer durch ihr Linienelement gegebenen Mannigfaltigkeit.

Das Problem der Aufstellung der Differentialgleichungen eines Gravitationsfeldes (I. Teil, § 5) lenkt die Aufmerksamkeit auf die Differentialinvarianten und Differentialkovarianten der quadratischen Differentialform

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu.$$

Die Theorie dieser Differentialkovarianten führt im Sinne unserer allgemeinen Vektoranalysis auf die Differentialtensoren, die mit einem Gravitationsfeld gegeben sind. Das vollständige System dieser Differentialtensoren (beliebigen Transformationen gegenüber) geht zurück auf eine von Riemann[1]) und unabhängig von diesem von Christoffel[2]) gefundenen kovarianten Differentialtensor vierten Ranges, den wir den Riemannschen Differentialtensor nennen wollen und der folgendermaßen lautet

$$(43)\quad \begin{aligned} R_{iklm} = (ik, lm) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x_i \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_k \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{mk}}{\partial x_l \partial x_i}\right) \\ + \sum_{\varrho\sigma} \gamma_{\varrho\sigma}\left(\begin{bmatrix} im \\ \varrho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kl \\ \sigma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} il \\ \varrho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} km \\ \sigma \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Durch kovariante algebraische und differentielle Operationen erhält man aus dem Riemannschen Differentialtensor und dem Diskriminantentensor (§ 3, Formel 38) das vollständige System der Differentialtensoren (also auch der Differentialinvarianten) der Mannigfaltigkeit.

---

1) Riemann, Ges. Werke, S. 270.

2) Christoffel, l. c., S. 54.

(ik, lm) heißen auch die Christoffelschen Vier-Indizes-Symbole erster Art. Von Bedeutung sind neben diesen die Vier-Indizes-Symbole zweiter Art

$$(44)\qquad \{ik, lm\} = \frac{\partial \left\{ {il \atop k} \right\}}{\partial x_m} - \frac{\partial \left\{ {im \atop k} \right\}}{\partial x_l} + \sum_\varrho \left(\left\{ {il \atop \varrho} \right\} \left\{ {\varrho m \atop k} \right\} - \left\{ {im \atop \varrho} \right\} \left\{ {\varrho l \atop k} \right\} \right),$$

die mit jenen in der Beziehung stehen

$$(45)\qquad \begin{cases} \{i\varrho, lm\} = \sum\limits_k \gamma_{\varrho k}(ik, lm), \text{ oder aufgelöst} \\ (ik, lm) = \sum\limits_\varrho g_{k\varrho}\,\{i\varrho, lm\}. \end{cases}$$

Den Vier-Indizes-Symbolen zweiter Art kommt in der allgemeinen Vektoranalysis die Bedeutung der Komponenten eines gemischten Tensors, kovariant vom dritten, kontravariant vom ersten Range zu.[1])

Die hervorragende Bedeutung dieser Begriffsbildungen für die Differentialgeometrie[2]) einer durch ihr Linienelement gegebenen Mannigfaltigkeit macht es a priori wahrscheinlich, daß diese allgemeinen Differentialtensoren auch für das Problem der Differentialgleichungen eines Gravitationsfeldes von Bedeutung sein dürften. Es gelingt in der Tat zunächst, einen kovarianten Differentialtensor zweiten Ranges und zweiter Ordnung G_{im} anzugeben, der in jene Gleichungen eintreten könnte, nämlich

$$(46)\qquad G_{im} = \sum_{kl} \gamma_{kl}(ik, lm) = \sum_k \{ik, km\}.$$

Allein es zeigt sich, daß sich dieser Tensor im Spezialfall des unendlich schwachen statischen Schwerefeldes nicht auf den Ausdruck $\Delta\varphi$ reduziert. Wir müssen daher die Frage offen lassen, inwiefern die allgemeine Theorie der mit einem Gravitationsfeld verknüpften Differentialtensoren mit dem Problem der Gravitationsgleichungen zusammenhängt. Ein solcher Zusammenhang müßte vorhanden sein, sofern die Gravitationsgleichungen beliebige Substitutionen zuzulassen hätten; allein in diesem Falle scheint es ausgeschlossen zu sein, Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufzufinden. Würde dagegen feststehen, daß die Gravitationsgleichungen nur eine gewisse Gruppe von Transformationen gestatten, so wäre es verständlich, wenn man mit den von der allgemeinen Theorie gelieferten Differentialtensoren nicht auskommt. Wie im physikalischen Teile ausgeführt ist, sind wir nicht imstande, zu diesen Fragen Stellung zu nehmen. —

1) Es folgt dies aus der ersten der Gleichungen 45.

