

We are well aware that some questions in relation to this case are not satisfactorily explained. In these points we can offer only suggestions. Since growth in this case was only moderately retarded which was possibly due to the lack of sexual development, it is probable that the growth hormone was not lacking and that, therefore, it passed directly into the blood-stream.

The fact that the basophilic cells were normal in size, shape and number, also seems extraordinary if no gonadotropic influence has been exerted. Several explanations of this are possible. First, the gonadotropic substance may be produced but remain inactivated, and second, these cells may produce other hormonal substances as well. In this instance it is noteworthy that fat metabolism was entirely normal.

#### REFERENCES:

1. HARVEY CUSHING: Dyspituitarism: twenty years later (HARVEY lecture, Jan. 1933).
2. HARVEY CUSHING: Posterior pituitary activity from an anatomical standpoint (The American Journal of pathol., Vol. IX, Sept. 1933).
3. KRAUS: Die Hypophyse in Henke und Lubarsch, Handbuch der pathol. Anatomie.
4. A. PRIESEL, Beiträge zur pathol. Anatomie und zur allg. Pathologie, Bd. 67, 220, 1920.
5. A. PRIESEL, Beiträge zur pathol. Anatomie und zur allg. Pathologie, Bd. 70, 209, 1922.

---

**Mathematics.** — *Beiträge zur Topologie der Deformationen (I. Höherdimensionale Homotopiegruppen)*. By Dr. W. HUREWICZ (Communicated by Prof. L. E. J. BROUWER).

(Communicated at the meeting of December 22, 1934.)

Bei der Untersuchung der stetigen Abbildungen eines Raumes  $X$  in einem Raum  $Y$  hat es sich als äusserst zweckmässig erwiesen, die Gesamtheit dieser Abbildungen selbst als einen topologischen Raum aufzufassen. Die Komponenten dieses Abbildungsraumes sind in den wichtigsten Fällen nichts anders als die BROUWERSchen Klassen von ineinander deformierbaren Abbildungen. Die meisten Untersuchungen über Homotopieprobleme betreffen die Klasseneinteilung der Abbildungen, d. h. die Komponentenzerrfallung des Abbildungsraumes. Man kann nun einen Schritt weiter gehen und die topologische Struktur der *einzelnen Komponenten* des Abbildungsraumes studieren. Diese Komponenten sind, von trivialen Fällen abgesehen, unendlichdimensionale nicht kompakte (auch nicht lokal kompakte) Räume. Die wichtigste topologische Invariante, die man selbst in so allgemeinen Räumen in sinnvoller Weise einführen kann, scheint mir die POINCARÉ'sche *Wegegruppe* (Fundamentalgruppe). Vereinzelt Untersuchungen über die Wegegruppen in den Abbildungs-

räumen liegen bereits vor.<sup>1)</sup> Ein Versuch, die Homotopielehre in dieser Richtung systematisch auszubauen, ist der Zweck dieser und der später erscheinenden Mitteilungen.<sup>1a)</sup>

1. *Grundbegriffe.*  $X$  und  $Y$  seien metrisierbare separable Räume. Ferner sei  $X$  kompakt und endlichdimensional,  $Y$ -zusammenhängend und lokal zusammenziehbar im Sinne von K. BORSUK.<sup>2)</sup> Die letzte Voraussetzung bedeutet, dass es zu jedem Punkt  $p$  von  $Y$  und zu jeder Umgebung  $U$  von  $p$  eine in  $U$  zusammenziehbare Umgebung von  $p$  gibt. Wir betrachten die (eindeutigen) stetigen Abbildungen  $F$  von  $X$ , wo  $F(X) \subset Y$  und bezeichnen wie üblich mit  $Y^X$  den (in bekannter Weise definierten) topologischen Raum, dessen Elemente die Abbildungen  $F$  sind.<sup>2a)</sup> Unter den eben genannten Voraussetzungen gilt der wichtige:

