TK-NOTE/03-11
since: August 13th, 2003
last update: June 23, 2014

Eleven-dimensional Supergravities on Maximally Supersymmetric Backgrounds

Tetsuji Kimura

Theory Division, Institute of Particle and Nuclear Studies,
High Energy Accelerator Research Organization (KEK)
Tsukuba, Ibaraki 305-0801, Japan

tetsuji@post.kek.jp

Abstract

11-dimensional supergravity on PP-wave background における fluctuation fields と、11-dimensional supergravity on $AdS_{4(7)} \times S^{7(4)}$ における fluctuation fields をみる。

2003 10/12 版において、ようやく 11-dimensional supergravity (up to torsion) が綺麗に整備された。符号の間違いなどはないはずであり、$AdS_{4(7)} \times S^{7(4)}$ と KG solution との繋がりなどに対して consistent な記述が得られている。

(注意)　博士論文 [53] とは、field strength の期待値の符号が逆であるが、物理的に違いはない。

Contents

Introduction

Eleven-dimensional supergravity を maximally supersymmetric background 上で展開する話を議論する。具体的には [2] で取り扱った Kowalski-Glikman (KG) background、Duff and Pope [1] の $AdS_4 \times S^7$ background、そして de Wit and Nicolai [18] の $AdS_7 \times S^4$ background である。残念ながら $AdS_7 \times S^4$ については議論は全く進んでいない。

解析の手段として、$AdS_{4(7)} \times S^{7(4)}$ を global coordinates を用いて表示し、その上での spin connection その他を計算してある。付録には coset construction を用いての $AdS_p \times S^q$ を構成する方法を掲載する。

なお、このノートには他の 11-dimensional Minkowski spacetime の解析にも役立てる様に、ある程度の convention を詳細に記述してある。例えば、11-dimensional Minkowski spacetime での Clifford algebra、Lorentz algebra とその表現、charge conjugation などである。基本的には Polchinski [25] の appendix B を基に構成してあるが、定義が若干異なるので注意が必要である。また 11-dimensional supergravity Lagrangian の構成については非常に詳細に記述した。参考文献は藤井 [31] である。[31] の convention もこのノートとは異なる。

余力があれば、extended objects についての議論、dimensional reduction した後の supergravity/superstring などの議論も掲載したかったが、その議論はすでに今村 [32] に詳細がある。

Part I

TK Notations

Chapter 1

Convention of 11-dimensional Spacetime

$$\begin{aligned}
[MN] &= \frac{1}{2}(MN - NM) \\
(MN) &= \frac{1}{2}(MN + NM) \\
[M_1 M_2 \cdots M_k] &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) M_{\sigma(1)} M_{\sigma(2)} \cdots M_{\sigma(k)}
\end{aligned}$$

1.1 Lorentz Algebras

Lorentz algebra in Minkowski spacetime を

$$i[\Sigma_{AB}, \Sigma_{CD}] = \eta_{AC}\Sigma_{BD} + \eta_{BD}\Sigma_{AC} - \eta_{AD}\Sigma_{BC} - \eta_{BC}\Sigma_{AD} \tag{1.1.1}$$

で定義する (Polchinski [25] とは逆符合)。また、generator Σ_{AB} の spinor representation を

$$\Sigma_{AB} = \frac{i}{2}\widehat{\Gamma}_{AB} = \frac{i}{4}[\widehat{\Gamma}_A, \widehat{\Gamma}_B] \tag{1.1.2}$$

で定義しておこう [25]。この定義の時、Lorentz algebra in Minkowski spacetime に相当する Rotation algebra in Euclidean space は、

$$[\Sigma_{AB}, \Sigma_{CD}] = \delta_{AC}\Sigma_{BD} + \delta_{BD}\Sigma_{AC} - \delta_{AD}\Sigma_{BC} - \delta_{BC}\Sigma_{AD} \tag{1.1.3}$$

で与えらえる。この時の generator Σ_{AB} の spinor representation は次のようになる [28]:

$$\Sigma_{AB} = -\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}_{AB} = -\frac{1}{4}[\widehat{\Gamma}_A, \widehat{\Gamma}_B]\,. \tag{1.1.4}$$

1.2 General Coordinate Transformations

Infinitesimal transformation:

$$x^M \to x'^M = x^M + \xi^M(x) \tag{1.2.1}$$

parallel transformation:

$$A_M(x) \to A^{\parallel}_M(x+\mathrm{d}x) \equiv A_M + \Gamma^P_{MN}\,A_P(x)\mathrm{d}x^N \tag{1.2.2a}$$

$$A^M(x) \to A^{\parallel M}(x+\mathrm{d}x) \equiv A^M - \Gamma^M_{PN}\,A^P(x)\mathrm{d}x^N \tag{1.2.2b}$$

covariant derivative:

$$A_M(x+\mathrm{d}x) - A^{\parallel}_M(x+\mathrm{d}x) \equiv \nabla_N A_M \mathrm{d}x^N \quad \Longrightarrow \quad \nabla_N A_M = \partial_N A_M - \Gamma^P_{MN} A_P \tag{1.2.3a}$$

$$A^M(x+\mathrm{d}x) - A^{\parallel M}(x+\mathrm{d}x) \equiv \nabla_N A^M \mathrm{d}x^N \quad \Longrightarrow \quad \nabla_N A^M = \partial_N A^M + \Gamma^M_{PN} A^P \tag{1.2.3b}$$

metricity condition:

$$\nabla_P\, g_{MN} = 0 \qquad \leftarrow \quad \text{affine connection が metric で記述できる} \tag{1.2.4}$$

Lie derivative: $\delta_{\mathrm{L}} f(x) \equiv f'(x) - f(x)$

• scalar

$$\begin{aligned}
\phi(x) \ \to \ \phi'(x') \ &= \ \phi(x) \\
&\simeq \ \phi'(x) + \xi^P \, \partial_P \phi(x) \\
\therefore \quad \delta_{\mathrm{L}} \phi(x) \ &= \ \phi'(x) - \phi(x) \ = \ \phi(x) - \xi^P \, \partial_P \phi(x) - \phi(x) \\
&= \ -\xi^P \, \partial_P \phi(x)
\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

• covariant vector

$$\begin{aligned}
A_M(x) \ \to \ A'_M(x') \ &= \ \frac{\partial x^P}{\partial x'^M} A_P(x) \ \simeq \ A_M(x) - \partial_M \xi^P \, A_P(x) \\
&\simeq \ A'_M(x) + \xi^P \, \partial_P A_M(x) \\
\therefore \quad \delta_{\mathrm{L}} A_M(x) \ &= \ A'_M(x) - A_M(x) \ = \ -\partial_M \xi^P \cdot A_P(x) - \xi^P \, \partial_P A_M(x)
\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

• contravariant vector

$$\begin{aligned}
A^M(x) \ \to \ A'^M(x') \ &= \ \frac{\partial x'^M}{\partial x^P} A^P(x) \ \simeq \ A^M(x) + \partial_P \xi^M \, A^P(x) \\
&\simeq \ A'^M(x) + \xi^P \, \partial_P A^M(x) \\
\therefore \quad \delta_{\mathrm{L}} A^M(x) \ &= \ A'^M(x) - A^M(x) \ = \ -\partial_P \xi^M \cdot A^P(x) - \xi^P \, \partial_P A^M(x)
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

• tensor

$$\begin{aligned}
g_{MN}(x) \ \to \ g'_{MN}(x') \ &= \ \frac{\partial x^P}{\partial x'^M} \frac{\partial x^Q}{\partial x'^N} g_{PQ}(x) \ \simeq \ g_{MN}(x) - \partial_M \xi^P \, g_{PN} - \partial_N \xi^Q \, g_{MQ} \\
&\simeq \ g'_{MN}(x) + \xi^P \partial_P \, g_{MN}(x) \\
\therefore \quad \delta_{\mathrm{L}} g_{MN}(x) \ &= \ -\xi^P \partial_P g_{MN}(x) - \partial_M \xi^P \cdot g_{PN}(x) - \partial_N \xi^P \, g_{MP}(x)
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

• vielbein

$$\begin{aligned}
e_M{}^A(x) \ \to \ e'_M{}^A(x') \ &= \ \frac{\partial x^P}{\partial x'^M} e_P{}^A(x) \ \simeq \ e_M{}^A(x) - \partial_M \xi^P \, e_P{}^A(x) \\
&\simeq \ e'_M{}^A(x) + \xi^P \partial_P e_M{}^A(x) \\
\therefore \quad \delta_{\mathrm{L}} e_M{}^A(x) \ &= \ -\xi^P \partial_P e_M{}^A(x) - \partial_M \xi^P \cdot e_P{}^A(x)
\end{aligned} \tag{1.2.9}$$

• gravitino

$$\begin{aligned}
\Psi_M(x) \ \to \ \Psi'_M(x') \ &= \ \frac{\partial x^P}{\partial x'^M} \Psi_P(x) \ \simeq \ \Psi_M(x) - \partial_M \xi^P \, \Psi_P(x) \\
&\simeq \ \Psi'_M(x) + \xi^P \partial_P \Psi_M(x) \\
\therefore \quad \delta_{\mathrm{L}} \Psi_M(x) \ &= \ -\xi^P \partial_P \Psi_M(x) - \partial_M \xi^P \cdot \Psi_P(x)
\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

• 3-form gauge field

$$C'_{MNP}(x') \ = \ \frac{\partial x^Q}{\partial x'^M} \frac{\partial x^R}{\partial x'^N} \frac{\partial x^S}{\partial x'^P} C_{QRS}(x)$$

$$
\begin{aligned}
&\simeq C_{MNP}(x) - \partial_M \xi^Q C_{QNP}(x) - \partial_N \xi^Q C_{MQP}(x) - \partial_P \xi^Q C_{MNQ}(x) \\
&\simeq C'_{MNP}(x) + \xi^Q \partial_Q C_{MNP}(x) \\
\therefore \quad \partial_{\mathrm{L}} C_{MNP}(x) &= C'_{MNP}(x) - C_{MNP}(x) \\
&= -\xi^Q \partial_Q C_{MNP}(x) - \partial_M \xi^Q \cdot C_{QNP}(x) - \partial_N \xi^Q \cdot C_{MQP}(x) - \partial_P \xi^Q \cdot C_{MNQ}(x) \\
&= -\xi^Q \partial_Q C_{MNP}(x) - 3 C_{Q[MN} \partial_{P]} \xi^Q \qquad (1.2.11)
\end{aligned}
$$

1.3 local Lorentz transformation

Lorentz algebra (1.1.1) をみたす Lorentz generator Σ_{AB} の vector 表現は

$$
\big(\Sigma_{CD}\big)^{A}{}_{B} = i\big(\delta^A_C \, \eta_{DB} - \delta^A_D \, \eta_{CB}\big) \, . \qquad (1.3.1)
$$

となる[1]。一方 scalar に対する表現は

$$
\big(\Sigma_{CD}\big)^{A}{}_{B} = 0 \qquad (1.3.2)
$$

であり、spinor に対する表現は

$$
\psi \ \to \ \Big(1 - \frac{i}{2} \alpha^{CD} \Sigma_{CD}\Big) \psi \qquad \Sigma_{CD} = \frac{i}{2} \widehat{\Gamma}_{CD} \qquad (1.3.3)
$$

である。

Covariant Derivative:

$e_M{}^A$, Ψ_M, C_{MNP} をまとめて ϕ^i と記述する。このとき local Lorentz 変換に対する $\phi^i(x)$ の変換則は、

$$
\delta \phi^i(x) = -\frac{i}{2} \alpha^{AB}(x) \big(\Sigma_{AB}\big)^i{}_j \, \phi^j(x) \qquad (1.3.4)
$$

と記述できる。この local 変換に対する gauge 場を導入する。それは spin connection $\omega_M{}^A{}_B$ と呼ばれ、$\omega_M{}^{AB} = -\omega_M{}^{BA}$ である。場 $\phi^i(x)$ の平行移動を $\phi^{i\parallel}(x + \mathrm{d}x)$ で、単なる座標のずれを $\phi^i(x + \mathrm{d}x)$ とすると、それぞれ

$$
\begin{aligned}
\phi^{i\parallel}(x + \mathrm{d}x) &= \phi^i(x) + \frac{i}{2} \omega_M{}^{AB}(x) \big(\Sigma_{AB}\big)^i{}_j \, \phi^j(x) \, \mathrm{d}x^M \qquad (1.3.5a) \\
\phi^i(x + \mathrm{d}x) &= \phi^i(x) + \partial_M \phi^i(x) \, \mathrm{d}x^M \qquad (1.3.5b)
\end{aligned}
$$

で与えられる。covariant derivative は、$x + \mathrm{d}x$ における field の差 $\phi^i(x + \mathrm{d}x) - \phi^{i\parallel}(x + \mathrm{d}x)$ で定義される:

$$
\begin{aligned}
D_M \phi^i(x) \, \mathrm{d}x^M &\equiv \phi^i(x + \mathrm{d}x) - \phi^{i\parallel}(x + \mathrm{d}x) \\
&= \Big\{ \partial_M - \frac{i}{2} \omega_M{}^{AB} \, \Sigma_{AB} \Big\}^i{}_j \, \phi^j(x) \, \mathrm{d}x^M \qquad (1.3.6)
\end{aligned}
$$

[1] 9/30 までのノートは逆符号であり、間違いであった。なおこの間違いのため、vielbein の covariant derivative の中で部分的に符号の間違いが起こって、curvature 2-form の定義が differential form のそれと食い違っていた。(2003 10/1)

spin connection $\omega_M{}^{AB}$ 自身の local Lorentz 変換則を考察しよう。covariant derivative は local Lorentz 変換に対して当然ながら covariant であるべし、という条件から、spin connection の local Lorentz 変換則が得られる。まずは covariant derivative の変換則を見よう:

$$\delta(D_M\phi) \;=\; (D_M+\delta D_M)(\phi+\delta\phi)-D_M\phi \;=\; -\frac{i}{2}\alpha^{AB}\Sigma_{AB}D_M\phi \tag{1.3.7}$$

ここで

$$\delta\phi \;=\; -\frac{i}{2}\alpha^{AB}\Sigma_{AB}\phi \qquad \delta D_M \;=\; -\frac{i}{2}\delta\omega_M{}^{AB}\Sigma_{AB} \tag{1.3.8}$$

という略記号を用いた。各項について考察しよう:

$$\begin{aligned} D_M(\delta\phi) &= \Big(\partial_M-\frac{i}{2}\omega_M{}^{AB}\Sigma_{AB}\Big)\Big(-\frac{i}{2}\alpha^{CD}\Sigma_{CD}\phi\Big) \\ &= -\frac{1}{4}\alpha^{AB}\omega_M{}^{CD}\Big([\Sigma_{CD},\Sigma_{AB}]+\Sigma_{AB}\Sigma_{CD}\Big)\phi-\frac{i}{2}(\partial_M\alpha^{AB})\Sigma_{AB}\phi-\frac{i}{2}\alpha^{AB}\Sigma_{AB}\partial_M\phi \end{aligned} \tag{1.3.9a}$$

$$\delta D_M\cdot\phi \;=\; -\frac{i}{2}\delta\omega_M{}^{AB}\Sigma_{AB}\phi \tag{1.3.9b}$$

$$-\frac{i}{2}\alpha^{AB}\Sigma_{AB}D_M\phi \;=\; -\frac{i}{2}\alpha^{AB}\Sigma_{AB}\partial_M\phi-\frac{1}{4}\alpha^{AB}\omega_M{}^{CD}(\Sigma_{AB}\Sigma_{CD})\phi \tag{1.3.9c}$$

また $D_M(\delta\phi)+\delta D_M\cdot\phi\simeq-\frac{i}{2}\alpha^{AB}\Sigma_{AB}D_M\phi$ であるので、

$$-\frac{i}{2}\delta\omega_M{}^{AB}\Sigma_{AB}\phi \;=\; \frac{1}{4}\alpha^{AB}\omega_M{}^{CD}[\Sigma_{CD},\Sigma_{AB}]\phi+\frac{i}{2}(\partial_M\alpha^{AB})\Sigma_{AB}\phi \tag{1.3.10}$$

つまり、

$$\delta\omega_M{}^{AB}\Sigma_{AB} \;=\; \frac{1}{2}\alpha^{AB}\omega_M{}^{CD}\cdot i[\Sigma_{CD},\Sigma_{AB}]-\partial_M\alpha^{AB}\Sigma_{AB} \tag{1.3.11}$$

となる。Lorentz algebra (1.1.1) を用いると、

$$\frac{1}{2}\alpha^{AB}\omega_M{}^{CD}\cdot i[\Sigma_{CD},\Sigma_{AB}] \;=\; (\alpha^A{}_C\omega_M{}^{CB}-\alpha^B{}_C\omega_M{}^{CA})\Sigma_{AB} \tag{1.3.12}$$

となるので、最終的に

$$\delta\omega_M{}^{AB} \;=\; -\partial_M\alpha^{AB}+\alpha^A{}_C\omega_M{}^{CB}-\alpha^B{}_C\omega_M{}^{CA} \tag{1.3.13}$$

が得られる。

1.4 Abelian gauge transformation

vielbein, gravitino は invariant。C_{MNP} のみ変換する:

$$\delta C_{MNP} \;=\; \partial_{[M}\Lambda_{NP]} \qquad\qquad \Lambda_{MN}(x) \;=\; -\Lambda_{NM}(x) \tag{1.4.1}$$

1.5 Totally Covariant Derivative

general coordinate transformation と local Lorentz transformation の両方に対して covariant な微分作用素を定義する。curved space index と tangent space index の両方を持つ vielbein について考えよう。定義は

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_M \, e_N{}^A \;&\equiv\; \nabla_M \, e_N{}^A - \frac{i}{2}\omega_M{}^{CD} (\Sigma_{CD})^A{}_B \, e_N{}^B \;=\; D_M e_N{}^A - \Gamma^P_{NM} \, e_P{}^A \\ &=\; \partial_M e_N{}^A + \omega_M{}^A{}_B \, e_N{}^B - \Gamma^P_{NM} \, e_P{}^A \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

である。さらに、一般相対論において metricity condition $\nabla_M g_{NP} = 0$ を課したのと同様にして、vielbein に対して vielbein postulate

$$\widetilde{D}_M \, e_N{}^A \;=\; 0 \tag{1.5.2}$$

を課す。これにより、affine connection と spin connection の間に関係がつく。

1.6 Affine connection and spin connection written in terms of vielbein

metricity condition $\nabla_P g_{MN} = 0$ から出発しよう：

$$0 \;=\; \nabla_P g_{MN} \;=\; \partial_P g_{MN} - \Gamma^Q_{MP} g_{QN} - \Gamma^Q_{NP} g_{MQ} \tag{1.6.1a}$$

index を cyclic にまわす:

$$0 \;=\; \partial_M g_{NP} - \Gamma^Q_{NM} g_{QP} - \Gamma^Q_{PM} g_{NQ} \tag{1.6.1b}$$

$$0 \;=\; \partial_N g_{PM} - \Gamma^Q_{PN} g_{QM} - \Gamma^Q_{MN} g_{PQ} \tag{1.6.1c}$$

−(1.6.1a)+(1.6.1b)+(1.6.1c):

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; -\partial_P g_{MN} + \partial_M g_{NP} + \partial_N g_{PM} - (\Gamma^Q_{MN} + \Gamma^Q_{NM}) g_{PQ} - (\Gamma^Q_{PN} - \Gamma^Q_{NP}) g_{MQ} - (\Gamma^Q_{PM} - \Gamma^Q_{MP}) g_{NQ} \\ &=\; -\partial_P g_{MN} + \partial_M g_{NP} + \partial_N g_{PM} - 2\Gamma^Q_{(MN)} g_{PQ} - 2\Gamma^Q_{[PN]} g_{MQ} - 2\Gamma^Q_{[PM]} g_{NQ} \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

ここで、次の定義を用いた:

$$\Gamma^Q_{(MN)} \;=\; \frac{1}{2}(\Gamma^Q_{MN} + \Gamma^Q_{NM}) \tag{1.6.3a}$$

$$\Gamma^Q_{[MN]} \;=\; \frac{1}{2}(\Gamma^Q_{MN} - \Gamma^Q_{NM}) \;\equiv\; \frac{1}{2} C^Q{}_{MN} \;=\; -\frac{1}{2} C^Q{}_{NM} \tag{1.6.3b}$$

この $C^Q{}_{MN}$ を torsion と呼ぶ[2]。これを用いると (1.6.2) から

$$g_{PQ}\Gamma^Q_{(MN)} \;=\; \frac{1}{2}\big(\partial_M g_{PN} + \partial_N g_{MP} - \partial_P g_{MN}\big) - \frac{1}{2} g_{MQ} \, C^Q{}_{PN} - \frac{1}{2} g_{NQ} \, C^Q{}_{PM}$$

[2] $\Gamma^Q_{[MN]} = T^Q{}_{MN}$ として torsion を表す場合も多い (2005 6/25)。

$$\therefore \quad \Gamma^R_{(MN)} = \frac{1}{2}g^{PQ}\{\partial_M g_{PN} + \partial_N g_{MP} - \partial_P g_{MN}\} - \frac{1}{2}C_M{}^R{}_N - \frac{1}{2}C_N{}^R{}_M \tag{1.6.4}$$

この first term は Christoffel symbol として定義される:

$$\frac{1}{2}g^{QP}\{\partial_M g_{PN} + \partial_N g_{MP} - \partial_P g_{MN}\} \equiv \left\{ \begin{matrix} Q \\ M\,N \end{matrix} \right\} \tag{1.6.5}$$

よって affine connection 自身は、この Christoffel symbol と torsion を用いて次のように表される:

$$\Gamma^R_{MN} = \Gamma^R_{(MN)} + \Gamma^R_{[MN]} = \left\{ \begin{matrix} R \\ M\,N \end{matrix} \right\} + K^R{}_{MN} \tag{1.6.6a}$$

$$K^R{}_{MN} \equiv \frac{1}{2}\{C^R{}_{MN} - C_M{}^R{}_N - C_N{}^R{}_M\} = \frac{1}{2}\{C^R{}_{MN} + C_{MN}{}^R + C_{NM}{}^R\} \tag{1.6.6b}$$

ここで $K^R{}_{MN}$ は contorsion と呼ばれ、$K_{RMN} = g_{RQ}K^Q{}_{MN}$ を通じて

$$K_{RMN} = -K_{MRN} \qquad K_{R[MN]} = \frac{1}{2}C_{RMN} \tag{1.6.7}$$

をみたす。また、torsion free の場合、affine connection と Christoffel symbol は等価となる。

affine connection を vielbein で記述しよう。そのためには vielbein postulate $\widetilde{D}_M e_N{}^A = 0$, もしくはこれと等価な $\widetilde{D}_P g_{MN} = 0$ を用いる:

$$\begin{aligned} 0 &= \widetilde{D}_P g_{MN} = \nabla_P g_{MN} \\ &= (\widetilde{D}_P e_M{}^A)e_N{}^B \eta_{AB} + e_M{}^A(\widetilde{D}_P e_N{}^B)\eta_{AB} \end{aligned} \tag{1.6.8}$$

また

$$0 = \widetilde{D}_P e_M{}^A = D_P e_M{}^A - \Gamma^Q_{MP} e_Q{}^A \tag{1.6.9}$$

より

$$D_P e_M{}^A = \Gamma^Q_{MP} e_Q{}^A \tag{1.6.10}$$

となるので、これに $E_A{}^N$ を作用させて、

$$\Gamma^P_{MN} = E_A{}^P(D_N e_M{}^A) \tag{1.6.11}$$

が得られる。

続いて spin connection。やはり vielbein postulate を用いる:

$$\begin{aligned} D_P e_M{}^A &= \Gamma^Q_{MP} e_Q{}^A = \partial_P e_M{}^A + \omega_P{}^A{}_B e_M{}^B \\ \therefore \quad \omega_P{}^A{}_B e_M{}^B &= -\partial_P e_M{}^A + \Gamma^Q_{MP} e_Q{}^A \end{aligned} \tag{1.6.12}$$

これに $E_C{}^M$ を作用させる:

$$\omega_P{}^A{}_C = -E_C{}^M \partial_P e_M{}^A + \Gamma^Q_{MP} e_Q{}^A E_C{}^M \tag{1.6.13}$$

これは Cartan's structure equation で登場する affine-spin connection でもある。これに η_{AB} を作用させると、

$$-\omega_{PBC} \;=\; E_C{}^M\,\partial_P\,e_{MB} - \Gamma^Q_{MP}\,e_{QB}\,E_C{}^M \tag{1.6.14}$$

最後に $E_A{}^P$ を作用させよう:

$$-\omega_{ABC} \;=\; E_A{}^P\,E_C{}^M\,\partial_P\,e_{MB} - E_A{}^P\,E_C{}^M\,\Gamma^Q_{MP}\,e_{QB} \tag{1.6.15}$$

ここで、後に定義する Ricci 回転係数 Ω を定義する準備をしよう。spin connection の性質 $\omega_{ABC} = -\omega_{ACB}$ を用いて (1.6.15) を

$$\omega_{ABC} \;=\; E_A{}^P\,E_B{}^M\big\{\partial_P\,e_{MC} - \Gamma^Q_{MP}\,e_{QC}\big\} \tag{1.6.16}$$

と書き直す。torsion $C^Q{}_{MN} = 2\Gamma^Q_{[MN]}$ を用いて

$$\begin{aligned} -\big(\omega_{ABC} - \omega_{BAC}\big) \;&=\; E_A{}^P\,E_B{}^M\Big\{C^Q{}_{MP}\,e_{QC} - \big(\partial_P\,e_{MC} - \partial_M\,e_{PC}\big)\Big\} \\ &\equiv\; E_A{}^P\,E_B{}^M\,C^Q{}_{MP}\,e_{QC} - \Omega_{ABC} \end{aligned} \tag{1.6.17}$$

つまり Ricci 回転係数 Ω_{ABC} は

$$\begin{aligned} \Omega_{ABC} \;&=\; E_A{}^P\,E_B{}^M\big(\partial_P\,e_{MC} - \partial_M\,e_{PC}\big) \;=\; \big(E_A{}^P\,E_B{}^M - E_B{}^P\,E_A{}^M\big)\partial_P\,e_{MC} \\ &=\; -e_{MC}\,\Big\{E_A{}^P\,\partial_P\,E_B{}^M - E_B{}^P\partial_P\,E_A{}^M\Big\} \\ &=\; -\Omega_{BAC} \end{aligned} \tag{1.6.18}$$

となる。(1.6.17) の index を cyclic にまわそう:

$$\Omega_{ABC} \;=\; \big(\omega_{ABC} - \omega_{BAC}\big) + E_A{}^P\,E_B{}^M\,C^Q{}_{MP}\,e_{QC} \tag{1.6.19a}$$

$$\Omega_{BCA} \;=\; \big(\omega_{BCA} - \omega_{CBA}\big) + E_B{}^P\,E_C{}^M\,C^Q{}_{MP}\,e_{QA} \tag{1.6.19b}$$

$$\Omega_{CAB} \;=\; \big(\omega_{CAB} - \omega_{ACB}\big) + E_C{}^P\,E_A{}^M\,C^Q{}_{MP}\,e_{QB} \tag{1.6.19c}$$

$-$(1.6.19a)+(1.6.19b)+(1.6.19c) より

$$\begin{aligned} -\Omega_{ABC} + \Omega_{BCA} + \Omega_{CAB} \;&=\; 2\omega_{CAB} + \big\{-C_{CBA} + C_{ACB} + C_{BAC}\big\} \\ \therefore \quad \omega_{CAB} \;&=\; \frac{1}{2}\Big\{\Omega_{CAB} - \Omega_{ABC} + \Omega_{BCA}\Big\} + K_{ABC} \end{aligned} \tag{1.6.20}$$

が得られる。ここで $C_{CAB} = -C_{CBA} = E_A{}^M E_B{}^P e_{QC} C^Q{}_{MP}$ を用いている。また

$$\begin{aligned} \omega_{CAB} \;&=\; -\omega_{CBA} \\ \Omega_{ABC} \;&=\; -\Omega_{BAC} \\ K_{ABC} \;&=\; -K_{BAC} \\ K_{ABC} \;&=\; K^R{}_{MN}\,e_{RA}\,E_B{}^M\,E_C{}^N \end{aligned}$$

に注意する。さらに Ricci 回転係数を vielbein で記述しよう。

$$\begin{aligned} \Omega_{MN}{}^A \;&=\; \eta^{AD}\,e_M{}^B\,e_N{}^C\,\Omega_{BCD} \\ &=\; \eta^{AD}\,e_M{}^B\,e_N{}^C\big(E_B{}^P\,E_C{}^Q - E_C{}^P\,E_B{}^Q\big)\partial_P e_{QD} \;=\; \big(\delta^P_M\,\delta^Q_N - \delta^P_N\,\delta^Q_M\big)\partial_P\,e_Q{}^A \\ &=\; 2\partial_{[M}e_{N]}{}^A \end{aligned} \tag{1.6.21}$$

1.7 Riemann curvature tensors

curvature tensor は affine connection Γ^M_{NP} からのもの R と、spin connection $\omega_\mu{}^{AB}$ のもの $\widetilde{R}$ と 2 種類ある。これらは、vielbein postulate

$$\widetilde{D}_M \, e_N{}^A \;=\; \partial_M - \Gamma^P{}_{NM} \, e_P{}^A - \frac{i}{2} \omega_M{}^{CD} (\Sigma_{CD})^A{}_B \, e_N{}^B \;=\; 0 \tag{1.7.1}$$

の下で同一である [27]。ここで $\widetilde{D}_M$ は一般座標変換の covariant derivative ∇_M と local Lorentz 変換の covariant derivative D_M を合わせた total covariant derivative である。ただ、本文で登場する $\mathcal{D}_M$ は、local Lorentz の covariant derivative D_M に 4-form flux が付加されたものであり、$\widetilde{D}_M$ とは異なる事に注意する。

まず affine connection から得られる curvature について。$[\nabla_M, \nabla_N] A_P$ を計算する。ただし、torsion ありのままで計算を行う。

$$\nabla_N A_P \;=\; \partial_N A_P - \Gamma^Q_{PN} \, A_Q \tag{1.7.2a}$$

$$\begin{aligned} \nabla_M \nabla_N A_P \;&=\; \partial_M \big(\nabla_N A_P \big) - \Gamma^Q_{NM} \, \nabla_Q A_P - \Gamma^Q_{PM} \, \nabla_N A_Q \\ &=\; \partial_M \big(\partial_N A_P - \Gamma^Q_{PN} \, A_Q \big) - \Gamma^Q_{NM} \big(\partial_Q A_P - \Gamma^R_{PQ} \, A_R \big) - \Gamma^Q_{PM} \big(\partial_N A_Q - \Gamma^R_{QN} \, A_R \big) \end{aligned} \tag{1.7.2b}$$

$$\nabla_N \nabla_M A_P \;=\; \partial_N \big(\partial_M A_P - \Gamma^Q_{PM} \, A_Q \big) - \Gamma^Q_{MN} \big(\partial_Q A_P - \Gamma^R_{PQ} \, A_R \big) - \Gamma^Q_{PN} \big(\partial_M A_Q - \Gamma^R_{QM} \, A_R \big) \tag{1.7.2c}$$

$$\begin{aligned} [\nabla_M, \nabla_N] A_P \;&=\; - \Big\{ \partial_M \Gamma^R_{PN} - \partial_N \Gamma^R_{PM} + \Gamma^R_{QM} \Gamma^Q_{PN} - \Gamma^R_{QN} \Gamma^Q_{PM} \Big\} A_R + C^R{}_{MN} \nabla_R A_P \\ &\equiv\; - R^R{}_{PMN} A_R + C^R{}_{MN} \nabla_P A_R \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

つまり

$$R^R{}_{PMN} \;=\; \partial_M \Gamma^R_{PN} - \partial_N \Gamma^R_{PM} + \Gamma^R_{QM} \, \Gamma^Q_{PN} - \Gamma^R_{QN} \, \Gamma^Q_{PM} \tag{1.7.4}$$

Riemann tensor $R^R{}_{PMN}$ にはいろんなルールがある:

$$R_{PQMN} \;=\; - R_{QPMN} \;=\; - R_{PQNM} \tag{1.7.5}$$

torsion free に限り

$$R_{PQMN} \;=\; R_{MNPQ} \tag{1.7.6}$$

である。この理由は次の通り:

$$\begin{aligned} R^R{}_{PMN} \;=\; & \Big[\partial_M \Gamma^R_{(PN)} - \partial_N \Gamma^R_{(PM)} + \Gamma^R_{(QM)} \Gamma^Q_{(PN)} - \Gamma^R_{(QN)} \Gamma^Q_{(PM)} \Big] \\ & + \partial_M \Gamma^R_{[PN]} - \partial_N \Gamma^R_{[PM]} \\ & + \Gamma^R_{(QM)} \Gamma^Q_{[PN]} + \Gamma^R_{[QM]} \Gamma^Q_{(PN)} + \Gamma^R_{[QM]} \Gamma^Q_{[PN]} - \Gamma^R_{(QN)} \Gamma^Q_{[PN]} - \Gamma^R_{[QN]} \Gamma^Q_{(PM)} - \Gamma^R_{[QN]} \Gamma^Q_{[PM]} \end{aligned}$$

torsion が存在すると blue colored terms が存在するため、$R_{PQMN} \neq R_{MNPQ}$ である。また次が成り立つ:

$$[\nabla_M, \nabla_N] A^R \;=\; R^R{}_{PMN} A^P + C^P{}_{MN} \big(\nabla_P A^R \big) \, . \tag{1.7.7}$$

spin connection から得られる curvature について。$[D_M, D_N]\phi$ を計算しよう (field ϕ の index は省略):

$$
\begin{aligned}
D_N\phi &= \partial_N\phi - \frac{i}{2}\omega_N{}^{AB}\Sigma_{AB}\phi && \text{(1.7.8a)} \\
D_M D_N\phi &= \Big(\partial_M - \frac{i}{2}\omega_M{}^{AB}\Sigma_{AB}\Big)\Big(\partial_N - \frac{i}{2}\omega_N{}^{CD}\Sigma_{CD}\Big)\phi \\
&= \partial_M\partial_N\phi - \frac{i}{2}\Sigma_{AB}\partial_M\big(\omega_N{}^{AB}\phi\big) - \frac{i}{2}\Sigma_{AB}\omega_M{}^{AB}\partial_N\phi - \frac{1}{4}\Sigma_{AB}\Sigma_{CD}\omega_M{}^{AB}\omega_N{}^{CD}\phi && \text{(1.7.8b)}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
[D_M, D_N]\phi &= -\frac{i}{2}\Big\{\partial_M\omega_N{}^{AB} - \partial_N\omega_M{}^{AB} + \omega_M{}^A{}_C\,\omega_N{}^{CB} - \omega_N{}^A{}_C\,\omega_M{}^{CB}\Big\}\Sigma_{AB}\phi \\
&= -\frac{i}{2}\widetilde{R}^{AB}{}_{MN}\Sigma_{AB}\phi && \text{(1.7.9)}
\end{aligned}
$$

つまり

$$
\widetilde{R}^{AB}{}_{MN} = \partial_M\omega_N{}^{AB} - \partial_N\omega_M{}^{AB} + \omega_M{}^A{}_C\,\omega_N{}^{CB} - \omega_N{}^A{}_C\,\omega_M{}^{CB} \qquad \text{(1.7.10)}
$$

ここで affine connection からの curvature (1.7.4) との比較をするために tilde をつけておいた。

$R^R{}_{PMN}$ と $\widetilde{R}^{AB}{}_{MN}$ は関連つけられる。その準備として

$$
\widetilde{R}^R{}_{PMN} = E_A{}^R\,e_{BP}\,\widetilde{R}^{AB}{}_{MN} \qquad \text{(1.7.11)}
$$

と記述しておこう。affine connection が vielbein と spin connection を用いて $\Gamma^R_{PN} = E_A{}^R(D_N e_P{}^A)$ と記述されるので、これを用いて次が得られる:

$$
\partial_M\Gamma^R_{PN} = \big(\partial_M E_A{}^R\big)\big(D_N\,e_P{}^A\big) + E_A{}^R\,\partial_M\big(D_N\,e_P{}^A\big) \qquad \text{(1.7.12)}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_M\big(\delta^B_A\big) = \partial_M\big(e_R{}^B\,E_A{}^R\big) = \partial_M\big(e_R{}^B\big)E_A{}^R + e_R{}^B\,\partial_M\big(E_A{}^R\big) \\
\therefore\quad \partial_M E_A{}^R &= -E_A{}^Q\,E_B{}^R\,\partial_M\big(e_Q{}^B\big) = -E_A{}^Q\,E_B{}^R\,\big(D_M\,e_Q{}^B\big) + \omega_M{}^R{}_A && \text{(1.7.13)}
\end{aligned}
$$

であることを用いると、

$$
\begin{aligned}
\partial_M\Gamma^R_{PN} &= -E_A{}^Q\big(D_N\,e_P{}^A\big)\,E_B{}^R\big(D_M\,e_Q{}^B\big) + \omega_M{}^R{}_A\big(D_N\,e_P{}^A\big) + E_A{}^R\,\partial_M\big(D_N\,e_P{}^A\big) \\
&= -\Gamma^Q_{PN}\Gamma^R_{QM} + \omega_M{}^R{}_A\big(D_N\,e_P{}^A\big) + E_A{}^R\,\partial_M\big(D_N\,e_P{}^A\big) \\
\therefore\quad \partial_M\Gamma^R_{PN} + \Gamma^R_{QM}\Gamma^Q_{PN} &= \omega_M{}^R{}_A\big(D_N\,e_P{}^A\big) + E_A{}^R\,\partial_M\big(D_N\,e_P{}^A\big) && \text{(1.7.14)}
\end{aligned}
$$

であるので、affine connection からの curvature $R^R{}_{PMN}$ は次のように書き換わる:

$$
\begin{aligned}
R^R{}_{PMN} &= \omega_M{}^R{}_A\big(D_N\,e_P{}^A\big) + E_A{}^R\,\partial_M\big(D_N\,e_P{}^A\big) - \omega_N{}^R{}_A\,\big(D_M\,e_P{}^A\big) - E_A{}^R\,\partial_N\big(D_M\,e_P{}^A\big) \\
&= E_A{}^R\,e_P{}^C\,\Big\{\partial_M\omega_N{}^A{}_C - \partial_N\omega_M{}^A{}_C\Big\} + e_P{}^C\Big\{\omega_M{}^R{}_B\,\omega_N{}^B{}_C - \omega_N{}^R{}_B\,\omega_M{}^B{}_C\Big\} \\
&= E_A{}^R\,e_{PB}\Big\{\partial_M\omega_N{}^{AB} - \partial_N\omega_M{}^{AB} + \omega_M{}^A{}_C\,\omega_N{}^{CB} - \omega_N{}^A{}_C\,\omega_M{}^{CB}\Big\} \\
&= E_A{}^R\,e_{PB}\,\widetilde{R}^{AB}{}_{MN} && \text{(1.7.15)}
\end{aligned}
$$

Ricci tensor、scalar curvature についても与えておこう。Ricci tensor は

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^R{}_M &= g^{PN}\, R^R{}_{PMN} = \big(E_A{}^P\, E_B{}^N\, \eta^{AB}\big)\big(E_C{}^R\, e_{PD}\, \widetilde{R}^{CD}{}_{MN}\big) \\ &= e_M{}^D\, E_C{}^R \widetilde{R}^C{}_D \end{aligned} \tag{1.7.16}$$

である。ここで

$$\widetilde{R}^C{}_D = \widetilde{R}^{CA}{}_{DA} = \widetilde{R}^C{}_{BDA}\,\eta^{BA}$$

である。また scalar curvature は次で定義される:

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^M{}_M = \widetilde{R}^A{}_A \tag{1.7.17}$$

Chapter 2

Lagrangian of Eleven-dimensional Supergravity

supersymmetric Lagrangian をいきなり構成するのは不可能である。一般に supergravity Lagrangian の構成方法として、まずは kinetic term だけを準備し、supersymmetry invariant な物を要求するために interaction terms を付け加えていくという議論がとられる。ここでは [31] の構成方法に従う。[31] とは符号、係数などの違いがあるため、自分の計算を展開しておこう。

2.1 First Setup

まず最初に、fields が vielbein (metric) $e_M{}^A$, gravitino (Majorana vectorial spinor) Ψ_M, three-form gauge field C_{MNP} で構成されていることから、それらの Lagrangian を用意する[1]:

$$\mathcal{L}_0 \equiv \mathcal{L}_{\rm G} + \mathcal{L}_{\rm RS} + \mathcal{L}_C \tag{2.1.1a}$$

$$\mathcal{L}_{\rm G} = \beta_0 \, e \, \mathcal{R} = \beta_0 \, e \, \widetilde{\mathcal{R}} \qquad e = \det(e_M{}^A) = \sqrt{-\det(g_{MN})} \tag{2.1.1b}$$

$$\mathcal{L}_{\rm RS} = -\frac{1}{2} e \, \overline{\Psi}_M \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \Psi_P \qquad \overline{\Psi}_M = i \Psi_M^\dagger \widehat{\Gamma}^0 = \Psi_M^T C \tag{2.1.1c}$$

$$\mathcal{L}_C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4!} e \, F_{MNPQ} F^{MNPQ} \qquad F_{MNPQ} = 4 \partial_{[M} C_{MNP]} \tag{2.1.1d}$$

但し、β_0 は実の定数である。各 Lagrangian は Hermitian である。また、ここで次の約束を採る:

$$\widehat{\Gamma}^{MNP} = \widehat{\Gamma}^{[M} \widehat{\Gamma}^N \widehat{\Gamma}^{P]} \tag{2.1.2a}$$

$$-\frac{1}{2} e \, \overline{\Psi}_M \widehat{\Gamma}^{MNP} D_M \Psi_N = -\frac{1}{4} e \, \overline{\Psi}_M \widehat{\Gamma}^{MNP} \overleftrightarrow{D}_M(\omega) \Psi_P \tag{2.1.2b}$$

where $\overleftrightarrow{D}_N \equiv D_N - \overleftarrow{D}_N$ and $\overleftarrow{D}_N = \overleftarrow{\partial}_N - \omega_N$; $\overleftarrow{\partial}_N$ acts only on $\overline{\Psi}_M$ (see, for example, p.500 in [15]).

