Plongements différentiables de variétés dans variétés [1])

par ANDRÉ HAEFLIGER Princeton, N.J. (USA) Institute for Advanced Study

Introduction

Le but de ce travail est de démontrer une partie des résultats annoncés dans [2].

Les variétés et les applications de variétés dans variétés considérées ici seront toujours indéfiniment différentiables, sauf mention explicite du contraire. Un *difféomorphisme* est un homéomorphisme différentiable dont l'inverse est aussi différentiable. Un *plongement* d'une variété compacte V dans une variété M est une application biunivoque de V dans M dont le rang est partout égal à la dimension de V.

Deux plongements f_0 et f_1 de V dans M sont *isotopes* (ou *difféotopes*) s'il existe une application $F: V \times I \to M$, où I est l'intervalle $[0, 1]$, telle que, pour tout $t \in I$ fixé, l'application $x \to F(x, t)$ est un plongement de V dans M, égal à f_0 pour $t = 0$ et à f_1 pour $t = 1$. L'application F est appelée une *isotopie* (ou *difféotopie*) reliant f_0 à f_1.

Cette définition est équivalente à la suivante (V étant toujours supposé compact): il existe une application $H: M \times I \to M$ telle que, pour tout $t \in I$ fixé, l'application $x \to H(x, t)$ est un difféomorphisme de M sur M, égal à l'identité pour $t = 0$ et tel que $f_1(x) = H(f_0(x), 1)$.

L'équivalence de ces deux définitions a été remarquée par THOM dans [6].

Théorème d'existence. *Soit V une variété compacte connexe sans bord de dimension n et soit M une variété de dimension m. Soit f une application continue de V dans M telle que $\pi_i(f) = 0$ pour $i \leqslant k + 1$ (i.e. l'homomorphisme $\pi_i(V) \to \pi_i(M)$ induit par f est un isomorphisme pour $i \leqslant k$ et est surjectif pour $i = k + 1$). Alors*

a) *f est homotope à un plongement si $m \geqslant 2n - k$ et $n > 2k + 2$ (ou, ce qui revient au même, $m \geqslant 2n - k$ et $2m \geqslant 3(n + 1)$),*

b) *deux plongements de V dans M homotopes à f sont isotopes si $m > 2n - k$ et $n \geqslant 2k + 2$ (ou $m > 2n - k$ et $2m > 3(n + 1)$).*

En particulier, si V est k-connexe et M $(k + 1)$-connexe, le théorème s'applique pour toute application f. Le fait que les hypothèses de connectivité sur V et M peuvent être remplacées par les hypothèses sur $\pi_i(f)$ (voir 0.4) m'a été suggéré par J. MILNOR.

---

[1]) This work was partially supported by NSF Grant G-10.700.

Ce théorème est une généralisation des résultats classiques de WHITNEY (cf. [8], [12]) et d'un théorème de WU [15].

Dans l'énoncé suivant, deux plongements topologiques f_0 et f_1 de V dans M sont dits isotopes, s'il existe une application continue $F: V \times I \to M$ telle que, pour chaque t fixé, $x \to F(x, t)$ est un plongement topologique, égal à f_0 pour $t = 0$ et à f_1 pour $t = 1$.

Théorème d'approximation. *Soient V une variété compacte de dimension n et M une variété de dimension m.*

a) *Tout plongement topologique de V dans M peut être approché arbitrairement près par un plongement différentiable si $2m \geqslant 3(n+1)$.*

b) *Deux plongements différentiables de V dans M qui sont isotopes en tant que plongements topologiques, sont aussi difféotopes, si $2m > 3(n+1)$, l'isotopie différentiable pouvant approcher l'isotopie topologique.*

Ce théorème est démontré ici seulement si V n'a pas de bord, bien qu'il soit encore valable sans cette hypothèse. En revanche, le théorème d'existence n'est pas vrai en général si V a un bord non vide (par exemple les hypothèses de connectivité sur V pourraient être remplacées par des hypothèses de connectivité de V modulo sa frontière).

Nous n'utilisons aucun résultat récent, mais exclusivement les techniques développées par WHITNEY (et mises sous forme générale par THOM) dans l'étude des singularités des applications différentiables.

La première partie (§ 1 à § 3) est consacrée à l'étude des applications génériques de V dans M, où $2m > 3n$; la seconde (§ 4 à § 6) contient la démonstration des théorèmes annoncés.

Dans le § 1, nous rappelons quelques théorèmes généraux qui sont à la base de l'étude des singularités des applications différentiables. Au § 2, nous définissons avec précision la notion d'application générique de V dans M $(2m > 3n)$ et nous montrons l'existence de telles applications. Enfin le § 3, qui est une extension simple de résultats classiques de WHITNEY, étudie plus précisément le comportement d'une application générique le long de la sous-variété des points singuliers. Les seuls faits nécessaires pour comprendre la suite sont 2.5, 2.7 et 3.2 à 3.4.

La démonstration du théorème d'existence a) occupe le § 4. La méthode est en gros la suivante. On remplace l'application donnée de V dans M par une application homotope f générique, c'est-à-dire une application dont l'aspect géométrique est le plus simple possible. Les points doubles de f forment une sous-variété Δ dans M dont le bord est l'image par f des points où le rang de f est inférieur à n. On déforme alors pas à pas l'application f pour éliminer progressivement les points doubles le long de Δ. Pour décrire chaque déformation, nous construisons un *modèle* explicite d'une déformation d'une application de R^n dans R^m et nous identifions ce modèle avec la situation donnée en utilisant les hypothèses de connectivité et les inégalités sur les dimensions.

La démonstration du théorème d'existence pour les isotopies suit le même schéma, et nous indiquons au § 5 quelles sont les précisions nouvelles à apporter. Enfin le § 6 contient la démonstration des théorèmes d'approximation.

La méthode utilisée dans ce travail est très directe et géométrique. Elle a donc le désavantage d'être difficile à rédiger; mais nous espérons cependant qu'elle permet de rendre clair à l'intuition spatiale les propriétés démontrées, pour autant que le lecteur ait la patience d'étudier très attentivement les modèles de déformations (4.4 et 4.10) et de faire des croquis pour les petites dimensions.

Plusieurs autres résultats, concernant notamment les variétés à bord et les premières obstructions, pourraient être obtenus par des méthodes semblables. Nous préférons revenir sur ces questions dans une publication ultérieure (qui donnera en particulier la démonstration du théorème 3 de [2] et sa généralisation au cas où R^m est remplacé par une variété M) en utilisant des résultats plus récents tels que la classification des immersions d'après SMALE-HIRSCH et la théorie des obstructions de SHAPIRO-WU.

Terminologie et notations

0.1. Rappelons encore une fois que toutes les variétés considérées ici seront supposées implicitement indéfiniment différentiables et paracompactes, et que par application d'une variété dans une autre, nous entendons toujours une application indéfiniment différentiable. Par exemple une *fonction numérique* sur une variété V est une application indéfiniment différentiable de V dans la droite numérique R. Une *sous-variété* W de V signifie aussi une sous-variété indéfiniment différentiable, c'est-à-dire un sous-espace de V défini localement par les zéros communs d'un nombre fini de fonctions indépendantes; la *codimension* de W dans V est égale à la différence de la dimension de V et de la dimension de W.

Si f est une application de X dans Y, la restriction de f à un sous-ensemble Z de X est notée $f \mid Z$. De même si E est un fibré de base B et de projection p, et si A est un sous-espace de B, la restriction $p^{-1}(A)$ de E à A est notée $E \mid A$. La fibre de E au-dessus d'un point x de B est désignée par E_x.

0.2. Le fibré des vecteurs tangents à une variété V est noté $T(V)$; V_x est l'espace tangent à V en un point $x \in V$. Toute application f d'une variété V dans une variété M induit une représentation $df: T(V) \to T(M)$ appelée *la différentielle de f*; elle applique un vecteur de V_x sur un vecteur de V_{fx}. En particulier, si f est une fonction numérique sur V et v un vecteur de V_x, $df(v)$ est un vecteur de R déterminé par son origine $f(x)$ et par sa longueur notée $\langle df, v\rangle$.

Un point *singulier* (ou critique) d'une application f de V dans M est un point $x \in V$ où le *rang de f* (c'est-à-dire le rang de l'application linéaire $df \mid V_x$) est inférieur au minimum de la dimension de V et de celle de M. Un point *double* de f est un point y de M tel que $f^{-1}(y)$ se compose de deux points distincts.

Dans l'espace numérique R^n de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$, on désigne par $\partial/\partial x_i$ le champ de vecteurs qui associe à tout point le vecteur dont toutes les composantes sont nulles, sauf la $i$ème égale à 1.

0.3. De la théorie des jets infinitésimaux de C. EHRESMANN [1], nous n'utiliserons que les définitions les plus élémentaires, et seulement pour démontrer l'existence des applications génériques (2.5). Rappelons que deux applications f et f' de V dans M définies au voisinage d'un point x de V ont le même jet d'ordre r en x si, exprimées dans les mêmes coordonnées locales, les dérivées partielles d'ordre $\leqslant r$ de f en x sont égales aux dérivées partielles correspondantes de f' en x. Le point x est la *source* du jet d'ordre r de f en x et $y = f(x)$ est son *but*.

L'ensemble des jets d'ordre r de V dans M forme une variété (différentiable) notée $J^r(V, M)$. La projection associant à chaque jet sa source définit sur $J^r(V, M)$ une structure fibrée de base V. Toute application f de V dans M définit une section f^r de ce fibré, celle qui associe à tout $x \in V$ le jet d'ordre r de f en x. Par exemple, si $r = 0$, $J^0(V, M) = V \times M$ et $f^0: x \to (x, f(x))$ sera souvent identifié à f. Si $r = 1$, $J^1(V, M)$ est l'espace fibré sur V dont la fibre au-dessus de x est l'espace des applications linéaires de V_x dans une fibre arbitraire de M. La donnée de la différentielle df de f en un point est équivalente à celle du jet d'ordre 1 de f en ce point.

Un *jet singulier* est le jet d'une application en un point singulier.

0.4. *Définition du groupe* $\pi_i(f)$. Rappelons que si f est une application continue d'un espace X dans un espace Y, le «mapping cylinder» de f est l'espace Y_f obtenu en identifiant dans l'espace somme $(X \times I) \cup Y$ les points $(x, 1) \in X \times I$ et $f(x) \in Y$. L'espace X s'identifie au sous-espace $X \times \{0\}$ de Y_f. La projection appliquant un point $(x, t) \in X \times I$ sur $f(x)$ et un point $y \in Y$ sur y définit une projection j de Y_f sur Y qui est une homotopie équivalence. L'injection i de X dans Y_f a le même type d'homotopie que f.

Par définition, $\pi_i(f) = \pi_i(Y_f, X)$; ce groupe ne dépend que du type d'homotopie de f. La suite exacte d'homotopie de Y_f relative à X donne la suite exacte: $\to \pi_i(X) \xrightarrow{f^*} \pi_i(Y) \to \pi_i(f) \to \pi_{i-1}(X) \xrightarrow{f^*} \pi_{i-1}(Y)$. La condition $\pi_i(f) = 0$ est donc équivalente à $f^* : \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ est surjectif et $f^*: \pi_{i-1}(X) \to \pi_{i-1}(Y)$ est injectif.

1. Théorèmes d'extension et de transversalité

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques théorèmes généraux sur les applications différentiables qui sont fondamentaux en «topologie différentielle».

Théorèmes d'extension. Dans les 4 numéros qui suivent, E désigne un fibré différentiable localement trivial: l'espace total E, la fibre F, la base B sont des variétés différentiables paracompactes, la projection $p: E \to B$ est différentiable et de rang égal à la dimension de B. Enfin A est un sous-espace fermé de B.

1.1. Proposition. *Toute section f de E définie sur A est la restriction à A d'une section différentiable de E définie sur un voisinage de A si et seulement si c'est vrai localement, c'est-à-dire si, pour tout $x \in A$, il existe une section différentiable f_x définie sur un voisinage ouvert U_x de x telle que $f_x = f$ sur $U_x \cap A$.*

Une telle section f de E définie sur A sera dite *différentiable sur* A.

1.2. Démonstration. Soit $\{U_n\}$ un recouvrement dénombrable d'un voisinage de A par des ouverts relativement compacts U_n tel qu'il existe, pour chaque n, une section f_n de E définie sur U_n avec $f = f_n$ sur $A \cap U_n$. Ce recouvrement sera choisi assez fin de sorte que, pour tout n, il existe un isomorphisme $z \to (p(z), q_n(z))$ de $p^{-1}(U_n)$ sur $U_n \times F$ et que $q_n f_n(U_n \cap A)$ soit contenu dans le domaine $O_n \subset F$ d'un système de coordonnées $\gamma_n: O_n \to R^q$ $(q = \dim F)$. Soit $\{A_n\}$ un recouvrement de A par des compacts $A_n \subset U_n$.

Supposons qu'une section φ^{n-1} soit déjà construite sur un ouvert U^{n-1} contenant un voisinage compact W^{n-1} de $A^{n-1} = \cup_{i<n} A_i$ et telle que $\varphi^{n-1} = f$ sur A^{n-1}. Soit α une fonction numérique positive sur B, égale à 1 sur W^{n-1} et à zéro en dehors de U^{n-1}. En termes des coordonnées fibrées au-dessus de U_n, considérons la section φ_n de E définie au-dessus d'un voisinage assez petit W_n de A_n par

$$\varphi_n(x) = (x, \gamma_n^{-1}[\alpha(x) \cdot \gamma_n q_n \varphi^{n-1}(x) + (1 - \alpha(x)) \cdot \gamma_n q_n f_n(x)]);$$

dans cette expression, le point désigne la multiplication par un scalaire d'un point de R^q considéré comme un vecteur; le premier terme de la somme est égal à zéro si $x \notin U^{n-1}$. Cette section locale est égale à f sur A_n et à φ^{n-1} sur $W_n \cap W^{n-1}$. Posons donc φ^n égale à φ^{n-1} sur W^{n-1} et à φ_n sur W_n, et $W^n = W_n \cap W^{n-1}$. En répétant cette construction successivement pour chaque entier n, on obtient l'extension désirée.