*Satz I. Der Raum  $Y^X$  ist lokal zusammenziehbar.*

Folgerungen:  $Y^X$  ist lokal zusammenhängend; die Komponenten von  $Y^X$  sind offene Mengen, es kann ihrer daher höchstens abzählbar viele geben; je zwei in einer gemeinsamen Komponente gelegene Elemente von  $Y^X$  lassen sich durch einen stetigen Weg<sup>2b)</sup> verbinden, d.h. die Komponenten von  $Y^X$  bestehen aus ineinander deformierbaren Abbildungen und stimmen somit mit den Abbildungsklassen überein.

Alle konstanten Abbildungen (d.h. Abbildungen, bei denen die Bildmenge sich auf einen einzelnen Punkt reduziert) gehören derselben Komponente an, die wir mit  $Y_0^X$  bezeichnen. Die Abbildungen  $F \in Y_0^X$  heißen unwesentlich, die übrigen Abbildungen wesentlich.

Betrachtet man in  $Y^X$  die stetigen Wege, die ein festes  $F \in Y^X$  zum Anfangs- und Endelement haben, so kann man in üblicher Weise die *Wegegruppe* definieren, deren Elemente Klassen von ineinander deformierbaren Wegen sind. Dass es nicht nur formal sondern auch inhaltlich einen Sinn hat von der Wegegruppe zu sprechen, folgt daraus, dass nach Satz I alle in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $F$  verlaufenden Wege zusammenziehbar sind<sup>3)</sup> und allgemeiner alle zu einem

1) Vgl. H. KNESER, Math. Zeitschrift 25, S. 362–372.

1a) Eine ausführliche Darstellung mit Beweisen wird später erscheinen

2) Vgl. K. BORSUK, Fund. Math. 19, S. 236.

2a) Meistens wird  $Y^X$  als ein metrischer Raum definiert, wobei eine bestimmte Metrik in  $Y$  zugrunde gelegt werden muss. (Als Abstand zweier Abbildungen  $F$  und  $f$  wird nämlich das Maximum der Abstände zwischen den Punkten  $F(x)$  und  $f(x)$  ( $x \in X$ ) definiert). Bei kompaktem  $X$  ist der so erklärte Raum  $Y^X$  seiner topologischen Struktur nach von der speziellen Wahl der Metrik in  $Y$  unabhängig.

2b) Unter einem stetigen Weg in einem Raum  $R$  wird überall im Folgenden eine stetige Abbildung der Einheitsstrecke in den Raum verstanden.

3) Formal kann man die Wegegruppe auch in Räumen definieren die diese Forderung nicht erfüllen, dies hat aber wenig Sinn, denn die Aufgabe der Wegegruppe besteht ja gerade darin, die Eigenschaften des Raumes „im Grossen“ zu erfassen.

gegebenen Weg  $W$  hinreichend benachbarten Wege <sup>4)</sup> sich in  $W$  deformieren lassen. Die Wegegruppe ist völlig bestimmt durch die Komponente von  $Y^X$  in der sich das Ausgangselement  $F$  befindet. Jeder Komponente von  $Y^X$ , d.h. jeder Abbildungsklasse ist somit eine bestimmte Gruppe zugeordnet. Alle diese Gruppen sind von endlicher oder abzählbarer Ordnung. Eine ausgezeichnete Rolle spielt die Wegegruppe in der Komponente  $Y_0^X$ . Bemerken wir, dass, wenn  $Y$  in sich zusammenziehbar ist, der Raum  $Y^X$  zusammenhängend ist und die (einzige) Wegegruppe in  $Y^X$  mit der Wegegruppe von  $Y$  zusammenfällt.