2.2 Supersymmetry Transformation of Gravitino, part 1

ここで supersymmetry transformation を考察しよう。出発点として、gravitino Ψ_M の SUSY transformation を

$$\delta_{\rm SUSY} \Psi_M \equiv 2 D_M(\omega) \varepsilon(x^M) = 2 \Big(\partial_M - \frac{i}{2} \omega_M{}^{AB} \Sigma_{AB} \Big) \varepsilon(x) \tag{2.2.1}$$

と仮定する[2]。ここで $\varepsilon(x)$ は fermionic な local parameter であり、Majorana spinor である。

最初、torsion を含めない、つまり spinor の 3 次以上を無視した計算を行い、up to torsion で SUSY invariant な Lagrangian を構成することを試みる。そのため、一番簡単に構成する方法は、ほとんど flat な spacetime の上で構成するという 方法をとる。詳細は議論を展開する中で挙げる。

その後、torsion (spinor bilinear terms) を含めた full Lagrangian を構成する。

Lagrangian $\mathcal{L}_0$ の、gravitino Ψ_M による (左) 変分をみよう。現在の所、gravitino は $\mathcal{L}_{\rm RS}$ にのみ入っているので、この変分を見ればよい:

$$\delta \mathcal{L}_{\rm RS} = \delta \Psi_M^T \Big(\frac{\delta \mathcal{L}_{\rm RS}}{\delta \Psi_M^T} \Big) = \delta \Psi_M^T \Big\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm RS}}{\partial \Psi_M^T} - \partial_N \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm RS}}{\partial(\partial_N \Psi_M^T)} \Big\} \tag{2.2.2}$$

---

[1] Einstein-Hilbert Lagrangian $\mathcal{L}_{\rm G}$ の符号は、Polchinski [25] とは逆である。それは Lorentz algebra の符号がここと [25] とは逆であることに起因する。なお、Lorentz algebra の符号によって、spin connection その他の符号が変更を受けるが、最終的には、Lagrangian が Hermitian であれ、という条件で縛りをつける。ちなみに、$\mathcal{L}_{\rm RS}$, $\mathcal{L}_C$ は canonical kinetic term を持つようにして決まる。

[2] SUSY invariant Lagrangian を構成していくに連れて、これに補正を加えていく。

ここで、Ψ_M と $\partial_N \Psi_M$ とは独立とみなす (Lagrangian formalism なので)。その上で、$\mathcal{L}_{\mathrm{RS}}$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} &= -\frac{1}{2} e\, \overline{\Psi}_M \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \Psi_P \;=\; -\frac{1}{2} e\, \Psi_M^T C \widehat{\Gamma}^{MNP} \Big\{ \partial_N \Psi_P + \frac{1}{4} \omega_N{}^{AB} \widehat{\Gamma}_{AB} \Psi_P \Big\} \\
&= \frac{1}{2} e\, (D_N \Psi_P)^T (\widehat{\Gamma}^{MNP})^T C^T \Psi_M
\end{aligned}
\tag{2.2.3}
$$

などのように書き下すことができる。よって、

$$
\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{RS}}}{\partial \Psi_M^T} = -\frac{1}{2} e\, C \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \Psi_P + \frac{1}{8} e\, \omega_N{}^{AB} (\widehat{\Gamma}_{AB})^T (\widehat{\Gamma}^{PNM})^T C^T \Psi_P \tag{2.2.4a}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{RS}}}{\partial (\partial_N \Psi_M^T)} = \frac{1}{2} e\, (\widehat{\Gamma}^{MNP})^T C^T \Psi_P \tag{2.2.4b}
$$

である。これより、

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathrm{RS}}}{\delta \Psi_M^T} &= -\frac{1}{2} e \Big\{ C \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \Psi_P - \frac{1}{4} \omega_N{}^{AB} (\widehat{\Gamma}_{AB})^T (\widehat{\Gamma}^{PNM})^T C^T \Psi_P + (\widehat{\Gamma}^{PNM})^T C^T \partial_N \Psi_P \Big\} \\
&\quad - \frac{1}{2} (\partial_N e) (\widehat{\Gamma}^{PNM})^T C^T \Psi_P - \frac{1}{2} e \partial_N (\widehat{\Gamma}^{PNM})^T C^T \Psi_P \\
&= -e\, C \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \Psi_P - \frac{1}{2} (\partial_N e) (\widehat{\Gamma}^{PNM})^T C^T \Psi_P - \frac{1}{2} e \partial_N (\widehat{\Gamma}^{PNM})^T C^T \Psi_P
\end{aligned}
\tag{2.2.5}
$$

ここで (2.2.5) 右辺の第 2 項、第 3 項は torsion term から来る (index N, P の入れ換えで反対称、see [31] p.89) ので無視して、

$$
\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathrm{RS}}}{\delta \Psi_M^T} \simeq -e\, C \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \Psi_P \tag{2.2.6}
$$

と近似する。

さて、(2.2.1) を用いると

$$
\begin{aligned}
\delta \Psi_M^T \Big(\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathrm{RS}}}{\delta \Psi_M^T} \Big) &\simeq 2 (D_M \varepsilon)^T \big(- e C \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \Psi_P \big) \\
&\simeq 2 \Big(\partial_M \varepsilon + \frac{1}{4} \omega_M{}^{AB} \widehat{\Gamma}_{AB} \varepsilon \Big)^T \big(- e C \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \Psi_P \big) \\
&= 2 \overline{\varepsilon} D_M \big(e \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \Psi_P \big) \;\equiv\; 2 \overline{\varepsilon} D_M \Upsilon^M
\end{aligned}
\tag{2.2.7}
$$

と表される。途中、部分積分を用いている。しかし Υ^M の中の $D_M(e \widehat{\Gamma}^{MNP})$ からの寄与はやはり torsion term からの寄与と見做されるので、ここを無視すると、

$$
\begin{aligned}
\delta \Psi_M^T \Big(\frac{\delta \mathcal{L}_{\mathrm{RS}}}{\delta \Psi_M^T} \Big) \simeq 2 e\, \overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}^{MNP} D_M (D_N \Psi_P) &= e\, \overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}^{MNP} [D_M, D_N] \Psi_P \\
&= e\, \overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}^{MNP} \Big(-\frac{i}{2} \widetilde{R}^{AB}{}_{MN} \Sigma_{AB} \Big) \Psi_P \\
&= \frac{1}{4} e\, \overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}^{MNP} \widehat{\Gamma}_{AB} \Psi_P \cdot \widetilde{R}^{AB}{}_{MN}
\end{aligned}
\tag{2.2.8}
$$

ここで、Dirac Gamma matrices の identity (A.2.1) を用いると、

$$
\widehat{\Gamma}^{MNP} \widehat{\Gamma}_{AB} = \widehat{\Gamma}^{MNP}{}_{AB} + 6 E_{[A}{}^{[M} \widehat{\Gamma}^{NP]}{}_{B]} - 6 E_{[A}{}^{[M} E_{B]}{}^{N} \widehat{\Gamma}^{P]} \tag{2.2.9}
$$

であるので ([31], p.89)、

$$\delta\Psi^T_M\Big(\frac{\delta\mathcal{L}_{\rm RS}}{\delta\Psi^T_M}\Big) \;=\; \frac{1}{4}e\,\overline{\varepsilon}\Big\{\widehat{\Gamma}^{MNP}{}_{AB} + 6E_{[A}{}^{[M}\widehat{\Gamma}^{NP]}{}_{B]} - 6E_{[A}{}^{[M}\,E_{B]}{}^{N}\,\widehat{\Gamma}^{P]}\Big\}\Psi_P\cdot\widetilde{R}^{AB}{}_{MN} \tag{2.2.10}$$

となる。この第 1 項は index N, P について反対称なので、やはり torsion term から来ると考え、無視する。第 2 項を更に書き換えよう:

$$\begin{aligned}
&6E_{[A}{}^{[M}\widehat{\Gamma}^{NP]}{}_{B]}\\
&\quad= \frac{6}{2!3!}\Big(E_A{}^M\widehat{\Gamma}^{NP}{}_B + E_A{}^N\widehat{\Gamma}^{PM}{}_B + E_A{}^P\widehat{\Gamma}^{MN}{}_B - E_A{}^M\widehat{\Gamma}^{PN}{}_B - E_A{}^N\widehat{\Gamma}^{MP}{}_B - E_A{}^P\widehat{\Gamma}^{NM}{}_B\\
&\qquad - E_B{}^M\widehat{\Gamma}^{NP}{}_A - E_B{}^N\widehat{\Gamma}^{PM}{}_A - E_B{}^P\widehat{\Gamma}^{MN}{}_A + E_B{}^M\widehat{\Gamma}^{PN}{}_A + E_B{}^N\widehat{\Gamma}^{MP}{}_A + E_B{}^P\widehat{\Gamma}^{NM}{}_A\Big)
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

なので、

$$6E_{[A}{}^{[M}\widehat{\Gamma}^{NP]}{}_{B]}\widetilde{R}^{AB}{}_{MN} \;=\; 4\widehat{\Gamma}^{MPA}\widetilde{\mathcal{R}}_{AM} + 2\widehat{\Gamma}^{MNA}\widetilde{R}^{P}{}_{AMN} \tag{2.2.12}$$

となる。だが、この右辺第 1 項は、Ricci tensor の index について反対称な部分からの寄与、つまり torsion からの寄与であり、第 2 項も torsion からの寄与であるので、これは全て無視される。

(2.2.10) の第 3 項をみよう:

$$6E_{[A}{}^{[M}\,E_{B]}{}^{N}\,\widehat{\Gamma}^{P]}\widetilde{R}^{AB}{}_{MN} \;=\; 2\widetilde{\mathcal{R}}\widehat{\Gamma}^{P} - 4\widetilde{\mathcal{R}}^{P}{}_{M}\widehat{\Gamma}^{M} \;=\; -4\widetilde{G}^{PM}\widehat{\Gamma}_{M} \tag{2.2.13}$$

ここで

$$\widetilde{G}^{PM} \;=\; \widetilde{\mathcal{R}}^{PM} - \frac{1}{2}g^{PM}\widetilde{\mathcal{R}} \tag{2.2.14}$$

は Einstein tensor である。よって最終的に、torsion を無視した (2.2.2) は

$$\delta\mathcal{L}_{\rm RS} \;=\; \delta\Psi^T_M\Big(\frac{\delta\mathcal{L}_{\rm RS}}{\delta\Psi^T_M}\Big) \;=\; e\,\widetilde{G}^{PM}\,\overline{\varepsilon}\widehat{\Gamma}_M\Psi_P \tag{2.2.15}$$

が得られる。これを、まずは vielbein $e_M{}^A$ の supersymmetry transformation からの寄与で打ち消す。

2.3 Supersymmetry Transformation of Vielbein

supersymmetry transformation による無限小変換 $\delta E_A{}^M$ を考察する。すぐ後に $\delta e_M{}^A$ を考察しよう。(inverse) vielbein の変換に伴う $\delta\mathcal{L}_{\rm RS}$, は、gravitino Ψ_M が 3 次以上となるため、ここでは無視する。なお、$\delta\mathcal{L}_C$ からの寄与はここではまだ一切考えない。それは $\delta\Psi_M$ に補正を与える項として、後程考察する。

Lagrangian $\mathcal{L}_{\rm G}$ の変分は

$$\delta\mathcal{L}_{\rm G} \;=\; \delta E_A{}^M\Big(\frac{\delta\mathcal{L}_{\rm G}}{\delta E_A{}^M}\Big) \;=\; \beta_0\,\delta E_A{}^M\Big(\frac{\delta e}{\delta E_A{}^M}\widetilde{\mathcal{R}} + e\frac{\delta\widetilde{\mathcal{R}}}{\delta E_A{}^M}\Big) \tag{2.3.1}$$

である。ここで

$$
\begin{aligned}
\delta e &= \delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2} e\, g^{MN} \delta g_{MN} \\
&= \frac{1}{2} e\, g^{MN} \big(- g_{MP}\, g_{NQ}\, \delta g^{PQ} \big) = -\frac{1}{2} e\, g_{PQ} \eta^{AB} \big(E_A{}^P\, \delta E_B{}^Q + E_B{}^Q\, \delta E_A{}^P \big) \\
&= -e\, e_M{}^A\, \delta E_A{}^M
\end{aligned}
\tag{2.3.2}
$$

なので、

$$
\frac{\delta e}{\delta E_A{}^M} = -e\, e_M{}^A \tag{2.3.3}
$$

となることがわかる。また $\widetilde{\mathcal{R}} = E_A{}^M E_B{}^N \widetilde{R}^{AB}{}_{MN}$ であるので、

$$
\delta\widetilde{\mathcal{R}} = 2\widetilde{R}^{AB}{}_{MN} \cdot E_B{}^N\, \delta E_A{}^M \tag{2.3.4}
$$

である。したがって (2.3.1) は

$$
\delta\mathcal{L}_{\mathrm{G}} = \delta E_A{}^M \Big(\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathrm{G}}}{\delta E_A{}^M} \Big) = \beta_0\, e \Big\{ - e_M{}^A \widetilde{\mathcal{R}} + 2\widetilde{\mathcal{R}}^A{}_M \Big\} \delta E_A{}^M = 2\beta_0\, e\, \widetilde{G}^A{}_M \cdot \delta E_A{}^M \tag{2.3.5}
$$

と書き換えられる。但し Einstein tensor $\widetilde{G}^A{}_M$ は

$$
\widetilde{G}^A{}_M = \widetilde{\mathcal{R}}^A{}_M - \frac{1}{2} e_M{}^A \widetilde{\mathcal{R}} \tag{2.3.6}
$$

である。

この (2.3.5) と、先程の gravitino supersymmetry transformation (2.2.15) とが互いに打ち消すとして、$\delta E_A{}^M$ を求めよう。Lagrangian の変分が

$$
\begin{aligned}
0 = \delta\mathcal{L}_{\mathrm{G}} + \delta\mathcal{L}_{\mathrm{RS}} &\simeq \delta E_A{}^M \Big(\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathrm{G}}}{\delta E_A{}^M} \Big) + \delta\Psi_M^T \Big(\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathrm{RS}}}{\delta\Psi_M^T} \Big) \\
&= \delta E_A{}^M \cdot 2\beta_0\, e\, \widetilde{G}^A{}_M + \big(e\, \widetilde{G}^{PM} \overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}_M \Psi_P \big) = 2e\, \widetilde{G}^A{}_M \Big(\beta_0\, \delta E_A{}^M + \frac{1}{2} \overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}^M \Psi_A \Big)
\end{aligned}
\tag{2.3.7}
$$

で与えられる。ここで

$$
\widetilde{G}^{PM} \widehat{\Gamma}_M \Psi_P = \widetilde{G}^P{}_M \widehat{\Gamma}^M \Psi_P = \widetilde{G}^A{}_M \widehat{\Gamma}^M \Psi_A \tag{2.3.8}
$$

を用いている。これより、

$$
\delta E_A{}^M = -\frac{1}{\beta_0} \frac{1}{2} \overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}^M \Psi_A = \frac{1}{\beta_0} \frac{1}{2} \overline{\Psi}_A \widehat{\Gamma}^M \varepsilon \tag{2.3.9}
$$

であることがわかる。さらに

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta(E_A{}^M\, e_M{}^B) = \delta E_A{}^M\, e_M{}^B + E_A{}^M\, \delta e_M{}^B \\
\therefore \quad \delta e_M{}^A &= -e_M{}^B\, e_N{}^A\, \delta E_B{}^N
\end{aligned}
$$

であることを用いると

$$
\delta e_M{}^A = \frac{1}{\beta_0} \frac{1}{2} \overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}^A \Psi_M \tag{2.3.10}
$$

であることもわかる。

2.4 Supersymmetry Transformation of Three-form Gauge Field

さて、ここまでの議論では three-form gauge field C_{MNP} の supersymmetry transformation は議論されていない。もちろんこれも考慮されるべきであるので、ここで展開しよう。この C_{MNP} は勿論 boson であるので、supersymmetry transformation で gravitino Ψ_M に繋がる。しかしそれにより、(2.2.1) で仮定した gravitino の supersymmetry transformation は必然的に変更を受けることになる。この変更が、Lagrangian に新たな interaction terms を必要とさせることを見る。

gauge field C_{MNP} (もしくはその field strength F_{MNPQ}) の supersymmetry transformation を

$$\delta C_{MNP} = \alpha_2 \overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}_{[MN} \Psi_{P]} \qquad \delta F_{MNPQ} = 4\alpha_2 \partial_{[M} \big(\overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}_{NP} \Psi_{Q]} \big) \qquad \alpha_2 \ : \ \text{constant} \tag{2.4.1}$$

で定義する。これに伴い、gravitino Ψ_M の supersymmetry transformation rule (2.2.1) に変更を施す:

$$\delta \Psi_M = 2 D_M \varepsilon + \delta_2 \Psi_M \tag{2.4.2a}$$

$$\delta_2 \Psi_M = \alpha_1 \widetilde{\Gamma}^{NPQR}{}_M F_{NPQR} \varepsilon = \alpha_1 \widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR} F_{NPQR} \varepsilon \qquad \alpha_1 \ : \ \text{constant} \tag{2.4.2b}$$

ここでの考察では、gravitino Ψ_M の 3 次以上を無視した形での Lagrangian の変換則と $\delta_2 \Psi_M$ の形を決定させたい。gravitino の full order での変換則は後の議論に回しておきたい。そのため、torsion term などの寄与を生み出すことがないように、ここでは spacetime は flat、つまり $e \sim 1$, $D_M \sim \partial_M$ (i.e., $\omega_M{}^{AB} \sim 0$) という仮定を採る。

それでは $e = 1$ の下で議論を展開しよう。gauge field C_{MNP} の Lagrangian $\mathcal{L}_C$ の変分を考える:

$$\mathcal{L}_C = -\frac{1}{48} F_{MNPQ} F^{MNPQ} \tag{2.4.3a}$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_C &= -\frac{1}{24} F^{MNPQ} \cdot 4\alpha_2 \partial_{[M} \big(\overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}_{NP} \Psi_{Q]} \big) = -\frac{1}{24} F^{MNPQ} \cdot 4\alpha_2 \partial_M \big(\overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}_{NP} \Psi_Q \big) \\
&= \frac{1}{6} \alpha_2 \big(\partial_M F^{MNPQ} \big) \cdot \overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}_{NP} \Psi_Q \\
&= -\frac{1}{6} \alpha_2 \big(\partial_M F^{MNPQ} \big) \big(\overline{\Psi}_Q \widehat{\Gamma}_{NP} \varepsilon \big) = -\frac{1}{6} \alpha_2 \big(\partial_M F^{MNPQ} \big) \big(\overline{\Psi}_N \widehat{\Gamma}_{PQ} \varepsilon \big)
\end{aligned} \tag{2.4.3b}$$

途中、action の被積分関数 (integrand) であることを考慮し、部分積分を用いている。さらに確認であるが、(A.1.5), (A.1.6) という関係があるために

$$\overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}_{NP} \Psi_Q = -\Psi_Q^T \big(\widehat{\Gamma}_{NP} \big)^T C^T \varepsilon = -\Psi_Q^T C \cdot C^{-1} \big(\widehat{\Gamma}_{NP} \big)^T (-C) \varepsilon = -\overline{\Psi}_Q \widehat{\Gamma}_{NP} \varepsilon \tag{2.4.4}$$

であることを用いている。

次に $\delta_2 \Psi_M$ に伴う $\mathcal{L}_{\rm RS}$ の変分を考察する。(2.2.6) を用いて

$$\begin{aligned}
\delta_2 \mathcal{L}_{\rm RS} &= (\delta_2 \Psi_M)^T \Big(\frac{\delta \mathcal{L}_{\rm RS}}{\delta \Psi_M^T} \Big) = \big(\alpha_1 \widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR} F_{NPQR} \varepsilon \big)^T \big(- e\, C \widehat{\Gamma}^{MSU} D_S \Psi_U \big) \\
&= \alpha_1 F_{NPQR} \cdot \varepsilon^T \big(\widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR} \big)^T (-e) C \widehat{\Gamma}^{MSU} D_S \Psi_U \\
&\sim -\alpha_1 F_{NPQR} \varepsilon^T \big(\widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR} \big)^T C \widehat{\Gamma}^{MSU} \partial_S \Psi_U
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\alpha_1 F_{NPQR}\,\partial_S \overline{\Psi}_U \widehat{\Gamma}^{MSU} \widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR}\,\varepsilon \\
&= -\alpha_1 (\partial_S F_{NPQR}) \overline{\Psi}_U \widehat{\Gamma}^{USM} \widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR}\,\varepsilon - \alpha_1 F_{NPQR} \overline{\Psi}_U \widehat{\Gamma}^{USM} \widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR}\,\partial_S \varepsilon \\
&\equiv (\delta_2 \mathcal{L}_{\rm RS})_1 + \big(\delta_2 \mathcal{L}_{\rm RS}\big)_2
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

と書き換える。ここで部分積分を用いている。

Field strength F_{NPQR} と gamma matrices の積

$$F_{NPQR}\,\widehat{\Gamma}^{USM} \widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR} \;=\; F_{NPQR}\Big(\widehat{\Gamma}^{USM} \widehat{\Gamma}_M{}^{NPQR} - 8 \widehat{\Gamma}^{USM}\,\delta_M^{[N} \widehat{\Gamma}^{PQR]} \Big) \tag{2.4.6}$$

の各項を gamma matrices の高次の積に分解して、gamma matrices の各次数毎に (2.4.5) の議論を展開しよう。gamma matrices に関する identity (A.2.1) を用いる。

(2.4.6) の第 1 項を変形する。identity (A.2.1)

$$\widehat{\Gamma}^{US} \widehat{\Gamma}^{M} \;=\; \widehat{\Gamma}^{USM} - 2\eta^{M[U} \widehat{\Gamma}^{S]} \;=\; \widehat{\Gamma}^{USM} + 2\widehat{\Gamma}^{[U} \eta^{S]M} \tag{2.4.7a}$$

$$\widehat{\Gamma}_M \widehat{\Gamma}^{NPQR} \;=\; \widehat{\Gamma}_M{}^{NPQR} + 4\delta_M^{[N} \widehat{\Gamma}^{PQR]} \tag{2.4.7b}$$

$$\widehat{\Gamma}^M \widehat{\Gamma}_M \;=\; 11 \cdot \mathbf{1} \tag{2.4.7c}$$

$$\widehat{\Gamma}^{[N} \widehat{\Gamma}^{PQR]} \;=\; \widehat{\Gamma}^{NPQR} \qquad \widehat{\Gamma}^{[U} \widehat{\Gamma}^{S]} \;=\; \widehat{\Gamma}^{US} \tag{2.4.7d}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
\widehat{\Gamma}^{USM} \widehat{\Gamma}_M{}^{NPQR} &= \big(\widehat{\Gamma}^{US} \widehat{\Gamma}^{M} - 2\widehat{\Gamma}^{[U} \eta^{S]M} \big) \big(\widehat{\Gamma}_M \widehat{\Gamma}^{NQPR} - 4\delta_M^{[N} \widehat{\Gamma}^{PQR]} \big) \\
&= 11 \widehat{\Gamma}^{US} \widehat{\Gamma}^{NPQR} - 4\widehat{\Gamma}^{US} \widehat{\Gamma}^{[N} \widehat{\Gamma}^{PQR]} - 2\widehat{\Gamma}^{[U} \widehat{\Gamma}^{S]} \widehat{\Gamma}^{NPQR} + 8\widehat{\Gamma}^{[U} \eta^{S][N} \widehat{\Gamma}^{PQR]} \\
&= 5\widehat{\Gamma}^{US} \widehat{\Gamma}^{NPQR} + 8\widehat{\Gamma}^{[U} \eta^{S][N} \widehat{\Gamma}^{PQR]}
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

である。この (2.4.8) の第 1 項は

$$\begin{aligned}
\widehat{\Gamma}^{US} \widehat{\Gamma}^{NPQR} &= \widehat{\Gamma}^{USNPQR} - \big(8\delta^{[U}_{[A} \widehat{\Gamma}^{S]}{}_{BCD]} + 12 \delta^{[U}_{[A} \delta^{S]}_{B}\, \widehat{\Gamma}_{CD]} \big) \eta^{AN}\,\eta^{BP}\,\eta^{CQ}\,\eta^{DR} \\
&= \widehat{\Gamma}^{USNPQR} - 8\eta^{UN} \widehat{\Gamma}^{SPQR} - 12\eta^{UN} \eta^{SP} \widehat{\Gamma}^{QR}
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

となる[3]。(2.4.8) の第 2 項は

$$\widehat{\Gamma}^{[U} \eta^{S][N} \widehat{\Gamma}^{PQR]} \;=\; -\eta^{UN} \widehat{\Gamma}^{SPQR} - 3\eta^{UN} \eta^{SP} \widehat{\Gamma}^{QR} \tag{2.4.10}$$

となるので、(2.4.9) と (2.4.10) を用いると、(2.4.6) の第 1 項は

$$F_{NPQR} \widehat{\Gamma}^{USM} \widehat{\Gamma}_M{}^{NPQR} \;=\; F_{NPQR} \Big(5\widehat{\Gamma}^{USNPQR} - 48\eta^{UN} \widehat{\Gamma}^{SPQR} - 84\eta^{UN} \eta^{SP} \widehat{\Gamma}^{QR} \Big) \tag{2.4.11}$$

とまとめられる。同様に (2.4.6) の第 2 項については

$$\widehat{\Gamma}^{USM} \widehat{\Gamma}^{PQR} \;=\; \widehat{\Gamma}^{USMPQR} + 9\eta^{UP} \widehat{\Gamma}^{SMQR} - 18\eta^{UP} \eta^{SQ} \widehat{\Gamma}^{MR} - 6\eta^{UP} \eta^{SQ} \eta^{MR} \tag{2.4.12}$$

[3] ここでは index $A, B, \cdots$ は tangent space ではなく、やはり world index である。

であることと、F_{NPQR} が作用していることを考慮して

$$F_{NPQR}\,\widehat{\Gamma}^{USM}\delta_M^{[N}\widehat{\Gamma}^{PQR]} \;=\; F_{NPQR}\Big(\widehat{\Gamma}^{USNPQR}+9\eta^{UP}\widehat{\Gamma}^{SNQR}-18\eta^{UP}\eta^{SQ}\widehat{\Gamma}^{NR}-6\eta^{UP}\eta^{SQ}\eta^{NR}\Big) \tag{2.4.13}$$

となる。最終項は metric index の symmetry/antisymmetry で消えるので gray scale としてある。(2.4.11) と (2.4.13) を合わせると、(2.4.6) そのものは

$$\begin{aligned} F_{NPQR}\,\widehat{\Gamma}^{USM}\widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR} \;&=\; F_{NPQR}\Big(-3\widehat{\Gamma}^{USNPQR}-48\eta^{UN}\widehat{\Gamma}^{SPQR}-72\eta^{UP}\widehat{\Gamma}^{SNQR} \\ &\qquad -84\eta^{UN}\eta^{SP}\widehat{\Gamma}^{QR}+144\eta^{UP}\eta^{SQ}\widehat{\Gamma}^{NR}\Big) \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

となる。

なお、上で頻繁に登場する index color は、それごとに antisymmetric な組み合わせであることを意味する。例えば

$$\eta^{MN}\widehat{\Gamma}^{PQR} \;=\; \eta^{M[N}\widehat{\Gamma}^{PQR]}$$

という意味である[4]。さらに、一つの index が複数の関係を持つときは brown で色付けしておく。

これで (2.4.5) の $(\delta_2\mathcal{L}_{\rm RS})_1$ に関する gamma matrices での展開を議論することができる:

$$\begin{aligned} (\delta_2\mathcal{L}_{\rm RS})_1 \;&=\; -\alpha_1\big(\partial_S F_{NPQR}\big)\overline{\Psi}_U\widehat{\Gamma}^{USM}\widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR}\varepsilon \\ &=\; -\alpha_1\overline{\Psi}_U\big(\partial_S F_{NPQR}\big)\Big\{-3\widehat{\Gamma}^{USNPQR}-48\eta^{UN}\widehat{\Gamma}^{SPQR}-72\eta^{UP}\widehat{\Gamma}^{SNQR} \\ &\qquad -84\eta^{UN}\eta^{SP}\widehat{\Gamma}^{QR}+144\eta^{UP}\eta^{SQ}\widehat{\Gamma}^{NR}\Big\}\varepsilon \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

ここで第 1 項の gray scale は Bianchi identity $\partial_{[S}F_{NPQR]}=0$ で消える項である。第 3 項については

$$\begin{aligned} \partial_S F_{NPQR}\,\eta^{UP}\widehat{\Gamma}^{SNQR} \;&=\; \partial_S F_{NPQR}\cdot\frac{1}{3}\Big\{\eta^{UP}\widehat{\Gamma}^{SNQR}+\eta^{SP}\widehat{\Gamma}^{NUQR}+\eta^{NP}\widehat{\Gamma}^{USQR}\Big\} \\ &=\; -\frac{2}{3}\partial_S F_{NPQR}\,\eta^{UN}\widehat{\Gamma}^{SPQR} \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

なので、ちょうど (2.4.15) の第 3 項と打ち消しあう。(2.4.15) 第 5 項は

$$\begin{aligned} \partial_S F_{NPQR}\,\eta^{UP}\eta^{SQ}\widehat{\Gamma}^{NR} \;&=\; \partial_S F_{NPQR}\cdot\frac{1}{3}\Big\{\eta^{UP}\eta^{SQ}\widehat{\Gamma}^{NR}+\eta^{SP}\eta^{NQ}\widehat{\Gamma}^{UR}+\eta^{NP}\eta^{UQ}\widehat{\Gamma}^{SR} \\ &\qquad -\eta^{UP}\eta^{NQ}\widehat{\Gamma}^{SR}-\eta^{SP}\eta^{UQ}\widehat{\Gamma}^{NR}-\eta^{NP}\eta^{SQ}\widehat{\Gamma}^{UR}\Big\} \\ &=\; \frac{1}{3}\partial_S F_{NPQR}\,\eta^{UN}\eta^{SP}\widehat{\Gamma}^{QR} \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

を用いて第 4 項とまとめられる。よって (2.4.15) は

$$\begin{aligned} (\delta_2\mathcal{L}_{\rm RS})_1 \;&=\; -\alpha_1\big(\partial_S F_{NPQR}\big)\overline{\Psi}_U\Big\{(-84+48)\eta^{UN}\eta^{SP}\widehat{\Gamma}^{QR}\Big\}\varepsilon \\ &=\; -36\alpha_1\big(\partial_P F^{PNQR}\big)\big(\overline{\Psi}_N\widehat{\Gamma}_{QR}\varepsilon\big) \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

[4] [31] に登場する contraction の記号をうまく表示できる style file を持っていないため、渋々色で区別する。

となる。(2.4.3b) と (2.4.18) が cancel するように係数 α_1 と α_2 の関係を決定させよう[5]:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \delta\mathcal{L}_C + (\delta_2\mathcal{L}_{\rm RS})_1 \;&=\; -\frac{1}{6}\alpha_2\big(\partial_M F^{MNPQ}\big)\big(\overline{\Psi}_N\widehat{\Gamma}_{PQ}\varepsilon\big) - 36\alpha_1\big(\partial_P F^{PNQR}\big)\big(\overline{\Psi}_N\widehat{\Gamma}_{QR}\varepsilon\big) \\ \therefore \quad \alpha_2 \;&=\; -216\,\alpha_1 \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

ついでに、(2.4.5) にある $(\delta_2\mathcal{L}_{\rm RS})_2$ を書き直そう:

$$\begin{aligned} (\delta_2\mathcal{L}_{\rm RS})_2 \;&=\; -\alpha_1 F_{NPQR}\overline{\Psi}_U\widehat{\Gamma}^{USM}\widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR}\,\partial_S\varepsilon \\ &=\; -\alpha_1\overline{\Psi}_U\,F_{NPQR}\Big\{-3\widehat{\Gamma}^{USNPQR} - 48\eta^{UN}\widehat{\Gamma}^{SPQR} - 72\eta^{UP}\widehat{\Gamma}^{SNQR} \\ &\qquad\qquad - 84\eta^{UN}\eta^{SP}\widehat{\Gamma}^{QR} + 144\eta^{UP}\eta^{SQ}\widehat{\Gamma}^{NR}\Big\}\partial_S\varepsilon \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

第 2 項と第 3 項は、$(\delta_2\mathcal{L}_{\rm RS})_1$ のときと同様に打ち消しあう。また第 4 項と第 5 項もまとめられる。よって

$$\begin{aligned} (\delta_2\mathcal{L}_{\rm RS})_2 \;&=\; -\alpha_1\overline{\Psi}_U\,F_{NPQR}\Big\{-3\widehat{\Gamma}^{USNPQR} - 36\eta^{UN}\eta^{SP}\widehat{\Gamma}^{QR}\Big\}\partial_S\varepsilon \\ &=\; 3\alpha_1 F_{NPQR}\overline{\Psi}_U\Big\{\widehat{\Gamma}^{USNPQR} + 12\eta^{UN}\eta^{SP}\widehat{\Gamma}^{QR}\Big\}\partial_S\varepsilon \\ &\equiv\; 3\alpha_1 F_{NPQR}\overline{\Psi}_U\,\widetilde{\Gamma}^{USNPQR}\,\partial_S\varepsilon \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

となる。ここで

$$\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS} \;=\; \widehat{\Gamma}^{MNPQRS} + 12 g^{M[P}\widehat{\Gamma}^{QR}g^{S]N} \tag{2.4.22}$$

という記号を導入してある。

2.5 Interaction Terms

さて、まだ Lagrangian は supersymmetric invarinat にはなっていない。(2.4.21) を打ち消す項についてはまだ何も考慮されていない。しかし、これを打ち消す項は、もはや $\mathcal{L}_{\rm G}, \mathcal{L}_{\rm RS}$ からの寄与では得られない。torsion free、flat の近似ですら、まだこれでは閉じないのである。そのため、次の interaction term を用意する:

$$\mathcal{L}_1 \;=\; e\,\beta_1\overline{\Psi}_M\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\Psi_N\,F_{PQRS} \qquad \beta_1 \;:\; \text{real constant} \tag{2.5.1}$$

なお、$e\overline{\Psi}_M\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\Psi_N F_{PQRS}$ は Hermitian である。従って、この項も Hermitian であるべしという条件から、β_1 が実という条件が付く。ここでも flat な近似のもとで議論を展開しよう。また、$\mathcal{L}_1$ の変分の種類をここで列挙する:

$$\delta_1\mathcal{L}_1 \;:\; \text{derived from} \quad \delta\Psi_M \;=\; 2D_M\varepsilon \;\sim\; 2\partial_M\varepsilon \tag{2.5.2a}$$

$$\delta_2\mathcal{L}_1 \;:\; \text{derived from} \quad \delta_2\Psi_M \;=\; \alpha_1\widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR}F_{NPQR}\varepsilon \tag{2.5.2b}$$

$$\delta_C\mathcal{L}_1 \;:\; \text{derived from} \quad \delta F_{MNPQ} \;=\; 4\alpha_2\partial_{[M}\big(\overline{\varepsilon}\widehat{\Gamma}_{NP}\Psi_{Q]}\big) \tag{2.5.2c}$$

[5] 先にいうと、$(\delta_2\mathcal{L}_{\rm RS})_2$ を打ち消すため、Lagrangian にさらなる interaction terms を加える。このやり方を、閉じるまで繰り返す。

だが、最後の $\delta_C\mathcal{L}_1$ は gravitino の 3 次以上の項を生成するため、ここでは無視される。よって、ここでは $\delta_1\mathcal{L}_1$ と $\delta_2\mathcal{L}_1$ を考察する。両方共 gravitino の変換によるものであるので、準備として

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_1 &= \mathcal{L}_1(\Psi_M+\delta\Psi_M)-\mathcal{L}_1(\Psi_M) \\
&= \beta_1\big(\delta\Psi_M\big)^T C\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\Psi_N\,F_{PQRS}+\beta_1\Psi_M^T C\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\,\delta\Psi_M\,F_{PQRS} \\
&= 2\beta_1\big(\delta\Psi_M\big)^T C\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\Psi_N\,F_{PQRS} \\
\therefore\quad \frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\Psi_M^T} &= 2\beta_1 C\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\Psi_N\,F_{PQRS}
\end{aligned}\tag{2.5.3}$$

を挙げておこう。

進め方として、$\delta_1\mathcal{L}_1$ と $(\delta_2\mathcal{L}_{\rm RS})_2$ が互いに打ち消しあう条件をさがす。これに伴い、$\delta_2\mathcal{L}_1$ を打ち消す項が足りないので、後程更なる interaction term (Chern-Simons term に相当する) を導入することになる。

$\delta\Psi_M\sim 2\partial_M\varepsilon$ の変分で得られる $\delta_1\mathcal{L}_1$ は

$$\begin{aligned}
\delta_1\mathcal{L}_1 = \delta\Psi_M^T\Big(\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\Psi_M^T}\Big) &\sim \big(2\partial_M\varepsilon\big)^T\big(2\beta_1 C\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\,\Psi_N\,F_{PQRS}\big) \\
&= 4\beta_1\overline{\Psi}_M\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\,\partial_N\varepsilon\,F_{PQRS}
\end{aligned}\tag{2.5.4}$$

である。これと (2.4.21) をあわせて

$$\begin{aligned}
0 = \delta_1\mathcal{L}_1+(\delta_2\mathcal{L}_{\rm RS})_2 &= 4\beta_1\overline{\Psi}_M\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\,\partial_N\varepsilon\,F_{PQRS}+3\alpha_1F_{NPQR}\overline{\Psi}_U\widetilde{\Gamma}^{USNPQR}\partial_S\varepsilon \\
\therefore\quad \beta_1 &= -\frac{3}{4}\alpha_1
\end{aligned}\tag{2.5.5}$$

が得られる。

$\delta_2\mathcal{L}_1$ を打ち消す新たな interaction term を見付けるために、$\delta_2\mathcal{L}_1$ を具体的に書き下しておこう。なお、ここの計算は非常に長くて複雑であるので注意を要する:

$$\begin{aligned}
\delta_2\mathcal{L}_1 = \big(\delta_2\Psi_M\big)^T\Big(\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\Psi_M^T}\Big) &= \big(\alpha_1\widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR}\,F_{NPQR}\varepsilon\big)^T\big(2\beta_1 C\widetilde{\Gamma}^{MSUVWX}\,\Psi_S\,F_{UVWX}\big) \\
&= 2\alpha_1\beta_1\overline{\Psi}_S\big(\widetilde{\Gamma}^{SMUVWX}\widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR}\big)\varepsilon\cdot F_{NPQR}\,F_{UVWX}
\end{aligned}\tag{2.5.6}$$

途中 charge conjugation (A.1.6) の関係式から得られる

$$(\widetilde{\Gamma}^{MSUVWX})^T = (\widehat{\Gamma}^{MSUVWX}+12\eta^{M[U}\widehat{\Gamma}^{VW}\eta^{X]S})^T = C\widetilde{\Gamma}^{MSUVWX}C^{-1}\tag{2.5.7}$$

を用いている。また (2.5.6) にある gamma matrices は次のように展開される:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}^{SMUVWX}\widetilde{\Gamma}_M{}^{NPQR} &= \big(\widehat{\Gamma}^{SMUVWX}+12\eta^{S[U}\widehat{\Gamma}^{VW}\eta^{X]M}\big)\big(\widehat{\Gamma}_M{}^{NPQR}-8\delta_M^{[N}\widehat{\Gamma}^{PQR]}\big) \\
&= \widehat{\Gamma}^{SMUVWX}\widehat{\Gamma}_M{}^{NPQR}-8\widehat{\Gamma}^{SMUVWX}\,\delta_M^{[N}\widehat{\Gamma}^{PQR]} \\
&\quad+12\eta^{SU}\eta^{MX}\widehat{\Gamma}^{VW}\widehat{\Gamma}_M{}^{NPQR}-96\eta^{SU}\eta^{MX}\widehat{\Gamma}^{VW}\widehat{\Gamma}^{PQR}\delta_M^N
\end{aligned}\tag{2.5.8}$$

これら 4 つの項についても更に展開する。計算自体は非常に長いだけであるので、[31, 27] に詳細を譲ることにすると結果が次のように与えられる:

$$\widehat{\Gamma}^{SMUVWX}\widehat{\Gamma}_M{}^{NPQR} = 2\widehat{\Gamma}^{SUVWXNPQR}+60\eta^{NS}\widehat{\Gamma}^{UVWXPQR}-480\eta^{NS}\eta^{PU}\widehat{\Gamma}^{VWXQR}$$

$$
\begin{aligned}
& & & -1200\eta^{NS}\eta^{PU}\eta^{QV}\widehat{\Gamma}^{WXR}+720\eta^{NS}\eta^{PU}\eta^{QV}\eta^{RW}\widehat{\Gamma}^{X} && \text{(2.5.9a)}\\
\widehat{\Gamma}^{SMUVWX}\,\delta_M^{[N}\widehat{\Gamma}^{PQR]} &=& & \widehat{\Gamma}^{SNUVWXPQR}-18\eta^{PS}\widehat{\Gamma}^{NUVWXQR} && \\
& & & -90\eta^{PS}\eta^{\underline{QN}}\widehat{\Gamma}^{UVWXR}+120\eta^{PS}\eta^{\underline{QN}}\eta^{RU}\widehat{\Gamma}^{VWX} && \text{(2.5.9b)}\\
\eta^{SU}\eta^{MX}\widehat{\Gamma}^{VW}\widehat{\Gamma}_M{}^{NPQR} &=& & \eta^{SU}\widehat{\Gamma}^{VWXNPQR}-10\eta^{SU}\eta^{\underline{VX}}\widehat{\Gamma}^{WNPQR} && \\
& & & -20\eta^{SU}\eta^{\underline{VX}}\eta^{WN}\widehat{\Gamma}^{PQR} && \text{(2.5.9c)}\\
\eta^{SU}\eta^{MX}\widehat{\Gamma}^{VW}\widehat{\Gamma}^{PQR} &=& & \eta^{SU}\eta^{NX}\widehat{\Gamma}^{VWPQR}-6\eta^{SU}\eta^{NX}\eta^{PV}\widehat{\Gamma}^{WQR} && \\
& & & -6\eta^{SU}\eta^{NX}\eta^{PV}\eta^{QW}\widehat{\Gamma}^{R} && \text{(2.5.9d)}
\end{aligned}
$$

(2.5.9b) と (2.5.9c) にある underline は、ある特殊な組合せの時は metric の symmetric な性質と gamma matrices からの antisymmetric な性質が両立するために項がゼロになる、という意味を示す。例えば (2.5.9b) 第 3 項の場合、二つめの metric $\eta^{\underline{QN}}$ の index が二つとも $[NPQR]$ 由来のときはゼロになり、一方が $[NPQR]$ 由来でもう一方が $[SMUVWX]$ 由来であれば、ゼロにならない。この様な事態は、δ_M^N が存在することに起因する。