1.3. Plus généralement, soit E^r le fibré sur B des jets d'ordre $r (r \geqslant 0)$ des sections locales de E. Par définition, deux sections f_1 et f_2 de E définies au-dessus de voisinages de A ont le même *jet d'ordre* r *le long de* A si les sections f_1^r et f_2^r de E^r, associant à chaque point d'un voisinage de A le jet d'ordre r de f_1 et f_2 en ce point, coincident sur A. Ceci veut dire par exemple que, si $r = 0$, alors $f_1 = f_2$ sur A, que si $r = 1$, alors $df_1 = df_2$ sur $A, \dots$

La démonstration précédente montre aussi plus généralement la

Proposition. *Une section* f^r *de* E^r *au-dessus de* A *est le jet d'ordre* r *le long de* A *d'une section* f *de* E *définie dans un voisinage de* A *si et seulement si, pour chaque point* x *de* A, *il existe une section* f_x *de* E *définie dans un voisinage* U_x *de* x *telle que* $f_x^r = f^r$ *le long de* $U_x \cap A$.

1.4. Théorème. *Si* g *est une section continue de* E *dont la restriction à* A *est différentiable* (cf. 1.1), *il existe une section différentiable* f *de* E, *égale à* g *sur* A, *et arbitrairement proche de* g.

Pour la démonstration, cf. [4], 6.7 (compte tenu de 1.1).

Théorèmes de transversalité. Dans le reste de ce paragraphe, $J^r(V, M)$ désigne la variété des jets d'ordre r des applications locales d'une variété V dans une variété M (cf. 0.3).

1.5. Soit $L(V, M, r)$ l'ensemble des applications de V dans M muni de la topologie suivante. Munissons $J^r(V, M)$ d'une métrique riemannienne complète, la distance de deux points z, z' étant notée $d(z, z')$. Une base de la structure uniforme qui définit la topologie de $L(V, M, r)$ est formée des ensembles de couples (f, g) tels que $d(f^r(x), g^r(x)) < \varepsilon(x)$ pour tout $x \in V$, où $\varepsilon(x)$ est une fonction > 0 continue de x. Cette définition est indépendante de la métrique choisie. $L(V, M, r)$ muni de cette topologie est un espace de BAIRE. On dira que g est une *r-approximation arbitraire* de f si g est arbitrairement proche de f dans $L(V, M, r)$.

Une application f de V dans une variété M est *transverse à une sous-variété* N *de* M en un point $x \in V$ si, ou bien $f(x) \notin N$, ou bien $y = f(x) \in N$ et $df(V_x) + N_y = M_y$. Nous dirons simplement que f est transverse à N

si f est transverse à N en tout point de V; alors $f^{-1}(N)$ est une sous-variété de V dont la codimension est égale à celle de N. Selon cette définition, si $\operatorname{codim} N > \dim V$, dire que f est transverse à N c'est dire que $f(V)$ ne rencontre pas N.

1.6. Théorème de transversalité (THOM). *Soit N une sous-variété fermée de $J^r(V, M)$ et soit f une application de V dans M. On peut toujours trouver une s-approximation arbitraire (s entier $\geqslant 0$) g de f telle que g^r soit transverse à N. De plus, si f^r est déjà transverse à N en tout point d'un fermé F dans V, on peut supposer $g = f$ au voisinage de f.*

D'après la définition de la transversalité et la topologie de $L(V, M, s)$, il est évident que les applications transverses à N forment un ouvert de $L(V, M, s)$ pour $s > r$. Le théorème de transversalité affirme que cet ouvert est partout dense. Pour la démonstration, qui s'appuie essentiellement sur le théorème de SARD, voir [5] et [7].

1.7. Exemples. 1. Si A est une sous-variété de M, toute application $f: V \to M$ peut être approchée par une application transverse à A. Cela résulte de 1.6 en prenant $r = 0$ et $N = V \times A \subset V \times M$.

2. M est la droite numérique R, $r = 1$ et N est la sous-variété formée des jets d'ordre 1 des fonctions f sur V en un point où $df = 0$. Une fonction $f: V \to R$ telle que f^1 soit transverse à N n'est autre qu'une fonction numérique non dégénérée, c'est-à-dire qu'en un point où $df = 0$, la matrice des dérivées partielles secondes est non singulières. D'après le théorème ci-dessus, les fonctions non dégénérées sur V sont partout denses (théorème de MORSE [3]).

1.8. Remarque. Le théorème de transversalité est encore vrai si N n'est pas fermée et si f^r ne rencontre pas la frontière de N.

Dans les applications, N est souvent une variété avec singularités, représentée comme une collection de sous-variétés (cf. [14]). Si N est représentée comme l'union d'une sous-variété sans singularité N_0 (en général non fermée) et d'une variété fermée N_1, avec singularités, de codimension $> n = \dim V$ et qui contient la frontière de N_0, alors 1.6 appliqué aux différents membres de la décomposition de N_1 montre que l'on peut d'abord approcher f par une application g telle que g^r ne rencontre pas N_1. Comme l'ensemble de telles applications est un ouvert dans $L(V, M, s)$, $s > r$, 1.6 donne une application g telle que g^r ne rencontre pas N_1 et soit transverse à N_0.

1.9. Extension du théorème de transversalité. *Soient V_i, M_i, $i = 1, 2$, des variétés. Soit N une sous-variété fermée de $J^r(V_1, M_1) \times J^r(V_2, M_2)$. Pour* *tout couple d'applications* $f_i : V_i \to M_i$, *il existe des s-approximations arbitraires* g_i *de* f_i *telles que* (g_1^r, g_2^r) *soit transverse à* N. *De plus si* F_i *sont des fermés de* V_i *tels que* (f_1^r, f_2^r) *soit transverse à* N *sur* $(F_1 \times V_2) \cup (V_1 \times F_2)$, *on peut supposer* $f_i = g_i$ *sur* F_i.

On a un énoncé tout à fait analogue pour un nombre fini de facteurs. La démonstration se déduit immédiatement de celle de 1.6 donnée dans [5] ou [7].

Remarquons encore que, si V_1 et V_2 sont compactes, alors l'ensemble des couples (f_1, f_2) tels que (f_1^r, f_2^r) soit transverse à N est un ouvert de $L(V_1, M_1, s) \times L(V_2, M_2, s)$ pour $s > r$.

1.10. Théorème de transversalité «au but». *Soit* N *une sous-variété fermée de* $J^r(V, M) \times J^r(V, M)$. *Pour toute application* $f : V \to M$, *on peut trouver une s-approximation arbitraire* g *telle que* (g^r, g^r) *soit transverse à* N *en tout point du complémentaire* C *d'un voisinage ouvert donné de la diagonale de* $V \times V$. *De plus si* F *est un fermé tel que* (f^r, f^r) *soit transverse à* N *sur* $[(F \times V) \cup (V \times F)] \cap C$, *on peut supposer* $g = f$ *sur* F.

On a un énoncé analogue pour un nombre fini p de facteurs, C étant alors le complémentaire d'un voisinage du sous-espace du produit V^p formé des suites de p points de V non tous distincts. Un tel énoncé contient comme cas particulier tous les précédents (par exemple 1.6 correspondrait au cas $p = 1$).

La démonstration découle directement de 1.9. En effet, soit $\{U_1^\alpha \times U_2^\alpha\}_{\alpha \in I}$ un recouvrement dénombrable de C, tel que, pour tout $\alpha \in I$, $U_1^\alpha \cap U_2^\alpha = \emptyset$ et U_i^α soit un compact de V. L'ensemble des couples (f_1, f_2): $U_1^\alpha \times U_2^\alpha \to$ $\to M \times M$ tels que (f_1^r, f_2^r) soit transverse à N est un ouvert partout dense de $L(U_1^\alpha, M, s) \times L(U_2^\alpha, M, s)$, $s > r$, d'après 1.9. Or l'application faisant correspondre à $f : V \to M$ le couple $(f \mid U_1^\alpha, f \mid U_2^\alpha)$ est une application ouverte et surjective (cf. 1.4) de $L(V, M, s)$ sur $L(U_1^\alpha, M, s) \times L(U_2^\alpha, M, s)$. Le théorème résulte alors de ce que $L(V, M, s)$ est un espace de BAIRE.

Remarquons encore que si V est compact, l'ensemble des f tels que (f^r, f^r) soit transverse à N sur C est un *ouvert* partout dense de $L(V, M, s)$ pour $s > r$.

1.11. Exemple. Prenons $M = R$ et supposons que f soit une fonction numérique non dégénérée (cf. 1.7) sur V. Comme les points singuliers de f sont isolés, il existe un voisinage U de la diagonale de $V \times V$ tel que si $(x, x') \in U$ et $x \neq x'$, alors x et x' ne sont pas tous les deux singuliers. Appliquons 1.10 en prenant pour N la sous-variété de $J^1(V, R) \times J^1(V, R)$ formée des couples de jets singuliers ayant le même but, et pour C le complémentaire de U. Comme codim $N = n + 1$ nous obtenons ainsi une fonction numérique non dégénérée dont les valeurs critiques sont distinctes. Une telle fonction sera dite *générique*.

2. Définition et existence des applications et homotopies génériques

Dans tout ce paragraphe, V est une variété de dimension n et M une variété de dimension $m \geqslant n$.

Description des points singuliers de type (S^1)

2.1. Considérons une application f de V dans M et soit x un point de V où le rang de f est exactement $n-1$. Introduisons au voisinage de x et $y = f(x)$ des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_m)$ telles que le noyau L_x de df au point x soit engendré par le vecteur de composantes $(1, 0, \ldots, 0)$. Autrement dit, le vecteur $\partial f/\partial x_1 = (\partial y_1/\partial x_1, \ldots, \partial y_m/\partial x_1)$, où les dérivées partielles sont prises au point x, est le vecteur nul de M_y. Il en résulte que les dérivées $(\partial^2 y_1/\partial x_1 \partial x_i, \ldots, \partial^2 y_m/\partial x_1 \partial x_i)$, prises en x, sont les composantes d'un vecteur $\partial^2 f/\partial x_1 \partial x_i$ de M_y.

Le point x de V est un point singulier de type (S^1) de f (cf. [5], [11], [14]) *si*

1. *le rang de f en x est égal à $n-1$,*
2. *dans les coordonnées locales précédentes, les $2n-1$ vecteurs*

$$\partial f/\partial x_i, \ 1 < i \leqslant n \quad \text{et} \quad \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_j, \ 1 \leqslant j \leqslant n$$

engendrent l'espace tangent à M en y,

3. *les n vecteurs $\partial^2 f/\partial x_1^2, \partial f/\partial x_2, \ldots, \partial f/\partial x_n$ au point y sont indépendants* (toutes les dérivées partielles sont prises au point x).

2.2. Les conditions 2) et 3) sont indépendantes des systèmes de coordonnées locales choisis. En effet, soit ξ_i le vecteur de V_x de composantes δ_{ij} (symbole de Kronecker). On vérifie immédiatement (cf. [11], p. 162) que l'application bilinéaire de $L_x \times V_x$ dans M_y appliquant (ξ_1, ξ_i) sur le vecteur $\partial^2 f/\partial x_1 \partial x_i$ définit par passage aux quotients une application linéaire

$$\partial_x^2 f : L_x \otimes V_x \to M_y / df(V_x)$$

indépendante des systèmes de coordonnées.

Les conditions 2) et 3) équivalent resp. à

2)′ $\partial_x^2 f$ est de rang $m-n+1$,

3)′ $\partial_x^2 f$ ne s'annule pas sur $L_x \otimes L_x$.

2.3. Voici l'interprétation géométrique de ces conditions. La condition 2) signifie que les $m - n + 1$ conditions qui expriment que le rang de f est inférieur à n sont indépendantes au point x. Donc *au voisinage de* x, *le sous-ensemble* S *de* V *formé des points où le rang de* f *est* $n - 1$ *est une sous-variété de dimension* $2n - m - 1$. Le noyau de $\partial_x^2 f$ est $L_x \otimes S_x$, où S_x est l'espace tangent à S en x.

La condition 3) exprime que L_x n'est pas contenu dans S_x. Donc *la restriction de* f *à* S *est de rang* $2n - m - 1$ *au voisinage de* x.

2.4. De plus en un point double $y = f(x') = f(x'')$, où x' et x'' sont des points distincts proches de x, alors les images par df de $V_{x'}$, et $V_{x''}$, engendrent M_y. Ainsi les points doubles de la restriction de f à un petit voisinage U de x forment une sous-variété Δ de M de dimension $2n - m$ dont le bord dans $f(U)$ est $f(S \cap U)$. Le sous-ensemble $D = f^{-1}(\Delta)$ au voisinage de x est une sous-variété de V de dimension $2n - m$ sans bord qui contient S et qui est tangente au champ des noyaux de df le long de S.

On peut vérifier ces propriétés en choisissant des coordonnées locales telles que f s'exprime sous la forme

$$y_1 = x_1^2, y_i = x_i \quad \text{pour} \quad 1 < i \leqslant n, y_{n+j-1} = x_1 x_j \quad \text{pour} \quad 1 < j \leqslant m - n + 1$$

à des termes de degré > 2 près. Nous n'insistons pas sur les démonstrations car WHITNEY a démontré (cf. [11]) que f pouvait s'exprimer effectivement sous cette forme (et non plus seulement jusqu'à l'ordre 2), fait que nous utiliserons plus tard (cf. § 3). Ceci admis, les propriétés 2.4 se vérifient immédiatement. La sous-variété S est définie par $x_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m - n + 1$, la sous-variété Δ par $y_1 \geqslant 0, y_i = 0$ et $y_{n+i-1} = 0$ pour $1 < i \leqslant m - n + 1$. Enfin D est défini par $x_i = 0, 1 < i \leqslant m - n + 1$.