Manchmal ist es zweckmässig die Wegegruppen statt im vollen Raum  $Y^X$  in einem (in naturgemässer Weise) ausgezeichneten Unterraum von  $Y^X$  zu betrachten. Ist beispielsweise  $M$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$  und  $f$  eine feste Abbildung aus  $Y^M$ , so bilden jene Funktionen  $F \in Y^X$ , die auf  $M$  mit  $f$  übereinstimmen, einen Unterraum von  $Y^X$ , der ebenso wie der volle Raum  $Y^X$  lokal zusammenziehbar ist und folglich eine sinnvolle Einführung der Wegegruppen gestattet.

2. Die Gruppen  $\pi_n$ . Man erhält nun zweierlei Arten von topologischen Invarianten: Je nachdem man für  $X$  oder für  $Y$  einen festen Raum nimmt, liefern die Wegegruppen der Räume  $Y^X$  (und seiner Teilmengen) topologische Invarianten von  $Y$  bzw. von  $X$ . Wir wollen uns auf den ersten Standpunkt stellen. Für  $X$  nehmen wir die  $(n-1)$ -dimensionale Sphäre  $S_{n-1}$  ( $n=1, 2, \dots$ ). In  $S_{n-1}$  und in  $Y$  wählen wir je einen festen Punkt  $x_0$  bzw.  $y_0$  und betrachten die Teilmenge  $N$  von  $Y^{S_{n-1}}$ , bestehend aus allen Abbildungen  $F$  mit  $F(x_0) = y_0$ . (Aus der Bemerkung am Schluss des vorigen Paragraphen folgt, dass diese Menge lokal zusammenziehbar ist). Es stellt sich heraus, dass die Wegegruppe in  $N$  von der Wahl der Komponente unabhängig ist. Da ausserdem die Wahl der Punkte  $x_0$  und  $y_0$ , wie leicht zu sehen, keine Rolle spielt, liegt eine Gruppe vor, die nur vom Raum  $Y$  und von der Zahl  $n$  abhängt. Diese Gruppe wollen wir die  $n$ -te Homotopiegruppe von  $Y$  nennen und mit  $\pi_n(Y)$  bezeichnen. Die Gruppe  $\pi_1(Y)$  ist, wie man sofort sieht, nichts anders als die Wegegruppe in  $Y$ .

Satz II. Für  $n=2, 3, \dots$  sind die Gruppen  $\pi_n(Y)$  ABELSche Gruppen.

Satz III. Die Gruppe  $\pi_n(Y)$  verschwindet dann und nur dann wenn  $Y^{S_n}$  ein zusammenhängender Raum ist, d.h. wenn  $S_n$  keine wesentliche Abbildung auf  $Y$  gestattet.

Satz IV. Ist  $Y'$  ein (unverzweigter) Ueberlagerungsraum <sup>5)</sup> von  $Y$ , so gilt die Isomorphie  $\pi_n(Y) \cong \pi_n(Y')$  für  $n=2, 3, \dots$

<sup>4)</sup> Die Wege in  $Y^X$  mit festem Anfangspunkt kann man als Elemente eines topologischen Raumes betrachten. Es hat daher einen Sinn von benachbarten Wegen sprechen

<sup>5)</sup> Wegen der Definition des Ueberlagerungsraumes vgl. H. SEIFFERT und R. THRELFALL, Lehrbuch der Topologie (1934), S. 181. Der Begriff des Ueberlagerungsraumes wird dort allerdings nur für Komplexe eingeführt. Die Definition kann man aber ohne weiteres für allgemeine Räume aussprechen.

Aus Satz III folgt, dass die Gruppe  $\pi_n(S_m)$  für  $n < m$  verschwindet. Ebenso verschwinden die Gruppen  $\pi_n(S_1)$  für  $n = 2, 3, \dots$ . Die Gruppen  $\pi_n(S_n)$  sind zyklisch von unendlicher Ordnung. Ueber die Gruppen  $\pi_n(S_m)$  für  $n > m > 2$  ist im Allgemeinen nichts bekannt. Den Fall  $n=3$ ,  $m=2$  werden wir unten behandeln.