(2.5.9) を (2.5.8) に代入して整理すると、$\widehat{\Gamma}^M$ の 7 次、5 次、そして 3 次は丁度打ち消しあう [31, 27]。残るのは 9 次と 1 次の項だけである。まずはそれらを別々に整理しておこう。まずは 9 次の項であるが、

$$
\begin{aligned}
&\left\{2\widehat{\Gamma}^{SUVWXNPQR}-8\widehat{\Gamma}^{SNUVWXPQR}\right\}F_{NPQR}F_{UVWX}\\
&\quad= -6\widehat{\Gamma}^{SUVWXNPQR}F_{NPQR}F_{UVWX}\\
&\quad\equiv -6\cdot\frac{1}{2}\varepsilon^{SUVWXNPQRYZ}\,\widehat{\Gamma}_{YZ}\,F_{NPQR}F_{UVWX} \qquad \text{(2.5.10)}
\end{aligned}
$$

となる。ここで $\varepsilon^{SUVWXNPQRYZ}$ は、weight $+1$ の invariant tensor density であり、

$$
\varepsilon^{012\cdots\natural} = 1 \qquad \text{(2.5.11)}
$$

と規格化されているとする。これを用いると、$\delta_2\mathcal{L}_1$ の 9 次の項 ($(\delta_2\mathcal{L}_1)_9$ と表す) は

$$
(\delta_2\mathcal{L}_1)_9 = -6\alpha_1\beta_1\varepsilon^{SUVWXNPQRYZ}\,F_{NPQR}F_{UVWX}\left(\overline{\Psi}_S\widehat{\Gamma}_{YZ}\varepsilon\right) \qquad \text{(2.5.12)}
$$

となる[6]。gamma matrices が 1 次の項については、

$$
\begin{aligned}
720\eta^{NS}\eta^{PU}\eta^{QV}\eta^{RW}\widehat{\Gamma}^{X}F_{NPQR}F_{UVWX} &= 144F_{UVWX}F^{UVWX}\widehat{\Gamma}^{S}+576F_{UVWX}F_S{}^{UVW}\widehat{\Gamma}^{X} && \text{(2.5.13a)}\\
576\eta^{SU}\eta^{NX}\eta^{PV}\eta^{QW}\widehat{\Gamma}^{R}F_{NPQR}F_{UVWX} &= 576F_{UVWX}F_S{}^{UVW}\widehat{\Gamma}^{X} && \text{(2.5.13b)}
\end{aligned}
$$

を用いて、

$$
\begin{aligned}
(\delta_2\mathcal{L}_1)_1 &= 2\alpha_1\beta_1\cdot 144\overline{\Psi}_S\left\{\widehat{\Gamma}^{S}F^{UVWX}+8\widehat{\Gamma}^{X}F^{SUVW}\right\}F_{UVWX}\varepsilon\\
&= 288\alpha_1\beta_1\overline{\Psi}_S\left\{\widehat{\Gamma}^{S}F_{UVWX}F^{UVWX}-8\widehat{\Gamma}^{X}F^{SUVW}F_{XUVW}\right\}\varepsilon \qquad \text{(2.5.14)}
\end{aligned}
$$

となることがわかる。

[6] これを打ち消すために Chern-Simons term を導入する。

(2.5.12), (2.5.14) を打ち消す項は何であろうか。(2.5.12) については、その形式から推測がつくように、次のような Chern-Simons term を新たな interaction term として Lagrangian に追加し、その supersymmetry transformation を用いて打ち消すとよい:

$$\mathcal{L}_2 = \beta_2 \varepsilon^{MNPQRSUVWXY} F_{MNPQ} F_{RSUV} C_{WXY} \tag{2.5.15}$$

この SUSY 変換を考察する。(2.4.1) を用いると

$$\begin{aligned}\delta_C \mathcal{L}_2 &= -2\cdot 4\alpha_2\beta_2\, \varepsilon^{MNPQRSUVWXY} F_{RSUV} C_{WXY} \cdot \partial_{[M}\big(\overline{\Psi}_Q \widehat{\Gamma}_{NP]}\varepsilon\big) \\ &\quad - \alpha_2\beta_2\, \varepsilon^{MNPQRSUVWXY} F_{MNPQ} F_{RSUV} \big(\overline{\Psi}_{[Y}\widehat{\Gamma}_{WX]}\varepsilon\big)\end{aligned} \tag{2.5.16}$$

これは action の integrand なので、第 1 項に対して部分積分を実行すると、Bianchi identity などにより、

$$\delta_C \mathcal{L}_2 = -3\alpha_2\beta_2\, \varepsilon^{MNPQRSUVWXY} F_{MNPQ} F_{RSUV} \big(\overline{\Psi}_{[Y}\widehat{\Gamma}_{WX]}\varepsilon\big) \tag{2.5.17}$$

となる。これが $(\delta_2\mathcal{L}_1)_9$ と打ち消しあうと考える。(2.5.12) より、

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta_2\mathcal{L}_1)_9 + \delta_C\mathcal{L}_2 = \big(-6\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_2\beta_2\big)\varepsilon^{MNPQRSUVWXY} F_{MNPQ} F_{RSUV}\big(\overline{\Psi}_{[Y}\widehat{\Gamma}_{WX]}\varepsilon\big) \\ \therefore\quad \beta_2 &= -2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\beta_1 = \frac{2}{216}\beta_1 = -\frac{1}{144}\alpha_1 \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

ここで (2.4.19), (2.5.5) を用いている。

(2.5.14) を打ち消す項は、実は $\mathcal{L}_C$ から得られる。$\mathcal{L}_C$ を vielbein で変分する。vielbein の変換則は (2.3.2), (2.3.9), (2.3.10) で与えられているので、実際に計算しよう。その前に、inverse metric g^{MN} の変分を与えておく:

$$\delta e = -e\, e_M{}^{A}\, \delta E_A{}^M = -\frac{1}{\beta_0}\frac{1}{2} e\, \overline{\Psi}_M \widehat{\Gamma}^M \varepsilon \tag{2.5.19a}$$

$$\begin{aligned}\delta g^{NU} &= \delta\big(E_A{}^N E_B{}^U \eta^{AB}\big) = \big(\delta E_A{}^N\big)E^{AU} + E^{BN}\big(\delta E_B{}^U\big) \\ &= \frac{1}{\beta_0}\Big\{\big(\overline{\Psi}_A \widehat{\Gamma}^N \varepsilon\big)E^{AU} + E^{BN}\big(\overline{\Psi}_B\widehat{\Gamma}^U\varepsilon\big)\Big\}\end{aligned} \tag{2.5.19b}$$

よって、

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_C &= -\frac{1}{48}\Big\{\delta e\, F_{UVWX} F^{UVWX} + 4e\,\delta g^{NU} F_{NVWX} F_U{}^{VWX}\Big\} \\ &= \frac{1}{\beta_0}\frac{1}{96}\Big\{\big(\overline{\Psi}_M\widehat{\Gamma}^M\varepsilon\big)F_{UVWX}F^{UVWX} - 4\big(\overline{\Psi}^U\widehat{\Gamma}^N\varepsilon\big)F_N{}^{VWX}F_{UVWX} - 4\big(\overline{\Psi}^N\widehat{\Gamma}^U\varepsilon\big)F_N{}^{VWX}F_{UVWX}\Big\} \\ &= \frac{1}{\beta_0}\frac{1}{96}\overline{\Psi}_M\Big\{\widehat{\Gamma}^M F_{UVWX}F^{UVWX} - 8\widehat{\Gamma}^X F^{MUVW}F_{XUVW}\Big\}\varepsilon\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

となる。

$(\delta_2\mathcal{L}_1)_1$ と $\delta\mathcal{L}_C$ とが打ち消しあうようにすると、(2.5.14) と (2.5.20) より

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta_2\mathcal{L}_1)_1 + \delta\mathcal{L}_C \\ \therefore\quad 0 &= 288\alpha_1\beta_1 + \frac{1}{96}\frac{1}{\beta_0} \qquad \alpha_1\beta_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{48\cdot 288}\frac{1}{\beta_0}\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

が得られる。(2.5.18) を考慮すると、

$$\alpha_1 = \frac{1}{144} \qquad \alpha_2 = \frac{-3}{2} \qquad \beta_0 = 1 \qquad \beta_1 = -\frac{1}{192} \qquad \beta_2 = -\frac{1}{(144)^2} \tag{2.5.22}$$

となる。

以上、まとめると、up to torsion で

$$\delta_2\Psi_M = \alpha_1 \widetilde{\Gamma}^{NPQR}{}_M F_{NPQR}\varepsilon = \frac{1}{144}\big(\widetilde{\Gamma}^{NPQR}{}_M \varepsilon\big) F_{NPQR} \tag{2.5.23a}$$

$$\delta C_{MNP} = \alpha_2 \overline{\varepsilon}\widehat{\Gamma}_{[MN}\Psi_{P]} = -\frac{3}{2}\overline{\varepsilon}\widehat{\Gamma}_{[MN}\Psi_{P]} \tag{2.5.23b}$$

$$\mathcal{L}_1 = e\beta_1 \overline{\Psi}_M \widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\Psi_N F_{PQRS} = -\frac{1}{192} e\,\overline{\Psi}_M \widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\Psi_N F_{PQRS} \tag{2.5.23c}$$

$$\mathcal{L}_2 = \beta_2 \varepsilon^{MNPQRSUVWXY} F_{MNPQ} F_{RSUV} C_{WXY} = -\frac{1}{(144)^2}\varepsilon^{MNPQRSUVWXY} F_{MNPQ} F_{RSUV} C_{WXY} \tag{2.5.23d}$$

である。別のまとめ方をする:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= e\widetilde{\mathcal{R}} - \frac{1}{2} e\,\overline{\Psi}_M \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \Psi_P - \frac{1}{48} e\, F_{MNPQ} F^{MNPQ} \\ &\quad - \frac{1}{192} e\,\overline{\Psi}_M \widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\Psi_N F_{PQRS} - \frac{1}{(144)^2}\varepsilon^{MNPQRSUVWXY} F_{MNPQ} F_{RSUV} C_{WXY}\end{aligned} \tag{2.5.24a}$$

$$\delta e_M{}^A = \frac{1}{2}\overline{\varepsilon}\widehat{\Gamma}^A \Psi_M = -\frac{1}{2}\overline{\Psi}_M \widehat{\Gamma}^A \varepsilon \tag{2.5.24b}$$

$$\delta\Psi_M = 2D_M(\omega)\varepsilon + \frac{1}{144} F_{NPQR}\big(\widetilde{\Gamma}^{NPQR}{}_M \varepsilon\big) \tag{2.5.24c}$$

$$\delta C_{MNP} = -\frac{3}{2}\overline{\varepsilon}\widehat{\Gamma}_{[MN}\Psi_{P]} \tag{2.5.24d}$$

ついでに full Lagrangian を書いておこう。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= e\,\mathcal{R}(e,\omega) - \frac{1}{2}\overline{\Psi}_M \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N[\tfrac{1}{2}(\omega + \widehat{\omega})]\Psi_P - \frac{1}{48} e\, F_{MNPQ} F^{MNPQ} \\ &\quad - \frac{1}{192} e\,\overline{\Psi}_M \widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\Psi_N \cdot \frac{1}{2}(F + \widehat{F})_{PQRS} \\ &\quad - \frac{1}{(144)^2}\varepsilon^{MNPQRSUVWXY} F_{MNPQ} F_{RSUV} C_{WXY} \,,\end{aligned} \tag{2.5.25}$$

full Lagrangian で導入された $\widehat{\omega}$ と $\widehat{F}_{MNPQ}$ の定義:

$$D_{[M}(\widehat{\omega}) e_{N]}{}^A = \frac{1}{8}\overline{\Psi}_M \widehat{\Gamma}^A \Psi_N \,, \qquad \widehat{F}_{MNPQ} = F_{MNPQ} + \frac{3}{2}\overline{\Psi}_{[M}\widehat{\Gamma}_{NP}\Psi_{Q]} \,,$$

full Lagrangian での full supersymmetry transformations:

$$\delta e_M{}^A = \frac{1}{2}\overline{\varepsilon}\widehat{\Gamma}^A \Psi_M \,, \qquad \delta C_{MNP} = -\frac{3}{2}\overline{\varepsilon}\widehat{\Gamma}_{[MN}\Psi_{P]} \,,$$

$$\delta\Psi_M = 2D_M(\widehat{\omega})\varepsilon + 2T_M{}^{MNPQ}\varepsilon\widehat{F}_{MNPQ} \,, \qquad T_M{}^{NPQR} = \frac{1}{288}\big(\widehat{\Gamma}_M{}^{NPQR} - 8\delta_M^{[N}\widehat{\Gamma}^{PQR]}\big) \,.$$

2.6 Summary of the Convention

この chapter のまとめとして表記の一覧を掲載しておこう：

algebras and representations of generators:

$$i[\Sigma_{AB}, \Sigma_{CD}] = \eta_{AC}\Sigma_{BD} + \eta_{BD}\Sigma_{AC} - \eta_{AD}\Sigma_{BC} - \eta_{BC}\Sigma_{AD} \tag{2.6.1a}$$

$$\Sigma_{AB} = 0 \qquad \text{scalar} \tag{2.6.1b}$$

$$(\Sigma_{CD})^{A}{}_{B} = i\big(\delta^{A}_{C}\eta_{BD} - \delta^{A}_{D}\eta_{BC}\big) \qquad \text{vector} \tag{2.6.1c}$$

$$\Sigma_{AB} = \frac{i}{2}\widehat{\Gamma}_{AB} \qquad \text{spinor} \tag{2.6.1d}$$

$$\{\widehat{\Gamma}_{A}, \widehat{\Gamma}_{B}\} = 2\eta_{AB} = 2\cdot\mathbf{1}\text{diag.}(-++\cdots+) \tag{2.6.1e}$$

$$\widehat{\Gamma}^{M_1M_2\cdots M_{11}} = \mathbf{1}\cdot\varepsilon^{M_1M_2\cdots M_{11}} \tag{2.6.1f}$$

affine/spin connections and curvature tensors:

$$\nabla_M A_N = \partial_M A_N - \Gamma^{P}_{NM}A_P \tag{2.6.2a}$$

$$D_M e_N{}^{A} = \partial_M e_N{}^{A} + \omega_M{}^{A}{}_{B}\, e_N{}^{B} = \Gamma^{P}_{NM}\, e_P{}^{A} \tag{2.6.2b}$$

$$[\nabla_M, \nabla_N]A_P = -R^{R}{}_{PMN}A_R + C^{R}{}_{MN}\,\nabla_P A_R \tag{2.6.2c}$$

$$R^{R}{}_{PMN} = \partial_M\Gamma^{R}_{PN} - \partial_N\Gamma^{R}_{PM} + \Gamma^{R}_{QM}\Gamma^{Q}_{PN} - \Gamma^{R}_{QN}\Gamma^{Q}_{PM} \tag{2.6.2d}$$

$$[D_M, D_N]\phi = -\frac{i}{2}\widetilde{R}^{AB}{}_{MN}\Sigma_{AB}\phi \tag{2.6.2e}$$

$$\widetilde{R}^{AB}{}_{MN} = \partial_M\omega_N{}^{AB} - \partial_N\omega_M{}^{AB} + \omega_M{}^{A}{}_{C}\,\omega_N{}^{CB} - \omega_N{}^{A}{}_{C}\,\omega_M{}^{CB} \tag{2.6.2f}$$

$$R^{R}{}_{PMN} = E_A{}^{R}\, e_{PB}\,\widetilde{R}^{AB}{}_{MN} \tag{2.6.2g}$$

$$\mathcal{R}^{R}{}_{M} = e_M{}^{B}\, E_A{}^{R}\widetilde{\mathcal{R}}^{A}{}_{B} \tag{2.6.2h}$$

$$\widetilde{\mathcal{R}}^{A}{}_{B} = \widetilde{\mathcal{R}}^{AC}{}_{BC} \tag{2.6.2i}$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{M}{}_{M} = \widetilde{\mathcal{R}}^{A}{}_{A} = \widetilde{\mathcal{R}} \tag{2.6.2j}$$

Cartan's structure equations:

$$T^{A} = \mathrm{d}e^{A} + \omega^{A}{}_{B}\wedge e^{B}\,, \qquad T^{A} = \frac{1}{2}T_{MN}{}^{A}\mathrm{d}x^{M}\wedge\mathrm{d}x^{N}\,, \qquad T_{MN}{}^{A} = -C^{A}{}_{MN} \tag{2.6.3a}$$

$$R^{A}{}_{B} = \mathrm{d}\omega^{A}{}_{B} + \omega^{A}{}_{C}\wedge\omega^{C}{}_{B} \tag{2.6.3b}$$

Lagrangian and its conventions:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {}& e\,\mathcal{R}(e,\omega) - \frac{1}{2}e\,\overline{\Psi}_M\widehat{\Gamma}^{MNP}D_N[\tfrac{1}{2}(\omega+\widehat{\omega})]\Psi_P - \frac{1}{48}e\,F_{MNPQ}\,F^{MNPQ}\\ &- \frac{1}{192}e\,\overline{\Psi}_M\widehat{\Gamma}^{MNPQRS}\Psi_N\,\frac{1}{2}(F+\widehat{F})_{PQRS}\\ &- \frac{1}{(144)^2}\varepsilon^{MNPQRSUVWXY}\,F_{MNPQ}\,F_{RSUV}\,C_{WXY}\end{aligned} \tag{2.6.4a}$$

$$\overline{\Psi}_M = i\Psi_M^\dagger \widehat{\Gamma}^0 \qquad D_M(\omega) = \partial_M - \frac{i}{2}\omega_M{}^{AB}\Sigma_{AB} \tag{2.6.4b}$$

$$\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS} = \widehat{\Gamma}^{MNPQRS} + 12 g^{M[P}\widehat{\Gamma}^{QR}g^{S]N} \tag{2.6.4c}$$

$$D_{[M}(\widehat{\omega})e_{N]}{}^A = \frac{1}{8}\overline{\Psi}_M\widehat{\Gamma}^A\Psi_N\ , \qquad \widehat{F}_{MNPQ} = F_{MNPQ} + \frac{3}{2}\overline{\Psi}_{[M}\widehat{\Gamma}_{NP}\Psi_{Q]} \tag{2.6.4d}$$

supersymmetry transformations:

$$\delta e_M{}^A = \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\widehat{\Gamma}^A\Psi_M \tag{2.6.5a}$$

$$\delta\Psi_M = 2D_M(\widehat{\omega})\varepsilon + 2T_M{}^{NPQR}\varepsilon\widehat{F}_{NPQR} \tag{2.6.5b}$$

$$\delta C_{MNP} = -\frac{3}{2}\bar{\varepsilon}\widehat{\Gamma}_{[MN}\Psi_{P]} \tag{2.6.5c}$$

$$T_M{}^{NPQR} = \frac{1}{288}\left(\widehat{\Gamma}^{NPQR}{}_M - 8\delta_M^{[N}\widehat{\Gamma}^{PQR]}\right) \tag{2.6.5d}$$

Chapter 3

Eleven-dimensional Supergravity — general discussion —

ここでは一般的な議論にとどめ、具体的な background 上での解析は次の section で展開する。構成手順は appendix 2 で行う。

3.1 Supergravity on Classical Background

まずは classical background での supergravity を復習する。fluctuation については次の subsection で行う。

3.1.1 Supergravity Action without Torsion

Action ($e = \det(e_M{}^A) = \sqrt{-\det g_{MN}}$):

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \mathrm{d}^{11} x \, \mathcal{L} \, , \tag{3.1.1a}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= e\mathcal{R} - \frac{1}{2} e \overline{\Psi}_M \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \Psi_P - \frac{1}{48} e F_{MNPQ} F^{MNPQ} \\ &\quad - \frac{1}{192} e \overline{\Psi}_M \widetilde{\Gamma}^{MNPQRS} \Psi_N F_{PQRS} - \frac{1}{(144)^2} \varepsilon^{MNPQRSUVWXY} F_{MNPQ} F_{RSUV} C_{WXY} \, , \end{aligned} \tag{3.1.1b}$$

where the covariant derivative for local Lorentz transformation are defined as

$$D_N \Psi_P = \partial_N \Psi_P - \frac{i}{2} \omega_N{}^{AB} \Sigma_{AB} \Psi_P \, . \tag{3.1.2}$$

また $\varepsilon^{MNPQRSUVWXY}$ は 11-dimensional spacetime における weight +1 の invariant tensor density であり、規格化を

$$\varepsilon^{012\cdots\natural} = 1 \tag{3.1.3}$$

と採る。weight を +1 にしておかないと Chern-Simons term が scalar density とならない。

Supersymmetry transformations (up to torsion):

$$\delta e_M{}^A = \frac{1}{2} \overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}^A \Psi_M \, , \tag{3.1.4a}$$

$$\delta \Psi_M = 2 D_M \varepsilon + \frac{1}{144} F_{NPQR} (\widetilde{\Gamma}^{NPQR}{}_M \varepsilon) \, , \tag{3.1.4b}$$

$$\delta C_{MNP} = -\frac{3}{2} \overline{\varepsilon} \widehat{\Gamma}_{[MN} \Psi_{P]} \, . \tag{3.1.4c}$$

$$\widetilde{\Gamma}^{NPQR}{}_M = \widehat{\Gamma}^{NPQR}{}_M - 8 \delta_M^{[N} \widehat{\Gamma}^{PQR]} \, , \tag{3.1.5a}$$

$$\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS} = \widehat{\Gamma}^{MNPQRS} + 12 g^{M[P} \widehat{\Gamma}^{QR} g^{S]N} \, . \tag{3.1.5b}$$

ここで supercovariant derivative $\mathcal{D}_M$ (flux F_{MNPQ} ありのときに変更を受けた D_M) を定義しておこう:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_M &= D_M + \frac{1}{288} F_{NPQR} \widetilde{\Gamma}^{NPQR}{}_M \\ &= \Big(\partial_M - \frac{i}{2} \omega_M{}^{AB} \Sigma_{AB} \Big) + \frac{1}{288} \Big(\widehat{\Gamma}^{NPQR}{}_M - 8 \delta_M^{[N} \widehat{\Gamma}^{PQR]} \Big) F_{NPQR} \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

$$\Sigma_{AB} = 0 \qquad \text{scalar} \tag{3.1.7a}$$

$$(\Sigma_{CD})^A{}_B = i(\delta_C^A \eta_{DB} - \delta_D^A \eta_{CB}) \qquad \text{vector} \tag{3.1.7b}$$

$$\Sigma_{AB} = \frac{i}{2} \widehat{\Gamma}_{AB} \qquad \text{spinor} \tag{3.1.7c}$$

3.1.2 Classical Field Equations

$$0 = \frac{1}{2} g_{MN} \mathcal{R} - \mathcal{R}_{MN} - \frac{1}{96} g_{MN} F_{PQRS} F^{PQRS} + \frac{1}{12} F_{MPQR} F_N{}^{PQR} , \tag{3.1.8a}$$

$$0 = \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \Psi_P + \frac{1}{96} \widetilde{\Gamma}^{MNPQRS} \Psi_N F_{PQRS} , \tag{3.1.8b}$$

$$0 = \nabla^Q \big\{ e F_{QMNP} \big\} - \frac{18}{(144)^2} g_{MZ}\, g_{NK}\, g_{PL}\, \varepsilon^{ZKLQRSUVWXY} F_{QRSU} F_{VWXY} , \tag{3.1.8c}$$

$$0 = \nabla_{[M} F_{NPQR]} , \tag{3.1.8d}$$

但し、fluctuation field の運動方程式において、2 次以上の寄与しかもたらさない項はここでは省略してある。またそれに伴い、metric の運動方程式は $e_M{}^A$ の変分ではなく g_{MN} の変分で与えてある。最後の式は Bianchi identity である。

3.2 Fluctuations

fluctuations:

$$g_{MN} = \mathring{g}_{MN} + h_{MN} , \qquad g^{MN} = \mathring{g}^{MN} + \widetilde{h}^{MN} \tag{3.2.1a}$$

$$\Psi_M = 0 + \psi_M \tag{3.2.1b}$$

$$F_{MNPQ} = \mathring{F}_{MNPQ} + \mathcal{F}_{MNPQ} , \qquad \mathcal{F}_{MNPQ} = 4 \partial_{[M} \mathcal{C}_{NPQ]} \tag{3.2.1c}$$

From now on we omit the circle, which is the symbol of classical background.

other representations:

$$h_{MN} = h_{NM} \qquad \text{(symmetric)} , \tag{3.2.2a}$$

$$\widetilde{h}^{MN} = - g^{MP} g^{NQ} h_{PQ} , \tag{3.2.2b}$$

$$\delta e = \frac{1}{2} e\, g^{MN} h_{MN} , \tag{3.2.2c}$$

$$\delta \Gamma^M_{NP} = \frac{1}{2} g^{MR} \big(\nabla_N h_{PR} + \nabla_P h_{NR} - \nabla_R h_{NP} \big) \qquad \text{(torsion free)} , \tag{3.2.2d}$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{R}_{MN} &= - \frac{1}{2} \Big\{ \nabla_N \nabla_M h_P{}^P - \nabla_N \nabla^P h_{MP} - \nabla_M \nabla^P h_{NP} + \nabla_P \nabla^P h_{MN} \Big\} \\ &\quad - R^Q{}_{MPN} h_Q{}^P + \frac{1}{2} \mathcal{R}_{PN} h_M{}^P + \frac{1}{2} \mathcal{R}_{PM} h_N{}^P \\ &= - \frac{1}{2} \Big\{ \nabla_N \nabla_M h_P{}^P - \nabla_N \nabla^P h_{MP} - \nabla_M \nabla^P h_{NP} \Big\} + \frac{1}{2} \widehat{\Delta} h_{MN} , \end{aligned} \tag{3.2.2e}$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{R}^{MN} &= \widetilde{h}^{MP} g^{NQ} \mathcal{R}_{PQ} + \widetilde{h}^{NQ} g^{MP} \mathcal{R}_{PQ} + g^{MP} g^{NQ} \delta \mathcal{R}_{PQ} \\ &= - h_{RS} g^{MR} g^{PS} g^{NQ} \mathcal{R}_{PQ} - h_{RS} g^{NR} g^{QS} g^{MP} \mathcal{R}_{PQ} + g^{MP} g^{NQ} \delta \mathcal{R}_{PQ} , \end{aligned} \tag{3.2.2f}$$

$$\delta \mathcal{R} = \widetilde{h}^{MN} \mathcal{R}_{MN} + g^{MN} \delta \mathcal{R}_{MN} = - h_{PQ} g^{MP} g^{NQ} \mathcal{R}_{MN} + g^{MN} \delta \mathcal{R}_{MN} . \tag{3.2.2g}$$

ここで $\widehat{\Delta}$ は Lichnerowicz operator と呼ばれるものであり、rank-2 symmetric tensor や 11-dimensional space 上

の 0-form ϕ, 1-form $\omega_M{}^{AB}$, 3-form C_{MNP} に次のように作用する [1]:

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta} h_{MN} &= -\nabla_P \nabla^P h_{MN} - 2R_{MPNQ}\, h^{PQ} + \mathcal{R}_M{}^P\, h_{PN} + \mathcal{R}_N{}^P\, h_{PM} && \text{(3.2.3a)}\\
\widehat{\Delta}\phi &= -\nabla_P \nabla^P \phi && \text{(3.2.3b)}\\
\widehat{\Delta}\omega_M{}^{AB} &= -\nabla_P \nabla^P \omega_M{}^{AB} + \mathcal{R}_M{}^P\, \omega_P{}^{AB} && \text{(3.2.3c)}\\
\widehat{\Delta} C_{MNP} &= -\nabla_Q \nabla^Q C_{MNP} \\
&\quad - 2R_{MQNR}\, C^{QR}{}_P + 2R_{MQPR}\, C^{QR}{}_N - 2R_{NQPR}\, C^{QR}{}_M \\
&\quad + \mathcal{R}_M{}^Q\, C_{QNP} + \mathcal{R}_N{}^Q\, C_{MQP} + \mathcal{R}_P{}^Q\, C_{MNQ} && \text{(3.2.3d)}
\end{aligned}$$

但し、ここでは torsion が入っている場合も考慮してある。torsion free の場合は $\widehat{\Delta} C_{MNP}$ の右辺第 2 行はゼロになる。これらより、classical field equations (3.1.8) から得られる field equations for fluctuation fields は次のように与えられる:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\Big\{ h_{MN}\, \mathcal{R} - h_{PQ}\, g_{MN}\, g^{RP}\, g^{SQ}\, \mathcal{R}_{RS} + g_{MN}\big(\nabla_P \nabla_Q h^{QP} - \nabla_Q \nabla^Q h_P{}^P\big)\Big\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big\{ \nabla_N \nabla_M h_P{}^P - \nabla_N \nabla^P h_{PM} - \nabla_M \nabla^P h_{PN} \Big\} - \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{MN} \\
&\quad - \frac{1}{96} h_{MN}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} - \frac{1}{48}\mathcal{F}_{PQRS}\, g_{MN}\, F^{PQRS} + \frac{1}{24} h^{PU}\, g_{MN}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS} \\
&\quad + \frac{1}{12}\Big\{ \mathcal{F}_{MPQR}\, F_N{}^{PQR} + \mathcal{F}_{NPQR}\, F_M{}^{PQR} \Big\} - \frac{1}{4} h^{PS}\, F_{MPQR}\, F_{NS}{}^{QR} && \text{(3.2.4a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \widehat{\Gamma}^{MNP}\, D_N \psi_P + \frac{1}{96}\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\, F_{PQRS}\, \psi_N \\
&= \widehat{\Gamma}^{MNP}\Big(\partial_N \psi_P - \frac{i}{2}\omega_N{}^{AB}\, \Sigma_{AB}\, \psi_P\Big) + \frac{1}{96}\Big(\widehat{\Gamma}^{MNPQRS} + 12 g^{M[P}\widehat{\Gamma}^{QR} g^{S]N}\Big) F_{PQRS}\, \psi_N && \text{(3.2.4b)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= e\Big\{\frac{1}{2} h_U{}^U\, g^{QR} - h^{QR}\Big\} \nabla_R F_{QMNP} + e\, \nabla^Q \mathcal{F}_{QMNP} \\
&\quad - e\Big\{ F_{SMNP}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) + F_{QSNP} \nabla^Q h_M{}^S + F_{QMSP} \nabla^Q h_N{}^S + F_{QMNS} \nabla^Q h_P{}^S \Big\} \\
&\quad - \frac{1}{576}\, \varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\, \mathcal{F}_{QRSU}\, g_{MZ}\, g_{NK}\, g_{PL}\, F_{VWXY} \\
&\quad - \frac{18}{(144)^2}\, \varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\big(h_{MZ}\, g_{NK}\, g_{PL} + h_{NK}\, g_{MZ}\, g_{PL} + h_{PL}\, g_{MZ}\, g_{NK}\big) F_{QRSU}\, F_{VWXY} && \text{(3.2.4c)}
\end{aligned}$$

$$0 = \nabla_{[M} \mathcal{F}_{NPQR]} = 4\partial_{[M} \partial_N \mathcal{C}_{PQR]} \qquad \text{(3.2.4d)}$$

見易くするために classical background であることを示す circle symbol は省略した。また Freund-Rubin ansatz を課すことで消える項は gray scale にしておいた[1]。また Bianchi identity については、affine connection の対称性 $\Gamma^P_{MN} = \Gamma^P_{NM}$ を用いることで、共変微分にまで格上げできる事を用いた。右辺は自明の式であろう。

これを実際に解く時には、classical equations (3.1.8) を用いると良いだろう。(3.1.8a) より、

$$\mathcal{R} = \frac{1}{144} F_{PQRS}\, F^{PQRS} \qquad \text{(3.2.5a)}$$

[1]Freund-Rubin ansatz を課さないでおけば、この 3 つの field equations は generic である。

$$\mathcal{R}_{MN} \;=\; -\frac{1}{144} g_{MN}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} + \frac{1}{12} F_{MPQR}\, F_N{}^{PQR} \tag{3.2.5b}$$

が得られる。この (3.2.5b) からの揺らぎは

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{R}_{MN} \;&=\; -\frac{1}{2}\Big\{ \nabla_N \nabla_M h_P{}^P - \nabla_N \nabla^P h_{MP} - \nabla_M \nabla^P h_{NP} \Big\} + \frac{1}{2} \widehat{\Delta} h_{MN} \\ &=\; -\frac{1}{144} h_{MN}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} - \frac{1}{72} g_{MN}\, F^{PQRS}\, \mathcal{F}_{PQRS} + \frac{1}{36} h^{PU}\, g_{MN}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS} \\ &\quad + \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{MPQR}\, F_N{}^{PQR} + \mathcal{F}_{NPQR}\, F_M{}^{PQR} \Big) - \frac{1}{4} h^{PU}\, F_{MPQR}\, F_{NU}{}^{QR} \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

となる。(3.2.4a) も (3.2.6) も元々 classical field equation (3.1.8a) から得られたものであるので、どちらを用いても良い。また Duff, Pope [1] などはどうやら (3.2.6) を用いているようである。よってこれ以後、(3.2.4a) の代りにこの (3.2.6) を用いる。

gravitino equation (3.2.4b) も、もう少し計算しやすい表記にしよう:

$$\begin{aligned} 0 \;=\;& \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \psi_P + \frac{1}{96} \widehat{\Gamma}^{MNPQRS} F_{PQRS}\, \psi_N \\ & + \frac{1}{96}\Big\{ g^{MP}\big(\widehat{\Gamma}^{QR} g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS} g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS} g^{QN} \big) - g^{MQ}\big(\widehat{\Gamma}^{PR} g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{PS} g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS} g^{PN} \big) \\ & \quad - g^{MR}\big(\widehat{\Gamma}^{QP} g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS} g^{PN} + \widehat{\Gamma}^{PS} g^{QN} \big) - g^{MS}\big(\widehat{\Gamma}^{QR} g^{PN} - \widehat{\Gamma}^{QP} g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RP} g^{QN} \big) \Big\} F_{PQRS}\, \psi_N \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Chapter 4

Supergravity on PP-wave Background

ここでは Kimura and Yoshida [2] の議論を展開する。この議論の目的は、introduction に記載されているとして、ここでは省略する。なお、[2] とは convention について若干の相違があるため、もう一度計算を立て直す[1]。

[1] もしまとめ直すには時間が掛り過ぎると判断した場合は、[2] の convention をそのまま用いることにする。

4.1 Kowalski-Glikman background

Here we summarize several properties of the maximally supersymmetric pp-wave background. This solution was found by Kowalski-Glikman [6, 7] and often called the KG solution. This is the unique pp-wave type solution preserving maximal supersymmetries. The metric of this background is given by

$$\mathrm{d}s^2 = -2\mathrm{d}x^+\mathrm{d}x^- + G_{++}(\mathrm{d}x^+)^2 + \sum_{I=1}^{9}(\mathrm{d}x^I)^2 \,, \tag{4.1.1a}$$

$$G_{++} = -\Big[\Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2\sum_{\widetilde{I}=1}^{3}(x^{\widetilde{I}})^2 + \Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2\sum_{I'=4}^{9}(x^{I'})^2\Big] \,, \tag{4.1.1b}$$

or

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} G_{++} & -1 & \\ -1 & 0 & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} , \quad g^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ -1 & -G_{++} & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} , \qquad \sqrt{-g} = e = 1 \,, \tag{4.1.2a}$$

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ -1 & 0 & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} , \qquad \eta^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ -1 & 0 & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} , \tag{4.1.2b}$$

$$e_M{}^A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}G_{++} & \\ 0 & 1 & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} , \quad E_A{}^M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}G_{++} & \\ 0 & 1 & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} , \quad i.e., \quad e_+{}^- = -\frac{1}{2}G_{++} \,, etc. \tag{4.1.2c}$$

which is equipped with the constant flux

$$F_{+123} = \mu \neq 0 \,. \tag{4.1.3}$$

ちなみに、tangent space の metric η_{AB} は、light-cone coordinates $x^{\pm}$ を定義する時の weight の選び方に依らない。つまり $x^+ = \frac{1}{2a}(x^0 + x^{\natural})$, $x^- = a(x^0 - x^{\natural})$ とした時、metric η_{AB} の表示は "weight" a には依存しない。

In our consideration the contribution from torsion is not included, i.e., affine connection is symmetric under lower indices: $\Gamma^P_{MN} = \Gamma^P_{NM}$. For the KG metric, the above quantities are written as

$$\Gamma^{\widetilde{I}}_{++} = \Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2 x^{\widetilde{I}} = -\frac{1}{2}\partial^{\widetilde{I}}G_{++} \,, \qquad \Gamma^{I'}_{++} = \Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2 x^{I'} = -\frac{1}{2}\partial^{I'}G_{++} \,, \tag{4.1.4a}$$

$$\Gamma^-_{+\widetilde{I}} = \Gamma^-_{\widetilde{I}+} = \Gamma^{\widetilde{I}}_{++} = \Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2 x^{\widetilde{I}} \,, \qquad \Gamma^-_{+I'} = \Gamma^-_{I'+} = \Gamma^{I'}_{++} = \Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2 x^{I'} \,, \tag{4.1.4b}$$

$$R^{\widetilde{J}}{}_{+\widetilde{I}+} = R_{\widetilde{J}+\widetilde{I}+} = \delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}}\Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2 \,, \qquad R^{J'}{}_{+I'+} = R_{J'+I'+} = \delta_{I'J'}\Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2 \,, \tag{4.1.4c}$$

$$\omega_+{}^{\widetilde{I}-} = -\omega_+{}^{-\widetilde{I}} = -\Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2 x^{\widetilde{I}} \,, \qquad \omega_+{}^{I'-} = -\omega_+{}^{-I'} = -\Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2 x^{I'} \,. \tag{4.1.4d}$$

It should be noted that the scalar curvature vanishes and the Ricci tensor is constant and proportional to μ^2. These are given by

$$\mathcal{R}_{++} = \frac{1}{2}\mu^2 \,, \qquad \mathcal{R} = 0 \,. \tag{4.1.5}$$

4.2 Hamiltonian

Now let us discuss the Hamiltonian and its energy eigenvalue. We need to calculate and solve field equations for fluctuation modes around the KG background (for the KG background, see Appendix 4.1) in the next section. Then we will encounter Klein-Gordon type equations of motion and have to evaluate its energy spectrum.

We shall consider a Klein-Gordon type equation of motion for a field $\phi(x)$:

$$\big(\Box + \alpha\,\mu\,i\partial_{-}\big)\phi(x^{+},x^{-},x^{I}) \;=\; 0\,, \tag{4.2.1}$$

where α is an arbitrary constant and x^{+} is an evolution parameter. The d'Alembertian $\Box$ on the KG background is given by

$$\begin{aligned}\Box \;&=\; -\nabla^{P}\nabla_{P} \;=\; -\partial^{P}\partial_{P} \\ &=\; -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{M}\big(\sqrt{-g}g^{MN}\partial_{N}\big) \;=\; 2\partial_{+}\partial_{-} + G_{++}\cdot(\partial_{-})^{2} - (\partial_{K})^{2}\,. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

The above Klein-Gordon type field equation will appear later as equations of motion of fluctuation modes. Fourier transformed expression of $\phi(x)$

$$\phi(x^{+},x^{-},x^{I}) \;=\; \int\frac{\mathrm{d}p_{-}\mathrm{d}^{9}p_{I}}{\sqrt{(2\pi)^{10}}}\,\mathrm{e}^{i(p_{-}x^{-}+p_{I}x^{I})}\,\widetilde{\phi}(x^{+},p_{-},p_{I})$$

leads to the following expression:

$$0 \;=\; 2p_{-}\,i\partial_{+} - \widetilde{G}_{++}\cdot(p_{-})^{2} + (p_{I})^{2} - \alpha\,\mu\,p_{-}\,, \tag{4.2.3}$$

where $\widetilde{G}_{++}$ is defined as

$$\widetilde{G}_{++} \;\equiv\; \sum_{\widetilde{I}=1}^{3}\Big(\frac{\mu}{3}\Big)^{2}(\partial_{p_{\widetilde{I}}})^{2} + \sum_{I'=4}^{9}\Big(\frac{\mu}{6}\Big)^{2}(\partial_{p_{I'}})^{2}\,. \tag{4.2.4}$$

By rewriting the above equation and $H = i\partial_{+}$, we can obtain the explicit expression of Hamiltonian:

$$H \;=\; \frac{1}{-2p_{-}}\big\{(p_{I})^{2} - \widetilde{G}_{++}\cdot(p_{-})^{2} - \alpha\,\mu\,p_{-}\big\}\,. \tag{4.2.5}$$

The energy spectrum of this Hamiltonian can be derived by using the standard technique of harmonic oscillators. Now we define "creation/annihilation" operators

$$a^{\widetilde{I}} \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{2\widetilde{m}}}\big\{p_{\widetilde{I}} + \widetilde{m}\partial_{p_{\widetilde{I}}}\big\}\,, \qquad \overline{a}^{\widetilde{I}} \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{2\widetilde{m}}}\big\{p_{\widetilde{I}} - \widetilde{m}\partial_{p_{\widetilde{I}}}\big\}\,, \qquad \widetilde{m} \;\equiv\; -\frac{1}{3}\mu\,p_{-}\,, \tag{4.2.6a}$$

$$a^{I'} \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{2m'}}\big\{p_{I'} + m'\partial_{p_{I'}}\big\}\,, \qquad \overline{a}^{I'} \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{2m'}}\big\{p_{I'} - m'\partial_{p_{I'}}\big\}\,, \qquad m' \;\equiv\; -\frac{1}{6}\mu\,p_{-}\,, \tag{4.2.6b}$$

whose commutation relations are represented by

$$[a^{\widetilde{I}},\overline{a}^{\widetilde{J}}] \;=\; \delta^{\widetilde{I}\widetilde{J}}\,, \qquad [a^{I'},\overline{a}^{J'}] \;=\; \delta^{I'J'}\,, \qquad [a^{\widetilde{I}},\overline{a}^{J'}] \;=\; [a^{I'},\overline{a}^{\widetilde{J}}] \;=\; 0\,. \tag{4.2.7}$$

Thus we express the Hamiltonian in terms of the above oscillators:

$$H \;=\; \frac{1}{3}\mu\sum_{\widetilde{I}}\overline{a}^{\widetilde{I}}a^{\widetilde{I}} + \frac{1}{6}\mu\sum_{I'}\overline{a}^{I'}a^{I'} + \frac{1}{2}\mu\,(2+\alpha)\,. \tag{4.2.8}$$

Note that the last term implies the zero-mode energy E_0 of the system, which is represented by

$$E_0 \;=\; \frac{1}{2}\mu\,\mathcal{E}_0(\phi)\,, \qquad \mathcal{E}_0(\phi) \;=\; 2+\alpha\,. \tag{4.2.9}$$

In the next section, we will use $\mathcal{E}_0$ to evaluate the energy of the zero-modes of fluctuation fields.