2.5. Théorème. *Supposons* $2m > 3n$ *et* V *compacte. Les applications* $f: V \to M$ *telles que*

1) *les points singuliers de* f *sont tous de type* (S^1),

2) *si* $f(x') = f(x'')$ *et* $x' \neq x''$, *alors* x' *n'est pas un point singulier*,

3) *en un point double* $y = f(x') = f(x'')$, *où* $x' \neq x''$, *les images par* df *des plans tangents à* V *en* x' *et* x'' *engendrent le plan tangent à* M *en* y,

4) f *n'a pas de point triple*,

forment un ouvert partout dense de $L(V, M, 2)$.

Une telle application sera dite *générique*.

De plus toute application $g: V \to M$ dont la restriction à un voisinage d'un fermé F de V est générique peut être approchée par une application générique f égale à g sur F.

Lorsque $m \geqslant 2n+1$, une application générique est un plongement ([8]). Si $m = 2n$, une application générique est une immersion avec des points doubles isolés où les deux nappes de $f(V)$ se coupent en position générale (cf. [12]).

En général, lorsque $2m > 3n$, les points singuliers d'une application générique f forment d'après 1) une sous-variété S dans V de dimension $2n-m-1$ (cf. 2.3). Vu 3) et 4), les paires de points de V appliqués par f sur un même point de M forment une sous-variété D dans V de dimension $2n-m$ et qui contient S comme sous-variété (cf. 2.4). Enfin les points doubles de f forment en vertu de 2) une sous-variété $\Delta = f(D)$ dans M de dimension $2n-m$ et dont le bord est la sous-variété des valeurs critiques $S' = f(S)$ (cf. 2.4).

2.6. Démonstration. Elle consiste à appliquer successivement les théorèmes de transversalité. Commençons par 1). Dire que les points singuliers de S sont tous de type (S^1), c'est dire que

a) f^1 ne rencontre pas la sous-variété (avec singularités) de $J^1(V, M)$ de codimension $2(m-n+2)$ formée des jets d'applications en un point où leur rang est $< n-1$ (condition 1) de 2.1),

b) f^1 est transverse sur la sous-variété de $J^1(V, M)$ formée des jets singuliers (condition 2) de 2.1),

c) f^2 ne rencontre pas la sous-variété de $J^2(V, M)$, de codimension $2(m-n+1)$, formée des jets d'applications g en un point x où le rang de g est $< n$ et où le noyau de dg est contenu dans l'espace tangent aux points singuliers (condition 3) de 2.1).

Donc si $n > 2(m-n+2)$ et $n > 2(m-n+1)$, c'est-à-dire si $2m > 3n-2$, le théorème de transversalité 1.6 implique que les applications f vérifiant a), b) et c), c'est-à-dire 1), forment un ouvert partout dense de $L(V, M, 2)$.

Soit N la sous-variété de $J^1(V, M) \times J^1(V, M)$ des couples formés de deux jets d'ordre 1 ayant le même but, l'un d'eux étant singulier. La codimension de N est $m + (m-n+1) = 2m-n+1$. Si f vérifie 1), la restriction de (f^1, f^1) à un voisinage de la diagonale dans $V \times V$ privé de la diagonale, ne rencontre pas N, d'après 2.4. Ceci étant vrai pour toute application g assez proche de f dans $L(V, M, 2)$, 1.10 montre que l'on peut approcher f par une application g telle que (g^1, g^1) soit transverse à N sur $V \times V$ privé de la diagonale. Donc si $2n < 2m-n+1$, i.e. $2m > 3n-1$, les applications f vérifiant 1) et 2) forment un ouvert partout dense de $L(V, M, 2)$.

Soit N' la sous-variété de $(V \times M)^2$ image réciproque de la diagonale de $M \times M$ par la projection naturelle de $(V \times M)^2$ sur M^2. La condition 3) signifie que (f^1, f^1) est transverse à N' sur $V \times V - V$; elle est vérifiée au voisinage de la diagonale par toute application f vérifiant 1) (cf. 2.4). D'après 1.10, les applications vérifiant 1) et 3) forment un ouvert partout dense de $L(V, M, 2)$, si $2m > 3n - 2$.

Enfin soit N'' la sous-variété de $(V \times M)^3$ image réciproque de la diagonale de M^3 par la projection naturelle. Dire que f n'a pas de point triple, c'est dire que (f, f, f) ne rencontre pas N'' en dehors du sous-espace R de $V \times V \times V$ formé des suites de 3 points non tous distincts. Ce sera le cas au voisinage de R pour toute application vérifiant 1) et 2). Donc si $2m > 3n$, d'après 1.10, les applications vérifiant 1), 2) et 4) forment un ouvert partout dense de $L(V, M, 2)$.

On obtient le théorème en combinant toutes ces conditions.

2.7. Homotopies génériques

Théorème. *Soient f_0 et f_1 des applications génériques* (2.5) *de V dans M, où $2m > 3n + 1$, et soit $g : V \times I \to M$ une homotopie reliant f_0 à f_1. Il est toujours possible d'approcher g par une homotopie f reliant f_0 à f_1 et telle que*

1. *l'application $h : V \times I \to M \times I$ définie par $h(x, t) = (f(x, t), t)$ est générique* (2.5),

2) *la restriction de la projection naturelle $t' : M \times I \to I$ à la variété Δ des points doubles de h est une fonction numérique non dégénérée* (1.7) *et ses points singuliers ne sont pas sur l'image S' par h des points singuliers de h.*

Un telle homotopie sera dite *générique.*

En fait on pourrait exiger plus d'une homotopie générique, par exemple que t' restreint à S' est une fonction numérique générique (cf. 1.11); mais nous n'aurons pas à utiliser cette propriété dans la suite.

2.8. Pour démontrer 2.7, on se place dans le sous-espace de $L(V \times I, M, 3)$ formé des applications f telles que $f(x, 0) = f_0(x)$ et $f(x, 1) = f_1(x)$. La démonstration de 1) est tout à fait analogue à celle de 2.5, l'inégalité $2m > 3n + 1$ étant équivalente à $2(m + 1) > 3(n + 1)$. Par exemple la condition qu'en un point double de h les plans tangents à l'image sont en position générale (condition 3) de 2.5) signifie que f est transverse à la sous-variété de $(V \times I \times M)^2$ formée des points (x, t, y, x', y', t), où $x, x' \in V$, $t, t' \in I$ et $y, y' \in M$, tels que $t = t'$ et $y = y'$. On remarquera aussi que si $f_0 : V \to M$ est générique, alors sa suspension $(x, t) \to (f_0(x), t)$ est aussi générique; on pourra donc supposer que, au voisinage des extrémités de l'intervalle I, l'homotopie f est indépendante de t.

Pour que $t' \mid \Delta$ soit non singulière au voisinage de S', il faut et il suffit que f^3 évite dans $J^3(V \times I, M)$ une sous-variété de codimension $n + 1$, ce qui est toujours possible. Enfin les points singuliers de t' seront non dégénérés si (f^1, f^1) est transverse à une sous-variété de $J^1(V \times I, M) \times J^1(V \times I, M)$ sur $(V \times I) \times (V \times I)$ privé de sa diagonale. Par application des théorèmes de transversalité, on obtient donc l'homotopie générique désirée.

2.9. Cas particulier. Soit V une variété de dimension n munie d'une fonction numérique t dont les points singuliers forment une sous-variété W de dimension inférieure à n. Soit M une variété de dimension $m > 2n$, et soit t' la projection naturelle de $M \times R$ sur R. *Il existe alors un plongement f de V dans $M \times R$ tel que $t = t'f$. Si de plus g est un plongement donné d'un voisinage d'un fermé F de V dans $M \times R$ tel que $t = t'g$, on peut supposer que $f = g$ sur F.*

En effet, pour qu'une application $f = (h, t)$ de V dans $M \times R$ (où $h : V \to M$) soit partout de rang n, il faut et il suffit que le jet d'ordre 1 de h évite une sous-variété (avec singularités) dans $J^1(V, M)$ de codimension $m - n + 2 > n$. Ensuite pour que $f = (h, t)$ soit biunivoque, il faut et il suffit que le graphe de $(h, h) : V \times V \to M \times M$ évite une sous-variété N dans $V \times V \times M \times M$ de codimension $m + 1 > 2n$; N est formé des points (x, x', y, y') tels que $y = y'$ et $t(x) = t(x')$; N est représenté comme une collection de sous-variétés $N = N_0 \cup N_1 \cup N_2$, où N_0 contient les points qui vérifient de plus: $x, x' \in W, N_1$ ceux qui vérifient: x ou $x' \in W$, et $N_2 : x, x' \notin W$; on a $\operatorname{codim} N_0 = m + 2 \operatorname{codim} W$ et $\operatorname{codim} N_1 = m + \operatorname{codim} W + 1$.

L'affirmation précédente se démontre donc par applications de 1.6 et de 1.10.

3. Forme canonique des singularités de type (S^1)

3.1. Whitney [11] a démontré qu'au voisinage de tout point singulier x de type (S^1) d'une application de R^n dans R^m, $m \geqslant n$, il était possible de trouver des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_{m-n+1}, u_1, \ldots, u_{2n-m-1})$ au voisinage de x et $(X_1, \ldots, X_{2m-2n+1}, U_1, \ldots, U_{2n-m-1})$ au voisinage de $f(x)$ de sorte que f s'exprime sous la forme

$$f_0 \begin{cases} X_1 = x_1^2 \quad X_i = x_i \\ X_{m-n+i} = x_1 x_i \end{cases} 1 < i \leqslant m - n + 1,\ U_j = u_j,\ 1 \leqslant j \leqslant 2n - m - 1 .$$

(La démonstration de [11] qui traite le cas $m = 2n - 1$ s'étend immédiatement à ce cas plus général, cf. 3.8.)

Le but de ce paragraphe est de prouver la proposition suivante qui est une forme globale du résultat précédent de WHITNEY. Le complément sera utilisé dans l'étude des isotopies.

3.2. Proposition. *Soient V_i, M_i des variétés, $i = 1, 2$, $\dim M_i = m$, $\dim V_i = n$ et $m \geqslant n$. Soient $f_i : V_i \to M_i$ des applications dont les points singuliers $S_i \subset V_i$ sont tous de type (S^1) et telles que $f_i \mid S_i$ soit biunivoque.*

On suppose qu'il existe un difféomorphisme h de S_1 sur S_2 qui se prolonge suivant un isomorphisme $\dot{h}$ de $T(V_1) \mid S_1$ sur $T(V_2) \mid S_2$ de sorte que les champs de noyaux L_i de df_i le long de S_i se correspondent par $\dot{h}$.

Il existe alors des difféomorphismes H (resp. H') d'un voisinage de S_1 (resp. $S'_1 = f_1(S_1)$) sur un voisinage de S_2 (resp. $S'_2 = f_2(S_2)$) tels que

1) $f_2 H = H' f_1$

2) $dH = \dot{h}$ *le long de* S_1.

3.3. *Soit $\Delta_i \subset M_i$ la variété des points doubles de f_i. Si l'on se donne de plus un difféomorphisme h' de Δ_1 sur Δ_2 au voisinage de S'_1 compatible avec $\dot{h} \mid L_1$, on peut supposer que $H' = h'$ sur Δ_1.*

3.4. Complément. *De plus soient t et t' des fonctions numériques définies au voisinage de S_i et S'_i respectivement. Supposons que $t_i = t'_i f_i$, $t'_i \mid \Delta_i$ non singulière, $dt_1 = dt_2 h$ et $t'_1 = t'_2 h'$ sur Δ_1. On peut alors choisir H et H' vérifiant de plus*

3) $t_1 = t_2 H$ et $t'_1 = t'_2 H'$.

3.5. Remarque. La donnée h' de H' sur Δ_1 et la condition 1) de 3.2 déterminent H localement sur $D_1 = f_1^{-1}(\Delta_1)$ à deux possibilités près; or L_1 est tangent à D_1 le long de S_1. La condition de 3.3 que h' est compatible avec $\dot{h} \mid L_1$ signifie que localement $\dot{h} = dH$ sur L_1 au signe près.

3.6. Avant de passer à la démonstration, nous énonçons un lemme qui explicite la structure tangente le long de la sous-variété S des points singuliers de type (S^1) d'une application $f : V \to M$; L est le champ des noyaux de df le long de S, Δ est la variété des points doubles de f et $S' = f(S)$.

Lemme. *Il existe un homomorphisme naturel $\partial_S^2 f$ de $L \otimes T(V) \mid S$ sur le fibré quotient $T(M) \mid S' / df(T(V) \mid S)$; il applique le fibré linéaire trivial $L \otimes L$ sur le fibré normal à S' dans Δ; son noyau est $L \otimes T(S)$.*

$\partial_S^2 f$ est défini en chaque point x de S par $\partial_x^2 f$ (cf. 2.2) et le lemme découle de 2.2 à 2.4.

3.7. Nous reformulons ci-dessous le théorème de WHITNEY (3.1) sous une forme utile pour la démonstration de 3.2. L'application f_0 est celle qui est donnée dans 3.1. Ses points singuliers sont ceux du plan S défini par $x = 0$ (où $x = (x_1, \ldots, x_{m-n+1})$) ; $S' = f_0(S)$.

Lemme local. Soit f une application de $R^n(x, u)$ dans $R^m(X, U)$ définie au voisinage de S et telle que

1) df et df_0 sont égaux le long de S,

2) $\partial_S^2 f = \partial_S^2 f_0$ (cf. 2.2 et 3.6).