3. *Das Verschwinden der ersten  $m$  Homotopiegruppen.*  $Y$  sei als endlichdimensional, zusammenhängend und lokal zusammenziehbar vorausgesetzt. Welche Schlüsse lassen sich aus dem Verschwinden der ersten  $n$  Homotopiegruppen von  $Y$  ziehen?

*Satz V.* Die Gruppen  $\pi_1(Y), \pi_2(Y), \dots, \pi_n(Y)$  verschwinden dann und nur dann, wenn für jeden höchstens  $n$ -dimensionalen kompakten Raum  $X$  der Potenzraum  $Y^X$  zusammenhängend ist.

Mit anderen Worten gibt der Index der ersten nicht verschwindenden Homotopiegruppe die kleinste Dimension eines kompakten Raumes an, der sich wesentlich in  $Y$  abbilden lässt. Für einen kompakten Raum  $Y$  folgt daraus, dass das Verschwinden der ersten  $m$  Homotopiegruppen das Verschwinden der ersten  $m$  Homologiegruppen (= Bettischen Gruppen) nach sich zieht (auf die Beziehung zwischen den Homologie- und Homotopiegruppen soll in späteren Mitteilungen eingegangen werden). Eine weitere Folgerung aus Satz V:

*Satz VI.* Für eine kompakten (zusammenhängenden und lokal zusammenziehbaren) Raum  $Y$  von der endlichen Dimension  $n$  ist das Verschwinden der ersten  $n$  Homotopiegruppen eine notwendige und hinreichende Bedingung, damit  $Y$  in sich (auf einen Punkt) zusammenziehbar sei. (Aus dem Verschwinden der ersten  $n$  Homotopiegruppen folgt somit das Verschwinden aller übrigen).

Ist  $Y$  eine BORSUK'sche  $\mathfrak{R}$ -Menge <sup>6)</sup>, so kann man ohne Beschränkung auf die endliche Dimensionszahl beweisen:  $Y$  ist dann und nur dann in sich zusammenziehbar (oder, was für die  $\mathfrak{R}$ -Mengen auf dasselbe hinauskommt,  $Y$  ist dann und nur dann eine absolute Retrakte <sup>7)</sup>), wenn sämtliche Gruppen  $\pi_n(Y)$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) verschwinden.

Es sei noch erwähnt, dass ( $Y$  als lokal zusammenziehbar vorausgesetzt) mit dem Verschwinden der ersten  $n$  Homotopiegruppen von  $Y$  jede der beiden folgenden Bedingungen äquivalent ist:

- |  |   |   |
|--|---|---|
| <p>a) Ist <math>X</math> ein höchstens <math>(n+1)</math>-dimensionaler kompakter Raum und <math>X'</math> eine abgeschlossene Teilmenge von <math>X</math>,</p> <p>b) Ist <math>X</math> ein kompakter Raum von einer beliebigen Dimension und <math>X'</math> eine abgeschlossene höchstens <math>n</math>-dimensionale Teilmenge von <math>X</math>. <sup>7a)</sup></p> | } | <p>so lässt sich jede Abbildung <math>f \in Y^{X'}</math> zu einer Abbildung <math>F \in Y^X</math> fortsetzen.</p> |
|--|---|---|

<sup>6)</sup> Vgl. K. BORSUK, a. a. O., S. 222. Unter den endlichdimensionalen kompakten Räumen stimmen nach BORSUK die  $\mathfrak{R}$ -Mengen mit den lokal zusammenziehbaren Räumen überein.

<sup>7)</sup> Vgl. K. BORSUK, a. a. O., S. 229.

<sup>7a)</sup> Mit einer der Eigenschaft b) sehr ähnlichen Eigenschaft beschäftigt sich K. KURATOWSKI (in einer noch nicht erschienenen Publikation).