4.3 Light-cone Gauge Fixing

$$h_{-M} \;=\; 0 \qquad h^{+M} \;=\; 0 \qquad \mathcal{C}_{-MN} \;=\; 0 \qquad \psi_- \;=\; 0 \tag{4.3.1}$$

途中、よく登場する複雑な項の計算をまとめておこう：

$$A_- \;=\; g_{-M}A^M \;=\; g_{-+}A^+ \;=\; -A^+ \tag{4.3.2a}$$

$$A_+ \;=\; g_{+M}A^M \;=\; g_{++}A^+ + g_{+-}A^- \;=\; G_{++}A^+ - A^- \tag{4.3.2b}$$

$$F^{+123} \;=\; -F_{-123} \;=\; 0 \tag{4.3.2c}$$

$$F^{-123} \;=\; -F_{+123} - G_{++}F_{-123} \;=\; -\mu \tag{4.3.2d}$$

$$F_{PQRS}\,F^{PQRS} \;=\; 4!\,F_{+123}\,F^{+123} \;=\; -4!\,F_{+123}\,F_{-123} \;=\; 0 \tag{4.3.2e}$$

$$\begin{aligned} F^{PQRS}\mathcal{F}_{PQRS} \;&=\; -4!\,\mu\,\mathcal{F}_{-123} \;=\; -4!\mu\,4\partial_{[-}\mathcal{C}_{123]} \;=\; -4!\mu\,\frac{4\cdot 3!}{4!}\partial_-\mathcal{C}_{123} \\ &=\; -24\mu\,\partial_-\mathcal{C}_{123} \end{aligned} \tag{4.3.2f}$$

$$\mathcal{F}_{-PQR} \;=\; 4\partial_{[-}\mathcal{C}_{PQR]} \;=\; \frac{4\cdot 3!}{4!}\partial_-\mathcal{C}_{PQR} \;=\; \partial_-\mathcal{C}_{PQR} \tag{4.3.2g}$$

$$\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}}\,\epsilon^{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}} \;=\; 3! \;=\; 6 \tag{4.3.2h}$$

$$\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}}\,\epsilon^{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{L}} \;=\; 2!\delta^{\widetilde{L}}_{\widetilde{K}} \tag{4.3.2i}$$

$$\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}}\,\epsilon^{\widetilde{I}\widetilde{L}\widetilde{M}} \;=\; \delta^{\widetilde{L}}_{\widetilde{J}}\,\delta^{\widetilde{M}}_{\widetilde{K}} - \delta^{\widetilde{M}}_{\widetilde{J}}\,\delta^{\widetilde{L}}_{\widetilde{K}} \tag{4.3.2j}$$

$$g^{PQ}\Gamma^S_{PQ} \;=\; 0 \tag{4.3.3}$$

$$\begin{aligned} \nabla^Q\mathcal{F}_{Q+-I} \;&=\; g^{QR}\big\{\partial_R\mathcal{F}_{-Q+I} - \Gamma^S_{R-}\mathcal{F}_{SQ+I} - \Gamma^S_{RQ}\mathcal{F}_{-S+I} - \Gamma^S_{R+}\mathcal{F}_{-QSI} - \Gamma^S_{RI}\mathcal{F}_{-Q+S}\big\} \\ &=\; g^{QR}\partial_R\partial_-\mathcal{C}_{Q+I} \;=\; \partial_-(g^{RQ}\partial_R\mathcal{C}_{Q+I}) - \partial_-(g^{RQ})\partial_R\mathcal{C}_{Q+I} \\ &=\; \partial_-\partial^Q\mathcal{C}_{Q+I} \end{aligned} \tag{4.3.4a}$$

$$\begin{aligned} \nabla^Q\mathcal{F}_{Q-IJ} \;&=\; -g^{QR}\big\{\partial_R\mathcal{F}_{-QIJ} - \Gamma^S_{R-}\mathcal{F}_{SQIJ} - \Gamma^S_{RQ}\mathcal{F}_{-SIJ} - \Gamma^S_{RI}\mathcal{F}_{-QSJ} - \Gamma^S_{RJ}\mathcal{F}_{-QIS}\big\} \\ &=\; -\partial_-\partial^Q\mathcal{C}_{QIJ} \end{aligned} \tag{4.3.4b}$$

$$\begin{aligned} \nabla^Q\mathcal{F}_{QIJK} \;&=\; g^{QR}\big\{\partial_R\mathcal{F}_{QIJK} - \Gamma^S_{RQ}\mathcal{F}_{SIJK} - \Gamma^S_{RI}\mathcal{F}_{QSJK} - \Gamma^S_{RJ}\mathcal{F}_{QISK} - \Gamma^S_{RK}\mathcal{F}_{QIJS}\big\} \\ &=\; \partial^Q\mathcal{F}_{QIJK} \end{aligned} \tag{4.3.4c}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^Q \mathcal{F}_{Q+IJ} &= g^{QR}\big\{\partial_R \mathcal{F}_{Q+IJ} - \Gamma^S_{RQ}\mathcal{F}_{S+IJ} - \Gamma^S_{R+}\mathcal{F}_{QSIJ} - \Gamma^S_{RI}\mathcal{F}_{Q+SJ} - \Gamma^S_{RJ}\mathcal{F}_{Q+IS}\big\} \\
&= \partial^Q \mathcal{F}_{Q+IJ} + 2\Gamma^K_{++}\mathcal{F}_{-KIJ} \\
&= \partial^Q \mathcal{F}_{Q+IJ} - \partial_K G_{++}\partial_- \mathcal{C}_{KIJ} \qquad (4.3.4d)\\
\nabla^P h_{+P} &= g^{PQ}\big\{\partial_Q h_{+P} - \Gamma^S_{Q+}h_{SP} - \Gamma^S_{QP}h_{+S}\big\} \;=\; \partial^P h_{+P} \qquad (4.3.4e)\\
\nabla^+ h_{+I} &= -\nabla_- h_{+I} \;=\; -\partial_- h_{+I} \;=\; \partial^+ h_{+I} \qquad (4.3.4f)\\
\nabla^P h_{PI} &= g^{PQ}\nabla_Q h_{PI} \;=\; g^{PQ}\big\{\partial_Q h_{PI} - \Gamma^S_{QP}h_{SI} - \Gamma^S_{QI}h_{PS}\big\} \;=\; \partial^P h_{PI} \qquad (4.3.4g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{96}\Big\{g^{-P}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS}g^{QN}\big) - g^{-Q}\big(\widehat{\Gamma}^{PR}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{PS}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS}g^{PN}\big) \\
&\qquad - g^{-R}\big(\widehat{\Gamma}^{QP}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS}g^{PN} + \widehat{\Gamma}^{PS}g^{QN}\big) - g^{-S}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{PN} - \widehat{\Gamma}^{QP}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RP}g^{QN}\big)\Big\}F_{PQRS}\,\psi_N \\
&= +\frac{1}{24}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS}g^{QN}\big)F_{+QRS}\,\psi_N \\
&= \frac{1}{24}\big(\widehat{\Gamma}^{\tilde{I}\tilde{J}}g^{\tilde{K}N} - \widehat{\Gamma}^{\tilde{I}\tilde{K}}g^{\tilde{J}N} + \widehat{\Gamma}^{\tilde{J}\tilde{K}}g^{\tilde{I}N}\big)F_{+\tilde{I}\tilde{J}\tilde{K}}\,\psi_N \\
&= \frac{1}{24}\mu\,\epsilon_{\tilde{I}\tilde{J}\tilde{K}}\big(\widehat{\Gamma}_{\tilde{I}\tilde{J}}\,\psi_{\tilde{K}} - \widehat{\Gamma}_{\tilde{I}\tilde{K}}\,\psi_{\tilde{J}} + \widehat{\Gamma}_{\tilde{J}\tilde{K}}\,\psi_{\tilde{I}}\big) \\
&= \frac{1}{8}\mu\,\epsilon_{\tilde{I}\tilde{J}\tilde{K}}\,\widehat{\Gamma}_{\tilde{I}\tilde{J}}\,\psi_{\tilde{K}} \qquad (4.3.5a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{96}\Big\{g^{\tilde{I}P}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS}g^{QN}\big) - g^{\tilde{I}Q}\big(\widehat{\Gamma}^{PR}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{PS}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS}g^{PN}\big) \\
&\qquad - g^{\tilde{I}R}\big(\widehat{\Gamma}^{QP}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS}g^{PN} + \widehat{\Gamma}^{PS}g^{QN}\big) - g^{\tilde{I}S}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{PN} - \widehat{\Gamma}^{QP}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RP}g^{QN}\big)\Big\}F_{PQRS}\,\psi_N \\
&= -\frac{1}{24}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{SN}F_{\tilde{I}QRS}\,\psi_N - \widehat{\Gamma}^{QS}g^{RN}F_{\tilde{I}QRS}\,\psi_N + \widehat{\Gamma}^{RS}g^{QN}F_{\tilde{I}QRS}\,\psi_N\big) \\
&= -\frac{1}{24}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}F_{\tilde{I}QR\tilde{L}}\,\psi_{\tilde{L}} - \widehat{\Gamma}^{QS}F_{\tilde{I}Q\tilde{L}S}\,\psi_{\tilde{L}} + \widehat{\Gamma}^{RS}F_{\tilde{I}\tilde{L}RS}\,\psi_{\tilde{L}}\big) \\
&= -\frac{1}{12}\big(\widehat{\Gamma}^{+\tilde{K}}F_{\tilde{I}+\tilde{K}\tilde{L}}\,\psi_{\tilde{L}} - \widehat{\Gamma}^{+\tilde{K}}F_{\tilde{I}+\tilde{L}\tilde{K}}\,\psi_{\tilde{L}} + \widehat{\Gamma}^{\tilde{K}+}F_{\tilde{I}\tilde{L}\tilde{K}+}\,\psi_{\tilde{L}}\big) \\
&= \frac{1}{4}\mu\,\widehat{\Gamma}^{+\tilde{J}}\epsilon_{\tilde{I}\tilde{J}\tilde{K}}\,\psi_{\tilde{K}} \\
&= -\frac{1}{4}\mu\,\widehat{\Gamma}^{+123}\big(\delta_{\tilde{I}\tilde{J}} - \widehat{\Gamma}_{\tilde{I}}\widehat{\Gamma}_{\tilde{J}}\big)\psi_{\tilde{J}} \qquad (4.3.5b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\widehat{\Gamma}^{+123}\widehat{\Gamma}_{I'} \;=\; \widehat{\Gamma}^{+123} \qquad \widehat{\Gamma}^{+123I'}\widehat{\Gamma}_{J'} \;=\; \widehat{\Gamma}^{+123I'J'} + \delta_{I'J'}\widehat{\Gamma}^{+123} \\
\therefore\quad &\widehat{\Gamma}^{+123I'J'} \;=\; -\widehat{\Gamma}^{+123}\big(\delta_{I'J'} - \widehat{\Gamma}_{I'}\widehat{\Gamma}_{J'}\big) \qquad (4.3.5c)
\end{aligned}$$

4.4 Field Equations for Fluctuations on the PP-wave Background

Here we write the field equations for fluctuation fields h_{MN}, ψ_M and $\mathcal{C}_{MNP}$ on the KG solution (4.1.1) and (4.1.4) under the light-cone gauge-fixing condition (4.3.1).

- Since field equation for fluctuation h_{MN} (3.2.6) has two uncontracted indices, we obtain six equations:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{++} &= -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_+\nabla_+ h_P{}^P - \nabla_+\nabla^P h_{+P} - \nabla_+\nabla^P h_{+P}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{++} \\
&= -\frac{1}{144} h_{++}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} - \frac{1}{72} g_{++}\, F^{PQRS}\, \mathcal{F}_{PQRS} + \frac{1}{36} h^{PU}\, g_{++}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS} \\
&\quad + \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{+PQR}\, F_+{}^{PQR} + \mathcal{F}_{+PQR}\, F_+{}^{PQR}\Big) - \frac{1}{4} h^{PU}\, F_{+PQR}\, F_{+U}{}^{QR} \qquad (4.4.1a) \\
\delta\mathcal{R}_{+-} &= -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_-\nabla_+ h_P{}^P - \nabla_-\nabla^P h_{+P} - \nabla_+\nabla^P h_{-P}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{+-} \\
&= -\frac{1}{144} h_{+-}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} - \frac{1}{72} g_{+-}\, F^{PQRS}\, \mathcal{F}_{PQRS} + \frac{1}{36} h^{PU}\, g_{+-}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS} \\
&\quad + \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{+PQR}\, F_-{}^{PQR} + \mathcal{F}_{-PQR}\, F_+{}^{PQR}\Big) - \frac{1}{4} h^{PU}\, F_{+PQR}\, F_{-U}{}^{QR} \qquad (4.4.1b) \\
\delta\mathcal{R}_{+\tilde{I}} &= -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_{\tilde{I}}\nabla_+ h_P{}^P - \nabla_{\tilde{I}}\nabla^P h_{+P} - \nabla_+\nabla^P h_{\tilde{I}P}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{+\tilde{I}} \\
&= -\frac{1}{144} h_{+\tilde{I}}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} - \frac{1}{72} g_{+\tilde{I}}\, F^{PQRS}\, \mathcal{F}_{PQRS} + \frac{1}{36} h^{PU}\, g_{+\tilde{I}}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS} \\
&\quad + \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{+PQR}\, F_{\tilde{I}}{}^{PQR} + \mathcal{F}_{\tilde{I}PQR}\, F_+{}^{PQR}\Big) - \frac{1}{4} h^{PU}\, F_{+PQR}\, F_{\tilde{I}U}{}^{QR} \qquad (4.4.1c) \\
\delta\mathcal{R}_{+I'} &= -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_{I'}\nabla_+ h_P{}^P - \nabla_{I'}\nabla^P h_{+P} - \nabla_+\nabla^P h_{I'P}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{+I'} \\
&= -\frac{1}{144} h_{+I'}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} - \frac{1}{72} g_{+I'}\, F^{PQRS}\, \mathcal{F}_{PQRS} + \frac{1}{36} h^{PU}\, g_{+I'}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS} \\
&\quad + \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{+PQR}\, F_{I'}{}^{PQR} + \mathcal{F}_{I'PQR}\, F_+{}^{PQR}\Big) - \frac{1}{4} h^{PU}\, F_{+PQR}\, F_{I'U}{}^{QR} \qquad (4.4.1d) \\
\delta\mathcal{R}_{--} &= -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_-\nabla_- h_P{}^P - \nabla_-\nabla^P h_{-P} - \nabla_-\nabla^P h_{-P}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{--} \\
&= -\frac{1}{144} h_{--}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} - \frac{1}{72} g_{--}\, F^{PQRS}\, \mathcal{F}_{PQRS} + \frac{1}{36} h^{PU}\, g_{--}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS} \\
&\quad + \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{-PQR}\, F_-{}^{PQR} + \mathcal{F}_{-PQR}\, F_-{}^{PQR}\Big) - \frac{1}{4} h^{PU}\, F_{-PQR}\, F_{-U}{}^{QR} \qquad (4.4.1e) \\
\delta\mathcal{R}_{-\tilde{I}} &= -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_{\tilde{I}}\nabla_- h_P{}^P - \nabla_{\tilde{I}}\nabla^P h_{-P} - \nabla_-\nabla^P h_{\tilde{I}P}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{-\tilde{I}} \\
&= -\frac{1}{144} h_{-\tilde{I}}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} - \frac{1}{72} g_{-\tilde{I}}\, F^{PQRS}\, \mathcal{F}_{PQRS} + \frac{1}{36} h^{PU}\, g_{-\tilde{I}}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS} \\
&\quad + \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{-PQR}\, F_{\tilde{I}}{}^{PQR} + \mathcal{F}_{\tilde{I}PQR}\, F_-{}^{PQR}\Big) - \frac{1}{4} h^{PU}\, F_{-PQR}\, F_{\tilde{I}U}{}^{QR} \qquad (4.4.1f) \\
\delta\mathcal{R}_{-I'} &= -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_{I'}\nabla_- h_P{}^P - \nabla_{I'}\nabla^P h_{-P} - \nabla_-\nabla^P h_{I'P}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{-I'} \\
&= -\frac{1}{144} h_{-I'}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} - \frac{1}{72} g_{-I'}\, F^{PQRS}\, \mathcal{F}_{PQRS} + \frac{1}{36} h^{PU}\, g_{-I'}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS} \\
&\quad + \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{-PQR}\, F_{I'}{}^{PQR} + \mathcal{F}_{I'PQR}\, F_-{}^{PQR}\Big) - \frac{1}{4} h^{PU}\, F_{-PQR}\, F_{I'U}{}^{QR} \qquad (4.4.1g) \\
\delta\mathcal{R}_{\tilde{I}\tilde{J}} &= -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_{\tilde{J}}\nabla_{\tilde{I}} h_P{}^P - \nabla_{\tilde{J}}\nabla^P h_{\tilde{I}P} - \nabla_{\tilde{I}}\nabla^P h_{\tilde{J}P}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{\tilde{I}\tilde{J}} \\
&= -\frac{1}{144} h_{\tilde{I}\tilde{J}}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} - \frac{1}{72} g_{\tilde{I}\tilde{J}}\, F^{PQRS}\, \mathcal{F}_{PQRS} + \frac{1}{36} h^{PU}\, g_{\tilde{I}\tilde{J}}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS} \\
&\quad + \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{\tilde{I}PQR}\, F_{\tilde{J}}{}^{PQR} + \mathcal{F}_{\tilde{J}PQR}\, F_{\tilde{I}}{}^{PQR}\Big) - \frac{1}{4} h^{PU}\, F_{\tilde{I}PQR}\, F_{\tilde{J}U}{}^{QR} \qquad (4.4.1h) \\
\delta\mathcal{R}_{\tilde{I}J'} &= -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_{J'}\nabla_{\tilde{I}} h_P{}^P - \nabla_{J'}\nabla^P h_{\tilde{I}P} - \nabla_{\tilde{I}}\nabla^P h_{J'P}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{\tilde{I}J'} \\
&= -\frac{1}{144} h_{\tilde{I}J'}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} - \frac{1}{72} g_{\tilde{I}J'}\, F^{PQRS}\, \mathcal{F}_{PQRS} + \frac{1}{36} h^{PU}\, g_{\tilde{I}J'}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{\tilde{I}PQR}\,F_{J'}{}^{PQR}+\mathcal{F}_{J'PQR}\,F_{\tilde{I}}{}^{PQR}\Big)-\frac{1}{4}h^{PU}\,F_{\tilde{I}PQR}\,F_{J'U}{}^{QR} \qquad (4.4.1i)\\
\delta\mathcal{R}_{I'J'} \;&=\; -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_{J'}\nabla_{I'}h_P{}^P-\nabla_{J'}\nabla^P h_{I'P}-\nabla_{I'}\nabla^P h_{J'P}\Big\}+\frac{1}{2}\widehat{\Delta}h_{I'J'}\\
&=\; -\frac{1}{144}h_{I'J'}\,F_{PQRS}\,F^{PQRS}-\frac{1}{72}g_{I'J'}\,F^{PQRS}\,\mathcal{F}_{PQRS}+\frac{1}{36}h^{PU}\,g_{I'J'}\,F_{PQRS}\,F_U{}^{QRS}\\
&+\frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{I'PQR}\,F_{J'}{}^{PQR}+\mathcal{F}_{J'PQR}\,F_{I'}{}^{PQR}\Big)-\frac{1}{4}h^{PU}\,F_{I'PQR}\,F_{J'U}{}^{QR} \qquad (4.4.1j)
\end{aligned}
$$

- Field equation for fluctuation ψ_M (3.2.4b) has one uncontracted indices. So we obtain four equations:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& \widehat{\Gamma}^{+NP}D_N\psi_P+\frac{1}{96}\widehat{\Gamma}^{+NPQRS}F_{PQRS}\,\psi_N\\
&+\frac{1}{96}\Big\{g^{+P}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{SN}-\widehat{\Gamma}^{QS}g^{RN}+\widehat{\Gamma}^{RS}g^{QN}\big)-g^{+Q}\big(\widehat{\Gamma}^{PR}g^{SN}-\widehat{\Gamma}^{PS}g^{RN}+\widehat{\Gamma}^{RS}g^{PN}\big)\\
&\quad -g^{+R}\big(\widehat{\Gamma}^{QP}g^{SN}-\widehat{\Gamma}^{QS}g^{PN}+\widehat{\Gamma}^{PS}g^{QN}\big)-g^{+S}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{PN}-\widehat{\Gamma}^{QP}g^{RN}+\widehat{\Gamma}^{RP}g^{QN}\big)\Big\}F_{PQRS}\,\psi_N
\end{aligned}
$$
(4.4.2a)

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& \widehat{\Gamma}^{-NP}D_N\psi_P+\frac{1}{96}\widehat{\Gamma}^{-NPQRS}F_{PQRS}\,\psi_N\\
&+\frac{1}{96}\Big\{g^{-P}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{SN}-\widehat{\Gamma}^{QS}g^{RN}+\widehat{\Gamma}^{RS}g^{QN}\big)-g^{-Q}\big(\widehat{\Gamma}^{PR}g^{SN}-\widehat{\Gamma}^{PS}g^{RN}+\widehat{\Gamma}^{RS}g^{PN}\big)\\
&\quad -g^{-R}\big(\widehat{\Gamma}^{QP}g^{SN}-\widehat{\Gamma}^{QS}g^{PN}+\widehat{\Gamma}^{PS}g^{QN}\big)-g^{-S}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{PN}-\widehat{\Gamma}^{QP}g^{RN}+\widehat{\Gamma}^{RP}g^{QN}\big)\Big\}F_{PQRS}\,\psi_N
\end{aligned}
$$
(4.4.2b)

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& \widehat{\Gamma}^{\tilde{I}NP}D_N\psi_P+\frac{1}{96}\widehat{\Gamma}^{\tilde{I}NPQRS}F_{PQRS}\,\psi_N\\
&+\frac{1}{96}\Big\{g^{\tilde{I}P}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{SN}-\widehat{\Gamma}^{QS}g^{RN}+\widehat{\Gamma}^{RS}g^{QN}\big)-g^{\tilde{I}Q}\big(\widehat{\Gamma}^{PR}g^{SN}-\widehat{\Gamma}^{PS}g^{RN}+\widehat{\Gamma}^{RS}g^{PN}\big)\\
&\quad -g^{\tilde{I}R}\big(\widehat{\Gamma}^{QP}g^{SN}-\widehat{\Gamma}^{QS}g^{PN}+\widehat{\Gamma}^{PS}g^{QN}\big)-g^{\tilde{I}S}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{PN}-\widehat{\Gamma}^{QP}g^{RN}+\widehat{\Gamma}^{RP}g^{QN}\big)\Big\}F_{PQRS}\,\psi_N
\end{aligned}
$$
(4.4.2c)

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& \widehat{\Gamma}^{I'NP}D_N\psi_P+\frac{1}{96}\widehat{\Gamma}^{I'NPQRS}F_{PQRS}\,\psi_N\\
&+\frac{1}{96}\Big\{g^{I'P}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{SN}-\widehat{\Gamma}^{QS}g^{RN}+\widehat{\Gamma}^{RS}g^{QN}\big)-g^{I'Q}\big(\widehat{\Gamma}^{PR}g^{SN}-\widehat{\Gamma}^{PS}g^{RN}+\widehat{\Gamma}^{RS}g^{PN}\big)\\
&\quad -g^{I'R}\big(\widehat{\Gamma}^{QP}g^{SN}-\widehat{\Gamma}^{QS}g^{PN}+\widehat{\Gamma}^{PS}g^{QN}\big)-g^{I'S}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{PN}-\widehat{\Gamma}^{QP}g^{RN}+\widehat{\Gamma}^{RP}g^{QN}\big)\Big\}F_{PQRS}\,\psi_N
\end{aligned}
$$
(4.4.2d)

- Field equation for fluctuation $\mathcal{C}_{MNP}$ (3.2.4c) has three uncontracted indices.

  – $M=+$ case:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& \nabla^Q\mathcal{F}_{Q+-\tilde{I}}\\
&-F_{S+-\tilde{I}}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S-\frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big)-F_{QS-\tilde{I}}\nabla^Q h_+{}^S-F_{Q+S\tilde{I}}\nabla^Q h_-{}^S-F_{Q+-S}\nabla^Q h_{\tilde{I}}{}^S\\
&-\frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{+Z}\,g_{-K}\,g_{\tilde{I}L}\,F_{VWXY} \qquad (4.4.3a)\\
0 \;=\;& \nabla^Q\mathcal{F}_{Q+-I'}\\
&-F_{S+-I'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S-\frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big)-F_{QS-I'}\nabla^Q h_+{}^S-F_{Q+SI'}\nabla^Q h_-{}^S-F_{Q+-S}\nabla^Q h_{I'}{}^S
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\,\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{+Z}\,g_{-K}\,g_{I'L}\,F_{VWXY} && \text{(4.4.3b)}\\
0 &= \nabla^Q \mathcal{F}_{Q+\widetilde{I}\widetilde{J}}\\
&\quad - F_{S+\widetilde{I}\widetilde{J}}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QS\widetilde{I}\widetilde{J}}\nabla^Q h_+{}^S - F_{Q+S\widetilde{J}}\nabla^Q h_{\widetilde{I}}{}^S - F_{Q+\widetilde{I}S}\nabla^Q h_{\widetilde{J}}{}^S\\
&\quad - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\,\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{+Z}\,g_{\widetilde{I}K}\,g_{\widetilde{J}L}\,F_{VWXY} && \text{(4.4.3c)}\\
0 &= \nabla^Q \mathcal{F}_{Q+\widetilde{I}J'}\\
&\quad - F_{S+\widetilde{I}J'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QS\widetilde{I}J'}\nabla^Q h_+{}^S - F_{Q+SJ'}\nabla^Q h_{\widetilde{I}}{}^S - F_{Q+\widetilde{I}S}\nabla^Q h_{J'}{}^S\\
&\quad - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\,\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{+Z}\,g_{\widetilde{I}K}\,g_{J'L}\,F_{VWXY} && \text{(4.4.3d)}\\
0 &= \nabla^Q \mathcal{F}_{Q+I'J'}\\
&\quad - F_{S+I'J'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QSI'J'}\nabla^Q h_+{}^S - F_{Q+SJ'}\nabla^Q h_{I'}{}^S - F_{Q+I'S}\nabla^Q h_{J'}{}^S\\
&\quad - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\,\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{+Z}\,g_{I'K}\,g_{J'L}\,F_{VWXY} && \text{(4.4.3e)}
\end{aligned}
$$

– $M = -$ case:

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla^Q \mathcal{F}_{Q-\widetilde{I}\widetilde{J}}\\
&\quad - F_{S-\widetilde{I}\widetilde{J}}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QS\widetilde{I}\widetilde{J}}\nabla^Q h_-{}^S - F_{Q-S\widetilde{J}}\nabla^Q h_{\widetilde{I}}{}^S - F_{Q-\widetilde{I}S}\nabla^Q h_{\widetilde{J}}{}^S\\
&\quad - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\,\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{-Z}\,g_{\widetilde{I}K}\,g_{\widetilde{J}L}\,F_{VWXY} && \text{(4.4.4a)}\\
0 &= \nabla^Q \mathcal{F}_{Q-\widetilde{I}J'}\\
&\quad - F_{S-\widetilde{I}J'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QS\widetilde{I}J'}\nabla^Q h_-{}^S - F_{Q-SJ'}\nabla^Q h_{\widetilde{I}}{}^S - F_{Q-\widetilde{I}S}\nabla^Q h_{J'}{}^S\\
&\quad - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\,\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{-Z}\,g_{\widetilde{I}K}\,g_{J'L}\,F_{VWXY} && \text{(4.4.4b)}\\
0 &= \nabla^Q \mathcal{F}_{Q-I'J'}\\
&\quad - F_{S-I'J'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QSI'J'}\nabla^Q h_-{}^S - F_{Q-SJ'}\nabla^Q h_{I'}{}^S - F_{Q-I'S}\nabla^Q h_{J'}{}^S\\
&\quad - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\,\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{-Z}\,g_{I'K}\,g_{J'L}\,F_{VWXY} && \text{(4.4.4c)}
\end{aligned}
$$

– $M = I$ case:

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla^Q \mathcal{F}_{Q\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}}\\
&\quad - F_{S\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QS\widetilde{J}\widetilde{K}}\nabla^Q h_{\widetilde{I}}{}^S - F_{Q\widetilde{I}S\widetilde{K}}\nabla^Q h_{\widetilde{J}}{}^S - F_{Q\widetilde{I}\widetilde{J}S}\nabla^Q h_{\widetilde{K}}{}^S\\
&\quad - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\,\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{\widetilde{I}Z}\,g_{\widetilde{J}K}\,g_{\widetilde{K}L}\,F_{VWXY} && \text{(4.4.5a)}\\
0 &= \nabla^Q \mathcal{F}_{Q\widetilde{I}\widetilde{J}K'}\\
&\quad - F_{S\widetilde{I}\widetilde{J}K'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QS\widetilde{J}K'}\nabla^Q h_{\widetilde{I}}{}^S - F_{Q\widetilde{I}SK'}\nabla^Q h_{\widetilde{J}}{}^S - F_{Q\widetilde{I}\widetilde{J}S}\nabla^Q h_{K'}{}^S\\
&\quad - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\,\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{\widetilde{I}Z}\,g_{\widetilde{J}K}\,g_{K'L}\,F_{VWXY} && \text{(4.4.5b)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla^Q \mathcal{F}_{Q\widetilde{I}J'K'} \\
&\quad - F_{S\widetilde{I}J'K'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QSJ'K'}\nabla^Q h_{\widetilde{I}}{}^S - F_{Q\widetilde{I}SK'}\nabla^Q h_{J'}{}^S - F_{Q\widetilde{I}J'S}\nabla^Q h_{K'}{}^S \\
&\quad - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{\widetilde{I}Z}\,g_{J'K}\,g_{K'L}\,F_{VWXY} && (4.4.5c) \\
0 &= \nabla^Q \mathcal{F}_{QI'J'K'} \\
&\quad - F_{SI'J'K'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QSJ'K'}\nabla^Q h_{I'}{}^S - F_{QI'SK'}\nabla^Q h_{J'}{}^S - F_{QI'J'S}\nabla^Q h_{K'}{}^S \\
&\quad - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{I'Z}\,g_{J'K}\,g_{K'L}\,F_{VWXY} && (4.4.5d)
\end{aligned}$$

light-cone gauge, Freund-Rubin ansatz を代入した後:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\Big\{\nabla_+\nabla_+ h_P{}^P - \nabla_+\nabla^P h_{+P} - \nabla_+\nabla^P h_{+P} - \Box\, h_{++}\Big\} - \Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2 h_{\widetilde{K}\widetilde{K}} - \Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2 h_{L'L'} \\
&\quad + \frac{1}{3}\mu\, G_{++}\,\partial_-\mathcal{C}_{123} + \mu\,\mathcal{F}_{+123} - \frac{1}{2}\mu^2\, h_{\widetilde{L}\widetilde{L}} && (4.4.6a) \\
0 &= \Big\{\partial_-\partial_+ h_P{}^P - \partial_-\partial^P h_{+P}\Big\} + \frac{1}{3}\mu\,\partial_-\mathcal{C}_{123} && (4.4.6b) \\
0 &= \Big\{\nabla_{\widetilde{I}}\nabla_+ h_P{}^P - \partial_{\widetilde{I}}\partial^P h_{+P} - \partial_+\partial^P h_{\widetilde{I}P} - \Box\, h_{+\widetilde{I}}\Big\} - \frac{1}{2}\mu\,\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}}\,\partial_-\mathcal{C}_{+\widetilde{J}\widetilde{K}} && (4.4.6c) \\
0 &= \Big\{\nabla_{I'}\nabla_+ h_P{}^P - \partial_{I'}\partial^P h_{+P} - \partial_+\partial^P h_{I'P} - \Box\, h_{+I'}\Big\} + \frac{1}{6}\mu\,\epsilon_{\widetilde{J}\widetilde{K}\widetilde{L}}\mathcal{F}_{I'\widetilde{J}\widetilde{K}\widetilde{L}} && (4.4.6d) \\
0 &= \partial_-\partial_- h_P{}^P && (4.4.6e) \\
0 &= \partial_I\partial_- h_P{}^P - \partial_-\partial^P h_{IP} && (4.4.6f) \\
0 &= \Big\{\partial_{\widetilde{J}}\partial_{\widetilde{I}} h_P{}^P - \partial_{\widetilde{J}}\partial^P h_{\widetilde{I}P} - \partial_{\widetilde{I}}\partial^P h_{\widetilde{J}P} - \Box\, h_{\widetilde{I}\widetilde{J}}\Big\} - \frac{4}{3}\mu\,\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}}\,\partial_-\mathcal{C}_{123} && (4.4.6g) \\
0 &= \Big\{\partial_{J'}\partial_{\widetilde{I}} h_P{}^P - \partial_{J'}\partial^P h_{\widetilde{I}P} - \partial_{\widetilde{I}}\partial^P h_{J'P} - \Box\, h_{\widetilde{I}J'}\Big\} - \frac{1}{2}\mu\,\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{K}\widetilde{L}}\,\partial_-\mathcal{C}_{J'\widetilde{K}\widetilde{L}} && (4.4.6h) \\
0 &= \Big\{\partial_{J'}\partial_{I'} h_P{}^P - \partial_{J'}\partial^P h_{I'P} - \partial_{I'}\partial^P h_{J'P} - \Box\, h_{I'J'}\Big\} + \frac{2}{3}\mu\,\delta_{I'J'}\,\partial_-\mathcal{C}_{123} && (4.4.6i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \widehat{\Gamma}^{+NP} D_N\psi_P && (4.4.7a) \\
0 &= \widehat{\Gamma}^{-NP} D_N\psi_P - \frac{1}{4}\mu\,\widehat{\Gamma}^{+-123I'}\,\psi_{I'} - \frac{1}{8}\mu\,\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}\widetilde{J}}\psi_{\widetilde{K}} && (4.4.7b) \\
0 &= \widehat{\Gamma}^{\widetilde{I}NP} D_N\psi_P + \frac{1}{4}\mu\,\widehat{\Gamma}^{+123}\big(\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}} - \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{J}}\big)\psi_{\widetilde{J}} && (4.4.7c) \\
0 &= \widehat{\Gamma}^{I'NP} D_N\psi_P - \frac{1}{4}\mu\,\widehat{\Gamma}^{+123}\big(\delta_{I'J'} - \widehat{\Gamma}_{I'}\widehat{\Gamma}_{J'}\big)\psi_{J'} && (4.4.7d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_-\partial^Q\mathcal{C}_{Q+I} && (4.4.8a) \\
0 &= \partial^Q\mathcal{F}_{Q+\widetilde{I}\widetilde{J}} - \partial_K G_{++}\partial_-\mathcal{C}_{K\widetilde{I}\widetilde{J}} \\
&\quad + \mu\,\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{L}}\Big(\partial^Q h_{Q\widetilde{L}} - \frac{1}{2}\partial_{\widetilde{L}} h_{KK}\Big) - \mu\,\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{L}}\partial^+ h_{+\widetilde{L}} + \mu\,\epsilon_{\widetilde{J}\widetilde{K}\widetilde{L}}\partial_{\widetilde{K}} h_{\widetilde{I}\widetilde{L}} - \mu\,\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{K}\widetilde{L}}\partial_{\widetilde{K}} h_{\widetilde{J}\widetilde{L}} && (4.4.8b) \\
0 &= \partial^Q\mathcal{F}_{Q+\widetilde{I}J'} - \partial_K G_{++}\partial_-\mathcal{C}_{K\widetilde{I}J'} - \mu\,\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{K}\widetilde{L}}\partial_{\widetilde{K}} h_{J'\widetilde{L}} && (4.4.8c)
\end{aligned}$$

$$0 = \partial^Q \mathcal{F}_{Q+I'J'} - \partial_K G_{++}\partial_- \mathcal{C}_{KI'J'} - \frac{1}{24}\mu\,\varepsilon^{I'J'Q'R'S'U'}\mathcal{F}_{Q'R'S'U'} \tag{4.4.8d}$$

$$0 = -\partial_- \partial^Q \mathcal{C}_{QIJ} \tag{4.4.8e}$$

$$0 = \partial^Q \mathcal{F}_{Q\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}} + \frac{1}{2}\mu\,\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}}\partial^+ h_{LL} - \mu\,\epsilon_{\widetilde{J}\widetilde{K}\widetilde{L}}\partial^+ h_{\widetilde{I}\widetilde{L}} + \mu\,\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{K}\widetilde{L}}\partial^+ h_{\widetilde{J}\widetilde{L}} - \mu\,\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{L}}\partial^+ h_{\widetilde{K}\widetilde{L}} \tag{4.4.8f}$$

$$0 = \partial^Q \mathcal{F}_{Q\widetilde{I}\widetilde{J}K'} - \mu\,\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{L}}\partial^+ h_{K'\widetilde{L}} \tag{4.4.8g}$$

$$0 = \partial^Q \mathcal{F}_{Q\widetilde{I}J'K'} \tag{4.4.8h}$$

$$0 = \partial^Q \mathcal{F}_{QI'J'K'} - \frac{1}{6}\mu\,\varepsilon^{I'J'K'R'S'U'}\partial_- \mathcal{C}_{R'S'U'} \tag{4.4.8i}$$

4.5 Bosonic Spectrum

4.5.1 Non-dynamical Fields

From (4.4.6e):

$$0 = h_P{}^P \tag{4.5.1}$$

さらにこの下で (4.4.6f) から

$$\partial^P h_{IP} = 0 \quad \to \quad h_{I+} = \frac{1}{\partial_-}\partial_J h_{IJ} \tag{4.5.2}$$

さらに上の (4.5.1) だけを用いて (4.4.6b) を書き換えると、

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_- \Big\{ \partial^P h_{+P} - \frac{1}{3}\mu\,\mathcal{C}_{123} \Big\} \\ \to \quad \partial^P h_{+P} &= \frac{1}{3}\mu\,\mathcal{C}_{123} \quad \to \quad h_{++} = \frac{1}{\partial_-}\Big\{ \partial_I h_{+I} - \frac{1}{3}\mu\,\mathcal{C}_{123} \Big\} \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

が得られる。

(4.4.8a) より

$$0 = \partial^Q \mathcal{C}_{Q+I} \quad \to \quad \partial_J \mathcal{C}_{+IJ} = 0 \tag{4.5.4}$$

(4.4.8e) より

$$0 = \partial^Q \mathcal{C}_{QIJ} \quad \to \quad \mathcal{C}_{+IJ} = \frac{1}{\partial_-}\partial_K \mathcal{C}_{KIJ} \tag{4.5.5}$$

$$-\frac{1}{\partial_-}\Box\,\partial_K \mathcal{C}_{IJK} - \partial_K G_{++}\partial_- \mathcal{C}_{IJK} = -\frac{1}{\partial_-}\partial_K\big(\Box\,\mathcal{C}_{IJK}\big) \tag{4.5.6}$$

$$\mathcal{C}_{\widetilde{I}J'} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{K}\widetilde{L}}\,\mathcal{C}_{\widetilde{K}\widetilde{L}J'} \qquad \mathcal{C} \equiv 2\mathcal{C}_{123} \tag{4.5.7}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\tilde{J}\tilde{K}\tilde{L}}\mathcal{F}_{I'\tilde{J}\tilde{K}\tilde{L}} &= 4\partial_{[I'}\mathcal{C}_{\tilde{J}\tilde{K}\tilde{L}]}\,\epsilon_{\tilde{J}\tilde{K}\tilde{L}} \\
&= \big(\partial_{I'}\mathcal{C}_{\tilde{J}\tilde{K}\tilde{L}} - \partial_{\tilde{J}}\mathcal{C}_{\tilde{K}\tilde{L}I'} + \partial_{\tilde{K}}\mathcal{C}_{\tilde{L}I'\tilde{J}} - \partial_{\tilde{L}}\mathcal{C}_{I'\tilde{J}\tilde{K}}\big)\,\epsilon_{\tilde{J}\tilde{K}\tilde{L}} \\
&= 6\partial_{I'}\mathcal{C}_{123} - 6\partial_{\tilde{J}}\mathcal{C}_{\tilde{J}I'} \qquad (4.5.8)
\end{aligned}$$

先程の条件を再代入すると field equations は次のように reduce される:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\Big\{-\nabla_+\nabla^P h_{+P} - \nabla_+\nabla^P h_{+P} - \Box\, h_{++}\Big\} - \Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2 h_{\tilde{K}\tilde{K}} - \Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2 h_{L'L'} \\
&\quad + \frac{1}{6}\mu\, G_{++}\,\partial_-\mathcal{C} + \mu\,\mathcal{F}_{+123} - \frac{1}{2}\mu^2\, h_{\tilde{L}\tilde{L}} \qquad (4.5.9a)\\
0 &= \frac{2}{3}\mu\,\partial_{\tilde{I}}\mathcal{C} + \frac{1}{\partial_-}\Box\,\partial_{\tilde{J}}h_{\tilde{I}\tilde{J}} + \frac{1}{\partial_-}\Box\,\partial_{J'}h_{\tilde{I}J'} + \mu\,\partial_{J'}\mathcal{C}_{\tilde{I}J'} \qquad (4.5.9b)\\
0 &= -\frac{1}{3}\mu\,\partial_{I'}\mathcal{C} + \frac{1}{\partial_-}\Box\,\partial_{\tilde{J}}h_{\tilde{J}I'} + \frac{1}{\partial_-}\Box\,\partial_{J'}h_{I'J'} + \partial_{\tilde{J}}\mathcal{C}_{\tilde{J}I'} \qquad (4.5.9c)\\
0 &= \Box\, h_{\tilde{I}\tilde{J}} + \frac{2}{3}\mu\,\delta_{\tilde{I}\tilde{J}}\,\partial_-\mathcal{C} \qquad (4.5.9d)\\
0 &= \Box\, h_{\tilde{I}J'} + \mu\,\partial_-\mathcal{C}_{\tilde{I}J'} \qquad (4.5.9e)\\
0 &= \Box\, h_{I'J'} - \frac{1}{3}\mu\,\delta_{I'J'}\,\partial_-\mathcal{C} \qquad (4.5.9f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2\partial_-}\partial_{\tilde{I}}\big(\Box\,\mathcal{C}\big) - \frac{1}{\partial_-}\partial_{J'}\big(\Box\,\mathcal{C}_{\tilde{I}J'}\big) + \mu\,\partial_{J'}h_{\tilde{I}J'} + \mu\,\partial_{\tilde{I}}h_{\tilde{J}\tilde{J}} \qquad (4.5.10a)\\
0 &= \frac{1}{\partial_-}\partial_{\tilde{K}}\big(\Box\,\mathcal{C}_{\tilde{K}\tilde{I}J'}\big) - \frac{1}{\partial_-}\partial_{K'}\big(\Box\,\mathcal{C}_{\tilde{I}K'J'}\big) + \mu\,\epsilon_{\tilde{I}\tilde{K}\tilde{L}}\partial_{\tilde{K}}h_{J'\tilde{L}} \qquad (4.5.10b)\\
0 &= -\frac{1}{\partial_-}\partial_{\tilde{K}}\big(\Box\,\mathcal{C}_{\tilde{K}I'J'}\big) - \frac{1}{\partial_-}\partial_{K'}\big(\Box\,\mathcal{C}_{K'I'J'}\big) - \frac{1}{6}\mu\,\varepsilon^{I'J'Q'R'S'U'}\partial_{Q'}\mathcal{C}_{R'S'U'} \qquad (4.5.10c)\\
0 &= \Box\,\mathcal{C} - 2\mu\,\partial_- h_{\tilde{I}\tilde{I}} \qquad (4.5.10d)\\
0 &= \Box\,\mathcal{C}_{\tilde{I}J'} - \mu\,\partial_- h_{\tilde{I}J'} \qquad (4.5.10e)\\
0 &= \Box\,\mathcal{C}_{\tilde{I}J'K'} \qquad (4.5.10f)\\
0 &= \Box\,\mathcal{C}_{I'J'K'} + \frac{1}{6}\mu\,\varepsilon^{I'J'K'R'S'U'}\partial_-\mathcal{C}_{R'S'U'} \qquad (4.5.10g)
\end{aligned}$$