Soient W et W' des ouverts de S tels que l'adhérence $\overline{W}$ de W soit contenue dans W' et soit K un fermé de S au voisinage duquel $f = f_0$. Il existe alors des difféomorphismes H et H' de voisinages de S et S' resp. tels que

a) $fH = H'f_0$ au voisinage de $\overline{W}$,

b) dH est l'identité de long de S,

c) H et H' sont l'identité dans un voisinage de K et du complémentaire de W' dans S, et de leurs images par f_0 resp.,

d) le long de S, $d(H'f_0) = d(fH)$ et $\partial_S^2(H'f_0) = \partial_S^2(fH)$. Si de plus la variété Δ des points doubles de f coïncide avec celle de f_0, alors

e) $H' =$ identité sur Δ.

3.8. Démonstration de 3.7. Supposons f donnée par les équations $X_i = X_i(x, u)$, $U_j = U_j(x, u)$. Posons $u_j' = U_j(x, u)$; les fonctions (x, u') forment au voisinage de S un système de coordonnées car $\partial u_j'/\partial u_k = \delta_{jk}$ le long de S d'après 1), et f prend la forme $X_i = X_i'(x, u')$, $U_j = u_j'$. On développe ensuite les fonctions X_i' en séries de TAYLOR jusqu'au troisième ordre par rapport aux variables x ([9]) et l'on effectue chacune des transformations de coordonnées indiquées par WHITNEY dans [11], § 5, ceci le long de S, les variables u intervenant comme des paramètres. Chacun des difféomorphismes définis par ces transformations de coordonnées respectent les propriétés b), d), e) et se réduisent à l'identité au voisinage de K et $f_0(K)$. On obtient donc finalement des difféomorphismes H et H' vérifiant a), b), d) et e) le long de S.

Pour obtenir l'identité en dehors de W' et $f_0(W')$, construisons une fonction α sur R^n ne dépendant que des variables u, égale à 1 sur W et à 0 sur le complémentaire de W' dans S; soit α' la même fonction exprimée à l'aide des variables U. Soient J et J' les difféomorphismes identités de R^n et R^m. Alors les applications

$$\alpha H + (1-\alpha)J \quad \text{et} \quad \alpha' H' + (1-\alpha')J' ,$$

où la multiplication par α ou α' signifie que chaque coordonnée est multipliée par α ou α', restreintes à des voisinages assez petits de S et S' resp., sont des difféomorphismes qui vérifient toutes les propriétés désirées.

3.9. Démonstration de 3.2. D'après 3.6, il existe un isomorphisme Φ bien déterminé de $T(M_1) \mid S_1'/df_1(T(V_1) \mid S_1)$ sur $T(M_2) \mid S_2'/df_2(T(V_2) \mid S_2)$ tel que, pour tout $\nu \in L_1$ et tout $\xi \in T(V_1)$ au-dessus du même point x de S_1 on a $\partial^2_{S_2} f_2(\dot{h}\nu \otimes \dot{h}\xi) = \partial^2_{S_1} f_1(\nu \otimes \xi)$. Soit donc $\dot{h}'$ un isomorphisme de $T(M_1) \mid S_1'$ sur $T(M_2) \mid S_2'$ tel que $\dot{h}' df_1 = df_2 \dot{h}$ et qui donne Φ par passage aux quotients; on peut supposer aussi que $\dot{h}'$ applique l'espace tangent à Δ_1 sur l'espace tangent à Δ_2. A l'aide de métriques riemanniennes ou en appliquant 1.3, il est possible de construire des difféomorphismes H_0 et H_0' de voisinages tubulaires de S_1 et S_1' resp., sur des voisinages tubulaires de S_2 et S_2' resp. tels que $dH_0 = \dot{h}$ et $dH_0' = \dot{h}'$. On pourra aussi supposer que H_0' est une extension de l'application h' donnée sur Δ_1 (cf. 3.3).

Soient $\{W_n'\}$ et $\{W_n\}$ deux recouvrements dénombrables de S_1 par des boules contenues dans des systèmes de coordonnées locales, et $\overline{W_n} \subset W_n'$. Construisons par induction sur n, des difféomorphismes H_n et H_n' de voisinages de S_1 et S_1' sur voisinages de S_2 et S_2' de sorte que $f_2 H_n = h_n' f_1$ au voisinage du fermé $K_n = \cup_{i \leqslant n} \overline{W_i}$ et que, le long de S_1, $dH_n = \dot{h}$, $d(f_2 H_n) = d(H_n' f_1)$ et $\partial^2_{S_1}(f_2 H_n) = \partial^2_{S_1}(H_n' f_1)$. Par construction, H_0 et H_0' vérifient ces conditions. Supposons donc H_n et H_n' déjà construits. D'après 3.7, il est possible d'introduire des coordonnées locales au voisinage de W_{n+1}' et $f_1(W_{n+1}')$ de sorte que f_1 s'exprime sous la forme f_0. Les hypothèses de 3.7 sont vérifiées pour $f_0 = f_1$, $f = H_n'^{-1} f_2 H_n$ et $K = K_n$, W_{n+1} et W_{n+1}' jouant le rôle de W et W'; on peut donc construire $\overline{H}$ et $\overline{H'}$ vérifiant les conditions de 3.7; on définit alors $H_{n+1} = H_n \overline{H}$ et $H_{n+1}' = H_n' \overline{H'}$ au voisinage de W_{n+1}' et $f_1(W_{n+1}')$ et $H_{n+1} = H_n$, $H_{n+1}' = H_n'$ ailleurs. On remarquera que rien n'est changé au voisinage de K_n et $f_1(K_n)$. On obtient donc à la limite les difféomorphismes cherchés H et H'.

Démonstration du complément

3.10. Nous choisirons une autre forme normale locale g_0 équivalente à f_0. Soient $(x_1, \ldots, x_{m-n}, u_1, \ldots, u_{2n-m})$ les coordonnées de R^n et

$(X_1, \ldots, X_{2m-2n}, U_1, \ldots, U_{2n-m})$ les coordonnées de R^m. Soit

$$g_0 \begin{cases} X_1 = u_1 - x_1^2 & X_i = x_i \\ X_{m-n+1} = u_1 x_1 - x_1^3 & X_{m-n+i} = x_1 x_i \end{cases} \quad 1 < i \leqslant m-n,\ U_j = u_j,\ 1 \leqslant j \leqslant 2n-m.$$

Les points singuliers de g_0 sont les points du plan $S: x_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m-n$, $u_1 = 0$. Les points doubles forment le demi-plan $\Delta: X_j = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant 2m-2n$, $U_1 \geqslant 0$, et $D = g_0^{-1}(\Delta)$ est défini par $u_1 = x_1^2$, $x_i = 0$, $i > 1$.

3.11. Lemme local. Soient t et t' des fonctions différentiables non singulières définies au voisinage de S dans R^n et de $S' = g_0(S)$ dans R^m telles que $t = t' g_0$. On suppose que

1) t' restreinte à Δ est non singulière,

2) $\partial t'/\partial X_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m-n$ sur S' (ou ce qui revient au même $\partial t/dx_i = 0$ pour $i > 1$, $\partial t/\partial u_1 = \partial t'/\partial U_1$ sur S).

Soit t_0' la fonction sur R^m égale à t' sur Δ et ne dépendant que des variables U_j. Soient W et W' des ouverts de S tels que $\overline{W} \subset W'$ et K un fermé de S au voisinage duquel $t' = t_0'$.

Il existe alors des difféomorphismes H et H' de voisinages de S et S' resp. sur voisinages de S et S' resp. tels que

a) $g_0 H = H' g_0$

b) $t_0' = t' H'$ au voisinage de $g_0(K \cap \overline{W})$

c) dH est l'identité le long de S

d) H et H' sont l'identité au voisinage de K et du complémentaire de W' dans S et de leurs images par g_0 resp.

3.12. Démonstration de 3.11. Pour assurer la validité de d), remplaçons d'abord t' par une fonction t'' égale à t' au voisinage de $g_0(\overline{W})$ et à t_0' au voisinage de $g_0(K)$ et du complémentaire C' de $g_0(W')$ dans S', et vérifiant 1) et 2). Il suffit pour cela de construire une fonction α dans R^m égale à 1 au voisinage de $g_0(W)$ et à 0 au voisinage de C' et de poser $t'' = \alpha t' + (1-\alpha) t_0'$. Pour simplifier t'' sera noté t'.

Dans ce qui suit, X désigne les coordonnées $(X_1, \ldots, X_{2m-2n})$, U les coordonnées $(U_1, \ldots, U_{2n-m})$, etc.

Pour tout point $P = (X, U)$ de R^m assez proche de S', soient $U_j' = \Phi_j(X, U)$ les coordonnées U du point d'intersection avec Δ de la géodésique issue de P, contenue dans la variété de niveau N_P de t' contenant P, et normale à la sous-variété $N_P \cap \Delta$ (N_P est muni de la métrique induite par une métrique riemanienne sur R^m). Ceci a un sens en vertu de 1) au voisinage de Δ.

Par construction, on a donc $\Phi_j(O, U) = U_j$, d'où $\partial U_j/\partial U_k = \delta_{jk}$ le long de Δ et $\partial U_j^1/\partial X_i = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant m-n$ le long de S' en vertu de 2). Enfin t', exprimée à l'aide des nouvelles variables U', est égale à t_0'. On remarquera que l'on a aussi $U_j' = U_j$ au voisinage de $g_0(K)$.

Dans R^n, posons $u_j' = \Phi_j g_0 = \varphi_j(x, u)$. Le long de S on a $\partial u_j'/\partial u_k = \delta_{jk}$ et $\partial u_i'/\partial x_k = 0$. Ainsi les transformations

$$G\begin{cases} x_i' = x_i \\ u_j' = \varphi_j(x, u)\end{cases} \qquad G_1'\begin{cases} X_1' = \Phi_1(X, U) - U_1 + X_1 \\ X_i' = X_i \quad i > 1 \\ U_j' = \Phi_j(X, U)\end{cases}$$

sont au voisinage de S et S' des difféomorphismes et leurs inverses $H = G^{-1}$ et $H' = G_1'^{-1}$ vérifient b), c) et d).

Soient $u_j = \psi_j(x', u')$ les solutions des équations $u_j' = \varphi_j(x, u)$ au voisinage de S. Nous devons modifier H_1' de sorte que a) soit vérifié. On a

$$H_1'^{-1} g_0 H \begin{cases} X_1 = u_1 - x_1^2 & X_i = x_i \\ X_{m-n+1} = \psi_1(x, u)x_1 - x_1^3, & X_{m-n+i} = x_1 x_i\,. \end{cases} \quad 1 < i \quad U = u$$

Comme $\Phi_j(X, U) = U_j$ pour $X = 0$, alors $\psi_1(x_1, x_i, u) = u_1$, $i > 1$, sur $D: u_1 - x_1^2 = 0$, $x_i = 0$, $i > 1$. On peut donc écrire au voisinage de S d'après [9]:

$$\psi_1(x_1, x_i, u) = u_1 + (u_1 - x_1^2)a(x_1, x_i, u) + \Sigma_{j>1} x_j a_j(x_1, x_i, u)\,.$$

Le long de S, $a = 0$ car $\partial\psi_1/\partial u_1 = 1$.

On peut également poser d'après [10]

$$\begin{aligned} &1/2[\psi_1(x_1, x_i, u) + \psi_1(-x_1, x_i, u)] = \\ &= u_1 + (u_1 - x_1^2)A(x_1^2, x_i, u) + \Sigma_{j>1} x_j A_j(x_1^2, x_i, u)\end{aligned}$$

et

$$1/2[\psi_1(x_1, x_i, u) - \psi_1(-x_1, x_i, u)] = x_1 B(x_1^2, x_i, u)\,.$$

Définissons alors au voisinage de S'

$$G_2'\begin{cases} X_j' = X_j \quad j \neq m-n+1 \qquad U' = U \\ X_{m-n+1}' = \dfrac{X_{m-n+1} - (U_1 - X_1)B(U_1 - X_1, X_i, U) - \Sigma_{j>1} A_j(U_1 - X_1, X_i, U)X_{m-n+j}}{1 + A(U_1 - X_1, X_i, U)}\end{cases}$$

On a $\partial X_{m-n+1}'/\partial X_{m-n+1} = 1$ sur S', de sorte que G_2' est un difféomorphisme dans un voisinage de S'. De plus $G_2' G_1' g_0 G^{-1} = g_0$. Les difféomorphismes $H' = (G_2' G_1')^{-1}$ et $H = G^{-1}$, définis dans des voisinages de S' et S, vérifient les propriétés a), b), c) et d).

3.12. Pour démontrer 3.4, on part des difféomorphismes H et H' vérifiant les conditions 1) et 2) de 3.2 et 3.3, et on les modifie pas à pas en utilisant le lemme local 3.11 comme dans 3.9.

3.13. Pour terminer ce paragraphe, nous énonçons un lemme de nature élémentaire et dont la démonstration est laissée au lecteur.

Lemme. Soient A et B deux sous-variétés d'une variété V se coupant transversalement (c'est-à-dire qu'en tout point x de la sous-variété $C = A \cap B$ $A_x + B_x = V_x$). Etant donnés des plongements φ et ψ de A et B resp. dans une variété M tels que $\varphi = \psi$ sur C et que $d\varphi(A_x) + d\psi(B_x) = = d\psi(C_x)$ pour tout $x \in C$, il est possible de prolonger φ et ψ suivant un plongement d'un voisinage de C dans M.

On le démontre d'abord localement et on applique 1.1.

4. Existence de plongements

Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème suivant (théorème d'existence a) de l'introduction).

4.1. Théorème. *Soit V une variété compacte de dimension n, sans bord, et soit M une variété de dimension m. On suppose $2m \geqslant 3(n+1)$.*

Toute application g de V dans M telle que $\pi_i(g) = 0$ pour $i \leqslant 2n - m + 1$ (cf. 0.4) *est homotope à un plongement h.*

De plus, si V a un bord ∂V et si g est déjà un plongement au voisinage de ∂V tel que $g(\partial V) \cap g(V - \partial V) = \emptyset$, on peut supposer alors $h = g$ au voisinage de ∂V.