4. *Topologische Gruppen.*<sup>7b)</sup> Sei  $G$  eine topologische Gruppe. Für jeden kompakten Raum  $X$  kann  $G^X$  ebenfalls als eine topologische Gruppe aufgefasst werden. Die Komponenten von  $G$  bilden selbst eine Gruppe (nämlich die Faktorgruppe nach der Komponente der Einheit), die wir kurz als „Komponentengruppe“ von  $G$  bezeichnen wollen. Falls  $G$  lokal zusammenziehbar ist, und  $X$  endliche Dimension hat, hat nach Satz I die Komponentengruppe von  $G^X$  Abbildungsklassen zu Elementen und ist von höchstens abzählbarer Ordnung.

Sei nun  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$ . Die Gesamtheit der rechtseitigen Nebengruppen  $H \cdot g$  ( $g \in G$ ) erklären wir zu einem topologischen Raum, indem wir als eine Umgebung einer Nebengruppe  $N$  die Gesamtheit der Nebengruppen  $N \cdot g$  definieren, wo  $g$  eine Umgebung der Einheit in  $G$  durchläuft. Den so gebildeten topologischen Raum bezeichnen wir mit  $G/H$ <sup>8)</sup>.  $G/H$  ist ein stetiges Bild von  $G$  vermöge der Abbildung  $P$ , die jedem Element von  $G$  die dieses Element enthaltende Nebengruppe zuordnet.

Wir nehmen nun einen kompakten Raum  $X$  hinzu und untersuchen das gegenseitige Verhältnis der Potenzräume  $G^X$ ,  $H^X$ ,  $(G/H)^X$ . Dabei setzen wir der Einfachheit halber  $G$  als zusammenhängend voraus. Die Gruppe  $H^X$  können wir offenbar als eine Untergruppe von  $G^X$  betrachten. Jede Abbildung  $F \in G^X$  induziert die Abbildung  $P(F(x))$  aus  $(G/H)^X$ , die wir als die „Spur“ von  $F$  bezeichnen, und zwei Abbildungen aus  $G^X$  haben dann und nur dann dieselbe Spur, wenn sie zur selben Nebengruppe nach  $H^X$  gehören. Somit kann der Nebengruppenraum  $G^X/H^X$  identifiziert werden mit der aus den Spuren  $P(F)$  bestehenden Teilmenge von  $(G/H)^X$ . Um die Beziehung zwischen den Mengen  $(G/H)^X$  und  $G^X/H^X$  näher zu bestimmen, unterwerfen wir die Gruppen  $G$  und  $H$  den folgenden einschränkenden Bedingungen.

a) Es gibt eine Umgebung  $U$  der Einheit in  $G$ , so dass sich aus jeder Nebengruppe  $N \cdot g$  ( $g \in U$ ) je ein Element  $\bar{g}$  auswählen lässt, das stetig von  $g$  abhängt (anders ausgedrückt, es gibt eine Teilmenge von  $G$ , die durch die Funktion  $P$  topologisch auf eine Umgebung von  $H$  in  $G/H$  abgebildet wird).

β) Zu jeder Umgebung  $U$  der Einheit in  $G$  gehört eine Umgebung  $V$  der Einheit, so dass für jedes  $h \in H$  und jedes  $v \in V$  gilt:

$$h^{-1} v h \in U.$$

Man zeigt leicht:

**Satz VII.** Falls  $G$  eine Liesche Gruppe ist, ist die Bedingung a)

<sup>7b)</sup> Eine ausführliche Darstellung der Resultate dieses Paragraphen findet sich in einer demnächst in Comp. Math. erscheinenden Arbeit.

<sup>8)</sup>  $G/H$  ist ein „Wirkungsraum“ der Gruppe. Jedes Element  $g$  von  $G$  induziert eine topologische Transformation von  $G/H$  in sich, nämlich die Transformation, die die Nebengruppe  $N$  in  $N \cdot g$  überführt. Falls  $G$  kompakt ist, lässt sich jeder Wirkungsraum von  $G$ , über dem  $G$  transitiv ist, in der Form  $G/H$  darstellen, wo  $H$  aus Elementen von  $G$  besteht, die einen Punkt des Raumes invariant lassen.

immer erfüllt<sup>8a)</sup>. Falls  $H$  kompakt ist, ist die Bedingung  $\beta$ ) immer erfüllt.