但し (4.4.8b) に $SO(3)$ Levi-Civita symbol $\epsilon_{\tilde{I}\tilde{J}\tilde{K}}$ を作用させてある。さらに $h_P{}^P = 0$ から $h_{\tilde{K}\tilde{K}} = -h_{L'L'}$ も用いている。同様に (4.4.8f), (4.4.8g) にも $\epsilon_{\tilde{I}\tilde{J}\tilde{K}}$ を作用させている。

4.5.2 Spectrum

ここは簡単にまとめておくに留める。Field re-definition を行おう:

$$H_{\tilde{I}J'} = h_{\tilde{I}J'} + i\mathcal{C}_{\tilde{I}J'} \qquad \overline{H}_{\tilde{I}J'} = h_{\tilde{I}J'} - i\mathcal{C}_{\tilde{I}J'} \qquad (4.5.11a)$$

$$h^{\perp}_{\tilde{I}\tilde{J}} = h_{\tilde{I}\tilde{J}} - \frac{1}{3}\delta_{\tilde{I}\tilde{J}}h_{\tilde{K}\tilde{K}} \qquad h^{\perp}_{I'J'} = h_{I'J'} - \frac{1}{6}\delta_{I'J'}h_{K'K'} \qquad (4.5.11b)$$

$$h \;=\; h_{\widetilde{K}\widetilde{K}} + i\mathcal{C} \qquad \overline{h} \;=\; h_{\widetilde{K}\widetilde{K}} - i\mathcal{C} \tag{4.5.11c}$$

$$\mathcal{C}^{\oplus}_{I'J'K'} \;=\; \frac{i}{6}\varepsilon^{I'J'K'W'X'Y'}\mathcal{C}^{\oplus}_{W'X'Y'} \qquad \mathcal{C}^{\ominus}_{I'J'K'} \;=\; -\frac{i}{6}\varepsilon^{I'J'K'W'X'Y'}\mathcal{C}^{\ominus}_{W'X'Y'} \tag{4.5.11d}$$

このとき、

$$(\Box - \mu i\partial_-)H_{\widetilde{I}J'} \;=\; 0 \qquad (\Box + \mu i\partial_-)\overline{H}_{\widetilde{I}J'} \;=\; 0 \tag{4.5.12a}$$

$$\Box h^{\perp}_{\widetilde{I}\widetilde{J}} \;=\; 0 \qquad \Box h^{\perp}_{I'J'} \;=\; 0 \tag{4.5.12b}$$

$$(\Box - 2\mu i\partial_-)h \;=\; 0 \qquad (\Box + 2\mu i\partial_-)\overline{h} \;=\; 0 \tag{4.5.12c}$$

$$(\Box - \mu i\partial_-)\mathcal{C}^{\oplus}_{I'J'K'} \;=\; 0 \qquad (\Box + \mu i\partial_-)\mathcal{C}^{\ominus}_{I'J'K'} \;=\; 0 \tag{4.5.12d}$$

をみたす。

よって、spectrum を Table 4.1 に与える。

energy $\mathcal{E}_0$	bosonic fields ($\mathcal{D}$)			degrees of freedom
4	$\overline{h}(1)$			1
3	$\overline{H}_{\widetilde{I}J'}(18)$	$\mathcal{C}^{\ominus}_{I'J'K'}(10)$		28
2	$\mathcal{C}_{\widetilde{I}J'K'}(45)$	$h^{\perp}_{\widetilde{I}\widetilde{J}}(5)$	$h^{\perp}_{I'J'}(20)$	70
1	$H_{\widetilde{I}J'}(18)$	$\mathcal{C}^{\oplus}_{I'J'K'}(10)$		28
0	$h(1)$			1

Table 4.1: *Bosonic zero-modes in eleven-dimensional supergravity on pp-wave background.*

4.6 Fermionic Spectrum

boson 同様、fermion についてもまとめておく。まずは non-dynamical field をみる。そのために、(4.4.7) を便宜的に次のように書き直すと便利である:

$$\widehat{\Gamma}^{MNP}D_N\psi_P \;=\; J^M \tag{4.6.1}$$

ただし J^M は次のように表されている:

$$J^+ \;=\; -J_- \;=\; 0 \tag{4.6.2a}$$

$$J^- \;=\; \frac{1}{4}\mu\,\widehat{\Gamma}^{+-123I'}\psi_{I'} + \frac{1}{8}\mu\,\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}}\,\widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}\widetilde{J}}\,\psi_{\widetilde{K}} \tag{4.6.2b}$$

$$J^{\widetilde{I}} \;=\; J_{\widetilde{I}} \;=\; -\frac{1}{4}\mu\,\widehat{\Gamma}^{+123}(\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}} - \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{J}})\psi_{\widetilde{J}} \tag{4.6.2c}$$

$$J^{I'} \;=\; J_{I'} \;=\; \frac{1}{4}\mu\,\widehat{\Gamma}^{+123}(\delta_{I'J'} - \widehat{\Gamma}_{I'}\widehat{\Gamma}_{J'})\psi_{J'} \tag{4.6.2d}$$

さらに (4.6.1) から次の関係式が得られる:

$$\widehat{\Gamma}^N D_N\psi_M - \widehat{\Gamma}^N D_M\psi_N \;=\; J_M - \frac{1}{9}\widehat{\Gamma}_M\widehat{\Gamma}_N J^N \tag{4.6.3}$$

(4.6.1) から (4.6.3) が導かれることをここで証明しておこう。まず rank 3 の gamma matrix $\widehat{\Gamma}^{NPQ}$ を identity (A.2.1) を用いて

$$\widehat{\Gamma}^{NPQ} = \widehat{\Gamma}^N\widehat{\Gamma}^{PQ} - g^{NP}\widehat{\Gamma}^Q + g^{NQ}\widehat{\Gamma}^P \tag{4.6.4}$$

と書き直す。これに左から $\widehat{\Gamma}_N$ を作用させると

$$\widehat{\Gamma}_N\widehat{\Gamma}^{NPQ} = 9\widehat{\Gamma}^{PQ} \tag{4.6.5}$$

が得られる。これと、(4.6.1) を用いて

$$\widehat{\Gamma}_M\widehat{\Gamma}_N J^N = \widehat{\Gamma}_M\widehat{\Gamma}_N\widehat{\Gamma}^{NPQ}D_P\psi_Q = 9\widehat{\Gamma}_M\widehat{\Gamma}^{PQ}D_P\psi_Q \tag{4.6.6}$$

が得られる。よって (4.6.3) の右辺は

$$\begin{aligned} J_M - \frac{1}{9}\widehat{\Gamma}_M\widehat{\Gamma}_N J^N &= J_M - \widehat{\Gamma}_M\widehat{\Gamma}^{PQ}D_P\psi_Q = \big(\widehat{\Gamma}_M{}^{PQ} - \widehat{\Gamma}_M\widehat{\Gamma}^{PQ}\big)D_P\psi_Q = -\big(\delta^P_M\widehat{\Gamma}^Q - \delta^Q_M\widehat{\Gamma}^P\big)D_P\psi_Q \\ &= \widehat{\Gamma}^P D_P\psi_M - \widehat{\Gamma}^P D_M\psi_P \end{aligned} \tag{4.6.7}$$

となり、(4.6.3) の左辺となる。途中、identity (A.2.1) を用いている。これで示された。

(4.6.3) を用いると (4.4.7b) と同等な関係式は

$$\widehat{\Gamma}^N D_N\psi_- - \widehat{\Gamma}^N D_-\psi_N = J_- - \frac{1}{9}\widehat{\Gamma}_-\widehat{\Gamma}_N J^n \tag{4.6.8}$$

となる。ただし light-cone gauge-fixing (4.3.1), spin connection (4.1.4) や $J_- = 0$ (4.6.2a) を用いるとさらに簡単に

$$\partial_-\big(\widehat{\Gamma}^N\psi_N\big) = \frac{1}{9}\widehat{\Gamma}_-\widehat{\Gamma}_N J^N \tag{4.6.9}$$

となる。途中、(4.1.1) からわかるように、$\partial_- e_M{}^A = 0$ を用いている。この右辺はさらに変形できる:

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_-\widehat{\Gamma}_N J^N &= \widehat{\Gamma}_-\Big\{\widehat{\Gamma}_+J^+ + \widehat{\Gamma}_-J^- + \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}}J^{\widetilde{I}} + \widehat{\Gamma}_{I'}J^{I'}\Big\} \\ &= \frac{1}{4}\mu\,\widehat{\Gamma}^+\Big\{\widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}}\widehat{\Gamma}^{+123}(\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}} - \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{J}})\psi_{\widetilde{J}} - \widehat{\Gamma}_{I'}\widehat{\Gamma}^{+123}(\delta^{I'J'} - \widehat{\Gamma}_{I'}\widehat{\Gamma}_{J'})\psi_{J'}\Big\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.6.10}$$

但し $\widehat{\Gamma}_-\widehat{\Gamma}_- = \widehat{\Gamma}^+\widehat{\Gamma}^+ = 0$ を用いている。これより $\partial_-(\widehat{\Gamma}^M\psi_M) = 0$、つまり

$$\widehat{\Gamma}^M\psi_M = 0 \tag{4.6.11}$$

が得られる。

spinor の covariant derivative $D_N\psi_P$ を整理しておこう。KG solution (4.1.4) を用いると、これは以下の様に書き表すことができる:

$$D_+\psi_P = \partial_+\psi_P + \frac{1}{2}\Big(\omega_+{}^{\widetilde{I}-}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}-} + \omega_+{}^{I'-}\widehat{\Gamma}_{I'-}\Big)\psi_P = \partial_+\psi_P + \frac{1}{4}\partial_I G_{++}\widehat{\Gamma}_{I-}\psi_P \tag{4.6.12a}$$

$$D_-\psi_P \;=\; \partial_-\psi_P \tag{4.6.12b}$$

$$D_I\psi_P \;=\; \partial_I\psi_P \tag{4.6.12c}$$

では (4.4.7) を個別に考察しよう。まずは (4.4.7a) である。ここで $\widehat{\Gamma}^{+NP}$ を書き換える:

$$\widehat{\Gamma}^{+NP} \;=\; g^{P+}\widehat{\Gamma}^N - g^{PN}\widehat{\Gamma}^+ + \frac{1}{2}(\widehat{\Gamma}^+\widehat{\Gamma}^N - \widehat{\Gamma}^N\widehat{\Gamma}^+)\widehat{\Gamma}^P\,. \tag{4.6.13}$$

So (4.4.7a) is rewritten as

$$0 \;=\; g^{P+}\widehat{\Gamma}^N D_N\psi_P - g^{PN}\widehat{\Gamma}^+ D_N\psi_P + \frac{1}{2}(\widehat{\Gamma}^+\widehat{\Gamma}^N - \widehat{\Gamma}^N\widehat{\Gamma}^+)\widehat{\Gamma}^P D_N\psi_P\,. \tag{4.6.14}$$

We find that the first and third term are deleted by light-cone gauge-fixing and (4.6.11). Thus we can reduce (4.6.14) to $0 = \widehat{\Gamma}^+(-\partial_-\psi_+ + \partial_I\psi_I)$. So ψ_+ can be expressed as

$$\psi_+ \;=\; \frac{1}{\partial_-}\partial_I\psi_I\,, \tag{4.6.15}$$

and we see that ψ_+ is a non-dynamical field.

Here we shall reduce (4.4.7c) to

$$0 \;=\; \widehat{\Gamma}^+\Big(\partial_+ + \frac{1}{2}G_{++}\partial_-\Big)\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} + \widehat{\Gamma}^-\partial_-\psi^{\ominus}_{\widetilde{I}} + \widehat{\Gamma}^K\partial_K(\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} + \psi^{\ominus}_{\widetilde{I}}) + \frac{1}{4}\mu\widehat{\Gamma}^{+123}(\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}} - \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{J}})\psi^{\oplus}_{\widetilde{J}}\,, \tag{4.6.16}$$

where we decomposed gravitino as $\psi_{\widetilde{I}} \equiv \psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} + \psi^{\ominus}_{\widetilde{I}}$. The $\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}}$ and $\psi^{\ominus}_{\widetilde{I}}$ are defined as

$$\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} \;\equiv\; -\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}^-\widehat{\Gamma}^+\psi_{\widetilde{I}}\,, \qquad \psi^{\ominus}_{\widetilde{I}} \;\equiv\; -\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}^+\widehat{\Gamma}^-\psi_{\widetilde{I}}\,, \tag{4.6.17}$$

which satisfy the projection conditions: $\widehat{\Gamma}^-\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} = \widehat{\Gamma}^+\psi^{\ominus}_{\widetilde{I}} = 0$. When we act $\widehat{\Gamma}^+$ on (4.6.16) from the left, $\psi^{\ominus}_{\widetilde{I}}$ can be expressed in terms $\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}}$ as follows:

$$\psi^{\ominus}_{\widetilde{I}} \;=\; \frac{1}{2\partial_-}\widehat{\Gamma}^+\widehat{\Gamma}^K\partial_K\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}}\,. \tag{4.6.18}$$

Thus $\psi^{\ominus}_{\widetilde{I}}$ is not independent of $\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}}$. Similarly, when we act $\widehat{\Gamma}^-$ on (4.6.16) from the left and utilize (4.6.18), we obtain the following equation:

$$0 \;=\; \Box\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} + \frac{1}{2}\mu\widehat{\Gamma}^{123}(\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}} - \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{J}})\partial_-\psi^{\oplus}_{\widetilde{J}}\,. \tag{4.6.19}$$

In order to solve this equation, we shall introduce the following fields:

$$\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}} \;\equiv\; \Big(\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}} - \frac{1}{3}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{J}}\Big)\psi^{\oplus}_{\widetilde{J}}\,, \qquad \psi^{\oplus\|}_1 \;\equiv\; \widehat{\Gamma}^{\widetilde{I}}\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} \;=\; \widehat{\Gamma}^{\widetilde{I}}\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}}\,, \tag{4.6.20}$$

and decompose $\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}}$ in to the $\widehat{\Gamma}$-transverse mode and $\widehat{\Gamma}$-parallel mode. Acting $\widehat{\Gamma}^{\widetilde{I}}$ on (4.6.19) from the left and contracting the index $\widetilde{I}$, we get

$$0 \;=\; \Box\psi^{\oplus\|}_1 + \mu\widehat{\Gamma}^{123}\partial_-\psi^{\oplus\|}_1\,. \tag{4.6.21}$$

On the other hand, when we act $(\delta_{\widetilde{K}\widetilde{I}} - \frac{1}{3}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{K}}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}})$ on (4.6.19), we find

$$0 \ = \ \Box \psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{K}} + \frac{1}{2}\mu \widehat{\Gamma}^{123} \partial_- \psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{K}} \ . \tag{4.6.22}$$

Moreover, in order to solve (4.6.21) and (4.6.22), we decompose $\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}}$ and $\psi^{\oplus\parallel}_{1}$ according to the chirality in terms of $i\widehat{\Gamma}^{123}$ as follows:

$$\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{R}} \ \equiv \ \frac{1+i\widehat{\Gamma}^{123}}{2}\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}} \ , \qquad \psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{L}} \ \equiv \ \frac{1-i\widehat{\Gamma}^{123}}{2}\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}} \ , \tag{4.6.23a}$$

$$\psi^{\oplus\parallel}_{1\mathrm{R}} \ \equiv \ \frac{1+i\widehat{\Gamma}^{123}}{2}\psi^{\oplus\parallel}_{1} \ , \qquad \psi^{\oplus\parallel}_{1\mathrm{L}} \ \equiv \ \frac{1-i\widehat{\Gamma}^{123}}{2}\psi^{\oplus\parallel}_{1} \ . \tag{4.6.23b}$$

These variables satisfy the following chirality conditions:

$$i\widehat{\Gamma}^{123}\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{R}} \ = \ +\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{R}} \ , \qquad i\widehat{\Gamma}^{123}\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{L}} \ = \ -\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{L}} \ , \tag{4.6.24a}$$

$$i\widehat{\Gamma}^{123}\psi^{\oplus\parallel}_{1\mathrm{R}} \ = \ +\psi^{\oplus\parallel}_{1\mathrm{R}} \ , \qquad i\widehat{\Gamma}^{123}\psi^{\oplus\parallel}_{1\mathrm{L}} \ = \ -\psi^{\oplus\parallel}_{1\mathrm{L}} \ . \tag{4.6.24b}$$

Multiplying $\frac{1}{2}(1 \pm i\widehat{\Gamma}^{123})$ to (4.6.21) on the left, we get

$$0 \ = \ \big(\Box - \mu\, i\partial_-\big)\psi^{\oplus\parallel}_{1\mathrm{R}} \ , \qquad 0 \ = \ \big(\Box + \mu\, i\partial_-\big)\psi^{\oplus\parallel}_{1\mathrm{L}} \ . \tag{4.6.25}$$

Similarly, when we multiply $\frac{1}{2}(1 \pm i\widehat{\Gamma}^{123})$ to (4.6.22) on the left, we obtain

$$0 \ = \ \Big(\Box - \frac{1}{2}\mu\, i\partial_-\Big)\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{R}} \ , \qquad 0 \ = \ \Big(\Box + \frac{1}{2}\mu\, i\partial_-\Big)\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{L}} \ . \tag{4.6.26}$$

From these equations, we can read off the zero-mode energies and degrees of freedom of $\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{R}}$ and $\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{L}}$:

$$\mathcal{E}_0(\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{R}}) \ = \ \frac{3}{2} \ , \qquad \mathcal{E}_0(\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{L}}) \ = \ \frac{5}{2} \ , \qquad \mathcal{D}(\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{R}}) \ = \ \mathcal{D}(\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{L}}) \ = \ 8 \times (3-1) \ = \ 16 \ . \tag{4.6.27}$$

We will discuss these quantities of $\psi^{\oplus\parallel}_{1\mathrm{R}}$ and $\psi^{\oplus\parallel}_{1\mathrm{L}}$ later.

Then let us investigate (4.4.7d):

$$0 \ = \ \Big\{\widehat{\Gamma}^{+}\Big(\partial_+ + \frac{1}{2}G_{++}\partial_-\Big) + \widehat{\Gamma}^{-}\partial_- + \widehat{\Gamma}^{K}\partial_K\Big\}\psi_{I'} - \frac{1}{4}\mu\widehat{\Gamma}^{+123}\Big(\delta_{I'J'} - \widehat{\Gamma}_{I'}\widehat{\Gamma}_{J'}\Big)\psi_{J'} \ . \tag{4.6.28}$$

In the same way as the case of $\psi_{\widetilde{I}}$, we decompose $\psi_{I'}$ into the $\widehat{\Gamma}$-parallel mode and $\widehat{\Gamma}$-transverse mode, and obtain

$$0 \ = \ \Big(\Box + \frac{5}{2}\mu\, i\partial_-\Big)\psi^{\oplus\parallel}_{2\mathrm{R}} \ , \qquad 0 \ = \ \Big(\Box - \frac{5}{2}\mu\, i\partial_-\Big)\psi^{\oplus\parallel}_{2\mathrm{L}} \ , \tag{4.6.29a}$$

$$0 \ = \ \Big(\Box + \frac{1}{2}\mu\, i\partial_-\Big)\psi^{\oplus\perp}_{I'\mathrm{R}} \ , \qquad 0 \ = \ \Big(\Box - \frac{1}{2}\mu\, i\partial_-\Big)\psi^{\oplus\perp}_{I'\mathrm{L}} \ , \tag{4.6.29b}$$

where the $\widehat{\Gamma}$-transverse mode and $\widehat{\Gamma}$-parallel mode are defined as

$$\psi^{\oplus}_{I'} \ = \ -\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}^{-}\widehat{\Gamma}^{+}\psi_{I'} \ , \tag{4.6.30a}$$

$$\psi^{\oplus\perp}_{I'\mathrm{R}} \ = \ \frac{1+i\widehat{\Gamma}^{123}}{2}\psi^{\oplus\perp}_{I'} \ , \qquad \psi^{\oplus\perp}_{I'\mathrm{L}} \ = \ \frac{1-i\widehat{\Gamma}^{123}}{2}\psi^{\oplus\perp}_{I'} \ , \tag{4.6.30b}$$

$$\psi_{2\mathrm{R}}^{\oplus\parallel} = \frac{1+i\widehat{\Gamma}^{123}}{2}\psi_2^{\oplus\parallel}\,, \qquad \psi_{2\mathrm{L}}^{\oplus\parallel} = \frac{1-i\widehat{\Gamma}^{123}}{2}\psi_2^{\oplus\parallel}\,. \tag{4.6.30c}$$

From (4.6.29b), we find that the zero-mode energies and degrees of freedom of are given by $\psi_{\tilde{I}\mathrm{R}}^{\oplus\perp}$ and $\psi_{\tilde{I}\mathrm{L}}^{\oplus\perp}$:

$$\mathcal{E}_0(\psi_{I'\mathrm{R}}^{\oplus\perp}) = \frac{5}{2}\,, \qquad \mathcal{E}_0(\psi_{I'\mathrm{L}}^{\oplus\perp}) = \frac{3}{2}\,, \qquad \mathcal{D}(\psi_{I'\mathrm{R}}^{\oplus\perp}) = \mathcal{D}(\psi_{I'\mathrm{L}}^{\oplus\perp}) = 8\times(6-1) = 40\,. \tag{4.6.31}$$

Now we have finished the study of the $\widehat{\Gamma}$-transverse part. The remaining task is to analyze the $\widehat{\Gamma}$-parallel mode. In order to investigate the $\widehat{\Gamma}$-parallel mode, we perform a linear combination of (4.6.25) and (4.6.29a), and define new $\widehat{\Gamma}$-parallel modes as

$$\psi_{\mathrm{R}}^{\oplus\parallel} \equiv \frac{2}{5}\psi_{1\mathrm{R}}^{\oplus\parallel} - \psi_{2\mathrm{R}}^{\oplus\parallel}\,, \qquad \psi_{\mathrm{L}}^{\oplus\parallel} \equiv \frac{2}{5}\psi_{1\mathrm{L}}^{\oplus\parallel} - \psi_{2\mathrm{L}}^{\oplus\parallel}\,. \tag{4.6.32}$$

Then, by the use of (4.6.15), we can easily see that the re-defined fermions satisfy the equations:

$$0 = \Big(\Box + \frac{3}{2}\mu\, i\partial_-\Big)\psi_{\mathrm{R}}^{\oplus\parallel}\,, \qquad 0 = \Big(\Box - \frac{3}{2}\mu\, i\partial_-\Big)\psi_{\mathrm{L}}^{\oplus\parallel}\,. \tag{4.6.33}$$

Thus the zero-mode energies and degrees of freedom of them are represented by

$$\mathcal{E}_0(\psi_{\mathrm{R}}^{\oplus\parallel}) = \frac{7}{2}\,, \qquad \mathcal{E}_0(\psi_{\mathrm{L}}^{\oplus\parallel}) = \frac{1}{2}\,, \qquad \mathcal{D}(\psi_{\mathrm{R}}^{\oplus\parallel}) = \mathcal{D}(\psi_{\mathrm{L}}^{\oplus\parallel}) = 8\,. \tag{4.6.34}$$

Now we have fully solved the field equations for fermionic fluctuations, and have derived the spectrum of gravitino in the case of pp-wave. As a result, we have found that the spectrum is splitting with a certain energy difference in the same manner with the spectrum of bosons. Summarizing (4.6.27), (4.6.31) and (4.6.34), we obtain the spectrum of gravitino as in Table 4.2:

energy $\mathcal{E}_0$	fermionic fields ($\mathcal{D}$)		degrees of freedom
$\frac{7}{2}$	$\psi_{\mathrm{R}}^{\oplus\parallel}(8)$		8
$\frac{5}{2}$	$\psi_{\tilde{I}\mathrm{L}}^{\oplus\perp}(16)$	$\psi_{I'\mathrm{R}}^{\oplus\perp}(40)$	56
$\frac{3}{2}$	$\psi_{\tilde{I}\mathrm{R}}^{\oplus\perp}(16)$	$\psi_{I'\mathrm{L}}^{\oplus\perp}(40)$	56
$\frac{1}{2}$	$\psi_{\mathrm{L}}^{\oplus\parallel}(8)$		8

Table 4.2: *Fermionic zero-modes in eleven-dimensional supergravity on pp-wave background.*

4.7 Summary

ここでもう一度 bosonic/fermionic spectrum を掲載しておこう:

各 energy “floor” は supersymmetry で繋がる。今、ここではあらわに記述していないが、pp-wave background では Hamiltonian も supercharge も time に依存しているため、これらの commutator はゼロにはならない。しかし supersymmetry は manifest に 32 個保っている。その一つとして、lowest energy floor は zero energy であ

energy $\mathcal{E}_0$	bosons			fermions		degrees of freedom	
4	$\overline{h}$					1	
7/2				$\psi^{\oplus\parallel}_{\mathrm{R}}$			8
3	$\overline{H}_{\tilde{I}J'}$	$\mathcal{C}^{\oplus}_{I'J'K'}$				28	
5/2				$\psi^{\oplus\perp}_{\tilde{I}\mathrm{L}}$	$\psi^{\oplus\perp}_{I'\mathrm{R}}$		56
2	$\mathcal{C}_{\tilde{I}J'K'}$	$h^{\perp}_{\tilde{I}\tilde{J}}$	$h^{\perp}_{I'J'}$			70	
3/2				$\psi^{\oplus\perp}_{\tilde{I}\mathrm{R}}$	$\psi^{\oplus\perp}_{I'\mathrm{L}}$		56
1	$H_{\tilde{I}J'}$	$\mathcal{C}^{\ominus}_{I'J'K'}$				28	
1/2				$\psi^{\oplus\parallel}_{\mathrm{L}}$			8
0	h					1	

Table 4.3: *Zero point energy spectrum of all the physical fields of the linearized supergravity on the pp-wave background.*

ることが挙げられる。(もちろんこれだけが根拠ではない。) その議論については、例えば [37, 42] などを参照のこと。

なお、ここで得られた spectrum (Table 4.3) は、Matrix theory on pp-wave の zero-mode spectrum と完全に対応する。例えば、[38] を参照のこと。[38] は、light-cone gauge を採った後に残る spacetime $SO(9)$ symmetry を $SO(3) \times SO(6)$ の言葉で記述している。その表記は、ここで議論した linearized supergravity の fluctuation fields と対応がよい。また、別の、$Spin(7) \times U(1)$ symmetry として記述したものが [42] であるが、これとも zero-mode は一致している。前者 [38] は pp-wave background 上での oscillator mode を議論するのに最適な表記であり、後者 [42] は、pp-wave に限らない background にも適応できる。そもそも、$Spin(7) \times U(1)$ 表記は、最初は flat background 上での supermembrane matrix model で登場したものである [40]。

さて、matrix theory は M-theory の fundamental object である M2-brane (supermembrane) を matrix で記述していると考えると、ここで得られた結果から、Figure 4.1 のような関係が見えてくるかもしれない:

$AdS_{4(7)} \times S^{7(4)}$ background での (linearized) supergravity については、Duff et al. [1, 17, 16, 18] などが精力的に研究をしている。近年、$AdS_p \times S^q$ 上の fluctuation mode と KG background 上 fluctuation mode を、oscillator method を用いて対応関係を得ることができたという報告がある [30]。まだ fluctuation fields そのものについての対応関係は見出されていないと思われるので、その点を追究するのは面白いかもしれないが、困難が予想される。

$AdS_4 \times S^7$ は、M2-brane の near-horizon limit での background geometry に対応し、$AdS_7 \times S^4$ は M5-brane のそれに対応していると考えられている。$AdS_4 \times S^7$ と $AdS_7 \times S^4$ は、Penrose limit で共に KG solution (pp-wave background) に繋がるため、まだ M5-brane について知見が乏しい我々は、ここの解析から M5-brane について新たな情報が引き出せるかもしれない。しかしそれはまだわからない。

こう並べてみると、何故 11-dimensional spacetime では 32 supersymmetry を保つ background がこれだけあるのか、興味が持てるところである。

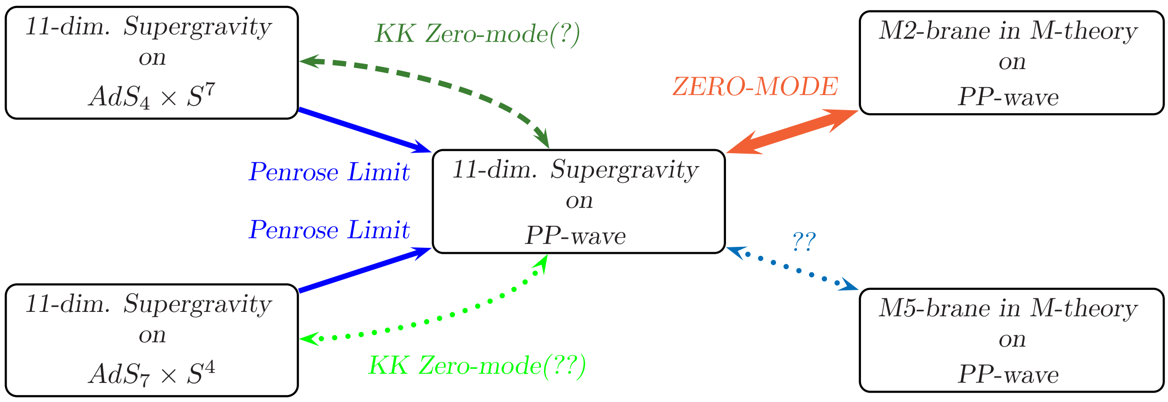

Figure 4.1: The relationships among the spectrum of the eleven-dimensional supergravity/M-theory on the maximally supersymmetric curved background.

Chapter 5

Supergravities on Anti-de Sitter Spaces

section 4 では [2] の議論をもう一度丁寧にやりなおした。ここでは他の background、特に $AdS_{4(7)} \times S^{7(4)}$ background について、1980 年代に解析されたことをまとめておく。中心になる文献は Duff and Pope [1] である。

まずは、11-dimensional supergravity を $M_4 \times M_7$ に分解する議論を展開している文献を挙げておこう。非常に有用なものは Duff, Nilsson and Pope [12] (特に概要としてその section 3, 4, 5) である。ここには Einstein space で compactify するところから始まり、Freund-Rubin ansatz、classical vacuum、isometry group and Killing vector (spinor)、fluctuation fields and linearized supergravity、gauge-fixing condition、masslessness、cosmological constant problem、supersymmetry algebra、non-abelian gauge theory、coset construction など、一通りの議論が書かれてある。

なお、$AdS_4 \times S^7$ については Duff and Pope [1], Duff [17] (linearlized level), de Wit and Nicolai [18] (full nonlinear level) を参照。$AdS_7 \times S^4$ については Pilch, van Nieuwenhuizen and Townsend [16] (linearlized level), Nastase, Vaman and van Nieuwenhuizen [22] (full nonlinear level) を参照。linearized level と nonlinear level で議論が別々にある。linearized level で議論できるのは zero-mode spectrum くらいである。massive mode の存在も議論できるが、zero-mode を含めて、interaction については何も言えない。(non)renormalizable interaction term まで含めて、symmetry breaking を議論するには、full nonlinear level まで追究する必要があるが、sphere comactification が consistent になされる必要がある (higher-dimensional Einstein equation に lower-dimensional fluctuation を代入したとき、lower-dimensional spacetime で議論が閉じる必要があるが、これは自明ではない)。

なお、本文では zero-mode spectrum だけを追いかけるので、linearlized level の議論で十分であろう。

AdS space の対称性、代数については de Wit and Herger [19] を参照。

5.1 Some Comments on Ansatze, Field decomposition and Gauge-fixing

具体的に $AdS_{4(7)} \times S^{7(4)}$ background 上の fluctuation field について議論を展開する前に、いくつかのコメントを列挙しておこう。今後の議論の展開にある程度の指針を与えると思われる。なお、ここで登場する座標は、$x^M \in AdS_p \times S^q$, $x^\mu \in AdS_p$, $y^m \in S^q$ の約束を採る。

5.1.1 Decomposition of Background Fields

background field, background flux については、spacetime index が AdS_p だけ、もしくは S^q だけ、という、完全に分離したものだけが存在すると仮定する。つまり

$$\langle g_{\mu m} \rangle = 0 \tag{5.1.1a}$$

$$\langle F_{\mu\nu\rho m} \rangle = \langle F_{\mu\nu mn} \rangle = \langle F_{\mu mnp} \rangle = 0 \tag{5.1.1b}$$

とする。これは metric が完全に分離することからの仮定である。さらに affine connection も AdS_p 方向と S^q 方向で完全に分離することから、covariant derivative について次のような関係式が得られる:

$$\nabla_\mu \phi_m = \partial_\mu \phi_m \qquad \nabla_\mu \phi_{\nu m} = \partial_\mu \phi_{\nu m} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} \phi_{\rho m} \qquad \text{etc.}$$

また、後に定義する Freun-Rubin ansatz より、classical flux F_{MNPQ} は定数とする。このため、例えば

$$\begin{aligned}\nabla_\mu F_{npqr} &= \nabla_m F_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \\ \nabla_\mu F_{\nu\rho\sigma\lambda} &= 0 \qquad \nabla_m F_{npqr} = 0\end{aligned}$$

となる。同じく Freund-Rubin ansatz を用いると、(3.1.8c) から

$$\begin{aligned}0 &= \nabla^Q F_{QMNP} \qquad \text{or} \\ 0 &= \nabla^\mu F_{\mu\nu\rho\sigma} \qquad 0 = \nabla^q F_{qmnp}\end{aligned}$$

が得られる。以上にもとづくと、field equations for fluctuation fields (3.2.6), (3.2.4b), (3.2.4c), (3.2.4d) から幾つかの方程式が生まれる。それぞれについてできるだけ一般的に書き下そう。

- (3.2.6) には uncontracted indices が 2 つある。従って 3 通りの方程式 $(M,N)=(\mu,\nu),(\mu,m),(m,n)$ が登場する:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_\nu\nabla_\mu h_P{}^P - \nabla_\nu\nabla^P h_{\mu P} - \nabla_\mu\nabla^P h_{\nu P}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{144}h_{\mu\nu}\,F_{PQRS}\,F^{PQRS} - \frac{1}{72}g_{\mu\nu}\,F^{PQRS}\,\mathcal{F}_{PQRS} + \frac{1}{36}h^{PU}\,g_{\mu\nu}\,F_{PQRS}\,F_U{}^{QRS} \\ &\quad + \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{\mu\rho\sigma\lambda}\,F_\nu{}^{\rho\sigma\lambda} + \mathcal{F}_{\nu\rho\sigma\lambda}\,F_\mu{}^{\rho\sigma\lambda}\Big) - \frac{1}{4}h^{\rho\tau}\,F_{\mu\rho\sigma\lambda}\,F_{\nu\tau}{}^{\sigma\lambda} \qquad (5.1.2a) \\ \delta\mathcal{R}_{\mu n} &= -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_n\nabla_\mu h_P{}^P - \nabla_n\nabla^P h_{\mu P} - \nabla_\mu\nabla^P h_{nP}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{\mu n} \\ &= -\frac{1}{144}h_{\mu n}\,F_{PQRS}\,F^{PQRS} + \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{\mu pqr}\,F_n{}^{pqr} + \mathcal{F}_{n\rho\sigma\lambda}\,F_\mu{}^{\rho\sigma\lambda}\Big) \qquad (5.1.2b) \\ \delta\mathcal{R}_{mn} &= -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_n\nabla_m h_P{}^P - \nabla_n\nabla^P h_{mP} - \nabla_m\nabla^P h_{nP}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{mn} \\ &= -\frac{1}{144}h_{mn}\,F_{PQRS}\,F^{PQRS} - \frac{1}{72}g_{mn}\,F^{PQRS}\,\mathcal{F}_{PQRS} + \frac{1}{36}h^{PU}\,g_{mn}\,F_{PQRS}\,F_U{}^{QRS} \\ &\quad + \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{mpqr}\,F_n{}^{pqr} + \mathcal{F}_{npqr}\,F_m{}^{pqr}\Big) - \frac{1}{4}h^{pu}\,F_{mpqr}\,F_{nu}{}^{qr} \qquad (5.1.2c)\end{aligned}$$

- (3.2.4b) には uncontracted indices が 1 つある。従って 2 通りの方程式 $M=\mu,m$ が登場する:

$$\begin{aligned}0 &= \widehat{\Gamma}^{\mu NP}\Big(\partial_N\psi_P - \frac{i}{2}\omega_N{}^{AB}\,\Sigma_{AB}\,\psi_P\Big) + \frac{1}{96}\widehat{\Gamma}^{\mu NPQRS}F_{PQRS}\,\psi_N + \frac{1}{8}g^{\mu[\rho}\widehat{\Gamma}^{\sigma\tau}g^{\kappa]\nu}F_{\rho\sigma\tau\kappa}\,\psi_\nu \qquad (5.1.3a) \\ 0 &= \widehat{\Gamma}^{mNP}\Big(\partial_N\psi_P - \frac{i}{2}\omega_N{}^{AB}\,\Sigma_{AB}\,\psi_P\Big) + \frac{1}{96}\widehat{\Gamma}^{mNPQRS}F_{PQRS}\,\psi_N + \frac{1}{8}g^{m[p}\widehat{\Gamma}^{qr}g^{s]n}F_{pqrs}\,\psi_n \qquad (5.1.3b)\end{aligned}$$

- (3.2.4c) には uncontracted indices が 3 つある。従って 4 通りの方程式が登場する (Freund-Rubin ansatz より gray scaled terms は全て消失する)[1]:

$$\begin{aligned}0 &= e\,\nabla^Q\mathcal{F}_{Q\mu\nu\rho} \\ &\quad - e\Big\{F_{\sigma\mu\nu\rho}\Big(\nabla^Q h_Q{}^\sigma - \frac{1}{2}\partial^\sigma h_Q{}^Q\Big) + F_{\lambda\sigma\nu\rho}\nabla^\lambda h_\mu{}^\sigma + F_{\lambda\mu\sigma\rho}\nabla^\lambda h_\nu{}^\sigma + F_{\lambda\mu\nu\sigma}\nabla^\lambda h_\rho{}^\sigma\Big\}\end{aligned}$$

[1] background spacetime が direct product になっているという事から、covariant derivative が ordinary derivative に reduce する $\nabla_p h_{\mu\nu} = \partial_p h_{\mu\nu}$ になるという関係式を途中で用いている。

$$
\begin{aligned}
& - \frac{1}{576} \, \varepsilon^{\tau\kappa\lambda QRSUVWXY} \mathcal{F}_{QRSU} \, g_{\mu\tau} \, g_{\nu\kappa} \, g_{\rho\lambda} \, F_{VWXY} & \text{(5.1.4a)} \\
0 \ = \ & e \, \nabla^Q \mathcal{F}_{Qm\nu\rho} - e \, F_{\lambda\sigma\nu\rho} \nabla^\lambda h_m{}^\sigma - \frac{1}{576} \, \varepsilon^{z\kappa\lambda QRSUVWXY} \mathcal{F}_{QRSU} \, g_{mz} \, g_{\nu\kappa} \, g_{\rho\lambda} \, F_{VWXY} & \text{(5.1.4b)} \\
0 \ = \ & e \, \nabla^Q \mathcal{F}_{Qmn\rho} - e \, F_{qmns} \nabla^q h_\rho{}^s - \frac{1}{576} \, \varepsilon^{zk\lambda QRSUVWXY} \mathcal{F}_{QRSU} \, g_{mz} \, g_{nk} \, g_{\rho\lambda} \, F_{VWXY} & \text{(5.1.4c)} \\
0 \ = \ & e \, \nabla^Q \mathcal{F}_{Qmnp} \\
& - e \Big\{ F_{smnp} \Big(\nabla^Q h_Q{}^s - \frac{1}{2} \partial^s h_Q{}^Q \Big) + F_{qsnp} \nabla^q h_m{}^s + F_{qmsp} \nabla^q h_n{}^s + F_{qmns} \nabla^q h_p{}^s \Big\} \\
& - \frac{1}{576} \, \varepsilon^{zklQRSUVWXY} \mathcal{F}_{QRSU} \, g_{mz} \, g_{nk} \, g_{pl} \, F_{VWXY} & \text{(5.1.4d)}
\end{aligned}
$$

- (3.2.4d) には uncontracted indices が 5 つあるので、6 通り の方程式が存在する:

$$
\begin{aligned}
0 \ &= \ \nabla_{[\mu} \mathcal{F}_{\nu\rho\sigma\lambda]} & \text{(5.1.5a)} \\
0 \ &= \ \nabla_m \mathcal{F}_{\nu\rho\sigma\lambda} + 4 \nabla_{[\nu} \mathcal{F}_{\rho\sigma\lambda]m} & \text{(5.1.5b)} \\
0 \ &= \ 2 \nabla_{[m} \mathcal{F}_{n]\rho\sigma\lambda} + 3 \nabla_{[\rho} \mathcal{F}_{\sigma\lambda]mn} & \text{(5.1.5c)} \\
0 \ &= \ 3 \nabla_{[m} \mathcal{F}_{np]\sigma\lambda} + 2 \nabla_{[\sigma} \mathcal{F}_{\lambda]mnp} & \text{(5.1.5d)} \\
0 \ &= \ 4 \nabla_{[m} \mathcal{F}_{npq]\lambda} + \nabla_\lambda \mathcal{F}_{mnpq} & \text{(5.1.5e)} \\
0 \ &= \ \nabla_{[m} \mathcal{F}_{npqr]} & \text{(5.1.5f)}
\end{aligned}
$$