4.2. Démonstration. D'après 2.5, g est proche, donc homotope à une application générique f de V dans M. La variété des points singuliers de f sera notée S; Δ désignera la sous-variété dans M des points doubles de f; son bord est $S' = f(S)$ (cf. 2.5); enfin $D = f^{-1}(\Delta)$.

Soit ψ une fonction numérique générique sur Δ (cf. 1.11). On suppose de plus que S' est une variété de niveau de φ et que φ est minimum sur S' (si S' est non vide).

Soit $\varphi_0 = \varphi(S')$ et soit $\varphi_1 > \varphi_0$ tel que φ n'ait pas de valeurs critiques sur l'intervalle $[\varphi_0, \varphi_1]$.

Proposition 1. *Il existe une déformation f_τ de $f = f_0$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, telle que f_1 soit une application générique dont les points doubles sont les points d de Δ où $\varphi(d) \geqslant \varphi_1$.*

Soit c un point singulier de φ d'indice p. Au voisinage de c dans Δ, nous pouvons introduire des coordonnées locales $U_1, \ldots, U_p, V_1, \ldots, V_q$, où $p + q = 2n - m = \dim \Delta$, de sorte que $\varphi = \varphi(c) - U^2 + V^2$, où $U^2 = \Sigma U_i^2$ et $V^2 = \Sigma V_j^2$, dans une boule B_0 de rayon $2\theta_0$ centrée en c (cf. [3]). Posons $R^2 = U^2 + V^2$, et soit $\theta(R^2)$ la fonction égale à $\theta_0^2 \gamma(R^2/\theta_0^2)$ dans B_0 et à 0 en dehors, où γ est la fonction définie en 4.3. Considérons alors la fonction $\varphi_- = \varphi + \theta$ et la fonction $\varphi_+ = \varphi - \theta$; ces fonctions sont égales à φ en dehors de B_0.

Proposition 2. *Soit c un point critique de φ d'indice p. Supposons que l'on ait déformé f en une application générique f_0 dont les points doubles sont les points d de Δ où $\varphi_-(d) \geqslant c$. Si $\pi_{p+1}(f) = 0$, il existe une déformation f_τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, qui déforme f_0 en une application générique f_1 dont les points doubles sont les points d de Δ où $\varphi_+(d) \geqslant c$.*

Le théorème 4.1 se déduit comme suit des propositions 1 et 2. Soit c le point critique de φ de valeur minimale. Construisons comme précédemment une boule B_0 centrée en c de sorte que $\varphi(B_0)$ ne contienne pas d'autre valeur critique que $\varphi(c)$.

La fonction φ_- n'a pas de point singulier dans $\varphi^{-1}[-\infty, c]$; c'est clair en dehors de B_0 où $\varphi = \varphi_-$; dans B_0, un point de coordonnées (U, V) est singulier si et seulement si $\partial\varphi_-/\partial U_i = -2U_i(1 - \theta') = 0$ et $\partial\varphi/\partial V_j = 2V_j(1 + \theta') = 0$, où θ' est la dérivée de θ. Comme on suppose que $-U^2 + V^2 + \theta(R^2) \leqslant 0$, on doit avoir $U \neq 0$ et les deux équations précédentes ne peuvent être vérifiées que si $V = 0$ et $(1 - \theta') = 0$, ce qui est impossible car $\theta' \leqslant 0$. D'après la proposition 1, on peut donc déformer f en une application générique f_- dont les points doubles d sont définis par $\varphi_-(d) \geqslant c$. La proposition 2 donne une application générique f_+ dont les points doubles d sont définis par $\varphi_+(d) \geqslant c$. Enfin une nouvelle application de la proposition 1 donne une application générique f_1 dont les points singuliers sont les points d de Δ où $\varphi(d) \geqslant \varphi_1$, où $\varphi_1 = \sup \varphi(B_0)$.

En répétant cette opération un nombre de fois égal à celui des points critiques de φ, on obtient finalement une application générique sans point double, donc un plongement (cf. aussi 4.13).

Dans la démonstration des propositions 1 et 2, nous utiliserons des modèles de déformations qui généralisent le suivant.

4.3. Exemple typique de l'élimination d'un point double d'une courbe dans le plan. Soit γ une fonction paire de la variable réelle x, égale à 1 pour $|x| \leqslant 1$, à 0 pour $|x| \geqslant 2$ et croissante pour $x < 0$.

Soit c l'application de la droite R de coordonnée x dans le plan R^2 des coordonnées (X, Y) définie par les équations

$$X = x(1 - 2Y) \qquad Y = A\gamma(x)/(1 + x^2)$$

où A est une constante, $0 \leqslant A \leqslant 1$ (il est entendu que dans la première équation, Y doit être remplacé par sa valeur donnée dans la seconde équation).

Nous allons vérifier que

a) la courbe c a un seul point double $\Delta = (0, 1/2)$, à tangentes distinctes, si $A > 1/2$,

$D = c^{-1}(\Delta)$ est formé des deux points $x = \sqrt{2A - 1}$ et $x' = -\sqrt{2A-1}$,

b) si $A = 1/2$, et dans ce cas seulement, la courbe c a un point singulier $S = (0)$; $S' = c(S) = (0, 1/2)$ est un point de rebroussement.

Soit c_τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, la déformation définie par les équations

$$X = x(1 - 2Y) \qquad Y = A\gamma(x)\,(1 - \tau)\,/\,(1 + x^2)\,.$$

Durant la déformation, chaque point x se déplace sur la droite $X = x(1 - 2Y)$ passant par $c(x)$ et $(0, 1/2)$. De plus c_τ est constante pour $|x| \geqslant 2$. D'après ce qui précède, le point double sera éliminé dès que $\tau < \dfrac{1 - 2A}{2}$.

Pour vérifier a), supposons que les points distincts x et x' ont la même image par c. Alors $X = x(1 - 2Y) = x'(1 - 2Y)$ et $Y = A\gamma(x)/(1 + x^2) = A\gamma(x')/(1 + x'^2)$. Comme $x \neq x'$, on a $X = 0$ et $Y = A\gamma(x)/(1 + x^2) = 1/2$. Or $\gamma(x) \leqslant 1$, donc $\gamma(x) = (1 + x^2)/2A \leqslant 1$, ce qui entraîne $x^2 \leqslant 2A - 1 \leqslant 1$; mais alors $\gamma(x) = 1$. Donc x et x' doivent vérifier l'équation $x^2 = 2A - 1$ qui n'a de solutions réelles distinctes que si $A > 1/2$. Enfin comme $dX = -2x\,dY$, les pentes des tangentes au point double sont distinctes.

Un point singulier x doit vérifier les équations $\partial X/\partial x = (1 - 2Y) - 2x\,\partial Y/\partial x = 0$ et $\partial Y/\partial x = \dfrac{A\gamma'(1 + x^2) - 2Ax}{(1 + x^2)^2} = 0$. Donc $Y = 1/2$, et comme γ' et x ont des signes opposés, $\partial Y/\partial x$ ne peut être nul que si $x = 0$. Comme $Y = 1/2$, on doit avoir $A = 1/2$.

Nous nous concentrons d'abord sur la démonstration de la proposition 2.

4.4. Modèle pour la proposition 2.

Soient $(x_1, \ldots, x_{m-n}, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ les coordonnées de R^n, où $p + q = 2n - m$, et $(X_1, \ldots, X_{m-n}, Y_1, \ldots, Y_{m-n}, U_1, \ldots, U_p, V_1, \ldots, V_q)$ celles de R^m.

Posons $u^2 = \Sigma u_j^2$, $v^2 = \Sigma v_k^2$, $r^2 = u^2 + v^2$, $R^2 = U^2 + V^2$, et $\varrho^2 = \Sigma_{1<i\leqslant m-n} x_i^2$. Soit γ la fonction définie en 4.3 et $\theta(r^2) = \theta_0^2 \gamma(r^2/\theta_0^2)$, $\theta_0 \leqslant 1$. Soit α une fonction paire de ϱ comprise entre 0 et 1, égale à 1 pour $\varrho = 0$ et à 0 pour $\varrho > \varepsilon$, nombre positif.

Définissons une famille d'applications g_τ de R^n dans R^m dépendant différentiablement du paramètre τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, par la formule

$$g_\tau \begin{cases} X_1 = x_1(1-2Y_1) & X_i = x_i \\ Y_1 = A(u^2, v^2, \varrho^2, \tau)\gamma(x_1)/(1+x_1^2), & Y_i = x_1 x_i \end{cases} \quad 1<i\leqslant m-n, U_j = u_j, V_k = v_k$$

où $A = 1/2 \dfrac{1+\theta(r^2)(1-2\alpha\tau)+2v^2}{1+u^2+v^2}$.

Les fonctions α, γ, θ sont introduites afin que la déformation g_τ se réduise à l'identité en dehors d'un compact. Le lecteur pourra les supposer constantes dans une première lecture.

Nous allons vérifier que

1) la variété $S_\tau \subset R^n$ des points singuliers de g_τ est définie par

$$x_i = 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant m-n, \quad u^2 - v^2 = \theta(1-2\tau)$$

2) la variété $\Delta_\tau \subset R^m$ des points doubles de g_τ est définie par

$$X_i = 0 \ \text{pour} \ 1 \leqslant i \leqslant m-n, \qquad Y_1 = 1/2,$$

$$Y_i = 0 \ \text{pour} \ 1 < i \leqslant m-n, \quad -U^2 + V^2 \geqslant -\theta(R^2)(1-2\tau)$$

3) la variété $D_\tau = g_\tau^{-1}(\Delta_\tau)$ est définie par

$$x_i = 0, \quad 1 < i \leqslant m-n \quad \text{et} \quad x_1^2 = \frac{-u^2+v^2+\theta(r^2)(1-2\tau)}{1+u^2+v^2}$$

4) la variété $S'_\tau = g_\tau(S_\tau) = \partial\Delta_\tau$ est définie par

$$X_i = 0, \ Y_1 = 1/2, \ Y_j = 0, \ j > 1, \ +U^2 - V^2 = \theta(R^2)(1-2\tau).$$

On remarquera que dans chaque plan parallèle au plan des coordonnées X_1 et Y_1 (et pour lequel $Y_i = X_i = 0$, $i > 1$), on a une courbe du même type que celle décrite en 4.3, car $0 \leqslant A \leqslant 1$.

Les points singuliers de g_τ sont ceux qui vérifient les équations $\partial X_i/\partial x_1 = \partial Y_i/\partial x_1 = \partial U_j/\partial x_1 = \partial V_k/\partial x_1 = 0$, équivalentes à $x_i = 0$ pour $i > 1$ et $\partial X_1/\partial x_1 = \partial Y_1/\partial x_1 = 0$. D'après 4.3, on a $x_i = 0$ pour $1 < i \leqslant m-n$ et $A = 1/2$, d'où 1).

Si les points distincts (x, u, v) et (x', u', v') de R^n ont la même image par g_τ, alors $x_i = x'_i$ pour $i > 1$, $u_j = u'_j$, $v_k = v'_k$, donc $x_1 \neq x'_1$, et

$x_1 x_i = x'_1 x_i$ pour $i > 1$, donc $x_i = x'_i = 0$. D'après 4.3, D_τ est défini par $x_i = 0$ pour $i > 1$ et $x_1^2 = 2A - 1$, d'où 3), et Δ_τ est défini par $X_i = 0, Y_1 = 1/2, Y_j = 0$ pour $j > 1$ et $A \geqslant 1/2$, d'où 2).

Montrons encore que g_τ *est générique pour* $\tau \neq 1/2$. Il est clair que g_τ est toujours de rang $\geqslant n - 1$, et qu'en un point singulier la condition 3) de 2.1 est vérifiée, puisqu'elle l'est pour la courbe c de 4.3. On voit aisément que la condition 2) de 2.1 est satisfaite si et seulement si $\partial Y_1 / \partial u_j = \partial Y_1 / \partial v_k = 0$, ce qui équivaut aux équations $u_j[\theta'(1 - 2\tau) - 1] = 0$ et $v_k[\theta'(1 - 2\tau) + 1] = 0$. On a une solution pour $u = v = 0$, mais S_τ ne contient l'origine que pour $\tau = 1/2$. On pourrait avoir une solution si $\theta'(1 - 2\tau) - 1 = 0$ et $v = 0$, mais ce n'est pas possible, car alors $r^2 = u^2 = \theta(1 - 2\tau) \leqslant \theta_0^2$ et $\theta' = 0$ pour $r^2 \leqslant \theta_0^2$; de même, on ne peut avoir $\theta'(1 - 2\tau) + 1 = 0$ et $u = 0$. Donc les points singuliers de g_τ sont tous de type (S^1) pour $\tau \neq 1/2$. Les autres conditions de 2.5 se vérifient aisément. Pour $\tau = 1/2$, l'origine n'est pas un point singulier générique pour une application, mais seulement pour une homotopie.

L'effet de la déformation g_τ, lorsque τ croit de 0 à 1, est d'éliminer dans le plan $X_i = 0, Y_1 = 1/2, Y_j = 0, j > 1$, les points doubles de g_0 contenus dans $| U^2 - V^2 | < \theta(R^2)$.

Soit K_ε le compact de R^n défini par

$$| x_1 | \leqslant 2, \quad \varrho^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{et} \quad r \leqslant 2\theta_0,$$

et soit K'_ε le compact de R^m défini par

$$| X_1 | \leqslant 2, \Sigma_{i>1} X_i^2 \leqslant \varepsilon^2, \ 0 \leqslant Y_1 \leqslant 1, \ \Sigma_{i>1} Y_i^2 \leqslant 4\varepsilon^2, \ R \leqslant 2\theta_0 .$$

Nous désignerons par K l'intersection de K_ε avec le plan $x_i = 0$, $i > 1$, et par K' l'intersection de K'_ε avec le plan $X_i = 0, Y_i = 0, i > 1$.