Ist also  $G$  eine geschlossene Liesche Gruppe, so sind beide Bedingungen für beliebige abgeschlossene Untergruppe  $H$  erfüllt. Es gilt nun der wichtige Satz:

**Satz VIII.** Sind die Bedingungen  $\alpha$ ) und  $\beta$ ) erfüllt, so ist für jeden kompakten Raum  $X$  die Menge  $G^X/H^X$  offen und zugleich abgeschlossen in  $(G/H)^X$ . Folglich besteht  $G^X/H^X$  aus einer oder mehreren Komponenten von  $(G/H)^X$  und, insbesondere ist die Komponente  $(G/H)_0^X$  der unwesentlichen Abbildungen in  $G^X/H^X$  enthalten.

**Korollar:** Ist  $(G/H)^X$  zusammenhängend, so gilt (unter den Bedingungen  $\alpha$ ) und  $\beta$ ):

$$(G/H)^X = G^X/H^X.$$

Für den Zusammenhang von  $(G/H)^X$  ist also der Zusammenhang von  $G^X/H^X$  eine notwendige Bedingung. Nun gilt aber allgemein, wenn  $C$  eine beliebige topologische Gruppe ist, und  $D$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $C$ : Der Raum  $C/D$  ist dann und nur dann zusammenhängend, wenn jede Komponente von  $C$  ein Element von  $D$  enthält. Für  $C = G^X$ ,  $D = H^X$  erhalten wir daraus:

**Satz IX.** Sind die Bedingungen  $\alpha$ ) und  $\beta$ ) erfüllt und ist  $(G/H)^X$  zusammenhängend, so enthält jede Komponente von  $G^X$  eine Abbildung aus  $H^X$  (Falls  $G$  lokal zusammenziehbar und  $X$  endlichdimensional ist, bedeutet dies nach Satz I, dass jede Abbildung  $F \in G^X$  sich stetig in eine Abbildung  $f$  deformieren lässt, so dass  $f(X) \subset H$ ).

Eine besondere Betrachtung verdient der Fall, wo  $H$  in  $G$  zusammenziehbar ist; dann ist nämlich, wie leicht ersichtlich, für jeden kompakten Raum  $X$  die Menge  $H^X$  in der Komponente  $G^{X_0}$  enthalten, und Satz IX ergibt:

**Satz X.** Ist  $H$  in  $G$  zusammenziehbar, so ist (unter den Annahmen  $\alpha$ ) und  $\beta$ ), falls  $G^X$  nicht zusammenhängend ist, auch  $(G/H)^X$  nicht zusammenhängend; anders ausgedrückt: jeder kompakte Raum, der eine wesentliche stetige Abbildung in  $G$  gestattet, lässt sich auch in  $G/H$  wesentlich und stetig abbilden.

Eine weitere beinahe unmittelbare Folgerung aus Satz VIII ist die Tatsache, dass jede Abbildung  $f \in (G/H)_0^X$  sich als Spur einer Abbildung  $F \in G^X$  darstellen lässt, dass ferner die Spur  $P(F)$  dann und nur dann in der Komponente  $(G/H)_0^X$  liegt, wenn die  $F$  enthaltende Komponente von  $G^X$  nicht fremd ist zu  $H^X$ .

**Anwendungen:** Sei  $G$  eine geschlossene Liesche Gruppe;  $H$  eine echte abgeschlossene Untergruppe von  $G$  (die Bedingungen  $\alpha$ ) und  $\beta$ ) sind nach Satz VII erfüllt). Setzen wir  $X = G!$  Da  $G$ , als eine geschlossene

<sup>8a)</sup> Auf diese Tatsache hat mich Herr H. FREUDENTHAL aufmerksam gemacht.