5.1.2 Decomposition of Fluctuation Fields

Duff, Pope [1] や、Kim, Romans, van Nieuwenhuizen [3] の論法では、$AdS_p \times S^q$ 全体に広がる fluctuation field $\Phi^{mn\cdots}_{\mu\nu\cdots}(x,y)$ を AdS_p 方向の field $\phi^I_{\mu\nu\cdots}(x)$ と、S^q 方向の field $Y_I^{mn\cdots}(y)$ に次のように分解する:

$$
\Phi^{mn\cdots}_{\mu\nu\cdots}(x,y) \ = \ \sum_I \phi^I_{\mu\nu\cdots}(x) \cdot Y_I^{mn\cdots}(y) \tag{5.1.6}
$$

その後、de Donder gauge-fixing $\nabla_m \Phi^{mn\cdots}_{\mu\nu\cdots} = 0$ を採って計算を行う。(例えば Duff, Nilsson, Pope [12] の section 5, (5.1.14) から (5.1.16) などである。) これが有利な点は、$Y_I^{mn\cdots}(y)$ が S^q の球面調和関数 (S^q 方向の Laplace 方程式の固有関数) であると同時に、isometry group $SO(q+1)$ の Killing vector そのものであってもよい点である [1]。de Donder gauge-fixing の方程式は、ちょうど Killing vector equation として書き直すことが出来るからである。例えば $h_{\mu m}(x,y)$ という field に対しては次のように分解するとよい:

$$
h_{\mu m}(x,y) \ = \ \sum_I B^I_\mu(x) K^I_m(y) \quad \text{and} \quad \nabla^m h_{\mu m} \ = \ 0 \ \ \text{(de Donder gauge-fixing condition)} \tag{5.1.7a}
$$

If we set K^I_m is a Killing vector, i.e., $\nabla_m K^I_n + \nabla_n K^I_m = 0$, this decomposition is consistent:

$$
\nabla^m h_{\mu m} \ = \ \frac{1}{2} \sum_I B^I_\mu \, g^{mn} \big(\nabla_m K^I_n + \nabla_n K^I_m \big) \ = \ 0 \tag{5.1.7b}
$$

ここで index I は isometry group $SO(q+1)$ の algebra $\mathfrak{so}(q+1)$ の次元 $q(q+1)/2$ だけ走る。(定義の詳細は各議論に委ねる。) ちなみに、この Killing vector K^I_m は S^q の isometry group $SO(q+1)$ の commnutation relation

$[K^I, K^J] \sim f^{IJ}{}_K K^K$ をみたす。これにより、AdS_p に住む vector field B^I_μ は $SO(q+1)$ gauge group を持つことになる (see section 1.3 in [12])。

さらに、この decomposition を 11-dimensional field equations に代入した際に得られる 4-dimensional field equations が consistent であるようにしなければならない。その議論は最初明確な形で Duff, Nilsson, Pope, Warner [20] によってなされているが、この概念自体は [1] に既に取り入れられている。近年の文献に於いては Duff [21], Nastase, Vaman, van Nieuwenhuizen [22], Hoxha, Martinez-Acosta, Pope [23] に詳細が書かれてある。

5.1.3 計量からの fluctuation field h_{MN} について

[1, 3] などの文献によると、AdS_p 方向に揺らぐ field $h_{\mu\nu}$ は、次のように Weyl shift を施す[2]:

$$h_{\mu\nu} \;=\; h'_{\mu\nu} - \frac{1}{p-2} g_{\mu\nu}\, h^m{}_m \tag{5.1.8}$$

我々は、$h'_{\mu\nu}$ を最終的に 4-dimensional spacetime の massless graviton と同定したい。つまり $h'_{\mu\nu}$ は、symmetric, transverse, traceless tensor であるように定義したい。

[2] Weyl shift を用いた文献は [1, 3] であるが、Weyl shift そのものの解説は、簡単には [16] にある。

Chapter 6

Supergravity on $AdS_4 \times S^7$

Penrose limit を意識するため、$AdS_4 \times S^7$ background 上の spectrum の考察において、AdS_4 の半径 R_A と S^7 半径 R_S の関係を $R_S = 2R_A$ とする。

6.1 Freund-Rubin Ansatz

我々は、$AdS_4 \times S^7$ の Penrose limit (そして適当な rescale) である Kowalski-Glikman (KG) solution 上での Freund-Rubin ansatz を知っている。それを

$$F^{\mathrm{KG}}_{+123} \;=\; \mu \tag{6.1.1}$$

と記述しておこう。Penrose limit と rescale を通じてこれを与える、元々の $AdS_4 \times S^7$ 上での ansatz はどうなっているのであろうか。それを求める。

$AdS_4 \times S^7$ での Freund-Rubin ansatz を

$$F^{AdS}_{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; M \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \qquad \text{or} \qquad F^{AdS}_{0123} \;=\; M\sqrt{|g_{AdS}|} \tag{6.1.2}$$

とする。但し、$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は completely anti-symmetric tensor である。それぞれの記号は次で定義される:

$$g_{AdS} \;=\; \det(g_{\mu\nu}) \;=\; -\frac{R_A^2}{(X^{-1})^2} \tag{6.1.3a}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; \sqrt{|g_{AdS}|}\, E^{-1}_{\mu\nu\rho\sigma} \qquad E^{-1}_{0123} \;=\; 1 \tag{6.1.3b}$$

ここで $E^{-1}_{\mu\nu\rho\sigma}$ は weight が -1 の invariant tensor density である [14]。さらに $E^{-1}_{\mu\nu\rho\sigma}$ の逆である $E^{\mu\nu\rho\sigma}$ を定義しよう:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; \frac{\sqrt{|g_{AdS}|}}{g_{AdS}} E^{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; -\frac{1}{\sqrt{|g_{AdS}|}} E^{\mu\nu\rho\sigma} \qquad E^{0123} \;=\; 1 \tag{6.1.4}$$

これは weight 1 の invariant tensor density である。

---

2 つの invariant tensor density $E^{-1}_{\mu\nu\rho\sigma}$, $E^{\mu\nu\rho\sigma}$ の関係は

$$E^{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; g_{AdS}\, g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\, g^{\rho\gamma}\, g^{\sigma\delta}\, E^{-1}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{6.1.5a}$$

$$E^{\mu\nu\rho\sigma}\, E^{-1}_{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; 4! \tag{6.1.5b}$$

$$E^{\mu\nu\rho\sigma}\, E^{-1}_{\alpha\nu\rho\sigma} \;=\; 3!\, \delta^{\mu}_{\alpha} \tag{6.1.5c}$$

$$E^{\mu\nu\rho\sigma}\, E^{-1}_{\alpha\beta\rho\sigma} \;=\; 2!\left(\delta^{\mu}_{\alpha}\,\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\,\delta^{\nu}_{\alpha}\right) \;=\; 2!\cdot 2!\,\delta^{\mu}_{[\alpha}\,\delta^{\nu}_{\beta]} \tag{6.1.5d}$$

$$\begin{aligned} E^{\mu\nu\rho\sigma}\, E^{-1}_{\alpha\beta\gamma\sigma} \;&=\; \left\{\delta^{\mu}_{\alpha}\,\delta^{\nu}_{\beta}\,\delta^{\rho}_{\gamma} + \delta^{\mu}_{\beta}\,\delta^{\nu}_{\gamma}\,\delta^{\rho}_{\alpha} + \delta^{\mu}_{\gamma}\,\delta^{\nu}_{\alpha}\,\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\,\delta^{\nu}_{\alpha}\,\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\mu}_{\alpha}\,\delta^{\nu}_{\gamma}\,\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\gamma}\,\delta^{\nu}_{\beta}\,\delta^{\rho}_{\alpha}\right\} \\ &=\; 3!\delta^{\mu}_{[\alpha}\,\delta^{\nu}_{\beta}\,\delta^{\rho}_{\gamma]} \end{aligned} \tag{6.1.5e}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\, g^{\rho\gamma}\, g^{\sigma\delta}\, \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{6.1.6a}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; -4! \tag{6.1.6b}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} \;=\; -3!\,\delta^{\mu}_{\alpha} \tag{6.1.6c}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \;=\; -2!\,\big(\delta^{\mu}_{\alpha}\,\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\,\delta^{\nu}_{\alpha}\big) \;=\; -2!\cdot 2!\,\delta^{\mu}_{[\alpha}\,\delta^{\nu}_{\beta]} \tag{6.1.6d}$$

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} \;&=\; -\Big\{\delta^{\mu}_{\alpha}\,\delta^{\nu}_{\beta}\,\delta^{\rho}_{\gamma} + \delta^{\mu}_{\beta}\,\delta^{\nu}_{\gamma}\,\delta^{\rho}_{\alpha} + \delta^{\mu}_{\gamma}\,\delta^{\nu}_{\alpha}\,\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\,\delta^{\nu}_{\alpha}\,\delta^{\rho}_{\gamma} - \delta^{\mu}_{\alpha}\,\delta^{\nu}_{\gamma}\,\delta^{\rho}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\gamma}\,\delta^{\nu}_{\beta}\,\delta^{\rho}_{\alpha}\Big\} \\ &=\; -3!\delta^{\mu}_{[\alpha}\,\delta^{\nu}_{\beta}\,\delta^{\rho}_{\gamma]}\end{aligned} \tag{6.1.6e}$$

である。これらを用いると、一般の完全反対称 tensor $G_{\mu\nu\rho\sigma}$, $G^{\mu\nu\rho\sigma}$ は

$$G_{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; G_{0123}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \qquad G^{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; g^{\mu\alpha}\,g^{\nu\beta}\,g^{\rho\gamma}\,g^{\sigma\delta}\,G_{\alpha\beta\gamma\delta} \;=\; G_{0123}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{6.1.7}$$

の様に記述することが可能となる。

$AdS_4\times S^7$ 上での Freund-Rubin ansatz を (6.1.2) としたとき、KG solution での ansatz (6.1.1) を与える M を見付けるのがここの課題である。KG solution に行くために、まずは light-cone coordinates を導入する。それは Penrose limit を見越して

$$\left\{\begin{aligned} x^{+} \;&=\; \frac{1}{2R_A}\big(x^0 + y^{\natural}\big) \\ x^{-} \;&=\; R_A\big(x^0 - y^{\natural}\big)\end{aligned}\right. \qquad \text{or} \qquad \left\{\begin{aligned} x^{0} \;&=\; \frac{1}{2}\Big(2R_A x^{+} + \frac{1}{R_A}x^{-}\Big) \\ y^{\natural} \;&=\; \frac{1}{2}\Big(2R_A x^{+} - \frac{1}{R_A}x^{-}\Big)\end{aligned}\right. \tag{6.1.8}$$

と定義される (rescale は含めない)。$x^{\pm}$ それぞれの weight が異なるのは Rosen coordinates や Brinkmann coordinates を見越した事である。この座標系では、Freund-Rubin ansatz $F^{\rm LC}$ は次のようになる:

$$F^{\rm LC}_{+123} \;=\; \frac{\partial x^0}{\partial x^{+}}F^{AdS}_{0123} \;=\; R_A M\sqrt{-g_{AdS}} \qquad F^{\rm LC}_{-123} \;\equiv\; 0 \tag{6.1.9}$$

但し、standard な議論と同様にして、

$$F_{\natural 123} \;\equiv\; 0 \tag{6.1.10}$$

としている [12]。また、KG solution では $F_{-123} = 0$ であるので、ここでもそれを採用している。さて、Penrose limit を採る。ここでは $\rho=\theta=0$, $t=2\varphi$ という null geodesics 近傍で $R_A\to\infty$ を採ることにする。このとき、

$$-g_{AdS} \;=\; \frac{R_A^2}{(X^{-1})^2} \;=\; \frac{1}{\cosh^2\rho\cos^2 t} \;\to\; 1 \tag{6.1.11}$$

となる。また flux も finite で生き残る為には $M = M'/R_A$ と再定義するとよい。この時、

$$F^{\rm LC}_{+123} \;\to\; M' \;\equiv\; F^{\rm LC,PL}_{+123} \tag{6.1.12}$$

となる。さらに、rescaling を行う。appendix 10.3 では克明には記述していないが、

$$x^{+} \;\to\; \frac{\mu}{3}x^{+} \qquad \therefore\;\; x^{+}_{\rm KG} \;=\; \frac{3}{\mu}x^{+}_{\rm LC} \tag{6.1.13a}$$

$$x^{-} \;\to\; \frac{3}{\mu}x^{-} \qquad \therefore\;\; x^{-}_{\rm KG} \;=\; \frac{\mu}{3}x^{-}_{\rm LC} \tag{6.1.13b}$$

を導入する。これにより KG solution 上の ansatz が得られる:

$$F^{\rm KG}_{+123} \;=\; \frac{\partial x^+_{\rm LC}}{\partial x^+_{\rm KG}} F^{\rm LC,PL}_{+123} \;=\; \frac{\mu}{3} M' \;\equiv\; \mu \tag{6.1.14}$$

これより、

$$M \;=\; \frac{M'}{R_A} \;=\; \frac{3}{R_A} \tag{6.1.15}$$

となるので、$AdS_4 \times S^7$ 上の ansatz は

$$F^{AdS}_{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; \frac{3}{R_A}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{6.1.16}$$

で与えられる事がわかる[1]。

6.2 Field Equations for Fluctuation Fields

まず、Freund-Rubin ansatz (6.1.16) の下での classical field equations (3.1.8), (3.2.5), supercovariant derivative $\mathcal{D}_M$ (3.1.6) を分解しておこう:

$$\mathcal{R} \;=\; -\frac{1}{6}M^2\,, \qquad \mathcal{R}_{\mu\nu} \;=\; -\frac{1}{3}M^2\, g_{\mu\nu}\,, \qquad \mathcal{R}_{mn} \;=\; \frac{1}{6}M^2\, g_{mn}\,, \tag{6.2.1a}$$

$$0 \;=\; \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \Psi_P + \frac{1}{96} M\, \epsilon_{\rho\sigma\lambda\tau}\Big(\widehat{\Gamma}^{MN\rho\sigma\lambda\tau} + 12 g^{M[\rho}\widehat{\Gamma}^{\sigma\lambda} g^{\tau]N}\Big)\Psi_N\,, \tag{6.2.1b}$$

$$\mathcal{D}_\mu \;=\; \Big(\partial_\mu - \frac{i}{2}\omega_\mu{}^{\alpha\beta}\,\Sigma_{\alpha\beta}\Big) + \frac{1}{288} M\, \epsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}\Big(\widehat{\Gamma}^{\nu\rho\sigma\lambda}{}_\mu - 8\delta^{[\nu}_\mu \widehat{\Gamma}^{\rho\sigma\lambda]}\Big) \tag{6.2.1c}$$

$$\mathcal{D}_m \;=\; \Big(\partial_m - \frac{i}{2}\omega_m{}^{ab}\,\Sigma_{ab}\Big) + \frac{1}{288} M\, \epsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}\,\widehat{\Gamma}^{\nu\rho\sigma\lambda}{}_m \tag{6.2.1d}$$

これら、特に (6.2.1a) は (8.1.19) をきちんと再現している。

equations of motion for fluctuation fields については、Freund-Rubin ansatz (6.1.16) の下では次のようになる:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{\mu\nu} \;&=\; -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_\nu\nabla_\mu h_P{}^P - \nabla_\nu\nabla^\rho h_{\mu\rho} - \nabla_\mu\nabla^\rho h_{\nu\rho}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{\mu\nu} \\
&=\; -\frac{1}{3}M^2 h_{\mu\nu} - \frac{2}{3}M g_{\mu\nu}\,\mathcal{F}_{0123} + \frac{1}{3}M^2 g_{\mu\nu}\, h_\rho{}^\rho
\end{aligned} \tag{6.2.2a}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{\mu n} \;&=\; -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_n\nabla_\mu h_P{}^P - \nabla_n\nabla^\rho h_{\mu\rho} - \nabla_\mu\nabla^\rho h_{n\rho}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{\mu n} \\
&=\; \frac{1}{6}M^2 h_{\mu n} + \frac{1}{12}M g_{\mu\tau}\,\epsilon^{\tau\rho\sigma\lambda}\,\mathcal{F}_{n\rho\sigma\lambda}
\end{aligned} \tag{6.2.2b}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{mn} \;&=\; -\frac{1}{2}\Big\{\nabla_n\nabla_m h_P{}^P - \nabla_n\nabla^\rho h_{m\rho} - \nabla_m\nabla^\rho h_{n\rho}\Big\} + \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{mn} \\
&=\; \frac{1}{6}M^2 h_{mn} + \frac{1}{3}M g_{mn}\mathcal{F}_{0123} - \frac{1}{6}M^2 g_{mn}\, h_\rho{}^\rho
\end{aligned} \tag{6.2.2c}$$

$$0 \;=\; \widehat{\Gamma}^{\mu NP}\Big(\partial_N\psi_P - \frac{i}{2}\omega_N{}^{AB}\,\Sigma_{AB}\,\psi_P\Big) + \frac{1}{8} M g^{\mu[\rho}\widehat{\Gamma}^{\sigma\tau} g^{\kappa]\nu}\epsilon_{\rho\sigma\tau\kappa}\,\psi_\nu \tag{6.2.3a}$$

[1] 以後の計算でももっぱら M という記号を用いておくと見通しがよい。

$$0 \; = \; \widehat{\Gamma}^{mNP}\Big(\partial_N \psi_P - \frac{i}{2}\omega_N{}^{AB}\,\Sigma_{AB}\,\psi_P\Big) - \frac{1}{4}M\widehat{\Gamma}^{mn0123}\,\psi_n \qquad (6.2.3b)$$

$$0 \; = \; \nabla^\sigma \mathcal{F}_{\sigma\mu\nu\rho} - M\Big\{\epsilon_{\sigma\mu\nu\rho}\Big(\nabla^\lambda h_\lambda{}^\sigma - \frac{1}{2}\partial^\sigma h_Q{}^Q\Big) + \epsilon_{\lambda\sigma\nu\rho}\nabla^\lambda h_\mu{}^\sigma + \epsilon_{\lambda\mu\sigma\rho}\nabla^\lambda h_\nu{}^\sigma + \epsilon_{\lambda\mu\nu\sigma}\nabla^\lambda h_\rho{}^\sigma\Big\} \qquad (6.2.4a)$$

$$0 \; = \; \nabla^\sigma \mathcal{F}_{\sigma m\nu\rho} - M\,\epsilon_{\lambda\sigma\nu\rho}\nabla^\lambda h_m{}^\sigma \qquad (6.2.4b)$$

$$0 \; = \; \nabla^\sigma \mathcal{F}_{\sigma mn\rho} \qquad (6.2.4c)$$

$$0 \; = \; e\,\nabla^\sigma \mathcal{F}_{\sigma mnp} + \frac{1}{24}M\sqrt{-g_{AdS}}\,\varepsilon^{0123zklqrsu}\mathcal{F}_{qrsu}\,g_{mz}\,g_{nk}\,g_{pl} \qquad (6.2.4d)$$

また、全ての fluctuation fields に対して次のように de Donder and Lorentz type gauge-fixing condition を課している [3]:

$$\nabla^m h_{mM} \; \equiv \; 0 \qquad \nabla^m \mathcal{F}_{mNPQ} \; \equiv \; 0 \qquad D^m \psi_m \; \equiv \; \widehat{\Gamma}^m \psi_m \; \equiv \; 0 \qquad (6.2.5)$$

但し、gravitino の gauge-fixing は、bosonic fields の Lorentz type gauge-fixing を真似たもの (compact S^7 方向にだけ Lorentz type gauge-fixing condition を課す) であり、これが正しいという保証は (現時点では) ない。

Bianchi identity からの揺らぎ (5.1.5) は次のように与えられる:

$$0 \; = \; \partial_m \mathcal{F}_{\nu\rho\sigma\lambda} + 4\nabla_{[\nu}\mathcal{F}_{\rho\sigma\lambda]m} \qquad (6.2.6a)$$

$$0 \; = \; 2\nabla_{[m}\mathcal{F}_{n]\rho\sigma\lambda} + 3\nabla_{[\rho}\mathcal{F}_{\sigma\lambda]mn} \qquad (6.2.6b)$$

$$0 \; = \; 3\nabla_{[m}\mathcal{F}_{np]\sigma\lambda} + 2\nabla_{[\sigma}\mathcal{F}_{\lambda]mnp} \qquad (6.2.6c)$$

$$0 \; = \; 4\nabla_{[m}\mathcal{F}_{npq]\lambda} + \partial_\lambda \mathcal{F}_{mnpq} \qquad (6.2.6d)$$

$$0 \; = \; \nabla_{[m}\mathcal{F}_{npqr]} \qquad (6.2.6e)$$

6.3 Four-Seven Splitting, Killing Spinor Equation

実は Freund-Rubin ansatz (6.1.16) を代入しただけでは、それをみたす background は $AdS_4 \times S^7$ であるとは限らない。たとえ 4-dimensional spacetime を maximally symmetric space である AdS_4 であっても、残りの 7-dimensional internal space には無数の可能性が存在する。例えば、round S^7 解では 32 supercharge を残すが、maximally supersymmetric ではない squashed S^7 ($\mathcal{N}=1$, つまり 4 supercharges) の解も存在する。そこで、新たな ansatz を課す。それは、11-dimensional spacetime gravitino Ψ_M の supersymmetry transformation $\delta\Psi_M$ の期待値がゼロになれというものである [1, 17]:

$$\langle \delta\Psi_M \rangle \; = \; 2\langle \mathcal{D}_M \varepsilon \rangle \; \equiv \; 0 \qquad (6.3.1)$$

ここで $\varepsilon(x,y)$ は 11-dimensional Majorana spinor である fermionic parameter (SUSY parameter, 32 degrees of freedom) である。11-dimensional spacetime が Freund-Rubin ansatz (6.1.16) によって $4+7$ に分解されるので、この SUSY parameter $\varepsilon(x,y)$ も分解される:

$$\varepsilon(x,y) \; = \; \varepsilon^I(x)\eta^I(y) \qquad (6.3.2)$$

ここで $\varepsilon^I(x)$ は 4-dimensional spacetime Majorana spinor (4 degrees of freedom) であり、$\eta^I(y)$ は 7-dimensional internal space Majorana spinor (8 degrees of freedom) である[2]。index I は $\varepsilon(x)$ に伴ってついているものでなく、「ある条件」をみたす $\eta(y)$ の「個数」を表すものである。ここで、anti-commuting な性質は 4-dimensional spacetime の spinor parameter $\varepsilon^I(x)$ に与える。7-dimensional space spinor parameter $\eta^I(y)$ は commuting spinor である。

これにあわせて、Dirac gamma matrix $\widehat{\Gamma}^A$ も次のように分解される:

$$\widehat{\Gamma}^A = \left(\gamma^\alpha \otimes \mathbf{1}, \gamma_5 \otimes \Gamma^a\right) \qquad \alpha = 0,1,2,3 \qquad a = 4,5,\cdots,10 \tag{6.3.3a}$$

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2\eta^{\alpha\beta} \qquad \{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\delta^{ab} \qquad \gamma_5 = i^{-1}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{6.3.3b}$$

ここで、γ^α は 4-dimensional Minkowski spacetime での gamma matrices であり、Γ^a は 7-dimensional Euclidean space での gamma matrices である [25, 28]。

11-dimensional spacetime での Lorentz generator の spinor 表現 (3.1.7c) より、four-seven split した後でも

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\widehat{\Gamma}_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\gamma_{\alpha\beta} \otimes \mathbf{1} \qquad\qquad \Sigma_{ab} = \frac{i}{2}\widehat{\Gamma}_{ab} = \frac{i}{2}\mathbf{1} \otimes \Gamma_{ab} \tag{6.3.4}$$

となる[3]。Lorentz algebra は

$$-\frac{1}{2}[\gamma_{\alpha\beta}, \gamma_{\gamma\delta}] = \eta_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} + \eta_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma} - \eta_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta} \tag{6.3.5a}$$

$$-\frac{1}{2}[\Gamma_{ab}, \Gamma_{cd}] = \delta_{ac}\Gamma_{bd} + \delta_{bd}\Gamma_{ac} - \delta_{ad}\Gamma_{bc} - \delta_{bc}\Gamma_{ad} \tag{6.3.5b}$$

という関係を持つ (符号に注意!)。また、

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}\delta_\mu^{[\nu}\widehat{\Gamma}^{\rho\sigma\lambda]} &= \frac{3!}{4!}\epsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}\left(\delta_\mu^\nu\widehat{\Gamma}^{\rho\sigma\lambda} - \delta_\mu^\rho\widehat{\Gamma}^{\sigma\lambda\nu} + \delta_\mu^\sigma\widehat{\Gamma}^{\lambda\nu\rho} - \delta_\mu^\lambda\widehat{\Gamma}^{\nu\rho\sigma}\right) = \epsilon_{\mu\rho\sigma\lambda}\widehat{\Gamma}^{\rho\sigma\lambda} = \epsilon_{\mu\rho\sigma\lambda}\gamma^{\rho\sigma\lambda} \otimes \mathbf{1} \\
&= -3!\, i\, \gamma_\mu\gamma_5 \otimes \mathbf{1}
\end{aligned} \tag{6.3.6a}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}\widehat{\Gamma}^{\nu\rho\sigma\lambda}{}_\mu &= \epsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}\left(\widehat{\Gamma}^{\nu\rho\sigma\lambda}\widehat{\Gamma}_\mu - 4\delta_\mu^{[\nu}\widehat{\Gamma}^{\rho\sigma\lambda]}\right) = -4!\,\widehat{\Gamma}^{0123}\widehat{\Gamma}_\mu - 4\epsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}\delta_\mu^{[\nu}\widehat{\Gamma}^{\rho\sigma\lambda]} \\
&= 4!\, i\, \gamma_\mu\gamma_5 \otimes \mathbf{1} + 4!\, i\, \gamma_\mu\gamma_5 \otimes \mathbf{1} = 2 \cdot 4!\, i\, \gamma_\mu\gamma_5 \otimes \mathbf{1}
\end{aligned} \tag{6.3.6b}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}\widehat{\Gamma}^{\nu\rho\sigma\lambda}{}_m &= \epsilon_{\nu\rho\sigma\lambda}\left(\widehat{\Gamma}^{\nu\rho\sigma\lambda}\widehat{\Gamma}_m - 4\delta_m^{[\nu}\widehat{\Gamma}^{\rho\sigma\lambda]}\right) = -4!\widehat{\Gamma}^{0123}\widehat{\Gamma}_m \\
&= -4!\, i\, \mathbf{1} \otimes \Gamma_m
\end{aligned} \tag{6.3.6c}$$

となるただしここで

$$\widehat{\Gamma}^{MNPQ}\widehat{\Gamma}_R = \widehat{\Gamma}^{MNPQ}{}_R - 4\delta_R^{[M}\widehat{\Gamma}^{NPQ]} \tag{6.3.7}$$

という恒等式を用いている (see appendix A.2)。さらに

$$\widehat{\Gamma}^{0123} = \gamma^{0123} \otimes \mathbf{1} = \frac{4!}{4!}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \otimes \mathbf{1} = i\gamma_5 \otimes \mathbf{1} \tag{6.3.8a}$$

$$\epsilon_{0\rho\sigma\lambda}\gamma^{\rho\sigma\lambda} = -3!\gamma^{123} = -3!\, i\, \gamma_0\gamma_5 \qquad \to \qquad \epsilon_{\mu\rho\sigma\lambda}\gamma^{\rho\sigma\lambda} = -3!\, i\, \gamma_\mu\gamma_5 \tag{6.3.8b}$$

[2] Minkowski spacetime における spinor の自由度は [25]、Euclidean space における spinor の自由度は [28] を参照。

[3] 7-dimensional Euclidean space がオリジナルの理論だと、$\Sigma_{ab} = -\frac{1}{2}\Gamma_{ab}$ という表現を取ればよいが、ここの議論では 11-dimensional Minkowski space がオリジナルである。

という関係を用いている。curved spacetime index が contract しているので、結果的に gamma matrices γ_5 の導出では単純に tangent space index を用いて表される。vielbein などは登場しない。したがって、weight $\sqrt{-g_{AdS}}$ は登場しない。

分解された SUSY parameter は、(6.3.1) により、それぞれ次の condition をみたす必要が生じる:

$$\mathcal{D}_\mu \varepsilon^I(x) = \Big[\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} + \frac{i}{3}M\gamma_\mu\gamma_5\Big]\varepsilon^I(x) = 0 \tag{6.3.9a}$$

$$\mathcal{D}_m \eta^I(y) = \Big[\partial_m + \frac{1}{4}\omega_m{}^{ab}\Gamma_{ab} - \frac{i}{12}M\Gamma_m\Big]\eta^I(y) = 0 \tag{6.3.9b}$$

ここで、上に挙げた「ある条件」とは (6.3.9b) のことであり、**Killing spinor condition** と呼ばれる。これをみたす 8-component spinor $\eta^I(y)$ の「個数」[4]、つまり Killing spinor の個数が index I の走る数である。4-dimensional spacetime が AdS_4 の場合、spinor parameter $\varepsilon^I(x)$ は (6.3.9a) をみたすので、上の分解 (6.3.2) の下では、最終的に I 個の Majorana spinor $\varepsilon^I(x)$ が存在する。それはつまり、4-dimensional spacetime には $\mathcal{N}=I$ supersymmetry ($4I$ supercharges) が存在することを意味する。例えば、round S^7 の場合は (6.3.9b) をみたす spinor $\eta^I(y)$ は 8 つ存在する (Killing spinor が 8 つ存在する) ため、$I=1,2,\cdots,8$ となり、AdS_4 上には $\mathcal{N}=8$ の supersymmetry (32 supercharges) が存在することになる。一方、squashed S^7 では (6.3.9b) をみたす spinor $\eta^I(y)$ はただ一つ (Killing spinor が 1 つだけ) なので、AdS_4 上には $4\times 1=4$ supercharge だけが保存する [17]。

さらに、(6.3.9) から、次の **integrability condition** と呼ばれる条件も課される:

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\varepsilon^I(x) = 0 \tag{6.3.10a}$$

$$[\mathcal{D}_m, \mathcal{D}_n]\eta^I(y) = 0 \tag{6.3.10b}$$

厳密にいえば、この integrability condition をみたし、かつ (6.2.1a) をみたす時、4-dimensional spacetime が AdS_4、7-dimensional internal space が S^7 であることがわかる ($\eta^I(y)$ が 8 つみたすときは round S^7、1 つだけのときは squashed S^7)。integrability condition (6.3.10) を具体的に記述しよう:

$$\begin{aligned}
0 &= [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\varepsilon^I \\
&= \Big[\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} + \frac{i}{3}M\gamma_\mu\gamma_5\,,\, \partial_\nu + \frac{1}{4}\omega_\nu{}^{\gamma\delta}\gamma_{\gamma\delta} + \frac{i}{3}M\gamma_\nu\gamma_5\Big]\varepsilon^I \\
&= [\partial_\mu, \partial_\nu]\varepsilon^I - \frac{1}{9}M^2[\gamma_\mu\gamma_5, \gamma_\nu\gamma_5]\varepsilon^I \\
&\quad + \frac{1}{4}[\partial_\mu, \omega_\nu{}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}]\varepsilon^I - \frac{1}{4}[\partial_\nu, \omega_\mu{}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}]\varepsilon^I + \frac{1}{16}\omega_\mu{}^{\alpha\beta}\omega_\nu{}^{\gamma\delta}[\gamma_{\alpha\beta}, \gamma_{\gamma\delta}]\varepsilon^I \\
&\quad + \frac{i}{3}M[\partial_\mu, \gamma_\nu\gamma_5]\varepsilon^I - \frac{i}{3}M[\partial_\nu, \gamma_\mu\gamma_5]\varepsilon^I + \frac{i}{12}M\omega_\mu{}^{\alpha\beta}[\gamma_{\alpha\beta}, \gamma_\nu\gamma_5]\varepsilon^I - \frac{i}{12}M\omega_\nu{}^{\alpha\beta}[\gamma_{\alpha\beta}, \gamma_\mu\gamma_5]\varepsilon^I
\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

まず $[\partial_\mu, \partial_\nu]\varepsilon^I = 0$ であり、さらに

$$-\frac{1}{9}M^2[\gamma_\mu\gamma_5, \gamma_\nu\gamma_5]\varepsilon^I = \frac{2}{9}M^2\, e_\mu{}^\alpha\, e_\nu{}^\beta\, \gamma_{\alpha\beta}\varepsilon^I \tag{6.3.12}$$

である。Lorentz algebra (6.3.5b) を用いると、(6.3.11) の第 2 行は

$$\frac{1}{4}[\partial_\mu, \omega_\nu{}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}]\varepsilon^I - \frac{1}{4}[\partial_\nu, \omega_\mu{}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}]\varepsilon^I + \frac{1}{16}\omega_\mu{}^{\alpha\beta}\omega_\nu{}^{\gamma\delta}[\gamma_{\alpha\beta}, \gamma_{\gamma\delta}]\varepsilon^I = \frac{1}{4}\widetilde{R}^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}\,\gamma_{\alpha\beta}\,\varepsilon^I \tag{6.3.13}$$

[4] $\eta^I(y)$ の component の数ではない。

となる。第 3 行は

$$\begin{aligned}&\frac{i}{3}M\Big([\partial_\mu, \gamma_\nu\gamma_5] - [\partial_\nu, \gamma_\mu\gamma_5] + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{\alpha\beta}[\gamma_{\alpha\beta}, \gamma_\nu\gamma_5] - \frac{1}{4}\omega_\nu{}^{\alpha\beta}[\gamma_{\alpha\beta}, \gamma_\mu\gamma_5]\Big)\varepsilon^I \\ &= \frac{i}{3}M\Big\{\partial_\mu\, e_\nu{}^\alpha - \partial_\nu\, e_\mu{}^\alpha + \omega_\mu{}^\alpha{}_\beta\, e_\nu{}^\beta - \omega_\nu{}^\alpha{}_\beta\, e_\mu{}^\beta\Big\}\gamma_\alpha\gamma_5\varepsilon^I \end{aligned} \tag{6.3.14}$$

であるが、torsion free における Cartan structure equation $\mathrm{de}^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta \wedge \mathrm{e}^\beta = 0$ より、ゼロとなる。よって、まとめると

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\varepsilon^I \;=\; \frac{1}{4}\Big[\widetilde{R}^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} + \frac{8}{9}M^2 e_\mu{}^\alpha\, e_\nu{}^\beta\Big]\gamma_{\alpha\beta}\,\varepsilon^I \;\equiv\; 0 \tag{6.3.15a}$$

となる。全く同様に議論を展開すると

$$[\mathcal{D}_m, \mathcal{D}_n]\eta^I \;=\; \frac{1}{4}\Big[\widetilde{R}^{ab}{}_{mn} - \frac{1}{18}M^2 e_m{}^a\, e_n{}^b\Big]\Gamma_{ab}\,\eta^I \;\equiv\; 0 \tag{6.3.15b}$$

となることがわかる。

6.4 Decomposition of Fluctuation Fields

Duff, Pope [1] に従って $h_{MN}(x,y)$ を分解する。$h_{\mu\nu}(x,y)$ については次の Weyl shift (5.1.8) を施す:

$$h_{\mu\nu} \;=\; h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\, h_m{}^m \tag{6.4.1}$$

ここで $g_{\mu\nu}$ は background AdS_4 metric である。

さて、各 fluctuation を four-dimensional fields と internal space fields に分解しよう:

$$h'_{\mu\nu}(x,y) \;=\; h'_{\mu\nu}(x) \tag{6.4.2a}$$

$$h_{\mu n}(x,y) \;=\; \sum_{i,j} B_\mu^{[ij]}(x)\cdot K_n^{[ij]}(y) \tag{6.4.2b}$$

$$h_{mn}(x,y) \;=\; \sum_{i,j,\ell} S^{(ij)}(x)\cdot\Big[K_{(m}^{[i\ell]}K_{n)}^{[\ell j]} - \alpha_1\, g_{mn}K_p^{[i\ell]}K^{[\ell j]p}\Big](y) \tag{6.4.2c}$$

g_{mn} は S^7 background metric である。また、$K_m^{[ij]}(y)$ は S^7 spherical harmonics であると同時に、S^7 の isometry group $SO(8)$ の Killing vector とする。index $i,j,\cdots$ は $SO(8)$ vector index として 1 から 8 まで走る。そのため $K_m^{[ij]}(y)$ は ${}_8C_2 = 28$ 個の Killing vector が存在する。そのため four-dimensional spacetime vector $B_\mu^{[ij]}(x)$ も 28 個存在する。同様に four-dimensional spacetime scalar となる $S^{(ij)}(x)$ は $SO(8)$ vector index を、symmetric traceless に持つように定義され、35 個存在する。なお、定数 α_1 は Duff, Pope [1] では

$$\alpha_1 \;=\; \frac{1}{9} \tag{6.4.3}$$

であるが、何故この値なのか理解していないため、未定の定数としておこう。(他にも理由を理解していない factor が沢山出てくる。)

S^7 上の 28 個の Killing vector $K_m^{[ij]}(y)$ が登場する理由は、先にも書いたが de Donder gauge と consistent にするためである。Killing vector equation は

$$\nabla_{(m} K_{n)}^{[ij]} \;=\; \frac{1}{2}\Big(\nabla_m K_n^{[ij]} + \nabla_n K_m^{[ij]}\Big) \;=\; 0 \tag{6.4.4}$$

であり、これと de Donder gauge (6.2.5) を consistent にする field h_{MN} の decomposition は (6.4.2) で与えられる [1][5]。

さらに $\mathcal{F}_{MNPQ}$ について、まずは $h'_{\mu\nu}$ 同様 shift させておこう。$\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\sigma}$, $\mathcal{F}_{\mu\nu\rho q}$, $h'_{\mu\nu}$, $h_m{}^m$ それぞれが互いに mixing をするように次のように定義する:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; \mathcal{F}'_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{2} M \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\big(h'_\lambda{}^\lambda - h_m{}^m\big) \tag{6.4.5a}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu\rho q} \;=\; \mathcal{F}'_{\mu\nu\rho q} + \alpha_2\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \nabla^\sigma \nabla_q h_m{}^m \tag{6.4.5b}$$

(6.4.5a) の shift factor は (5.1.8) と同様に $1/(4-2)$ で与えるが、(6.4.5b) に対する指標を知らないので、ここでも未定の定数 α_2 を用いている。さらに、$\mathcal{F}_{\mu\nu pq}$ と B_μ の mixing を考慮して

$$\mathcal{F}_{\mu\nu pq} \;=\; \mathcal{F}'_{\mu\nu pq} - \alpha_3\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \nabla^\rho B^{\sigma\,[ij]} \cdot K_{[p}^{[i\ell]} K_{q]}^{[\ell j]} \tag{6.4.5c}$$

と定義しておく。α_3 も未定の定数である。ここで登場する $h_m{}^m$ は (6.4.2c) を用いて

$$h_m{}^m \;=\; \big(1-\alpha_1\big) S^{(ij)} \cdot K_m^{[i\ell]} K^{[\ell j]m} \tag{6.4.6}$$

で与えられている。この条件の下での flux $\mathcal{F}_{MNPQ}$ の decomposition は次で与えられる [1]:

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu\rho\sigma}(x,y) \;=\; 0 \tag{6.4.7a}$$

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu\rho q}(x,y) \;=\; 0 \tag{6.4.7b}$$

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu pq}(x,y) \;=\; 0 \tag{6.4.7c}$$

$$\mathcal{F}_{\mu npq}(x,y) \;=\; \sum_{i,j,k,\ell} \alpha_4\, \partial_\mu P^{[ijk\ell]}(x) \cdot \big(\nabla_{[n} K_p^{[ij]}\big) K_{q]}^{k\ell]}(y) \tag{6.4.7d}$$

$$\mathcal{F}_{mnpq}(x,y) \;=\; \sum_{i,j,k,\ell} P^{[ijk\ell]}(x) \cdot \Big[\nabla_{[m} K_n^{[ij]}\Big]\Big[\nabla_p K_{q]}^{k\ell]}\Big](y) \tag{6.4.7e}$$

$P^{[ijk\ell]}(x)$ は、four-dimensional spacetime では pseudo scalar であり、$SO(8)$ vector index について self-dual として定義される。そのため $P^{[ijk\ell]}$ は 35 個存在する。

実際は上の decomposition 全てを導く必要があるが、すでに Duff et. al. [1, 17] によって結果が与えられている。Duff の notation と自分のそれとが若干異なるためにここまに未定の定数 α_i $(i=1,2,\cdots,4)$ が登場したが、decomposed fluctuation fields (6.4.2), (6.4.7) を equations of motion (6.2.2), (6.2.3), (6.2.4) と Bianchi identity (6.2.6) に代入し、α_i を導くことで、fluctuation fields を解いたと見做す。(当然ながら、さらに非自明な方程式も登場する。それが AdS space 上での “free” field equations に近い形であろう。) また、以後は $SO(8)$ vector index の summation symbol は省略する。

[5] この Killing vector は後で Killing spinor で記述されるが、ここではまだ言及しない。

6.5 Penrose Limit

ここでようやく本題である[6]。

$AdS_4 \times S^7$ background metric の Penrose limit は appendix 10.3 に掲載されている。これに伴い、fluctuation fields が [2] に繋がるか否かを確認する。AdS oscillator method に関する Penrose limit として [30] があるので、参考になるかもしれない。

Penrose limit は

$$R_A\rho, R_A\theta \;:\; \text{finite} \qquad \rho,\theta \;\to\; 0 \qquad R_A \;\to\; \infty \tag{6.5.1}$$

を採る操作である。

実は議論は二段階存在する:

1. gauge-fixing condition が Penrose limit で繋がることを見る

   $AdS_4 \times S^7$ 上での de Donder and Lorentz type gauge-fixing condition $\nabla^m \phi_m(x,y) = 0$ が、KG solution 上での light-cone gauge-fixing condition $\phi_-(x,y) = 0$ に繋がることを示す。考察する spacetime は 11-dimensions 全体である。

2. fluctuation fields の具体的な繋がりを見る

   Penrose limit を採る際に compactified S^7 が「開く」ので、この議論もやはり 11-dimensions 全体で考える。つまり AdS_4 上の fields $B_\mu^{[ij]}(x)$, etc. の部分だけを見るのではなく、S^7 上の $K_m^{[ij]}(y)$, etc. も同時に考えて、$h_{\mu m}(x,y) = B_\mu^{[ij]} K_m^{[ij]}$ のまま考察する。その際、light-cone coordinates に座標変換して、fields を混合させて Penrose limit を採る。

$AdS_4 \times S^7$ 上の fluctuation fields が、KG solution 上の fluctuation fields に one-to-one で繋がることを示したければ、実は 1. だけで良い。あらわな関係を追究するなら、2. まで必要である。ここまでの議論は実は 2. のための準備であった。