La déformation g_τ est constante en dehors de K_ε et $g_\tau^{-1}(K'_\varepsilon) = K_\varepsilon$. Au cours de la déformation, l'image par g_τ de tout point (x, u, v) se déplace dans le 2-plan $X_i = x_i$ et $Y_i = x_1 x_i$ pour $i > 1$, $U_j = u_j$, $V_k = v_k$, sur la droite $X_1 = x_1(1 - 2Y_1)$.

On vérifie facilement que $\Delta_0 \cap K'$ peut se rétracter par déformation sur un point.

D'autre part, soit Σ la p-sphère intersection de D_0 avec le plan $v = 0$, $x_i = 0, i > 1$. Elle borde dans ce plan une $(p + 1)$-boule B [définie par les équations $u^2 \leqslant \theta_0^2$, $x_1^2 \leqslant (-u^2 + \theta(u^2)/(1 + u^2))$]. L'image de B par g_0 est homéomorphe à une $(p + 1)$-sphère qui borde dans le plan $X_i = 0$, $Y_i = 0$, $i > 1$, $V = 0$, un sous-espace B' homéomorphe à une $(p + 2)$-boule.

Il est aisé de vérifier que K peut se rétracter sur $(D_0 \cap K) \cup B$ et que K' peut se rétracter sur $g_0(K) \cup B'$.

Démonstration de la proposition 2.

4.5. Nous désignerons encore par S et Δ les variétés des points singuliers et des points doubles resp. de f_0. On posera $D = f_0^{-1}(\Delta)$ et $S' = f_0(S)$.

Il suffira de construire, pour ε assez petit, des difféomorphismes H de K_ε dans V et H' de K'_ε dans M de sorte que

1) $f_0 H = H' g_0$ sur K_ε.

2) sur Δ et Δ_0 les coordonnées locales U, V se correspondent par H'

3) $H'^{-1} f_0 V = g_0 R^n \cap K'_\varepsilon$.

Ceci fait, la déformation f_τ sera définie comme l'identité en dehors de $H(K_\varepsilon)$ et par $f_\tau = H' g_\tau H^{-1}$ sur $H(K_\varepsilon)$.

Les trois numéros suivants sont consacrés à la construction de H et H'.

Le champ de vecteurs $\partial/\partial x_i$ de R^n sera désigné par e_i, les champs de vecteurs $\partial/\partial X_i$ et $\partial/\partial Y_i$ par e'_i et e''_i respectivement.

4.6. Nous construisons d'abord des plongements $H: K \to V$ et $H': K' \to M$ vérifiant 1), 2) et 3)

a) *sur* Δ_0 *et* D_0. Le choix des coordonnées locales U, V au voisinage de c (cf. 4.2) définit un difféomorphisme H'_1 de la boule $K' \cap (X_1 = Y_1 - 1/2 = 0)$ sur B_0.

La restriction de f_0 à $D - S$ est un revêtement à deux feuillets de $\Delta - S'$; ce revêtement est trivial au-dessus de $B_0 \cap (\Delta - S')$, puisque cet espace est contractile (cf. 4.4). Il existe donc deux possibilités de définir une application H_1 de $D_0 \cap K$ dans D telle que $f_0 H_1 = H'_1 g_0$. Choisissons l'une d'entre elles; H_1 est nécessairement un difféomorphisme (cf. 3).

b) *au voisinage de* S_0 *et* S'_0. Soit D_0^+ le sous-espace de D_0 formé des points dont la x_1-coordonnée est $\geqslant 0$. Construisons le long de $H_1(S_0 \cap K)$ un champ $(\xi_2, \ldots, \xi_{m-n}, \nu)$ de $m - n$ vecteurs indépendants et transverses à D qui puisse s'étendre suivant un tel champ le long de $H_1(D_0^+ \cap K)$; c'est possible car $D_0^+ \cap K$ est contractile. On définit alors un isomorphisme de l'espace tangent à R^n le long de $S_0 \cap K$ dans l'espace tangent à V le long de S qui prolonge $dH_1 \mid S_0$ en appliquant e_1 sur $\xi_1 = dH_1(e_1)$, e_i sur ξ_i, $i > 1$, et le champ ν_0 des vecteurs unitaires normaux à D_0 dans K sur ν aux points correspondants par H_1. D'après 3.2 et 3.3, il existe des difféomorphismes H_2 et H'_2 de voisinages de $S_0 \cap K$ et $S' \cap K'$ dans V et M resp. tels que $f_0 H_2 = H'_2 g_0$, H_2 et H'_2 étant des extensions de H_1 et H'_1, la différentielle dH_2 le long de $S_0 \cap K$ étant l'isomorphisme défini plus haut.

c) *sur* K. Prolongeons le champ $dH_2(\nu_0)$ suivant un champ de vecteurs ν le long de $D \cap f_0^{-1} B_0$ et transverse à D, ce qui est possible car $\operatorname{codim} D = m - n > 2n - m = \dim D$. On peut alors (cf. 1.3) étendre H_1 suivant une application H_τ d'un voisinage de $D_0 \cap K$ dans V qui coïncide avec $H_2 \mid K$ au voisinage de $S_0 \cap K$ et qui applique ν_0 sur ν. Puisque dH_3 est biunivoque le long de $D_0 \cap K$, H_3 est un plongement dans V d'un voisinage assez petit de $D_0 \cap K$ dans K.

Considérons les restrictions de H_1 et H_1' à la sphère $\Sigma = D_0 \cap (v = 0)$ et à la boule $g_0(\Sigma)$ resp. (cf. 4.4). Comme $\pi_p(f) = 0$, nous montrerons en 4.9 que ces applications peuvent être étendues suivant des applications $\overline{H}$ de B dans V et $\overline{H'}$ de B' dans M resp. (cf. 4.4) telles que $f_0 \overline{H} = \overline{H'} g_0$ sur B.

Comme K peut se rétracter sur $(D_0 \cap K) \cup B$, il est possible d'étendre H_3 suivant une application H_4 de K dans V, la restriction de H_4 à B étant homotope à $\overline{H}$. On peut choisir H_4 générique (2.5); ce sera donc un plongement car $2 \dim K = 4n - 2m + 2 < n = \dim V$. On peut supposer de plus que $H_4^{-1}(D) = D_0 \cap K$, car on peut construire H_4 transverse à la sous-variété $D - H_1(D_0 \cap K)$ (cf. 1.8), c'est-à-dire ne la rencontrant pas puisque $\dim K = 2n - m + 1 < m - n = \operatorname{codim} D$.

d) *sur* K'. L'application H_3' de $g_0(K)$ dans M est bien définie par la condition $f_0 H_4 = H_3' g_0$. En vertu du fait que g_0 et f_0 sont génériques, de 3.13 et 1.2, il est possible d'étendre la définition de H_3' sur un voisinage de $\Delta_0 \cap K$ dans K' de sorte que H_3' soit un plongement et qu'il coincide avec H_2' restreint à un voisinage de S_0' dans K'. Soit ν_0' le champ des vecteurs unitaires normaux à $g_0(K) - \Delta_0$ dans K'. Prolongeons le champ de vecteurs $dH_3'(\nu_0')$ suivant un champ de vecteurs ν' le long de $H_3(g_0 K - \Delta_0)$ transverse à $f_0 V$. Appliquant 1.3, on peut encore étendre la définition de H_3' sur un voisinage de $g_0 K$ dans K' de sorte que $dH_3'(\nu_0') = \nu'$; ainsi H_3' est un plongement dans M d'un voisinage de $g_0 K$ dans K'.

Les restrictions à $g_0(B)$ de H_3' et $\overline{H'}$ sont homotopes (cf. c)). Comme K' peut se rétracter sur $g_0(K) \cup B'$, il est possible d'étendre H_3' suivant une application H_4' de K' dans M que l'on peut supposer être un plongement, car $2 \dim K' = 4n - 2m + 4 < m = \dim V$. On peut supposer enfin que $H_4'^{-1} f_0 V = g_0 R^n \cap K'$, car $H_4'(K')$, qui est une sous-variété de dimension $2n - m + 2$, évite génériquement une sous-variété de codim $m - n > 2n - m + 2$.

Nous avons ainsi obtenu des plongements $H = H_4$ de K dans V et $H' = H_4'$ de K' dans M vérifiant les conditions 1), 2) et 3) de 4.5.

4.7. Notre but est maintenant de définir dH et dH' sur les vecteurs tangents à R^n et R^m d'origine K et K' de sorte que

4) $df_0 \cdot dH = dH' \cdot dg_0$

a) Considérons le champ $dH_2(e_i)$, $1 < i \leqslant m - n$, défini au voisinage de $H(S_0 \frown K)$ (cf. 4.6, b)) et qui est formé de $m - n - 1$ vecteurs linéairement indépendants et transverses à $H(K)$. Comme ce champ peut se prolonger à $H(D_0^+ \frown K)$ avec les mêmes propriétés (4.6, b)) et que K et $D_0^+ \frown K$ peuvent se rétracter par déformation sur un point, on peut trouver le long de $H(K)$ un champ de $m - n - 1$ vecteurs indépendants $\xi_2, \ldots, \xi_{m-n}$, transverse à $H(K)$ et qui coincide avec le champ donné $dH_2(e_i)$ au voisinage de $H(S_0 \frown K)$. Soit N le fibré engendré par les ξ_i.

Nous définissons dH par linéarité en posant $dH(e_i) = \xi_i$, $i > 1$.

b) Construisons de même le long de $H'(K)$ un champ transverse de $(2m - 2n - 2)$-plans N' qui contienne l'image de N par df_0 et qui soit engendré au voisinage de $H'(S_0' \frown K')$ par $dH_2'(e_i')$ et $dH_2'(e_i'')$, $1 < i \leqslant m - n$, (cf. 4.6, b)).

Remarquons que dg_0 applique le vecteur e_i, $i > 1$, pris en un point de K de coordonnée x_1 sur le vecteur $e_i' + x_1 e_i''$; le champ de vecteurs e_i'' est donc transverse à $g_0(R^n)$.

Construisons un champ N_2^0 de $(m - n - 1)$-plans le long de $f_0 H(K)$ et au voisinage de $H'(S_0' \frown K')$, contenu dans N', et tel que

1) N_2^0 soit complémentaire à $df_0(N)$,

2) au voisinage de $H'(S_0' \frown K')$, N_2^0 est engendré par $\xi_i'' = dH_2'(e_i'')$, $i > 1$,

3) en un point $H'(d)$, où $d \in \Delta_0$, N_2^0 est engendré par

$$\xi_i'' = \frac{df_0 \cdot dH[e_i(d_1)] - df_0 \cdot dH[e_i(d_2)]}{x_1(d_1) - x_1(d_2)}$$

où d_1 et d_2 sont les deux points de D_0 appliqués sur d par g_0, $x_1(d_1)$ et $x_1(d_2)$ étant leur x_1-coordonnée.

c) Le long de $f_0 H(K)$, considérons un champ N_1^0 de $(m - n - 1)$-plans contenu dans N' et complémentaire à N_2^0. Ce champ a une trivialisation naturelle $\bar{\xi}_i'$, $1 < i \leqslant m - n$, à savoir la projection du champ $df_0(\xi_i)$ parallèlement à N_2^0. On désire maintenant étendre le champ $\bar{\xi}_2', \ldots, \bar{\xi}_{m-n}'$ dans N' le long de $H'(K')$; comme $g_0(K)$ a le type d'homotopie d'une $(p + 1)$-sphère, on rencontre une obstruction qui est mesurée par un élément de $\pi_{p+1}(V_{2m-2n-2}^{m-n-1})$, où $V_{2m-2n-2}^{m-n-1}$ est la variété de STIEFEL des $(m - n - 1)$-repères de l'espace numérique de dimension $2m - 2n - 2$. Or ce groupe est trivial, car $p + 1 \leqslant 2n - m + 1 < m - n - 1$. Cette extension est donc possible et sera notée $\bar{\xi}_i'$, $i > 1$.

d) Le champ N_2^0 peut être étendu suivant un champ N_2 complémentaire dans N' au champ engendré par les $\overline{\xi'_j}$, $i > 1$. Choisissons maintenant un champ de $(m - n - 1)$ vecteurs ξ''_i, $i > 1$, qui engendre N_2 et qui coïncide le long de $H'(\Delta_0 \frown K')$ et au voisinage de $H'(S'_0 \frown K')$ avec le champ donné en b), 2) et 3).

Nous définissons alors $dH'(e''_i) = \xi''_i$, $i > 1$.

e) Définissons enfin ξ'_i le long de $f_0 H(K)$ en faisant correspondre à un point $f_0 H(a)$, où $a \in K$, le vecteur $df_0[\xi_i(a)] - x_1(a)\xi''_i(a)$; au voisinage de $H'(S'_0 \frown K')$, on posera aussi $\xi'_i = H'(e'_i)$. On a $\xi'_i = \xi'_i$ modulo N^0_2. On étend ξ'_i le long de $H'(K')$ de sorte que cette condition reste vérifiée. On posera finalement $dH'(e_i) = \xi'_i$, $i > 1$.

Il résulte immédiatement de la construction de dH et dH' que l'égalité 4) est satisfaite.

4.8. D'après 1.3 (ou en utilisant une métrique riemanienne), il est possible d'étendre H à K_ε, si ε est assez petit, suivant un difféomorphisme dont la différentielle dH le long de K a la valeur prescrite précédemment, et qui coincide avec H_2 au voisinage de $(S_0 \frown K)$ (cf. 4.6, b).

Par la condition 1) de 4.5, H' est défini sur $g_0(K_\varepsilon.)$ et aussi au voisinage de $S'_0 \frown K'$ (cf. 4.6, b). Il est aisé de vérifier que, au voisinage de tout point de $g_0(K_\varepsilon)$, cette définition de H' peut être étendue de sorte que dH' ait la valeur donnée dans 4.7, car K coupe transversalement $g_0(K_\varepsilon)$. D'après 1.3, il est donc possible, pour ε assez petit, d'étendre H' sur K'_ε, de sorte que la condition 1) de 4.5 soit vérifiée. Si ε est assez petit, H' sera un difféomorphisme et la condition 3) de 4.5 sera aussi vérifiée, puisqu'elle l'est déjà sur K et K'. La démonstration de la proposition 2 sera donc achevée, une fois démontré ce que nous avons utilisé en 4.6, c).