Mannigfaltigkeit, sich durch eine stetige Deformation nicht in eine echte Teilmenge überführen lässt, ist die Komponente der Identität in  $G^G$  zu  $H^G$  fremd, folglich ist nach Satz IX  $(G/H)^G$  nicht zusammenhängend, und zwar ist die oben mit  $P$  bezeichnete Abbildung eine wesentliche Abbildung von  $G$  in  $G/H$ . Dieses Ergebnis können wir so formulieren<sup>8)</sup>: Ist der aus mehr als einem Punkte bestehende Raum  $E$  ein "Wirkungsraum" der geschlossenen Lieschen Gruppe  $G$ ,<sup>8a)</sup> so gibt es eine wesentliche stetige Abbildung von  $G$  in  $E$ . Nehmen wir für  $G$  die Gruppe der Quaternionen vom Betrage 1, die bekanntlich eine zweifache Überlagerungsgruppe der vollen Drehungsgruppe des Euklidischen  $R_3$  ist, so können wir für  $E = G/H$  die Sphäre  $S_2$  nehmen, und, da  $G$  topologisch mit der  $S_3$  übereinstimmt, erhalten wir das bekannte Ergebnis von H. HOPF<sup>9)</sup>:  $S_3$  lässt sich wesentlich auf die  $S_2$  abbilden. In diesem Fall können wir sogar den schärferen Satz X anwenden, denn  $H$  ist topologisch eine Kreislinie, also in  $G$  zusammenziehbar. Wir sehen somit: Jeder kompakte Raum der sich wesentlich auf  $S_3$  abbilden lässt, lässt sich auch auf  $S_2$  wesentlich abbilden, (auch darin ist das eben erwähnte Ergebnis von HOPF enthalten).

5. Gruppen  $\pi_n$  und topologische Gruppen. Sei  $G$  eine topologische, lokal zusammenziehbare, zusammenhängende Gruppe. Für die Homotopiegruppen  $\pi_n(G)$  gilt:

*Satz XI. Die Gruppe  $\pi_n(G)$  ist isomorph mit der Komponentengruppe von  $G^{S_n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).*

Sei nun  $H$  eine lokal zusammenziehbare (nicht notwendig zusammenhängende) abgeschlossene Untergruppe von  $G$ . Wir fragen nach dem Verhältnis zwischen den Homotopiegruppen  $\pi_n(G)$ ,  $\pi_n(H)$  und  $\pi_n(G/H)$ . Dabei ist, falls  $H$  nicht zusammenhängend, unter  $\pi_n(H)$  die entsprechende Gruppe einer Komponente von  $H$  zu verstehen. (Welche Komponente wir nehmen, ist dabei gleichgültig, da doch alle Komponenten untereinander homöomorph sind). Ferner bezeichnen wir mit  $\pi_0(H)$  die Komponentengruppe von  $H$  (nach Satz XI ist also für  $n = 1, 2, \dots$   $\pi_n(H) = \pi_0[(H_0)^{S_n}]$ , unter  $H_0$  die Einheitskomponente von  $H$  verstanden). Sind die Bedingungen  $\alpha$ ) und  $\beta$ ) des vorigen Paragraphen erfüllt, so lässt sich unter Benützung der dort abgeleiteten Resultate das folgende Theorem beweisen:

*Satz XII. Die Gruppe  $\pi_n(G/H)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) enthält eine Untergruppe  $\pi'_n(G/H)$ , die homomorphes Bild ist von  $\pi_n(G) = \pi_0(G^{S_n})$ . Der Normalteiler von  $\pi_n(G)$ , der auf die Einheit von  $\pi'_n(G/H)$  abgebildet ist, besteht aus jenen Komponenten von  $G^{S_n}$ , die Abbildungen aus  $H^{S_n}$  enthalten.*

<sup>8a)</sup> Dabei ist  $G$  als transitiv über  $E$  gedacht.