[6] 2003 9/29 現在、果たしてこの議論は有意義なものであるのか否かが甚だ疑問に思えて来ている。

Chapter 7

Supergravity on $AdS_7 \times S^4$

Penrose limit を意識するため、$AdS_7 \times S^4$ background 上の spectrum の考察において、AdS_7 の半径 R_A と S^4 半径 R_S の関係を $R_A = 2R_S$ とする。ちなみに、この内容については Pilch, van Nieuwenhuizen, Townsend [16] を参照。

7.1 Freund-Rubin Ansatz

我々は、$AdS_7 \times S^4$ の Penrose limit (そして適当な rescale) である Kowalski-Glikman (KG) solution 上での Freund-Rubin ansatz (6.1.1) を知っている。Penrose limit と rescale、そして座標の入れ換えを通じてこれを与える、元々の $AdS_7 \times S^4$ 上での ansatz はどうなっているのであろうか。それを求める。

$AdS_7 \times S^4$ での Freund-Rubin ansatz を

$$F^S_{mnps} = N\epsilon_{mnpq} \qquad \text{or} \qquad F^S_{789\natural} = N\sqrt{|g_4|} \tag{7.1.1}$$

とする。但し、ϵ_{mnpq} は completely anti-symmetric tensor である。それぞれの記号は次で定義される:

$$g_4 = \det(g_{mn}) = \frac{R_S^2}{(Y^{11})^2} \tag{7.1.2a}$$

$$\epsilon_{mnpq} = \sqrt{|g_4|}\, E^{-1}_{mnpq} \qquad E^{-1}_{789\natural} = 1 \tag{7.1.2b}$$

ここで $E^{-1}_{789\natural}$ は weight が -1 の completely antisymmetric invariant tensor density である。E^{-1}_{mnpq} の逆である E^{mnpq} は

$$\epsilon^{mnpq} = \frac{\sqrt{|g_4|}}{g_4} E^{mnpq} = \frac{1}{\sqrt{|g_4|}} E^{mnpq} \qquad E^{789\natural} = 1 \tag{7.1.3}$$

で定義される、weight 1 の invariant tensor density である。

---

2 つの invariant tensor density E^{-1}_{mnpq}, E^{mnpq} の関係は

$$E^{mnpq} = g_4\, g^{ma}\, g^{nb}\, g^{qc}\, g^{qd}\, E^{-1}_{abcd} \tag{7.1.4a}$$

$$E^{mnpq}\, E^{-1}_{mnpq} = 4! \tag{7.1.4b}$$

$$E^{mnpq}\, E^{-1}_{anpq} = 3!\, \delta^m_a \tag{7.1.4c}$$

$$E^{mnpq}\, E^{-1}_{abpq} = 2!\left(\delta^m_a\, \delta^n_b - \delta^m_b\, \delta^n_a\right) = 2!\cdot 2!\, \delta^m_{[a}\, \delta^n_{b]} \tag{7.1.4d}$$

$$\begin{aligned} E^{mnpq}\, E^{-1}_{abcq} &= \left\{\delta^m_a\, \delta^n_b\, \delta^p_c + \delta^m_b\, \delta^n_c\, \delta^p_a + \delta^m_c\, \delta^n_a\, \delta^p_b - \delta^m_b\, \delta^n_a\, \delta^p_c - \delta^m_a\, \delta^n_c\, \delta^p_b - \delta^m_c\, \delta^n_b\, \delta^p_a\right\} \\ &= 3!\delta^m_{[a}\, \delta^n_b\, \delta^p_{c]} \end{aligned} \tag{7.1.4e}$$

$$\epsilon^{mnpq} = g^{ma}\, g^{nb}\, g^{qc}\, g^{qd}\, \epsilon_{abcd} \tag{7.1.5a}$$

$$\epsilon^{mnpq}\, \epsilon_{mnpq} = 4! \tag{7.1.5b}$$

$$\epsilon^{mnpq}\,\epsilon_{anpq} \;=\; 3!\,\delta^m_a \tag{7.1.5c}$$

$$\epsilon^{mnpq}\,\epsilon_{abpq} \;=\; 2!\left(\delta^m_a\,\delta^n_b - \delta^m_b\,\delta^n_a\right) \;=\; 2!\cdot 2!\,\delta^m_{[a}\,\delta^n_{b]} \tag{7.1.5d}$$

$$\begin{aligned}\epsilon^{mnpq}\,\epsilon_{abcq} \;&=\; \left\{\delta^m_a\,\delta^n_b\,\delta^p_c + \delta^m_b\,\delta^n_c\,\delta^p_a + \delta^m_c\,\delta^n_a\,\delta^p_b - \delta^m_b\,\delta^n_a\,\delta^p_c - \delta^m_a\,\delta^n_c\,\delta^p_b - \delta^m_c\,\delta^n_b\,\delta^p_a\right\} \\ &=\; 3!\delta^m_{[a}\,\delta^n_b\,\delta^p_{c]}\end{aligned} \tag{7.1.5e}$$

である。

$AdS_7\times S^4$ 上での Freund-Rubin ansatz を (7.1.1) としたとき、KG solution での ansatz (6.1.1) を与える N を見付けるのがここの課題である。KG solution に行くために、light-cone coordinates を導入する。それは Penrose limit を見越して

$$\left\{\begin{aligned} x^+ \;&=\; \frac{1}{2R_A}\big(x^0 + y^\natural\big) \\ x^- \;&=\; R_A\big(x^0 - y^\natural\big)\end{aligned}\right. \qquad \text{or} \qquad \left\{\begin{aligned} x^0 \;&=\; \frac{1}{2}\Big(2R_Ax^+ + \frac{1}{R_A}x^-\Big) \\ y^\natural \;&=\; \frac{1}{2}\Big(2R_Ax^+ - \frac{1}{R_A}x^-\Big)\end{aligned}\right. \tag{7.1.6}$$

と定義される (rescale は含めない)。$x^\pm$ それぞれの weight が異なるのは Rosen coordinates や Brinkmann coordinates を見越した事である。この座標系では、Freund-Rubin ansatz F^{LC} は次のようになる:

$$F^{\text{LC}}_{+789} \;=\; \frac{\partial y^\natural}{\partial x^+}F^S_{789\natural} \;=\; -R_AN\sqrt{g_4} \qquad F^{\text{LC}}_{-789} \;\equiv\; 0 \tag{7.1.7}$$

但し、standard な議論と同様にして、

$$F_{0789} \;\equiv\; 0 \qquad F_{-789} \;=\; 0 \tag{7.1.8}$$

としている [12]。さて、Penrose limit を採る。ここでは $\rho=\theta=0,\, t=\frac{1}{2}\varphi$ という null geodesics 近傍で $R_A\to\infty$ を採ることにする。このとき、

$$g_4 \;=\; \frac{R_S^2}{(Y^{11})^2} \;=\; \frac{1}{\cos^2\theta\cos^2\varphi} \;\to\; 1 \tag{7.1.9}$$

となる。また flux も finite で生き残る為には $N=N'/R_A$ と再定義するとよい。この時、

$$F^{\text{LC}}_{+789} \;\to\; -N' \;\equiv\; F^{\text{LC,PL}}_{+789} \tag{7.1.10}$$

となる。さらに、rescaling を行う。appendix 10.4 では克明には記述していないが、

$$x^+ \;\to\; \frac{\mu}{6}x^+ \qquad \therefore\;\; x^+_{\text{KG}} \;=\; \frac{6}{\mu}x^+_{\text{LC}} \tag{7.1.11a}$$

$$x^- \;\to\; \frac{6}{\mu}x^- \qquad \therefore\;\; x^-_{\text{KG}} \;=\; \frac{\mu}{6}x^-_{\text{LC}} \tag{7.1.11b}$$

を導入する。さらに、座標のラベルの入れ換え

$$\begin{gathered}(x^1,x^2,x^3) \;\leftrightarrow\; (y^7,y^8,y^9) \\ \therefore\;\; F^{\text{LC,PL}}_{+789} \;=\; \widetilde{F}^{\text{LC,PL}}_{+123}\end{gathered} \tag{7.1.12}$$

を施しておく。これにより KG solution 上の ansatz が得られる:

$$F^{\rm KG}_{+123} = \frac{\partial x^+_{\rm LC}}{\partial x^+_{\rm KG}} \widetilde{F}^{\rm LC,PL}_{+123} = -\frac{\mu}{6} N' \equiv \mu \tag{7.1.13}$$

これより、

$$N = \frac{N'}{R_A} = -\frac{6}{R_A} \tag{7.1.14}$$

となるので、$AdS_7 \times S^4$ 上の ansatz は

$$F^S_{mnpq} = -\frac{6}{R_A} \epsilon_{mnpq} \tag{7.1.15}$$

で与えられる事がわかる[1]。

7.2 Field Equations for Fluctuation Fields

まず、Freund-Rubin ansatz (7.1.15) の下での classical field equations (3.1.8), (3.2.5), supercovariant derivative $\mathcal{D}_M$ (3.1.6) を分解しておこう:

$$\mathcal{R} = \frac{1}{6} N^2 , \quad \mathcal{R}_{\mu\nu} = -\frac{1}{6} N^2 g_{\mu\nu} , \quad \mathcal{R}_{mn} = \frac{1}{3} N^2 g_{mn} , \tag{7.2.1a}$$

$$0 = \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \Psi_P + \frac{1}{96} N \epsilon_{pqrs} \Big(\widehat{\Gamma}^{MNpqrs} + 12 g^{M[p} \widehat{\Gamma}^{qr} g^{s]N} \Big) \Psi_N , \tag{7.2.1b}$$

$$\mathcal{D}_\mu = \Big(\partial_\mu - \frac{i}{2} \omega_\mu{}^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \Big) + \frac{1}{288} N \epsilon_{npqr} \widehat{\Gamma}^{npqr}{}_\mu \tag{7.2.1c}$$

$$\mathcal{D}_m = \Big(\partial_m - \frac{i}{2} \omega_m{}^{ab} \Sigma_{ab} \Big) + \frac{1}{288} N \epsilon_{npqr} \Big(\widehat{\Gamma}^{npqr}{}_m - 8 \delta^{[n}_m \widehat{\Gamma}^{pqr]} \Big) \tag{7.2.1d}$$

これら、特に (7.2.1a) は (8.2.19) をきちんと再現している。

equations of motion for fluctuation fields については、Freund-Rubin ansatz (7.1.15) の下では次のようになる:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{R}_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2} \Big\{ \nabla_\nu \nabla_\mu h_P{}^P - \nabla_\nu \nabla^\rho h_{\mu\rho} - \nabla_\mu \nabla^\rho h_{\nu\rho} \Big\} + \frac{1}{2} \widehat{\Delta} h_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{6} N^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{3} N g_{\mu\nu} \mathcal{F}_{789\natural} + \frac{1}{6} N^2 g_{\mu\nu} h_p{}^p \end{aligned} \tag{7.2.2a}$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{R}_{\mu n} &= -\frac{1}{2} \Big\{ \nabla_n \nabla_\mu h_P{}^P - \nabla_n \nabla^\rho h_{\mu\rho} - \nabla_\mu \nabla^\rho h_{n\rho} \Big\} + \frac{1}{2} \widehat{\Delta} h_{\mu n} \\ &= -\frac{1}{6} N^2 h_{\mu n} + \frac{1}{12} N g_{ns} \epsilon^{spqr} \mathcal{F}_{\mu pqr} \end{aligned} \tag{7.2.2b}$$

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{R}_{mn} &= -\frac{1}{2} \Big\{ \nabla_n \nabla_m h_P{}^P - \nabla_n \nabla^\rho h_{m\rho} - \nabla_m \nabla^\rho h_{n\rho} \Big\} + \frac{1}{2} \widehat{\Delta} h_{mn} \\ &= \frac{1}{3} N^2 h_{mn} + \frac{2}{3} N g_{mn} \mathcal{F}_{789\natural} - \frac{1}{3} N^2 g_{mn} h_p{}^p \end{aligned} \tag{7.2.2c}$$

$$0 = \widehat{\Gamma}^{\mu NP} \Big(\partial_N \psi_P - \frac{i}{2} \omega_N{}^{AB} \Sigma_{AB} \psi_P \Big) + \frac{1}{4} N \widehat{\Gamma}^{\mu\nu 789\natural} \psi_\nu \tag{7.2.3a}$$

[1] 以後の計算でももっぱら N という記号を用いておくと見通しがよい。

$$0 \;=\; \widehat{\Gamma}^{mNP}\Big(\partial_N \psi_P - \frac{i}{2}\omega_N{}^{AB}\,\Sigma_{AB}\,\psi_P\Big) + \frac{1}{8}N g^{m[p}\widehat{\Gamma}^{qr}g^{s]n}\,\epsilon_{pqrs}\,\psi_n \qquad (7.2.3b)$$

$$0 \;=\; e\,\nabla^\sigma \mathcal{F}_{\sigma\mu\nu\rho} - \frac{1}{24}N\sqrt{g_4}\,\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta\tau\kappa\lambda 789\natural}\mathcal{F}_{\alpha\beta\gamma\delta}\,g_{\mu\tau}\,g_{\nu\kappa}\,g_{\rho\lambda} \qquad (7.2.4a)$$

$$0 \;=\; \nabla^\sigma \mathcal{F}_{\sigma m\nu\rho} \qquad (7.2.4b)$$

$$0 \;=\; \nabla^\sigma \mathcal{F}_{\sigma mn\rho} - N\epsilon_{qmns}\nabla^q h_\rho{}^s \qquad (7.2.4c)$$

$$0 \;=\; \nabla^\sigma \mathcal{F}_{\sigma mnp} - N\Big\{\epsilon_{smnp}\Big(\nabla^\rho h_\rho{}^s - \frac{1}{2}\partial^s h_Q{}^Q\Big) + \epsilon_{qsnp}\nabla^q h_m{}^s + \epsilon_{qmsp}\nabla^q h_n{}^s + \epsilon_{qmns}\nabla^q h_p{}^s\Big\} \qquad (7.2.4d)$$

また、全ての fluctuation fields に対して次のように de Donder and Lorentz type gauge-fixing condition を課している [3]:

$$\nabla^m h_{mM} \;\equiv\; 0 \qquad \nabla^m \mathcal{F}_{mNPQ} \;\equiv\; 0 \qquad D^m \psi_m \;\equiv\; \widehat{\Gamma}^m \psi_m \;\equiv\; 0 \qquad (7.2.5)$$

但し、gravitino constraint についてはこれが正しいという保証はまだない。

Bianchi identity からの揺らぎ (5.1.5) は次のようになる:

$$0 \;=\; \nabla_{[\mu}\mathcal{F}_{\nu\rho\sigma\lambda]} \qquad (7.2.6a)$$

$$0 \;=\; \partial_m \mathcal{F}_{\nu\rho\sigma\lambda} + 4\nabla_{[\nu}\mathcal{F}_{\rho\sigma\lambda]m} \qquad (7.2.6b)$$

$$0 \;=\; 2\nabla_{[m}\mathcal{F}_{n]\rho\sigma\lambda} + 3\nabla_{[\rho}\mathcal{F}_{\sigma\lambda]mn} \qquad (7.2.6c)$$

$$0 \;=\; 3\nabla_{[m}\mathcal{F}_{np]\sigma\lambda} + 2\nabla_{[\sigma}\mathcal{F}_{\lambda]mnp} \qquad (7.2.6d)$$

$$0 \;=\; 4\nabla_{[m}\mathcal{F}_{npq]\lambda} + \partial_\lambda \mathcal{F}_{mnpq} \qquad (7.2.6e)$$

7.3 Seven-Four Splitting, Killing Spinor Equation

11-dimensional spacetime が 7-dimensional spacetime と 4-dimensional internal space に分解されるとき、32 component を持つ 11-dimensional Majorana spinor parameter (SUSY parameter) も分解される:

$$\varepsilon(x,y) \;=\; \varepsilon^I(x)\eta^I(y) \qquad (7.3.1a)$$

ここで $\varepsilon^I(x)$, $\eta^I(y)$ はそれぞれ 7-dimensional spacetime, 4-dimensional internal space 上の既約な spinor であるはずである。しかし、既約でも、

$$\varepsilon^I(x) \;:\; \text{Dirac spinor, 16 components} \qquad (7.3.1b)$$

$$\eta^I(y) \;:\; \text{self Weyl spinor, 4 components} \qquad (7.3.1c)$$

であり、$16 \times 4 = 64$ となってしまう [25, 28]。矛盾している様に見えるのだが、この点はどうなのだろうか (2003 9/21)。Minkowski spacetime には $d = 6$ で pseudo-Majorana spinor が存在する [29]。Euclidean space の場合

は $d = 4$ に pseudo-Majorana spinor が存在することになる。そのため、$d = 4$ space に於ける既約 spinor は、pseudo-Majorana かつ Weyl で、

$$\eta^I(y) \ : \ \text{pesudo-Majorana and self Weyl spinor, 2 components} \tag{7.3.1d}$$

となる。よって、自由度勘定は正しくなる。

$AdS_4 \times S^7$ での議論と同様、index I は $\varepsilon(x)$ に伴っていているものでなく、「ある条件」をみたす $\eta(y)$ の「個数」を表すものである。ここで、anti-commuting な性質は 7-dimensional spacetime の spinor parameter $\varepsilon^I(x)$ に与える。4-dimensional space spinor parameter $\eta^I(y)$ は commuting spinor である。

spinor $\varepsilon(x,y)$ の分解に伴って、Dirac gamma matrices in 11-dimensional spacetime も次のように分解する:

$$\widehat{\Gamma}^A \ = \ \big(\widetilde{\gamma}^\alpha \otimes \widetilde{\Gamma}_5, \mathbf{1} \otimes \widetilde{\Gamma}^a\big) \qquad \alpha \ = \ 0,1,2,\cdots,6 \qquad a \ = \ 7,8,9,10 \tag{7.3.2a}$$

$$\{\widetilde{\gamma}^\alpha, \widetilde{\gamma}^\beta\} \ = \ 2\eta^{\alpha\beta} \qquad \{\widetilde{\Gamma}^a, \widetilde{\Gamma}^b\} \ = \ 2\delta^{ab} \qquad \widetilde{\Gamma}_5 \ = \ -\widetilde{\Gamma}^7\widetilde{\Gamma}^8\widetilde{\Gamma}^9\widetilde{\Gamma}^{10} \tag{7.3.2b}$$

ここで $\widetilde{\gamma}^\alpha$ は 7-dimensional Minkowski spacetime での Dirac gamma matrices であり、$\widetilde{\Gamma}^a$ は 4-dimensional Euclidean space での gamma matrices である [25, 28]。$AdS_4 \times S^7$ の時と区別するために tilde を付けておく。この分解の下で、Lorentz generator Σ_{AB} (3.1.7c) の spinor representations は次のようになる:

$$\Sigma_{\alpha\beta} \ = \ \frac{i}{2}\widehat{\Gamma}_{\alpha\beta} \ = \ \frac{i}{2}\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} \otimes \mathbf{1} \qquad\qquad \Sigma_{ab} \ = \ \frac{i}{2}\widehat{\Gamma}_{ab} \ = \ \frac{i}{2}\mathbf{1} \otimes \widetilde{\Gamma}_{ab} \tag{7.3.3}$$

Lorentz algebra は

$$-\frac{1}{2}[\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta}, \widetilde{\gamma}_{\gamma\delta}] \ = \ \eta_{\alpha\gamma}\widetilde{\gamma}_{\beta\delta} + \eta_{\beta\delta}\widetilde{\gamma}_{\alpha\gamma} - \eta_{\alpha\delta}\widetilde{\gamma}_{\beta\gamma} - \eta_{\beta\gamma}\widetilde{\gamma}_{\alpha\delta} \tag{7.3.4a}$$

$$-\frac{1}{2}[\widetilde{\Gamma}_{ab}, \widetilde{\Gamma}_{cd}] \ = \ \delta_{ac}\widetilde{\Gamma}_{bd} + \delta_{bd}\widetilde{\Gamma}_{ac} - \delta_{ad}\widetilde{\Gamma}_{bc} - \delta_{bc}\widetilde{\Gamma}_{ad} \tag{7.3.4b}$$

という関係を持つ。さらに、5 つの gamma matrices の積などは次のようになる:

$$\begin{aligned}\epsilon_{mpqr}\delta^{[n}_m\widehat{\Gamma}^{pqr]} \ &= \ \frac{3!}{4!}\epsilon_{mpqr}\Big(\delta^n_m\widehat{\Gamma}^{pqr} - \delta^p_m\widehat{\Gamma}^{qrn} + \delta^q_m\widehat{\Gamma}^{rnp} - \delta^r_m\widehat{\Gamma}^{npq}\Big) \ = \ \epsilon_{mpqr}\widehat{\Gamma}^{pqr} \ = \ \mathbf{1} \otimes \epsilon_{mpqr}\widetilde{\Gamma}^{pqr} \\ &= \ -3!\,\mathbf{1} \otimes \widetilde{\Gamma}_m\widetilde{\Gamma}_5\end{aligned} \tag{7.3.5a}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{npqr}\widehat{\Gamma}^{npqr}{}_m \ &= \ \epsilon_{npqr}\big(\widehat{\Gamma}^{npqr}\widehat{\Gamma}_m - 4\delta^{[n}_m\widehat{\Gamma}^{pqr]}\big) \ = \ 4!\,\widehat{\Gamma}^{789\natural}\widehat{\Gamma}_m + 4!\,\mathbf{1} \otimes \widetilde{\Gamma}_m\widetilde{\Gamma}_5 \\ &= \ 2 \cdot 4!\,\mathbf{1} \otimes \widetilde{\Gamma}_m\widetilde{\Gamma}_5\end{aligned} \tag{7.3.5b}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{npqr}\widehat{\Gamma}^{npqr}{}_\mu \ &= \ \epsilon_{npqr}\big(\widehat{\Gamma}^{npqr}\widehat{\Gamma}_\mu - 4\delta^{[n}_\mu\widehat{\Gamma}^{pqr]}\big) \ = \ \epsilon_{npqr}\widehat{\Gamma}^{npqr}\widehat{\Gamma}_\mu \\ &= \ -4!\,\widetilde{\gamma}_\mu \otimes \mathbf{1}\end{aligned} \tag{7.3.5c}$$

ここで

$$\widehat{\Gamma}^{789\natural} \ = \ \frac{4!}{4!}\widehat{\Gamma}^7\widehat{\Gamma}^8\widehat{\Gamma}^9\widehat{\Gamma}^\natural \ = \ -\mathbf{1} \otimes \widetilde{\Gamma}_5 \tag{7.3.6}$$

を用いている。

分解された SUSY parameter は、(6.3.1) により、それぞれ次の condition をみたす必要が生じる:

$$\mathcal{D}_\mu\varepsilon^I(x) \ = \ \Big[\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{\alpha\beta}\widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{12}N\widetilde{\gamma}_\mu\Big]\varepsilon^I(x) \ = \ 0 \tag{7.3.7a}$$

$$\mathcal{D}_m \eta^I(y) \ = \ \Big[\partial_m + \frac{1}{4} \omega_m{}^{ab} \widetilde{\Gamma}_{ab} + \frac{1}{3} N \widetilde{\Gamma}_m \widetilde{\Gamma}_5 \Big] \eta^I(y) \ = \ 0 \tag{7.3.7b}$$

ここで、上に挙げた「ある条件」とは (7.3.7b) のことであり、**Killing spinor condition** と呼ばれる。これをみたす 2-component spinor $\eta^I(y)$ の「個数」[2]、つまり Killing spinor の個数が index I の走る数である。7-dimensional spacetime が AdS_7 の場合、spinor parameter $\varepsilon^I(x)$ は (7.3.7a) をみたすので、上の分解 (7.3.1) の下では、最終的に I 個の Majorana spinor $\varepsilon^I(x)$ が存在する。それはつまり、7-dimensional spacetime には $\mathcal{N} = I$ supersymmetry ($16I$ supercharges) が存在することを意味する。

さらに、(7.3.7) から、次の **integrability condition** と呼ばれる条件も課される:

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] \varepsilon^I(x) \ = \ \frac{1}{4} \Big[\widetilde{R}^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} + \frac{1}{18} N^2 e_\mu{}^\alpha \, e_\nu{}^\beta \Big] \widetilde{\gamma}_{\alpha\beta} \, \varepsilon^I \ = \ 0 \tag{7.3.8a}$$

$$[\mathcal{D}_m, \mathcal{D}_n] \eta^I(y) \ = \ \frac{1}{4} \Big[\widetilde{R}^{ab}{}_{mn} + \frac{8}{9} N^2 e_m{}^a \, e_n{}^b \Big] \widetilde{\Gamma}_{ab} \, \eta^I \ = \ 0 \tag{7.3.8b}$$

厳密にいえば、この integrability condition をみたし、かつ (7.2.1a) をみたす時、7-dimensional spacetime が AdS_7、4-dimensional internal space が S^4 であることがわかる。

7.4 Decomposition of Fluctuation Fields

7.5 Penrose Limit

[2] $\eta^I(y)$ の component の数ではない。

Chapter 8

Coordinate Descriptions

coset construction とは別に、polar coordinates を用いて $AdS_{4(7)} \times S^{7(4)}$ classical background を整備する。

なお、ここの Cartan's structure equations の定義は、Lorentz algebra などに依存することを忘れないようにしたい。

後の Part でも同様のことを展開するが、de Wit [33, 34, 35] は Lorentz algebra が異なるため (そして Clifford algebra は同じため)、spin connection の定義が異なる。

8.1 $AdS_4 \times S^7$

8.1.1 Curved Spacetime Coordinates and Metric

Supergravity on PP-wave background を見越して、$AdS_4 \times S^7$ の計量として次のもの (global coordinates) を採用する [32]:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_{11}^2 &= R_A^2\Big\{ -\cosh^2\rho\cdot\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \sinh^2\rho\cdot\mathrm{d}\Omega_2^2\Big\} + R_S^2\Big\{\cos^2\theta\cdot\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\cdot\mathrm{d}\Omega_5'^{\,2}\Big\} \\ &= \Big\{ -(\mathrm{d}X^{-1})^2 - (\mathrm{d}X^0)^2 + \sum_{i=1}^3 (\mathrm{d}X^i)^2\Big\} + \Big\{\sum_{m=1}^8 (\mathrm{d}Y^m)^2\Big\} \ . \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

ここで、AdS_4, S^7 はそれぞれ

$$AdS_4 \ : \quad -R_A^2 = -(X^{-1})^2 - (X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 \tag{8.1.2a}$$

$$S^7 \ : \quad R_S^2 = (Y^4)^2 + (Y^5)^2 + (Y^6)^2 + (Y^7)^2 + (Y^8)^2 + (Y^9)^2 + (Y^{10})^2 + (Y^{11})^2 \tag{8.1.2b}$$

で代数的に定義されている (13-dimensional flat space への埋め込み)。座標 $\{X^A; Y^B\}$ を polar coordinates を用いて表す。まず AdS_4 については

$$X^{-1} = R_A\cosh\rho\,\cos t \qquad X^2 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_1\,\cos\phi_2 \tag{8.1.3a}$$

$$X^0 = R_A\cosh\rho\,\sin t \qquad X^3 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_1\,\sin\phi_2 \tag{8.1.3b}$$

$$X^1 = R_A\sinh\rho\,\cos\phi_1 \tag{8.1.3c}$$

ここで $0 \le \phi_1 \le \pi$, $0 \le \phi_2 \le 2\pi$ であり、S^7 については

$$Y^4 = R_S\sin\theta\,\sin\phi_3\,\cos\phi_4 \qquad Y^8 = R_S\sin\theta\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\sin\phi_5\,\sin\phi_6\,\sin\phi_7 \tag{8.1.3d}$$

$$Y^5 = R_S\sin\theta\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\cos\phi_5 \qquad Y^9 = R_S\sin\theta\,\cos\phi_3 \tag{8.1.3e}$$

$$Y^6 = R_S\sin\theta\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\sin\phi_5\,\cos\phi_6 \qquad Y^{10} = R_S\cos\theta\,\sin\varphi \tag{8.1.3f}$$

$$Y^7 = R_S\sin\theta\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\sin\phi_5\,\sin\phi_6\,\cos\phi_7 \qquad Y^{11} = R_S\cos\theta\,\cos\varphi \tag{8.1.3g}$$

ただし $0 \le \phi_i \le \pi$ $(i = 3, \cdots, 6)$, $0 \le \phi_7 \le 2\pi$ である。この座標系の時、立体角 $\mathrm{d}\Omega_2^2$, $\mathrm{d}\Omega_5'^{\,2}$ を表そう:

$$\mathrm{d}\Omega_2^2 = \sum_{i=1}^2 \prod_{k=1}^{i-1} \sin^2\phi_k\,\mathrm{d}\phi_i^2 \ , \qquad \mathrm{d}\Omega_5'^{\,2} = \sum_{j=3}^7 \prod_{k=3}^{j-1} \sin^2\phi_k\,\mathrm{d}\phi_j^2 \ . \tag{8.1.4}$$

Freund-Rubin ansatz や Penrose limit を用いるので、各座標の役割をまとめておこう:

coordinates	ρ	Ω_2	t	φ	Ω_5'	θ
before Penrose limit	AdS_4			S^7		
after Penrose limit	flat $(SO(3))$		light-cone $(+,-)$		flat $(SO(6))$	

また、11-dimensional curved spacetime coordinates を、Penrose limit を採った時に flat space などが見やすいもので記述しよう。(8.1.3) は 13-dimensional flat space $\mathbb{R}^{2,11}$ への埋め込みなので、11-dimensional にするには次の constraint が必要である：

$$(X^{-1})^2 \;=\; R_A^2 - (X^0)^2 + \sum_{i=1}^{3}(X^i)^2 \qquad X^{-1}\mathrm{d}X^{-1} \;=\; -X^0\mathrm{d}X^0 + \sum_i X^i\mathrm{d}X^i \tag{8.1.5a}$$

$$(Y^{11})^2 \;=\; R_S^2 - \sum_{m=4}^{10}(Y^m)^2 \qquad Y^{11}\mathrm{d}Y^{11} \;=\; -\sum_m Y^m\mathrm{d}Y^m \tag{8.1.5b}$$

この下で、座標と計量を次で与えよう：

$$x^0 \;=\; X^0 \;=\; R_A\cosh\rho\sin t \qquad y^4 \;=\; Y^4 \;=\; R_S\sin\theta\sin\phi_3\cos\phi_4 \tag{8.1.6a}$$

$$x^1 \;=\; X^1 \;=\; R_A\sinh\rho\cos\phi_1 \qquad y^5 \;=\; Y^5 \;=\; R_S\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\cos\phi_5 \tag{8.1.6b}$$

$$x^2 \;=\; X^2 \;=\; R_A\sinh\rho\sin\phi_1\cos\phi_2 \qquad y^6 \;=\; Y^6 \;=\; R_S\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6 \tag{8.1.6c}$$

$$x^3 \;=\; X^3 \;=\; R_A\sinh\rho\sin\phi_1\sin\phi_2 \qquad y^7 \;=\; Y^7 \;=\; R_S\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7 \tag{8.1.6d}$$

$$y^8 \;=\; Y^8 \;=\; R_S\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7 \tag{8.1.6e}$$

$$y^9 \;=\; Y^9 \;=\; R_S\sin\theta\cos\phi_3 \tag{8.1.6f}$$

$$y^{10} \;=\; Y^{10} \;=\; R_S\cos\theta\sin\varphi \tag{8.1.6g}$$

(8.1.5), (8.1.6) を (8.1.1) に代入しよう：

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s_{11}^2 \;=&\; -\left\{1+\left(\frac{x^0}{X^{-1}}\right)^2\right\}(\mathrm{d}x^0)^2 + \sum_{i=1}^{3}\left\{1-\left(\frac{x^i}{X^{-1}}\right)^2\right\}(\mathrm{d}x^i)^2 + \sum_{i=1}^{3}\frac{2x^0x^i}{(X^{-1})^2}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^i - \sum_{i,j=1}^{3}\frac{2x^ix^j}{(X^{-1})^2}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \\
&+\sum_{m=4}^{10}\left\{1+\left(\frac{y^m}{Y^{11}}\right)^2\right\}(\mathrm{d}y^m)^2 + \sum_{m,n=4}^{10}\frac{2y^my^n}{(Y^{11})^2}\mathrm{d}y^m\mathrm{d}y^n \\
\equiv&\; g_{MN}\mathrm{d}x^M\mathrm{d}x^N \;\equiv\; g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + g_{mn}\,\mathrm{d}y^m\mathrm{d}y^n
\end{aligned} \tag{8.1.7}$$

つまり計量の各成分は次のように与えられる：

$$g_{\mu\nu} \;=\; \eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu\rho}\,\eta_{\nu\sigma}\frac{x^\rho x^\sigma}{(X^{-1})^2} \qquad g_{mn} \;=\; \delta_{mn} + \delta_{mp}\,\delta_{nq}\frac{y^py^q}{(Y^{11})^2} \tag{8.1.8}$$

ここで $x^\mu \in AdS_4$, $y^m \in S^7$ である[1]。これらをまとめて $x^M = \{x^\mu; y^m\}$ と書き表すことがある。さらに g^{MN} は

$$g^{\mu\nu} \;=\; \eta^{\mu\nu} + \frac{x^\mu x^\nu}{R_A^2} \qquad g^{mn} \;=\; \delta^{mn} - \frac{y^my^n}{R_S^2} \tag{8.1.9}$$

となる[2]。metric の determinant はそれぞれ

$$\det(g_{\mu\nu}) \;=\; -\frac{R_A^2}{(X^{-1})^2} \qquad \det(g_{mn}) \;=\; \frac{R_S^2}{(Y^{11})^2} \tag{8.1.10}$$

となる。11-dimensional spacetime 全体ではこの積

$$\det(g_{MN}) \;=\; -\frac{R_A^2R_S^2}{(X^{-1})^2(Y^{11})^2} \;=\; -\left(\frac{1}{\cosh\rho\cos t\cos\theta\cos\varphi}\right)^2 \tag{8.1.11}$$

[1] vielbein (8.1.3), (8.1.13) を意識してこの順序にしてある。

[2] /notes/tk-notes/sugra-ads/tk/maplefiles/030824/affine-ads4s7-030824.tex 参照。

となる。また、この座標系での affine connection が求められる:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{R_A^2}\frac{x^{\rho}}{X}\{\eta_{\mu\sigma}\,\eta_{\nu\lambda}\,x^{\sigma}x^{\lambda} - \eta_{\mu\nu}X\} \qquad X = (X^{-1})^2 = R_A^2 + \eta_{\mu\nu}\,x^{\mu}x^{\nu} \tag{8.1.12a}$$

$$\Gamma^{p}_{mn} = \frac{1}{R_S^2}\frac{y^{p}}{Y}\{\delta_{mq}\,\delta_{nr}\,y^{q}y^{r} + \delta_{mn}Y\} \qquad Y = (Y^{11})^2 = R_S^2 - \delta_{mn}y^{m}y^{n} \tag{8.1.12b}$$

8.1.2 Differential Forms, Vielbein, Affine-spin Connection, Curvature

metric (8.1.1) ($\mathrm{d}s_{11}^2 = \eta_{AB}e^{A}\,e^{B}$, $\eta_{AB} = \mathrm{diag.}(- + + \cdots +)$) から、vielbein を次のように定義しよう:

$$e^0 = R_A\cosh\rho\,\mathrm{d}t \qquad e^6 = R_S\sin\theta\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\mathrm{d}\phi_5 \tag{8.1.13a}$$
$$e^1 = R_A\mathrm{d}\rho \qquad e^7 = R_S\sin\theta\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\sin\phi_5\,\mathrm{d}\phi_6 \tag{8.1.13b}$$
$$e^2 = R_A\sinh\rho\,\mathrm{d}\phi_1 \qquad e^8 = R_S\sin\theta\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\sin\phi_5\,\sin\phi_6\,\mathrm{d}\phi_7 \tag{8.1.13c}$$
$$e^3 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_1\,\mathrm{d}\phi_2 \qquad e^9 = R_S\mathrm{d}\theta \tag{8.1.13d}$$
$$e^4 = R_S\sin\theta\,\mathrm{d}\phi_3 \qquad e^{10} = R_S\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi \tag{8.1.13e}$$
$$e^5 = R_S\sin\theta\,\sin\phi_3\,\mathrm{d}\phi_4 \tag{8.1.13f}$$

この exterior derivative $\mathrm{d}e^{A}$ を列挙しよう:

$$\mathrm{d}e^0 = -\frac{1}{R_A}\tanh\rho\,e^0\wedge \mathrm{e}^1 \tag{8.1.14a}$$
$$\mathrm{d}e^1 = 0 \tag{8.1.14b}$$
$$\mathrm{d}e^2 = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}\,e^2\wedge \mathrm{e}^1 \tag{8.1.14c}$$
$$\mathrm{d}e^3 = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}\,e^3\wedge e^1 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_1}\,e^3\wedge e^2 \tag{8.1.14d}$$
$$\mathrm{d}e^4 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}\,e^4\wedge e^9 \tag{8.1.14e}$$
$$\mathrm{d}e^5 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}\,e^5\wedge e^9 - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_3}\,e^5\wedge e^4 \tag{8.1.14f}$$
$$\mathrm{d}e^6 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}\,e^6\wedge e^9 - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_3}\,e^6\wedge e^4 - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}\,e^6\wedge e^5 \tag{8.1.14g}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{d}e^7 &= -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}\,e^7\wedge e^9 - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_3}\,e^7\wedge e^4 - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}\,e^7\wedge e^5 \\ &\quad - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}\,e^7\wedge e^6\end{aligned} \tag{8.1.14h}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{d}e^8 &= -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}\,e^8\wedge e^9 - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_3}\,e^8\wedge e^4 - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}\,e^8\wedge e^5 \\ &\quad - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}\,e^8\wedge e^6 - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}\,e^8\wedge e^7\end{aligned} \tag{8.1.14i}$$
$$\mathrm{d}e^9 = 0 \tag{8.1.14j}$$
$$\mathrm{d}e^{10} = \frac{1}{R_S}\tan\theta\,e^{10}\wedge e^9 \tag{8.1.14k}$$

Cartan's structure equation $\mathrm{d}e^A + \omega^A{}_B \wedge e^B = 0$ より、affine-spin connection $\omega^A{}_B$ が与えられる：

$$\omega^0{}_1 = \frac{1}{R_A} \tanh\rho\, e^0 \qquad \omega^3{}_1 = \frac{1}{R_A} \frac{1}{\tanh\rho} e^3 \tag{8.1.15a}$$

$$\omega^2{}_1 = \frac{1}{R_A} \frac{1}{\tanh\rho} e^2 \qquad \omega^3{}_2 = \frac{1}{R_A} \frac{1}{\sinh\rho} \frac{1}{\tan\phi_1} e^3 \tag{8.1.15b}$$

$$\omega^4{}_9 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\tan\theta} e^4 \qquad \omega^6{}_9 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\tan\theta} e^6 \tag{8.1.15c}$$

$$\omega^5{}_9 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\tan\theta} e^5 \qquad \omega^6{}_4 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\tan\phi_3} e^6 \tag{8.1.15d}$$

$$\omega^5{}_4 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\tan\phi_3} e^5 \qquad \omega^6{}_5 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\sin\phi_3} \frac{1}{\tan\phi_4} e^6 \tag{8.1.15e}$$

$$\omega^7{}_9 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\tan\theta} e^7 \qquad \omega^8{}_9 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\tan\theta} e^8 \tag{8.1.15f}$$

$$\omega^7{}_4 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\tan\phi_3} e^7 \qquad \omega^8{}_4 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\tan\phi_3} e^8 \tag{8.1.15g}$$

$$\omega^7{}_5 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\sin\phi_3} \frac{1}{\tan\phi_4} e^7 \qquad \omega^8{}_5 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\sin\phi_3} \frac{1}{\tan\phi_4} e^8 \tag{8.1.15h}$$

$$\omega^7{}_6 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\sin\phi_3} \frac{1}{\sin\phi_4} \frac{1}{\tan\phi_5} e^7 \qquad \omega^8{}_6 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\sin\phi_3} \frac{1}{\sin\phi_4} \frac{1}{\tan\phi_5} e^8 \tag{8.1.15i}$$

$$\omega^8{}_7 = \frac{1}{R_S} \frac{1}{\sin\theta} \frac{1}{\sin\phi_3} \frac{1}{\sin\phi_4} \frac{1}{\sin\phi_5} \frac{1}{\tan\phi_6} e^8 \tag{8.1.15j}$$

$$\omega^{10}{}_9 = -\frac{1}{R_S} \tan\theta\, e^{10} \tag{8.1.15k}$$

affine-spin connection の反対称性 $\omega^{A'}{}_B\, \eta_{A'A} + \omega^{B'}{}_A\, \eta_{B'B} = 0$ に注意する：

$$\omega^0{}_I = \omega^1{}_0\,, \qquad \omega^I{}_J = -\omega^J{}_I \qquad (I, J = 1, 2, \cdots, 10)$$

exterior derivative of affine-spin connection: $\mathrm{d}\omega^A{}_B$

$$\mathrm{d}\omega^0{}_1 = -\frac{1}{R_A^2} e^0 \wedge e^1 \qquad \mathrm{d}\omega^3{}_1 = -\frac{1}{R_A^2} \Big\{ e^3 \wedge e^1 + \frac{\cosh\rho}{\sinh^2\rho} \frac{1}{\tan\phi_1} e^3 \wedge e^2 \Big\} \tag{8.1.16a}$$

$$\mathrm{d}\omega^2{}_1 = -\frac{1}{R_A^2} e^2 \wedge e^1 \qquad \mathrm{d}\omega^3{}_2 = \frac{1}{R_A^2} \frac{1}{\sinh^2\rho} e^3 \wedge e^2 \tag{8.1.16b}$$

$$\mathrm{d}\omega^4{}_9 = \frac{1}{R_S^2} e^4 \wedge e^9 \tag{8.1.17a}$$

$$\mathrm{d}\omega^5{}_9 = \frac{1}{R_S^2} \Big\{ e^5 \wedge e^9 - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \frac{1}{\tan\phi_3} e^5 \wedge e^4 \Big\} \tag{8.1.17b}$$

$$\mathrm{d}\omega^5{}_4 = \frac{1}{R_S^2} \frac{1}{\sin^2\theta} e^5 \wedge e^4 \tag{8.1.17c}$$

$$\mathrm{d}\omega^6{}_9 = \frac{1}{R_S^2} \Big\{ e^6 \wedge e^9 - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \Big(\frac{1}{\tan\phi_3} e^6 \wedge e^4 + \frac{1}{\sin\phi_3} \frac{1}{\tan\phi_4} e^6 \wedge e^5 \Big) \Big\} \tag{8.1.17d}$$

$$\mathrm{d}\omega^6{}_4 = \frac{1}{R_S^2} \frac{1}{\sin^2\theta} \Big\{ e^6 \wedge e^4 - \frac{\cos\phi_3}{\sin^2\phi_3} \frac{1}{\tan\phi_4} e^6 \wedge e^5 \Big\} \tag{8.1.17e}$$

$$\begin{aligned}
d\omega^6{}_5 &= \frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\,e^6\wedge e^5 && (8.1.17f)\\
d\omega^7{}_9 &= \frac{1}{R_S^2}\Big\{e^7\wedge e^9 - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\Big(\frac{1}{\tan\phi_3}\,e^7\wedge e^4 + \frac{1}{\sin\phi_3}\Big[\frac{1}{\tan\phi_4}\,e^7\wedge e^5 + \frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}\,e^7\wedge e^6\Big]\Big)\Big\} && (8.1.17g)\\
d\omega^7{}_4 &= \frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\Big\{e^7\wedge e^4 - \frac{\cos\phi_3}{\sin^2\phi_3}\Big(\frac{1}{\tan\phi_4}\,e^7\wedge e^5 + \frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}\,e^7\wedge e^6\Big)\Big\} && (8.1.17h)\\
d\omega^7{}_5 &= \frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\Big\{e^7\wedge e^5 - \frac{\cos\phi_4}{\sin^2\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}\,e^7\wedge e^6\Big\} && (8.1.17i)\\
d\omega^7{}_6 &= \frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\sin^2\phi_4}\,e^7\wedge e^6 && (8.1.17j)\\
d\omega^8{}_9 &= \frac{1}{R_S^2}\Big\{e^8\wedge e^9 - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\Big(\frac{1}{\tan\phi_3}\,e^8\wedge e^4\\
&\qquad + \frac{1}{\sin\phi_3}\Big[\frac{1}{\tan\phi_4}\,e^8\wedge e^5 + \frac{1}{\sin\phi_4}\Big\{\frac{1}{\tan\phi_5}\,e^8\wedge e^6 + \frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}\,e^8\wedge e^7\Big\}\Big]\Big)\Big\} && (8.1.17k)\\
d\omega^8{}_4 &= \frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\Big\{e^8\wedge e^4 - \frac{\cos\phi_3}{\sin^2\phi_3}\Big(\frac{1}{\tan\phi_4}\,e^8\wedge e^5 + \frac{1}{\sin\phi_4}\Big[\frac{1}{\tan\phi_5}\,e^8\wedge e^6 + \frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}\,e^8\wedge e^7\Big]\Big)\Big\}\\
& && (8.1.17l)\\
d\omega^8{}_5 &= \frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\Big\{e^8\wedge e^5 - \frac{\cos\phi_4}{\sin^2\phi_4}\Big(\frac{1}{\tan\phi_5}\,e^8\wedge e^6 + \frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}\,e^8\wedge e^7\Big)\Big\} && (8.1.17m)\\
d\omega^8{}_6 &= \frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\sin^2\phi_4}\Big\{e^8\wedge e^6 - \frac{\cos\phi_5}{\sin^2\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}\,e^8\wedge e^7\Big\} && (8.1.17n)\\
d\omega^8{}_7 &= \frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\sin^2\phi_4}\frac{1}{\sin^2\phi_5}\,e^8\wedge e^7 && (8.1.17o)\\
d\omega^{10}{}_9 &= \frac{1}{R_S^2}\,e^{10}\wedge e^9 && (8.1.17p)
\end{aligned}$$

curvature 2-form $R^A{}_B = d\omega^A{}_B + \omega^A{}_C\wedge\omega^C{}_B$ を求める:

$$R^a{}_b = -\frac{1}{R_A^2}\eta_{bc}\,e^a\wedge e^c \quad \text{for } AdS_4\,, \qquad R^{a'}{}_{b'} = \frac{1}{R_S^2}\delta_{b'c'}\,e^{a'}\wedge e^{c'} \quad \text{for } S^7 \tag{8.1.18}$$