4.9. Considérons dans l'espace numérique $R^{p+2}(x, y, u_1, \ldots, u_p)$ la demiboule B^{p+2}_+ définie par $x^2 + y^2 + u^2 \leqslant \theta_0^2$, $y \geqslant 0$. Son bord est formé de l'hémisphère $S^{p+1}_+ : x^2 + y^2 + u^2 = \theta_0^2$, $y \geqslant 0$ et de la boule B^{p+1}: $x^2 + u^2 \leqslant \theta_0$, $y = 0$. Soit enfin S^p le bord de B^{p+1}.

Nous pouvons construire un homéomorphisme h de S^{p+1}_+ sur la boule $B \subset K \subset R^n$ (cf. 4.4) appliquant un point de S^{p+1}_+ de coordonnées (x, y, u) sur le point de B de coordonnées $x_1 = x/(1 + u^2)\ldots$, $u = u$. Soit h'_0 l'application continue de B^{p+1} dans $B' \subset K' \subset R^m$ qui envoie un point $(x, 0, u)$ sur le point de B' de coordonnées $X_1 = 0$, $Y_1 = 1/2$, $U_j = 2u_j$ ou $\theta_0 u_j/(x^2 + u^2)^{1/2}$ suivant que $(x^2 + u^2)^{1/2} \leqslant \theta_0/2$ ou $\geqslant \theta/2$. Il est possible de construire une application continue h' de B^{p+2}_+ sur B' dont la restriction à l'intérieur de B^{p+1}_+ est un homéomorphisme et qui est égale à $g_0 h$ sur S^{p+1}_+ et à h'_0 sur B^{p+1}.

Nous considérons maintenant le «mapping cylinder» M_f de f_0, l'injection i de V dans M_f et la projection naturelle j de M_f sur M (cf. 0.4). L'application iH_1h de S^p dans M_f peut être étendue suivant une application ψ de B^{p+1} dans M_f telle que $j\psi = H_1'h'$ sur B^{p+1}. Comme ψ envoie S^p dans le sous-espace V de M_f, elle représente un élément de $\pi_{p+1}(M_f, V) = \pi_{p+1}(f) = 0$. Il est donc possible d'étendre ψ suivant une application continue Ψ de B^{p+1}_+ dans M_f envoyant S^{p+1}_+ dans V.

Alors Ψh^{-1} est une application $\overline{H}$ de B dans V prolongeant H_1 et l'application $\overline{H}'$ de B' dans M définie par $j\Psi = \overline{H}'h'$ vérifie $f_0\overline{H} = \overline{H}'g_0$ sur B.

Démonstration de la proposition 1.

Construction d'un modèle.

4.10. Définissons une famille d'applications g_τ^0 dépendant du paramètre τ, où $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, de $R^{m-n+1}(x_1, \ldots, x_{m-n}, u)$ dans $R^{2m-2n+1}(X_1, \ldots, X_{m-n}Y_1, \ldots, Y_{m-n}, U)$ par les équations

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1(1-2Y_1) & X_i &= x_i \\ Y_1 &= A(u, \varrho^2, \tau)\gamma(x_1)/(1+x_1^2), & Y_i &= x_1 x_i \end{aligned} \qquad 1 < i \leqslant m-n,\ U = u$$

où $A = \lambda[u - \alpha\tau u_0]$

γ, ϱ, α étant définis comme dans 4.4,

u_0 et δ étant des nombres > 0, $\delta < u_0$,

λ une fonction d'une variable u, égale à 0 pour $u \leqslant -\delta$, strictement croissante entre $-\delta$ et $+\delta$, égale à 1/2 pour $u = 0$ et à 1 pour $u \geqslant \delta$.

On vérifie, comme dans 4.4, que

1) g_τ^0 a un seul point singulier $S_\tau^0 \colon x_i = 0, u = \tau u_0$,

2) la courbe Δ_τ^0 des points doubles de g_τ^0 est la demi-droite

$$X_i = 0, \quad Y_1 = 1/2, \quad Y_j = 0, \quad j > 1, \quad U \geqslant \tau u_0,$$

et que g_τ^0 est générique pour tout τ.

L'effet de la déformation est ainsi de repousser les points doubles le long de la demi-droite Δ_0^0.

Soit K_ε^0 le compact de R^{m-n+1} défini par

$$|x_1| \leqslant 2, \quad \varrho^2 \leqslant \varepsilon^2, \quad -\delta \leqslant u \leqslant u_0 + \delta$$

et soit $K_\varepsilon'^0$ le compact de $R^{2m-2n+1}$ défini par

$$|X_1| \leqslant 2, \quad \Sigma_{j>1} X_j^2 \leqslant \varepsilon^2, \quad 0 \leqslant Y_1 \leqslant 1, \quad \Sigma_{j>1} Y_j^2 \leqslant 4\varepsilon^2, \quad -\delta \leqslant u \leqslant u_0 + \delta,$$

et soient K^0 et K'^0 leur intersection avec le plan $x_j = 0$, $j > 1$, et le plan $X_j = 0$, $Y_j = 0$, $j > 1$, respectivement.

Comme dans 4.4, la déformation est constante en dehors de K_ε^0 et l'on a $g_\tau^{0-1}(K_\varepsilon'^0) = K_\varepsilon^0$.

4.11. Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses de la proposition 1, S et Δ étant la variété des points singuliers et des points doubles resp. de f_0, $S' = f_0(S)$ et $D = f_0^{-1}(\Delta)$.

Construisons un champ de vecteurs v le long de S transverse à D, ce qui est possible car $\operatorname{codim} D = m - n > 2n - m - 1 = \dim S$; soit E_1 le fibré linéaire trivial engendré par v. Soit E_{m-n-1} un fibré de base S engendré par un champ de $(m - n - 1)$-plans le long de S complémentaire à D et à E_1. Désignons enfin par L le fibré linéaire engendré par le champ des noyaux de df_0 le long de S.

Le fibré $N = L + E_{m-n-1} + E_1$ est isomorphe au fibré normal à S dans V. Nous pouvons réduire le groupe structural de L au groupe orthogonal $0(1)$, celui de E_{m-n-1} à $0(m - n - 1)$ et celui de E_1 à l'identité en considérant que v est un champ de vecteurs unitaires. Identifions la fibre type de N à R^{m-n+1}, l'espace numérique des coordonnées $(x_1, \ldots, x_{m-n}, u)$, la fibre de L étant identifiée à l'axe des x_1, celle de E_{m-n-1} au plan des variables $x_2, \ldots, x_{m-n}$ et celle de E_1 à l'axe des u.

Soit N' le fibré associé à N de fibre $R^{2m-2n+1}(X_1, \ldots, X_{m-n}, Y_1, \ldots, Y_{m-n}, U)$, un élément du groupe structural de N représenté par les équations $x_1' = \pm x_1$, $x_i' = \alpha_i^j x_j$, $i, j > 1$, $u' = u$ définissant la transformation $X_1' = \pm X_1$, $X_i' = \alpha_i^j X_j$, $Y_1' = \pm \alpha_i^j X_j$, $Y_1' = Y_1 = Y_1$, $U' = U$.

Soit alors g_τ l'application fibrée de N dans N', se projetant sur l'identité de S et qui, sur chaque fibre, se réduit à l'application g_τ^0 définie en 4.10, u_0 étant $\varphi_1 - \varphi_0$. Ceci a un sens, car g_τ^0 commute avec les opérations du groupe structural. On vérifie immédiatement que g_τ est une application générique de N dans N', pour tout τ; les variétés S_0 et Δ_0 des points singuliers et des points doubles de g_0 resp. sont la réunion de S_0^0 et Δ_0^0 resp. dans chaque fibre. Désignons par U la fonction sur Δ_0 égale à la coordonnée U dans chaque fibre. Enfin soient K_ε et K_ε' les compacts de N et N' resp. qui coupent chaque fibre suivant K_ε' et $K_\varepsilon'^0$ resp.

4.12. Pour construire la déformation f_τ, il suffira comme dans 4.5 de construire des difféomorphismes $H : K_\varepsilon \to V$ et $H' : K_\varepsilon' \to M$ tels que

1) $f_0 H = H' g_0$ sur K_ε

2) sur Δ et Δ_0 les fonctions φ et $U + \varphi_0$ se correspondent par H'

3) $H'^{-1} f_0 V = g_0 N \cap K'_\varepsilon$.

On définira alors f_τ comme l'identité en dehors de $H(K_\varepsilon)$ et par $f_\tau = H' g_\tau H^{-1}$ sur $H(K_\varepsilon)$.

La construction de H et H' est tout à fait analogue à celle décrite en 4.6 à 4.8 dans le cas de la proposition 2, et nous ne la répéterons pas. Remarquons simplement que l'on n'a pas d'obstructions homotopiques comme dans 4.6, c), d) et 4.7, c), car $D_0 \cap K$ peut se rétracter par déformation sur S et $g_0(K)$ sur S'.

4.13. Remarque. Dans le cas où V a un bord ∂V et où g est une application de V dans M qui soit un plongement au voisinage de ∂V et telle que $g(\partial V) \cap g(V - \partial V) = \emptyset$, on construit d'abord une application générique f proche de g, vérifiant donc les mêmes propriétés que g, et égale à g au voisinage de ∂V. La sous-variété des points doubles de f ne rencontre pas $f(\partial V)$. On peut donc effectuer sans aucun changement les constructions précédentes en prenant garde simplement que $H(K_\varepsilon) \cap \partial V = \emptyset$ et que $H'(K'_\varepsilon) \cap f(\partial V) = \emptyset$, ce qui est toujours possible, pour ε assez petit, car $\dim K' = 2n - m + 2 < m - n + 1 = \operatorname{codim} f(\partial V)$.

4.14. Remarque. Dans la proposition 2, au lieu de supposer $2m \geqslant 3(n+1)$, il suffit de supposer $2p + 2 < n$ et $p + n + 2 < m$.

En effet, il existe un difféomorphisme de K_ε dans un voisinage arbitraire de la réunion P de $D_0 \cap K$ et de la $(p+1)$-boule B (cf. 4.4), ce difféomorphisme étant fixe sur B. De même, il existe un difféomorphisme de K'_ε dans un voisinage arbitraire de la réunion P' de $\Delta_0 \cap K'$ et de la $(p+2)$-boule B' (cf. 4.4), aussi fixe sur P'. Ainsi dans les inégalités de 4.6, c) et d), $2n - m = \dim \Delta_0$ peut être remplacé par p.

Dans la proposition 1, il suffit de supposer $2m > 3n + 1$ (pour assurer l'existence du champ de vecteurs v, cf. 4.11), car il existe des difféomorphismes de K_ε et K'_ε dans des voisinages arbitraires de $D_0 \cap K$ et $\Delta_0 \cap K'$ respectivement.

5. Existence d'isotopies

5.1. Théorème. *Soit V_0 une variété compacte sans bord de dimension n_0 et M_0 une variété de dimension m_0. On suppose $2m_0 > 3(n_0 + 1)$.*

Soit g une application de V_0 dans M_0 telle que $\pi_{2n_0 - m_0 + 2}(g) = 0$. Alors *deux plongements de* V_0 *dans* M_0 *homotopes à* g *sont isotopes.*

(C'est le théorème d'existence b) de l'introduction.)

5.2. Posons $V = V_0 \times I$, $M = M_0 \times I$, $m = m_0 + 1$, $n = n_0 + 1$. Ainsi $\pi_{2n-m+1}(g) = 0$ et $2m \geqslant 3(n+1)$.

Désignons par t et t' les projections de $V_0 \times I$ et $M_0 \times I$ sur I.

D'après 2.7, il existe une homotopie générique reliant les deux plongements donnés de V_0 dans M_0; désignons par f l'application de $V = V_0 \times I$ dans $M = M_0 \times I$ associée à cette homotopie. On a $t = t'f$, f est une application générique de V dans M et les points singuliers de la restriction de t' à la variété Δ des points doubles de f ne se trouvent pas sur le bord S' de Δ.

Nous allons maintenant reprendre la démonstration et les notations du § 4 appliqué à la situation ci-dessus. Il s'agit de déformer l'application générique $f: V \to M$ comme au paragraphe précédent, en la laissant fixe sur $\partial V = (V_0 \times 0) \cup (V_0 \times 1)$, et de sorte que, pour chaque déformation f_τ, on ait $t = t' f_\tau$. Nous allons donc simplement indiquer quelles sont les précisions à apporter pour que cette nouvelle condition soit vérifiée.

Dans 4.2, on supposera que les variétés de niveau $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$, $\varphi_- = c$, $\varphi_+ = c$ ne contiennent pas de points singuliers de la restriction de t' à Δ. Dans les hypothèses des propositions 1 et 2, on suppose donc que f_0 correspond à une homotopie générique, et on exige dans les conclusions que, pour tout τ, on ait $t = t' f_\tau$.

Pour démontrer la proposition 2 avec cette condition supplémentaire, on part du même modèle qu'en 4.4 en introduisant de plus dans K'_ε la fonction t'_0 définie par $t'_0(X, Y, U, V) = t'(U, V) + X_2$, où $t'(U, V)$ est la restriction de la fonction t' à Δ exprimée dans les coordonnées locales (U, V) dans la boule B_0. On pose $t_0 = t'_0 g_0$.

Les difféomorphismes H et H' de 4.5 devront alors vérifier de plus la condition

1)′ $t_0 = tH$ et $t'_0 = t'H'$.

Comme la déformation g_τ vérifie la condition $t_0 = t'_0 g_\tau$, elle définira comme dans 4.5 une déformation f_τ telle que $t = t' f_\tau$.