<sup>9)</sup> Vgl. H. HOPF, Math. Ann. 104, S. 637—665. Die von HOPF konstruierte Abbildung der  $S_3$  auf die  $S_2$  ist tatsächlich die Abbildung  $P$ . Zum Gedanken, das HOPFsche Ergebnis auf gruppentheoretischem Weg herzuleiten wurde ich durch ein Gespräch mit Herrn VAN DANTZIG angeregt.

Für  $n > 1$  ist die Faktorgruppe <sup>9a)</sup>

$$\frac{\pi_n(G/H)}{\pi'_n(G/H)}$$

isomorph mit der Untergruppe von  $\pi_{n-1}(H) = \pi_0[(H_0)^{S_{n-1}}]$ , die aus den in  $(G^{S_{n-1}})_0$  enthaltenen Komponenten von  $(H_0)^{S_{n-1}}$  besteht. Für  $n = 1$  gilt:  $\pi'_1(G/H)$  ist im Zentrum von  $\pi_1(G/H)$  enthalten und die Faktorgruppe

$$\frac{\pi_1(G/H)}{\pi'_1(G/H)}$$

ist mit  $\pi_0(H)$  isomorph.

*Korollae:* Verschwindet die Gruppe  $\pi_{n-1}(H)$  so ist  $\pi_n(G/H)$  ein homomorphes Bild von  $\pi_n(G)$ . Verschwindet  $\pi_{n-1}(H)$  und  $\pi_n(H)$ , so ist  $\pi_n(G/H)$  mit  $\pi_n(G)$  isomorph. Verschwindet  $\pi_{n-1}$  und  $\pi_n(G)$ , so ist  $\pi_n(G/H)$  mit  $\pi_{n-1}(H)$  isomorph.

Nehmen wir für  $G$  die Gruppe der Quaternionen vom Betrage 1 und für  $G/H$  die Sphäre  $S_2$ , so verschwindet  $\pi_n(H) = \pi_n(S_1)$  für  $n > 1$ , und das eben ausgesprochene Korollar ergibt die *Isomorphie der Gruppen*  $\pi_n(S_3)$  und  $\pi_n(S_2)$  für  $n = 3, 4, \dots$ . Wegen Satz III folgt daraus, dass für  $n \geq 3$  die Sphäre  $S_n$  sich entweder auf jede der beiden Sphären  $S_3$  und  $S_2$  oder auf keine von ihnen wesentlich abbilden lässt (von dem am Ende des vorigen Paragraphen angeführten Ergebnis gilt also auch die Umkehrung). Insbesondere ist  $\pi_3(S_2)$  mit  $\pi_3(S_3)$  isomorph, also zyklisch von unendlicher Ordnung. Auch in einigen anderen Fällen gestattet der Satz XII die Bestimmung der Homotopiegruppen. <sup>10)</sup>

<sup>9a)</sup> Nach Satz II sind die Gruppen  $\pi_n$  ( $n \geq 2$ ) Abelsch, also gibt jede Untergruppe zu einer Faktorgruppe Anlass.

<sup>10)</sup> Bemerken wir, dass, wenn  $H$  ein Normalteiler von  $G$  ist, alle Sätze der beiden letzten Paragraphen auch ohne die Annahme  $\beta$ ) gelten.

**Anatomy** — *A Human Skull From Florisbad, Orange Free State*, by J. F. DREYER (Bloemfontein), with a note on the endocranial cast, by C. U. ARIËNS KAPPERS. (Communicated by Prof. C. U. ARIËNS KAPPERS.)

(Communicated at the meeting of December 22, 1934.)

Florisbad, the site of the discovery, is about twenty five miles north of Bloemfontein.

On the site there are numerous springs, investigation of which has shown that as one becomes choked up by accumulated debris, another eye opens. This debris consists of stone artefacts, teeth, broken bones and sand brought up by the spring. In the heavier debris the sand is mostly