2) Das identische Verschwinden des Tensors R_{iklm}, stellt die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß die Differentialform auf die Form $\sum\limits_i dx_i^2$ transformiert werden kann.

3. Zur Ableitung der Gravitationsgleichungen.

Die von Einstein beschriebene Herleitung der Gravitationsgleichungen (I. Teil, § 5), wird im Einzelnen folgendermaßen durchgeführt.

Wir gehen aus von dem in der Energiebilanz mit Gewißheit zu erwartenden Gliede

$$U=\sum_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{g}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) \tag{47}$$

und formen durch partielle Integration um.[1]) Es wird so

$$U=\sum_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{g}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)-\sum_{\alpha\beta\mu\nu}\sqrt{g}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\cdot\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma\partial x_\alpha}.$$

Die erste der auf der rechten Seite stehenden Summen hat die gewünschte Form einer Summe von Differentialquotienten und sei bezeichnet mit A, so daß

$$A=\sum_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{g}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right). \tag{48}$$

In der zweiten der rechtsstehenden Summen führen wir wieder partielle Integration aus. Dann lautet die Identität

$$U=A-\sum_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\sqrt{g}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right)+\sum_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\sqrt{g}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right).$$

Die erste der rechts entstandenen Summen kann als eine Summe von Differentialen geschrieben werden und möge mit

$$B=\sum_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left(\sqrt{g}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right) \tag{49}$$

bezeichnet sein. In der zweiten Summe differentiieren wir aus. Dann wird

$$U=A-B+\sum_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\left(\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_\sigma}+\sqrt{g}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\cdot\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial x_\sigma}+\sqrt{g}\cdot\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta\partial x_\sigma}\right),$$

oder wenn man im zweiten Summanden die Formel (29) des § 2 anwendet und im dritten Summanden partiell integriert

$$\begin{aligned}U=A-B&+\sum_{\alpha\beta\mu\nu ik}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\cdot\frac{\sqrt{g}}{2}\gamma_{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma}-\sum_{\alpha\beta\mu\nu ik}\sqrt{g}\cdot\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\cdot\gamma_{\alpha i}\gamma_{\beta k}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma}\\&+\sum_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sqrt{g}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\right)-\sum_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\sqrt{g}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha}\right).\end{aligned}$$

---

1) Die Herleitung der gesuchten Identität vereinfacht sich, wenn wir den Faktor $\sqrt{g}$ unter das Differentiationszeichen setzen, ohne daß das Resultat hiervon abhängig wäre.

Die beiden ersten Summen haben die Form von Gliedern, wie wir sie auf die linke Seite unserer Identität setzen. Wir bezeichnen sie mit

$$V = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\mu\nu i k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \cdot \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{ik} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} \tag{50}$$

$$W = \sum_{\alpha\beta\mu\nu i k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \cdot \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha i} \gamma_{\beta k} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}. \tag{51}$$

Die dritte der rechts stehenden Summen hat die Form einer Summe von Differentialquotienten; eliminiert man in ihr $\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ vermöge jener Formel (29), so erweist sie sich als die schon eingeführte Größe A. In der letzten Summe endlich ersetzen wir nach der gleichen Formel $\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$. Wir finden so

$$U - V + W = 2A - B + \sum_{\alpha\beta\mu\nu i k} \gamma_{\mu i} \gamma_{\nu k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right),$$

oder

$$\begin{aligned} U - V + W = 2A - B &+ \sum_{\alpha\beta\mu\nu i k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\mu i} \gamma_{\nu k} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \right) \\ &- \sum_{\alpha\beta\mu\nu i k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\gamma_{\mu i} \gamma_{\nu k}). \end{aligned}$$

Die erste dieser Summen wird wegen (29), d. h. wegen

$$\sum_{\mu\nu} \gamma_{i\mu} \gamma_{\nu k} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_\alpha}$$

zu

$$- \sum_{\alpha\beta i k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial x_\alpha} \right) = - U.$$

Die zweite können wir, wegen der Vertauschbarkeit von i und k, μ und ν, schreiben als

$$\begin{aligned} 2X &= 2 \cdot \sum_{\alpha\beta\mu\nu i k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \cdot \sqrt{g} \cdot \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\mu i} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \gamma_{\nu k}}{\partial x_\beta} \\ &= - 2 \cdot \sum_{\alpha\beta\mu\nu i k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\sigma} \cdot \sqrt{g}\, \gamma_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{i\mu}}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \gamma_{k\nu}}{\partial x_\beta}. \end{aligned}$$

Die gesuchte Identität lautet also

$$2U - V + W + 2X = 2A - B,$$

ist also identisch der im I. Teil, § 5 gegebenen.