5.3. Nous suivons maintenant 4.6 en indiquant à chaque pas ce qu'il faut pour que 1)′ soit vérifié.

Rien n'est changé dans a). Dans b), on impose de plus au champ $(\xi_2, \ldots, \xi_{m-n}, \nu)$ de vérifier $< dt, \xi_2 > = 1$, $<dt, \xi_i> = 0$ pour $i > 2$, $< dt, \nu> = < dt_0, \nu_0>$ aux points correspondants par H_1. On peut réaliser la première condition en appliquant le lemme 5.5 qui suit. Ceci fait, comme dt restreint à la somme du fibré tangent à D et du fibré engendré par ξ_2

est partout de rang 1, la construction du champ $(\xi_3, \ldots, \xi_{m-n}, \nu)$ revient à celle d'une section d'un espace fibré de base l'espace contractile $H_1(D_0^+ \cap K)$. On construit ensuite H_2 et H_2' en appliquant 3.4.

Dans c), ν doit vérifier $< dt, \nu > = < dt_0, \nu_0 >$ aux points correspondants par H_1. Pour cela on construit d'abord ξ_2 le long de D et transverse à D de sorte que $< dt, \xi_2 > = 1$ (cf. 5.5); la construction de ν satisfaisant à la condition imposée et transverse à D et ξ_2 est la construction d'une section d'un fibré affine de base D qui évite un sous-fibré affine de codimension $m - n - 1 > 2n - m = \dim D$. On pourra ensuite trouver H_3 tel que $tH_3 = t_0$ en tenant compte de 5.6. Enfin pour construire H_4 tel que $tH_4 = t_0$ restreint à K, on utilise 2.9.

Dans d), on construit les extensions successives de H_3' en tenant compte de 5.6. Le champ de vecteurs ν' doit vérifier de plus $< dt', \nu' > = < dt_0', \nu_0' >$ aux points correspondants par H_3'; comme t' restreint à $f_0 V$ est une fonction non singulière, la construction de ν' revient de nouveau à celle d'une section d'un fibré affine de base $H_3'(g_0 K)$ ne rencontrant pas un sous-fibré affine de $\operatorname{codim} m - n > 2n - m + 1 = \dim K$. Enfin on construit H_4' par 2.9.

5.4. Dans 4.7, dH et dH' doivent vérifier de plus

4)' $dt_0 = dt \cdot dH$ et $dt_0' = dt' \cdot dH'$.

Les conditions supplémentaires sont, dans a), $< dt', \xi_2 > = 1$ (cf. 5.5), $< dt, \xi_i > = 0$ pour $i > 2$, dans b), $< dt', N_2 > = 0$, dans c), $< dt', \overline{\xi_2'} > = 1$ et $< dt', \overline{\xi_i'} > = 0$ pour $i > 2$. Ceci ne présente aucune difficulté nouvelle.

Enfin dans 4.7, on tient de nouveau compte de 5.6.

Les précisions à apporter à la démonstration de la proposition 1 sont tout à fait semblables.

5.5. Nous démontrons maintenant ce que nous venons d'utiliser.

Lemme. *Soit S une sous-variété d'une variété V et t une fonction numérique non singulière sur V. On suppose* $\dim S < \operatorname{codim} S$.

Etant donnée une fonction α sur S qui ne s'annule pas en même temps que la différentielle dt de t restreinte à S, il existe le long de S un champ de vecteurs ν tel que

1) *ν est transverse à S,*

2) $< dt, \nu(s) > = \alpha(s)$ *pour tout $s \in S$.*

Il est tout d'abord possible de construire un champ de vecteurs ν le long de S vérifiant 2), car ceci revient à construire une section d'un espace fibré

E dont la fibre est un espace affine. Soit F le fermé de S formé des points où dt restreint à S s'annule identiquement; d'après l'hypothèse sur α, v est certainement transverse à S aux points de F. En dehors de F, la condition 1) signifie que v n'appartient pas au sous-fibré affine E_0 de E formé des vecteurs v_0 tangents à S et tels que $< dt, v_0 > = \alpha$. La codimension de E_0 dans E est égale à celle de S dans V. Donc si $\dim S < \operatorname{codim} S$, il sera toujours possible d'étendre une section de E définie sur F en une section sur S ne rencontrant pas E_0.

5.6. Remarque. Soient V et M des variétés et t une application de V dans une variété R. Désignons par p et t' les projections naturelles de $M \times R$ sur M et R respectivement. Soit f une application d'un voisinage d'un fermé F de V dans $M \times R$ telle que, sur F, $d(t'f) = dt$. Il existe alors une application f' d'un voisinage de F dans $M \times R$ telle que $t'f = t$ et que $df = df'$ sur F. Il suffit en effet de définir f' par $f' = (pf, t)$.

6. Théorèmes d'approximation

6.1. Les variétés V et M sont supposées munies de métriques riemanniennes complètes; la distance de deux points x_1 et x_2 est notée $d(x_1, x_2)$.

Théorème. *Soit V une variété compacte de dimension n et M une variété de dimension m. On suppose que $2m \geqslant 3(n+1)$.*

Etant donné un plongement topologique g de V dans M et un nombre positif ε arbitraire, il existe un plongement différentiable f de V dans M tel que $d[f(x), g(x)] < \varepsilon$ pour tout $x \in V$. De plus si g est un plongement différentiable au voisinage d'un fermé F de V, on peut supposer que $f = g$ sur F.

L'idée de la démonstration est d'approcher g par une application générique f et d'éliminer pas à pas les points doubles de f comme au § 4. Si f est suffisamment proche de g, les paires de points de V appliqués par f sur un même point de M sont très proches, donc liés par une unique géodésique; il en résulte que l'on ne rencontre aucune obstruction homotopique dans l'identification avec le modèle (4.6 à 4.7).

6.2. Il existe un nombre $\varrho > 0$ (resp. $\varrho' > 0$) tel que deux points de V (resp. M) dont la distance est inférieure à ϱ (resp. ϱ') sont joints par un segment géodésique unique de longueur égale à la distance de ces points et dépendant continuement de ces points.

Lemme. *Etant donné un nombre $\eta > 0$, il existe une application générique $f : V \to M$ telle que*

a) *$d[f(x), g(x)] < \eta$ pour tout $x \in V$,*

b) *si $f(x) = f(y)$, alors $d(x, y) < \varrho$ et, pour tout couple de points x_1, y_1 sur le segment géodésique joignant x à y, $d[f(x_1), f(y_1)] < \eta$.*

Démonstration du lemme. Comme g est une application continue, il existe un nombre α, $0 < \alpha < \varrho$, tel que, si $d(x, y) < \alpha$, alors $d[g(x), g(y)] < \eta/2$. D'autre part, comme g est biunivoque et V compacte, il existe un nombre $\beta > 0$ tel que si $d[g(x), g(y)] < \beta$, alors $d(x, y) < \alpha$.

Soit alors f une application générique (cf. 2.5) de V dans M telle que $d[f(x), g(x)] < \min(\eta/4, \beta/2)$. Si $f(x) = f(y)$, alors

$$d[g(x), g(y)] \leqslant d[g(x), f(x)] + d[g(y), f(y)] < \beta,$$

donc $d(x, y) < \alpha < \varrho$. D'autre part, si $d(x, y) < \alpha$, alors $d[f(x), f(y)] \leqslant d[f(x), g(x)] + d[g(x), g(y)] + d[g(y), f(y)] < \eta/4 + \eta/2 + \eta/4 = \eta$, c.q.f.d.

6.3. Démonstration du théorème. Nous voulons montrer que si l'on part d'une application générique f vérifiant la condition b) du lemme, avec $\eta < \varrho'$, chacune des déformations f_τ de $f = f_0$ qui interviennent dans les propositions 1 et 2 de 4.2 peut être effectuée de sorte que $d[f_1(x), f_0(x)] < \eta$ et que f_1 vérifie la condition b) du lemme.

Remarquons tout d'abord que dans les modèles 4.4 et 4.10, il existe une déformation de K_ε qui déplace les points sur les segments σ parallèles à l'axe des x_1 et qui rétracte K_ε sur l'union du plan $x_1 = 0$ et du compact Ω composé des segments de droites joignant les paires de points de $D_0 \cap K$ qui ont même image par g_0. De même soit Ω' le compact de K' formé des segments de droites parallèles au plan P des variables X_1, Y_1, et qui joignent les points de $g_0(\Omega)$ aux points de Δ_0. Il existe une rétraction de K'_ε sur l'union du plan $X_1 = 0, Y_1 = 1/2$ et de Ω', les points se déplaçant sur les segments σ' parallèles à P et contenant un point du plan $X_1 = 0, Y_1 = 1/2$.

En vertu de ce qui précède et de la condition b) sur f, il est possible d'étendre l'application H_1 de $D_0 \cap K$ dans V, donnée en 4.6, a), suivant une application continue H de K_ε dans V qui applique tout segment σ sur un segment géodésique de longueur $< \varrho$. L'application de $g_0(K_\varepsilon)$ dans M faisant correspondre à tout point $x' = g_0(x)$ le point $f_0\overline{H}(x)$, peut être étendue suivant une application H' de K_ε dans M appliquant tout segment de droite σ' sur un segment géodésique de longueur $< \eta$.

Ensuite, dans 4.5 et 4.7, on pourra construire H et H' très proches de $\overline{H}$ et $\overline{H'}$ de sorte que, pour deux points quelconques x et y de tout segment σ, on ait 1) $d[H(x), H(y)] < \varrho$, 2) $d[f_0H(x), f_0H(y)] < \eta$, et pour deux points quelconques x', y' de tout segment σ', 3) $d[H'(x'), H'(y')] < \eta$.

Or au cours de la déformation f_τ, les points se déplacent sur les arcs $H(\sigma')$; donc d'après 3), $d[f_1(x), f_0(x)] < \varrho$ pour tout $x \in V$. D'autre part les points de $H(K_\varepsilon)$ qui ont même image par f_1 se trouvent sur un arc $H(\sigma)$; leur distance est inférieure à ϱ et d'après 2), la condition b) est vérifiée.

Enfin on peut supposer qu'il y a au plus 3 déformations f_τ qui déplacent un point x donné de V. En effet, soient f_τ^i, $i = 1, \ldots, N$, les déformations successives que l'on doit effectuer pour éliminer les points doubles (4.2), $H^i : K_\varepsilon^i \to V$, $H' : K_\varepsilon'^i \to M$ les identifications avec les modèles qui servent à les définir (4.5, 4.12). En choisissant δ assez petit dans le modèle 4.10, on peut supposer que tout point de Δ appartient au plus à 3 compacts $H'^i(K_\varepsilon'^i)$ (cf. 4.2). D'autre part, si $H'^i(K_\varepsilon'^i) \cap H'^j(K_\varepsilon'^i) \cap \Delta = \emptyset$, on pourra supposer $H^i(K_\varepsilon^j) \cap H^j(K_\varepsilon^j) = \emptyset$, car $2 \dim K = 4n - 2m + 2 < n = \dim V$.

En choisissant donc une application générique f vérifiant les conditions du lemme avec $\eta < \varepsilon/4$, on obtiendra après ces déformations successives le plongement désiré.

Si g est déjà un plongement au voisinage de F, on partira d'une application générique f telle que les segments géodésiques joignant les paires de points de V ayant même image par f, ne rencontrent pas F. On pourra donc supposer qu'aucun des compacts $H^i(K_\varepsilon^i)$ ne rencontre F; ainsi chaque déformation f_τ^i sera constante sur F.

Le théorème d'approximation pour les isotopies (cf. introduction) se démontre exactement de la même manière.

6.4. Nous énoncerons pour terminer un autre théorème dont la démonstration sera laissée au lecteur, car elle est aussi très semblable à la précédente.

Théorème. *Soit f un plongement d'une variété compacte V de dimension n dans une variété M de dimension m. On suppose $2m > 3(n+1)$. Il existe un nombre ε dépendant de f tel que tout plongement f' de V dans M avec $d[f(x), f'(x)] < \varepsilon$, pour tout $x \in V$, est isotope à f.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Ehresmann, *Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de* Lie. Colloque de topologie et géométrie différentielle de Strasbourg. C.N.R.S., 1953.

[2] A. Haefliger, *Differentiable imbeddings.* Bull. Amer. Math. Soc., to appear.

[3] M. Morse, *The calculus of variations in the large.* A.M.S. Colloquium publications, 18 (1934).

[4] N. Steenrod, *The topology of fibre bundles.* Princeton University Press (1951).

[5] R. Thom, *Un lemme sur les applications différentiables.* Bol. Soc. mat. mexic., 2e série, t. I (1956), 59–71.

[6] R. Thom, *La classification des immersions d'après* Smale. Séminaire Bourbaki, décembre 1957, Paris.

[7] R. THOM, *Singularities of differentiable mappings.* Notes miméographiées rédigées par H. Levine, Bonn (1959).

[8] H. WHITNEY, *Differentiable manifolds.* Ann. of Math., 37 (1936), 645–680.

[9] H. WHITNEY, *Differentiability of the remainder term in* TAYLOR'*s formule.* Duke Math. J., 10 (1943), 153–158.

[10] H. WHITNEY, *Differentiable even functions.* Duke Math. J., 10 (1943), 159–160.

[11] H. WHITNEY, *The general type of singularity of a set of* $2n-1$ *smooth functions of* n *variables.* Duke Math. J., 10 (1943), 161–172.

[12] H. WHITNEY, *The self-intersections of a smooth n-manifold in* $2n$*-space.* Ann. of Math., 45 (1944), 220–246.

[13] H. WHITNEY, *The singularities of a smooth n-manifold in* $(2n-1)$*-space.* Ann. of Math. 45 (1944), 247–293.

[14] H. WHITNEY, *Singularities of mappings of euclidean spaces.* Sympos. Int. de Topologia Algebraica (1958), 285–301.

[15] W. T. WU, *On the isotopy of* C^r*-manifolds of dimension* n *in* EUCLIDEAN $(2n+1)$*-space,* Science Records, New Ser. Vol. II (1958), 271–275.

(Reçu le 25 février 1961)