よって、Riemann tensor $R^A{}_{BCD}$, Ricci tensor $\mathcal{R}^A{}_B$, scalar curvature $\mathcal{R}_{4(7)}$ が具体的に計算される:

$$\begin{aligned}
R^a{}_{bcd} &= -\frac{1}{R_A^2}\big(\delta^a_c\,\eta_{bd} - \delta^a_d\,\eta_{bc}\big) & \mathcal{R}^a{}_b &= \mathcal{R}^a{}_{cbd}\,\eta^{cd} = -\frac{3}{R_A^2}\delta^a_b & \mathcal{R}_4 &= -\frac{12}{R_A^2} && (8.1.19a)\\
R^{a'}{}_{b'c'd'} &= \frac{1}{R_S^2}\big(\delta^{a'}_{c'}\,\delta_{d'b'} - \delta^{a'}_{d'}\,\delta_{c'b'}\big) & \mathcal{R}^{a'}{}_{b'} &= \mathcal{R}^{a'}{}_{c'b'd'}\,\eta^{c'd'} = \frac{6}{R_S^2}\delta^{a'}_{b'} & \mathcal{R}_7 &= \frac{42}{R_S^2} && (8.1.19b)
\end{aligned}$$

Penrose limit を取る際には $R_S = 2R_A$ に固定する。

8.1.3 Explicit Expression of Components of Affine-spin Connection

supergravity の fluctuation の計算をする際には affine connection Γ^P_{MN} だけではなく、affine-spin connection $\omega_M{}^A{}_B$ の具体的表記が必要になる。この具体的表記のために、まずは (inverse) vielbein の各成分を 求めたい。そのために、座標 x^M の exterior derivative dx^M を列挙する。これは vielbein の展開として記述できる:

$$\begin{aligned}
dx^0 &= e^1\,\sinh\rho\sin t + e^0\,\cos t && (8.1.20a)\\
&\equiv E_1{}^0\,e^1 + E_0{}^0\,e^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx^1 &= e^1 \cosh\rho\cos\phi_1 - e^2 \sin\phi_1 && (8.1.20b)\\ &\equiv E_1{}^1 e^1 + E_2{}^1 e^2 \\ dx^2 &= e^1 \cosh\rho\sin\phi_1\cos\phi_2 + e^2 \cos\phi_1\cos\phi_2 - e^3 \sin\phi_2 && (8.1.20c)\\ &\equiv E_1{}^2 e^1 + E_2{}^2 e^2 + E_3{}^2 e^3 \\ dx^3 &= e^1 \cosh\rho\sin\phi_1\sin\phi_2 + e^2 \cos\phi_1\sin\phi_2 + e^3 \cos\phi_2 && (8.1.20d)\\ &\equiv E_1{}^3 e^1 + E_2{}^3 e^2 + E_3{}^3 e^3 && (8.1.20e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dy^4 &= e^9 \cos\theta\sin\phi_2\cos\phi_4 + e^4 \cos\phi_3\cos\phi_4 - e^5 \sin\phi_4 && (8.1.20f)\\ &\equiv E_9{}^4 e^9 + E_4{}^4 e^4 + E_5{}^4 e^5 \\ dy^5 &= e^9 \cos\theta\sin\phi_3\sin\phi_3\cos\phi_5 + e^4 \cos\phi_3\sin\phi_4\cos\phi_5 + e^5 \cos\phi_4\cos\phi_5 - e^6 \sin\phi_5 && (8.1.20g)\\ &\equiv E_9{}^5 e^9 + E_4{}^5 e^4 + E_5{}^5 e^5 + E_6{}^5 e^6 \\ dy^6 &= e^9 \cos\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6 + e^4 \cos\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6 + e^5 \cos\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6 \\ &\quad + e^6 \cos\phi_5\cos\phi_6 - e^7 \sin\phi_6 && (8.1.20h)\\ &\equiv E_9{}^6 e^9 + E_4{}^6 e^4 + E_5{}^6 e^5 + E_6{}^6 e^6 + E_7{}^6 e^7 \\ dy^7 &= e^9 \cos\theta\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7 + e^4 \cos\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7 + e^5 \cos\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7 \\ &\quad + e^6 \cos\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7 + e^7 \cos\phi_6\cos\phi_7 - e^8 \sin\phi_7 && (8.1.20i)\\ &\equiv E_9{}^7 e^9 + E_4{}^7 e^4 + E_5{}^7 e^5 + E_6{}^7 e^6 + E_7{}^7 e^7 + E_8{}^7 e^8 \\ dy^8 &= e^9 \cos\theta\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7 + e^4 \cos\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7 + e^5 \cos\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7 \\ &\quad + e^6 \cos\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7 + e^7 \cos\phi_6\sin\phi_7 + e^8 \cos\phi_7 && (8.1.20j)\\ &\equiv E_9{}^8 e^9 + E_4{}^8 e^4 + E_5{}^8 e^5 + E_6{}^8 e^6 + E_7{}^8 e^7 + E_8{}^8 e^8 \\ dy^9 &= e^9 \cos\theta\cos\phi_3 - e^4 \sin\phi_3 && (8.1.20k)\\ &\equiv E_9{}^9 e^9 + E_4{}^9 e^4 \\ dy^{10} &= e^9 \sin\theta\sin\varphi + e^{10} \cos\varphi && (8.1.20l)\\ &\equiv E_9{}^{10} e^9 + E_{10}{}^{10} e^{10} \end{aligned}$$

この表記により inverse vielbein $E_A{}^M$ の具体的な記述が得られる。この inverse vielbein の逆行列を求めることで、vielbein $e_M{}^A$ が求められる[3]:

$$\begin{aligned} e^0 &= e_0{}^0 dx^0 + e_1{}^0 dx^1 + e_2{}^0 dx^2 + e_3{}^0 dx^3 \\ &= \frac{1}{\cos t} dx^0 - \tanh\rho\tan t\cos\phi_1 dx^1 - \tanh\rho\tan t\sin\phi_1\cos\phi_2 dx^2 - \tanh\rho\tan t\sin\phi_1\sin\phi_2 dx^3 && (8.1.21a)\\ e^1 &= e_1{}^1 dx^1 + e_2{}^1 dx^2 + e_3{}^1 dx^3 \\ &= \frac{\cos\phi_1}{\cosh\rho} dx^1 + \frac{\sin\phi_1\cos\phi_2}{\cosh\rho} dx^2 + \frac{\sin\phi_1\sin\phi_2}{\cosh\rho} dx^3 && (8.1.21b) \end{aligned}$$

[3]Maple による計算ファイルは/home/tetsuji/notes/tk-notes/sugra-ads/tk/maplefiles/030822/ads4s7-vielbein.mws にある。この latex version は ./ads4s7-vielbein.tex である。

$$\begin{aligned}
e^{2} &= e_{1}{}^{2}\,dx^{1} + e_{2}{}^{2}\,dx^{2} + e_{3}{}^{2}\,dx^{3} \\
&= -\sin\phi_{1}\,dx^{1} + \cos\phi_{1}\cos\phi_{2}\,dx^{2} + \cos\phi_{1}\sin\phi_{2}\,dx^{3} \qquad (8.1.21c)\\
e^{3} &= e_{2}{}^{3}\,dx^{2} + e_{3}{}^{3}\,dx^{3} \\
&= -\sin\phi_{2}\,dx^{2} + \cos\phi_{2}\,dx^{3} \qquad (8.1.21d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{4} &= e_{4}{}^{4}\,dx^{4} + e_{5}{}^{4}\,dx^{5} + e_{6}{}^{4}\,dx^{6} + e_{7}{}^{4}\,dx^{7} + e_{8}{}^{4}\,dx^{8} + e_{9}{}^{4}\,dx^{9} \\
&= \cos\phi_{3}\cos\phi_{4}\,dx^{4} + \cos\phi_{3}\sin\phi_{4}\cos\phi_{5}\,dx^{5} + \cos\phi_{3}\sin\phi_{4}\sin\phi_{5}\cos\phi_{6}\,dx^{6} \\
&\quad + \cos\phi_{3}\sin\phi_{4}\sin\phi_{5}\sin\phi_{6}\cos\phi_{7}\,dx^{7} + \cos\phi_{3}\sin\phi_{4}\sin\phi_{5}\sin\phi_{6}\sin\phi_{7}\,dx^{8} - \sin\phi_{3}\,dx^{9} \qquad (8.1.21e)\\
e^{5} &= e_{4}{}^{5}\,dx^{4} + e_{5}{}^{5}\,dx^{5} + e_{6}{}^{5}\,dx^{6} + e_{7}{}^{5}\,dx^{7} + e_{8}{}^{5}\,dx^{8} \\
&= -\sin\phi_{4}\,dx^{4} + \cos\phi_{4}\cos\phi_{5}\,dx^{5} + \cos\phi_{4}\sin\phi_{5}\cos\phi_{6}\,dx^{6} + \cos\phi_{4}\sin\phi_{5}\sin\phi_{6}\cos\phi_{7}\,dx^{7} \\
&\quad + \cos\phi_{4}\sin\phi_{5}\sin\phi_{6}\sin\phi_{7}\,dx^{8} \qquad (8.1.21f)\\
e^{6} &= e_{5}{}^{6}\,dx^{5} + e_{6}{}^{6}\,dx^{6} + e_{7}{}^{6}\,dx^{7} + e_{8}{}^{6}\,dx^{8} \\
&= -\sin\phi_{5}\,dx^{5} + \cos\phi_{5}\cos\phi_{6}\,dx^{6} + \cos\phi_{5}\sin\phi_{6}\cos\phi_{7}\,dx^{7} + \cos\phi_{5}\sin\phi_{6}\sin\phi_{7}\,dx^{8} \qquad (8.1.21g)\\
e^{7} &= e_{6}{}^{7}\,dx^{6} + e_{7}{}^{7}\,dx^{7} + e_{8}{}^{7}\,dx^{8} \\
&= -\sin\phi_{6}\,dx^{6} + \cos\phi_{6}\cos\phi_{7}\,dx^{7} + \cos\phi_{6}\sin\phi_{7}\,dx^{8} \qquad (8.1.21h)\\
e^{8} &= e_{7}{}^{8}\,dx^{7} + e_{8}{}^{8}\,dx^{8} \\
&= -\sin\phi_{7}\,dx^{7} + \cos\phi_{7}\,dx^{8} \qquad (8.1.21i)\\
e^{9} &= e_{4}{}^{9}\,dx^{4} + e_{5}{}^{9}\,dx^{5} + e_{6}{}^{9}\,dx^{6} + e_{7}{}^{9}\,dx^{7} + e_{8}{}^{9}\,dx^{8} + e_{9}{}^{9}\,dx^{9} \\
&= \frac{\sin\phi_{3}\cos\phi_{4}}{\cos\theta}\,dx^{4} + \frac{\sin\phi_{3}\sin\phi_{4}\cos\phi_{5}}{\cos\theta}\,dx^{5} + \frac{\sin\phi_{3}\sin\phi_{4}\sin\phi_{5}\cos\phi_{6}}{\cos\theta}\,dx^{6} \\
&\quad + \frac{\sin\phi_{3}\sin\phi_{4}\sin\phi_{5}\sin\phi_{6}\cos\phi_{7}}{\cos\theta}\,dx^{7} + \frac{\sin\phi_{3}\sin\phi_{4}\sin\phi_{5}\sin\phi_{6}\sin\phi_{7}}{\cos\theta}\,dx^{8} + \frac{\cos\phi_{3}}{\cos\theta}\,dx^{9} \qquad (8.1.21j)\\
e^{10} &= e_{4}{}^{10}\,dx^{4} + e_{5}{}^{10}\,dx^{5} + e_{6}{}^{10}\,dx^{6} + e_{7}{}^{10}\,dx^{7} + e_{8}{}^{10}\,dx^{8} + e_{9}{}^{10}\,dx^{9} + e_{10}{}^{10}\,dx^{10} \\
&= -\tan\theta\tan\varphi\sin\phi_{3}\cos\phi_{4}\,dx^{4} - \tan\theta\tan\varphi\sin\phi_{3}\sin\phi_{4}\cos\phi_{5}\,dx^{5} \\
&\quad - \tan\theta\tan\varphi\sin\phi_{3}\sin\phi_{4}\sin\phi_{5}\cos\phi_{6}\,dx^{6} - \tan\theta\tan\varphi\sin\phi_{3}\sin\phi_{4}\sin\phi_{5}\sin\phi_{6}\cos\phi_{7}\,dx^{7} \\
&\quad - \tan\theta\tan\varphi\sin\phi_{3}\sin\phi_{4}\sin\phi_{5}\sin\phi_{6}\sin\phi_{7}\,dx^{8} - \tan\theta\tan\varphi\cos\phi_{3}\,dx^{9} + \frac{1}{\cos\varphi}\,dx^{10} \qquad (8.1.21k)
\end{aligned}$$

ついでに

$$e = \det(e_{M}{}^{A}) = \frac{1}{\cosh\rho\cos t\cos\theta\cos\varphi} \qquad (8.1.22)$$

である。これは $e = \sqrt{-\det(g_{MN})}$ であることを考慮すると、(8.1.11) と consistent である。

(8.1.15) と (8.1.21) より、affine-spin connection $\omega_{M}{}^{A}{}_{B}$ も具体的に記述できる:

$$\begin{aligned}
\omega^{0}{}_{1} &= \omega_{0}{}^{0}{}_{1}\,dx^{0} + \omega_{1}{}^{0}{}_{1}\,dx^{1} + \omega_{2}{}^{0}{}_{1}\,dx^{2} + \omega_{3}{}^{0}{}_{1}\,dx^{3} \\
&= \frac{1}{R_{A}}\frac{\tanh\rho}{\cos t}\,dx^{0} - \frac{1}{R_{A}}\tanh^{2}\rho\tan t\cos\phi_{1}\,dx^{1} - \frac{1}{R_{A}}\tanh^{2}\rho\tan t\sin\phi_{1}\cos\phi_{2}\,dx^{2}
\end{aligned}$$

$$- \frac{1}{R_A} \tanh^2 \rho \tan t \sin \phi_1 \sin \phi_2 \, dx^3 \tag{8.1.23a}$$

$$\begin{aligned} \omega^2{}_1 &= \omega_1{}^2{}_1 \, dx^1 + \omega_2{}^2{}_1 \, dx^2 + \omega_3{}^2{}_1 \, dx^3 \\ &= -\frac{1}{R_A} \frac{\sin\phi_1}{\tanh\rho} \, dx^1 + \frac{1}{R_A} \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2}{\tanh\rho} \, dx^2 + \frac{1}{R_A} \frac{\cos\phi_1 \sin\phi_2}{\tanh\rho} \, dx^3 \end{aligned} \tag{8.1.23b}$$

$$\begin{aligned} \omega^3{}_1 &= \omega_2{}^3{}_1 \, dx^2 + \omega_3{}^3{}_1 \, dx^3 \\ &= -\frac{1}{R_A} \frac{\sin\phi_2}{\tanh\rho} \, dx^2 + \frac{1}{R_A} \frac{\cos\phi_2}{\tanh\rho} \, dx^3 \end{aligned} \tag{8.1.23c}$$

$$\begin{aligned} \omega^3{}_2 &= \omega_2{}^3{}_2 \, dx^2 + \omega_3{}^3{}_2 \, dx^3 \\ &= -\frac{1}{R_A} \frac{\sin\phi_2}{\sinh\rho \tan\phi_1} \, dx^2 + \frac{1}{R_A} \frac{\cos\phi_2}{\sinh\rho \tan\phi_1} \, dx^3 \end{aligned} \tag{8.1.23d}$$

$$\begin{aligned} \omega^4{}_9 &= \omega_4{}^4{}_9 \, dx^4 + \omega_5{}^4{}_9 \, dx^5 + \omega_6{}^4{}_9 \, dx^6 + \omega_7{}^4{}_9 \, dx^7 + \omega_8{}^4{}_9 \, dx^8 + \omega_9{}^4{}_9 \, dx^9 \\ &= \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_3 \cos\phi_4}{\tan\theta} \, dx^4 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_3 \sin\phi_4 \cos\phi_5}{\tan\theta} \, dx^5 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \cos\phi_6}{\tan\theta} \, dx^6 \\ &\quad + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \cos\phi_7}{\tan\theta} \, dx^7 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \sin\phi_7}{\tan\theta} \, dx^8 \\ &\quad - \frac{1}{R_S} \frac{\sin\phi_3}{\tan\theta} \, dx^9 \end{aligned} \tag{8.1.23e}$$

$$\begin{aligned} \omega^5{}_9 &= \omega_4{}^5{}_9 \, dx^4 + \omega_5{}^5{}_9 \, dx^5 + \omega_6{}^5{}_9 \, dx^6 + \omega_7{}^5{}_9 \, dx^7 + \omega_8{}^5{}_9 \, dx^8 \\ &= -\frac{1}{R_S} \frac{\sin\phi_4}{\tan\theta} \, dx^4 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_4 \cos\phi_5}{\tan\theta} \, dx^5 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_4 \sin\phi_5 \cos\phi_6}{\tan\theta} \, dx^6 \\ &\quad + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \cos\phi_7}{\tan\theta} \, dx^7 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \sin\phi_7}{\tan\theta} \, dx^8 \end{aligned} \tag{8.1.23f}$$

$$\begin{aligned} \omega^5{}_4 &= \omega_4{}^5{}_4 \, dx^4 + \omega_5{}^5{}_4 \, dx^5 + \omega_6{}^5{}_4 \, dx^6 + \omega_7{}^5{}_4 \, dx^7 + \omega_8{}^5{}_4 \, dx^8 \\ &= -\frac{1}{R_S} \frac{\sin\phi_4}{\sin\theta \tan\phi_3} \, dx^4 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_4 \cos\phi_5}{\sin\theta \tan\phi_3} \, dx^5 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_4 \sin\phi_5 \cos\phi_6}{\sin\theta \tan\phi_3} \, dx^6 \\ &\quad + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \cos\phi_7}{\sin\theta \tan\phi_3} \, dx^7 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \sin\phi_7}{\sin\theta \tan\phi_3} \, dx^8 \end{aligned} \tag{8.1.23g}$$

$$\begin{aligned} \omega^6{}_9 &= \omega_5{}^6{}_9 \, dx^5 + \omega_6{}^6{}_9 \, dx^6 + \omega_7{}^6{}_9 \, dx^7 + \omega_8{}^6{}_9 \, dx^8 \\ &= -\frac{1}{R_S} \frac{\sin\phi_5}{\tan\theta} \, dx^5 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_5 \cos\phi_6}{\tan\theta} \, dx^6 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_5 \sin\phi_6 \cos\phi_7}{\tan\theta} \, dx^7 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_5 \sin\phi_6 \sin\phi_7}{\tan\theta} \, dx^8 \end{aligned} \tag{8.1.23h}$$

$$\begin{aligned} \omega^6{}_4 &= \omega_5{}^6{}_4 \, dx^5 + \omega_6{}^6{}_4 \, dx^6 + \omega_7{}^6{}_4 \, dx^7 + \omega_8{}^6{}_4 \, dx^8 \\ &= -\frac{1}{R_S} \frac{\sin\phi_5}{\sin\theta \tan\phi_3} \, dx^5 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_5 \cos\phi_6}{\sin\theta \tan\phi_3} \, dx^6 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_5 \sin\phi_6 \cos\phi_7}{\sin\theta \tan\phi_3} \, dx^7 \\ &\quad + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_5 \sin\phi_6 \sin\phi_7}{\sin\theta \tan\phi_3} \, dx^8 \end{aligned} \tag{8.1.23i}$$

$$\begin{aligned} \omega^6{}_5 &= \omega_5{}^6{}_5 \, dx^5 + \omega_6{}^6{}_5 \, dx^6 + \omega_7{}^6{}_5 \, dx^7 + \omega_8{}^6{}_5 \, dx^8 \\ &= -\frac{1}{R_S} \frac{\sin\phi_5}{\sin\theta \sin\phi_3 \tan\phi_4} \, dx^5 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_5 \cos\phi_6}{\sin\theta \sin\phi_3 \tan\phi_4} \, dx^6 + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_5 \sin\phi_6 \cos\phi_7}{\sin\theta \sin\phi_3 \tan\phi_4} \, dx^7 \\ &\quad + \frac{1}{R_S} \frac{\cos\phi_5 \sin\phi_6 \sin\phi_7}{\sin\theta \sin\phi_3 \tan\phi_4} \, dx^8 \end{aligned} \tag{8.1.23j}$$

$$\begin{aligned}
\omega^{7}{}_{9} &= \omega_6{}^{7}{}_{9}\,\mathrm{d}x^6 + \omega_7{}^{7}{}_{9}\,\mathrm{d}x^7 + \omega_8{}^{7}{}_{9}\,\mathrm{d}x^8 \\
&= -\frac{1}{R_S}\frac{\sin\phi_6}{\tan\theta}\,\mathrm{d}x^6 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_6\cos\phi_7}{\tan\theta}\,\mathrm{d}x^7 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_6\sin\phi_7}{\tan\theta}\,\mathrm{d}x^8 \qquad (8.1.23k)\\
\omega^{7}{}_{4} &= \omega_6{}^{7}{}_{4}\,\mathrm{d}x^6 + \omega_7{}^{7}{}_{4}\,\mathrm{d}x^7 + \omega_8{}^{7}{}_{4}\,\mathrm{d}x^8 \\
&= -\frac{1}{R_S}\frac{\sin\phi_6}{\sin\theta\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^6 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_6\cos\phi_7}{\sin\theta\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^7 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_6\sin\phi_7}{\sin\theta\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^8 \qquad (8.1.23l)\\
\omega^{7}{}_{5} &= \omega_6{}^{7}{}_{5}\,\mathrm{d}x^6 + \omega_7{}^{7}{}_{5}\,\mathrm{d}x^7 + \omega_8{}^{7}{}_{5}\,\mathrm{d}x^8 \\
&= -\frac{1}{R_S}\frac{\sin\phi_6}{\sin\theta\sin\phi_3\tan\phi_4}\,\mathrm{d}x^6 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_6\cos\phi_7}{\sin\theta\sin\phi_3\tan\phi_4}\,\mathrm{d}x^7 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_6\sin\phi_7}{\sin\theta\sin\phi_3\tan\phi_4}\,\mathrm{d}x^8 \qquad (8.1.23m)\\
\omega^{7}{}_{6} &= \omega_6{}^{7}{}_{6}\,\mathrm{d}x^6 + \omega_7{}^{7}{}_{6}\,\mathrm{d}x^7 + \omega_8{}^{7}{}_{6}\,\mathrm{d}x^8 \\
&= -\frac{1}{R_S}\frac{\sin\phi_6}{\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\tan\phi_5}\,\mathrm{d}x^6 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_6\cos\phi_7}{\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\tan\phi_5}\,\mathrm{d}x^7 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_6\sin\phi_7}{\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\tan\phi_5}\,\mathrm{d}x^8 \\
&\qquad (8.1.23n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega^{8}{}_{9} &= \omega_7{}^{8}{}_{9}\,\mathrm{d}x^7 + \omega_8{}^{8}{}_{9}\,\mathrm{d}x^8 \\
&= -\frac{1}{R_S}\frac{\sin\phi_7}{\tan\theta}\,\mathrm{d}x^7 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_7}{\tan\theta}\,\mathrm{d}x^8 \qquad (8.1.23o)\\
\omega^{8}{}_{4} &= \omega_7{}^{8}{}_{4}\,\mathrm{d}x^7 + \omega_8{}^{8}{}_{4}\,\mathrm{d}x^8 \\
&= -\frac{1}{R_S}\frac{\sin\phi_7}{\sin\theta\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^7 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_7}{\sin\theta\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^8 \qquad (8.1.23p)\\
\omega^{8}{}_{5} &= \omega_7{}^{8}{}_{5}\,\mathrm{d}x^7 + \omega_8{}^{8}{}_{5}\,\mathrm{d}x^8 \\
&= -\frac{1}{R_S}\frac{\sin\phi_7}{\sin\theta\sin\phi_3\tan\phi_4}\,\mathrm{d}x^7 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_7}{\sin\theta\sin\phi_3\tan\phi_4}\,\mathrm{d}x^8 \qquad (8.1.23q)\\
\omega^{8}{}_{6} &= \omega_7{}^{8}{}_{6}\,\mathrm{d}x^7 + \omega_8{}^{8}{}_{6}\,\mathrm{d}x^8 \\
&= -\frac{1}{R_S}\frac{\sin\phi_7}{\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\tan\phi_5}\,\mathrm{d}x^7 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_7}{\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\tan\phi_5}\,\mathrm{d}x^8 \qquad (8.1.23r)\\
\omega^{8}{}_{7} &= \omega_7{}^{8}{}_{7}\,\mathrm{d}x^7 + \omega_8{}^{8}{}_{7}\,\mathrm{d}x^8 \\
&= -\frac{1}{R_S}\frac{\sin\phi_7}{\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\tan\phi_6}\,\mathrm{d}x^7 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_7}{\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\tan\phi_6}\,\mathrm{d}x^8 \qquad (8.1.23s)\\
\omega^{10}{}_{9} &= \omega_4{}^{10}{}_{9}\,\mathrm{d}x^4 + \omega_5{}^{10}{}_{9}\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^{10}{}_{9}\,\mathrm{d}x^6 + \omega_7{}^{10}{}_{9}\,\mathrm{d}x^7 + \omega_8{}^{10}{}_{9}\,\mathrm{d}x^8 + \omega_9{}^{10}{}_{9}\,\mathrm{d}x^9 + \omega_{10}{}^{10}{}_{9}\,\mathrm{d}x^{10} \\
&= \frac{1}{R_S}\tan^2\theta\tan\varphi\sin\phi_3\cos\phi_4\,\mathrm{d}x^4 + \frac{1}{R_S}\tan^2\theta\tan\varphi\sin\phi_3\sin\phi_4\cos\phi_5\,\mathrm{d}x^5 \\
&\quad + \frac{1}{R_S}\tan^2\theta\tan\varphi\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6\,\mathrm{d}x^6 + \frac{1}{R_S}\tan^2\theta\tan\varphi\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7\,\mathrm{d}x^7 \\
&\quad + \frac{1}{R_S}\tan^2\theta\tan\varphi\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7\,\mathrm{d}x^8 + \frac{1}{R_S}\tan^2\theta\tan\varphi\cos\phi_3\,\mathrm{d}x^9 - \frac{1}{R_S}\frac{\tan\theta}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}x^{10} \\
&\qquad (8.1.23t)
\end{aligned}$$

8.2 $AdS_7 \times S^4$

8.2.1 Curved Spacetime Coordinates, Metric

先の計算を応用して $AdS_7 \times S^4$ の global coordinates を見る [32]:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_{11}^2 &= R_A^2\Big\{ -\cosh^2\rho\cdot\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \sinh^2\rho\cdot\mathrm{d}\Omega_5^2\Big\} + R_S^2\Big\{\cos^2\theta\cdot\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\cdot\mathrm{d}\Omega_2'^2\Big\} \\ &= \Big\{ -(\mathrm{d}X^{-1})^2 - (\mathrm{d}X^0)^2 + \sum_{i=1}^{6}(\mathrm{d}X^i)^2\Big\} + \Big\{\sum_{m=7}^{11}(\mathrm{d}Y^m)^2\Big\}\,. \end{aligned} \tag{8.2.1}$$

ここで、AdS_7, S^4 はそれぞれ

$$AdS_7 \ : \qquad -R_A^2 = -(X^{-1})^2 - (X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 \tag{8.2.2a}$$

$$S^4 \ : \qquad R_S^2 = (Y^7)^2 + (Y^8)^2 + (Y^9)^2 + (Y^{10})^2 + (Y^{11})^2 \tag{8.2.2b}$$

で代数的に定義されている (13-dimensional flat space への埋め込み)。座標 $\{X^A; Y^B\}$ を polar coordinates を用いて表す。AdS_7 については

$$X^{-1} = R_A\cosh\rho\,\cos t \qquad X^3 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\cos\phi_5 \tag{8.2.3a}$$

$$X^0 = R_A\cosh\rho\,\sin t \qquad X^4 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\sin\phi_5\,\cos\phi_6 \tag{8.2.3b}$$

$$X^1 = R_A\sinh\rho\,\cos\phi_3 \qquad X^5 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\sin\phi_5\,\sin\phi_6\,\cos\phi_7 \tag{8.2.3c}$$

$$X^2 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_3\,\cos\phi_4 \qquad X^6 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\sin\phi_5\,\sin\phi_6\,\sin\phi_7 \tag{8.2.3d}$$

ただし $0 \le \phi_i \le \pi$ $(i = 3, \cdots, 6)$, $0 \le \phi_7 \le 2\pi$ である。S^4 については

$$Y^7 = R_S\sin\theta\,\sin\phi_1\,\cos\phi_2 \qquad Y^{10} = R_S\cos\theta\,\sin\varphi \tag{8.2.3e}$$

$$Y^8 = R_S\sin\theta\,\sin\phi_1\,\sin\phi_2 \qquad Y^{11} = R_S\cos\theta\,\cos\varphi \tag{8.2.3f}$$

$$Y^9 = R_S\sin\theta\,\cos\phi_1 \tag{8.2.3g}$$

ここで $0 \le \phi_1 \le \pi$, $0 \le \phi_2 \le 2\pi$ である。この座標系の時、立体角 $\mathrm{d}\Omega_2'^2$, $\mathrm{d}\Omega_5{}^2$ は

$$\mathrm{d}\Omega_2^2 = \sum_{i=1}^{2}\prod_{k=1}^{i-1}\sin^2\phi_k\,\mathrm{d}\phi_i^2\,, \qquad \mathrm{d}\Omega_5'^2 = \sum_{j=3}^{7}\prod_{k=3}^{j-1}\sin^2\phi_k\,\mathrm{d}\phi_j^2\,, \tag{8.2.4}$$

で表される $(\sin\phi_0 \equiv 1)$。

Freund-Rubin ansatz や Penrose limit を用いるので、各座標の役割をまとめておこう:

coordinates	ρ	Ω_5	t	φ	Ω_2'	θ
before Penrose limit	AdS_7			S^4		
after Penrose limit	flat $(SO(6))$		light-cone $(+,-)$		flat $(SO(3))$	

なおここで、Penrose limit で flat space が見えやすくなる座標系を用意しよう。11-dimensional space は、先に記述されるように 13-dimensional flat space $\mathbb{R}^{2,13}$ の埋め込みで記述される。13-dim. coordinates は (8.2.3) で与えられているので、これに constraint を課して 11-dimensional space に埋め込もう：

$$(X^{-1})^2 = R_A^2 - (X^0)^2 + \sum_{i=1}^{6}(X^i)^2 \qquad X^{-1}\mathrm{d}X^{-1} = -X^0\mathrm{d}X^0 + \sum_i X^i\mathrm{d}X^i \tag{8.2.5a}$$

$$(Y^{11})^2 = R_S^2 - \sum_{m=7}^{10}(Y^m)^2 \qquad Y^{11}\mathrm{d}Y^{11} = -\sum_m Y^m\mathrm{d}Y^m \tag{8.2.5b}$$

この下で座標と計量を与えよう：

$$x^0 = X^0 = R_A\cosh\rho\sin t \qquad y^7 = Y^7 = R_S\sin\theta\sin\phi_1\cos\phi_2 \tag{8.2.6a}$$

$$x^1 = X^1 = R_A\sinh\rho\cos\phi_3 \qquad y^8 = Y^8 = R_S\sin\theta\sin\phi_1\sin\phi_2 \tag{8.2.6b}$$

$$x^2 = X^2 = R_A\sinh\rho\sin\phi_3\cos\phi_4 \qquad y^9 = Y^9 = R_S\sin\theta\cos\phi_1 \tag{8.2.6c}$$

$$x^3 = X^3 = R_A\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\cos\phi_5 \qquad y^{10} = Y^{10} = R_S\cos\theta\sin\varphi \tag{8.2.6d}$$

$$x^4 = X^4 = R_A\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6 \tag{8.2.6e}$$

$$x^5 = X^5 = R_A\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7 \tag{8.2.6f}$$

$$x^6 = X^6 = R_A\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7 \tag{8.2.6g}$$

(8.2.5), (8.2.6) を (8.2.1) に代入しよう：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s_{11}^2 &= -\Big\{1+\Big(\frac{x^0}{X^{-1}}\Big)^2\Big\}(\mathrm{d}x^0)^2 + \sum_{i=1}^{6}\Big\{1-\Big(\frac{x^i}{X^{-1}}\Big)^2\Big\}(\mathrm{d}x^i)^2 + \sum_{i=1}^{6}\frac{2x^0x^i}{(X^{-1})^2}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^i - \sum_{i,j=1}^{6}\frac{2x^ix^j}{(X^{-1})^2}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \\ &\quad + \sum_{m=7}^{10}\Big\{1+\Big(\frac{y^m}{Y^{11}}\Big)^2\Big\}(\mathrm{d}y^m)^2 + \sum_{m,n=7}^{10}\frac{2y^my^n}{(Y^{11})^2}\mathrm{d}y^m\mathrm{d}y^n \\ &\equiv g_{MN}\mathrm{d}x^M\mathrm{d}x^N \equiv g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + g_{mn}\,\mathrm{d}y^m\mathrm{d}y^n\end{aligned} \tag{8.2.7}$$

つまり計量の各成分は次のようになる：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu\rho}\,\eta_{\nu\sigma}\frac{x^\rho x^\sigma}{(X^{-1})^2} \qquad g_{mn} = \delta_{mn} + \delta_{mp}\delta_{nq}\frac{y^py^q}{(Y^{11})^2} \tag{8.2.8}$$

ここで $x^\mu \in AdS_7$, $y^m \in S^4$ である[4]。これらをまとめて $x^M = \{x^\mu; y^m\}$ と書き表すことがある。また、これから得られる g^{MN} は

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \frac{x^\mu x^\nu}{R_A^2} \qquad g^{mn} = \delta^{mn} - \frac{y^my^n}{R_S^2} \tag{8.2.9}$$

である。metric の determinant はそれぞれ

$$\det(g_{\mu\nu}) = -\frac{R_A^2}{(X^{-1})^2} \qquad \det(g_{mn}) = \frac{R_S^2}{(Y^{11})^2} \tag{8.2.10}$$

となる。11-dimensional spacetime 全体では

$$\det(g_{MN}) = -\frac{R_A^2R_S^2}{(X^{-1})^2(Y^{11})^2} = -\Big(\frac{1}{\cosh\rho\cos t\cos\theta\cos\varphi}\Big)^2 \tag{8.2.11}$$

[4] vielbein (8.2.13) を意識してこの順序にしてある。

である。affine connection は

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{R_A^2}\frac{x^\rho}{X}\{\eta_{\mu\sigma}\,\eta_{\nu\lambda}\,x^\sigma x^\lambda - \eta_{\mu\nu}X\} \qquad X = (X^{-1})^2 = R_A^2 + \eta_{\mu\nu}\,x^\mu x^\nu \tag{8.2.12a}$$

$$\Gamma^p_{mn} = \frac{1}{R_S^2}\frac{y^p}{Y}\{\delta_{mq}\,\delta_{nr}\,y^q y^r + \delta_{mn}Y\} \qquad Y = (Y^{11})^2 = R_S^2 - \delta_{mn}y^m y^n \tag{8.2.12b}$$

である[5]。

8.2.2 Differential Form, Vielbein, Affine-spin Connection, Curvature

metric (8.2.1) ($ds^2_{11} = \eta_{AB}\,e^A\,e^B$, $\eta_{AB} = \mathrm{diag.}(-++\cdots+)$) から vielbein を書き下そう:

$$e^0 = R_A\cosh\rho\,dt \qquad e^6 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\sin\phi_5\,\sin\phi_6\,d\phi_7 \tag{8.2.13a}$$

$$e^1 = R_A d\rho \qquad e^7 = R_S\sin\theta\,d\phi_1 \tag{8.2.13b}$$

$$e^2 = R_A\sinh\rho\,d\phi_3 \qquad e^8 = R_S\sin\theta\,\sin\phi_1\,d\phi_2 \tag{8.2.13c}$$

$$e^3 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_3\,d\phi_4 \qquad e^9 = R_S d\theta \tag{8.2.13d}$$

$$e^4 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,d\phi_5 \qquad e^{10} = R_S\cos\theta\,d\varphi \tag{8.2.13e}$$

$$e^5 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\sin\phi_5\,d\phi_6 \tag{8.2.13f}$$

この exterior derivative de^A を列挙しよう:

$$de^0 = -\frac{1}{R_A}\tanh\rho\,e^0\wedge e^1 \tag{8.2.14a}$$

$$de^1 = 0 \tag{8.2.14b}$$

$$de^2 = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^2\wedge e^1 \tag{8.2.14c}$$

$$de^3 = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^3\wedge e^1 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^3\wedge e^2 \tag{8.2.14d}$$

$$de^4 = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^4\wedge e^1 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^4\wedge e^2 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^4\wedge e^3 \tag{8.2.14e}$$

$$\begin{aligned}de^5 = &-\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^5\wedge e^1 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^5\wedge e^2 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^5\wedge e^3\\ &-\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}e^5\wedge e^4\end{aligned} \tag{8.2.14f}$$

$$\begin{aligned}de^6 = &-\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^6\wedge e^1 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^6\wedge e^2 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^6\wedge e^3\\ &-\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}e^6\wedge e^4 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_6}e^6\wedge e^5\end{aligned} \tag{8.2.14g}$$

$$de^7 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}e^7\wedge e^9 \tag{8.2.14h}$$

$$de^8 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}e^8\wedge e^9 - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_1}e^8\wedge e^7 \tag{8.2.14i}$$

$$de^9 = 0 \tag{8.2.14j}$$

[5] /notes/tk-notes/sugra-ads/tk/maplefiles/030824/affine-ads7s4-030824.tex を参照。

$$\mathrm{d}e^{10} = \frac{1}{R_S}\tan\theta\, e^{10}\wedge e^9 \,. \tag{8.2.14k}$$

$\mathrm{d}e^A + \omega^A{}_B \wedge e^B = 0$ より、affine-spin connection $\omega^A{}_B$ が得られる:

$$\omega^0{}_1 = \frac{1}{R_A}\tanh\rho\, e^0 \qquad \omega^3{}_1 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^3 \tag{8.2.15a}$$

$$\omega^2{}_1 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^2 \qquad \omega^3{}_2 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^3 \tag{8.2.15b}$$

$$\omega^4{}_1 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^4 \qquad \omega^5{}_1 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^5 \tag{8.2.15c}$$

$$\omega^4{}_2 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^4 \qquad \omega^5{}_2 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^5 \tag{8.2.15d}$$

$$\omega^4{}_3 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^4 \qquad \omega^5{}_3 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^5 \tag{8.2.15e}$$

$$\omega^5{}_4 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}e^5 \tag{8.2.15f}$$

$$\omega^6{}_1 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^6 \tag{8.2.15g}$$

$$\omega^6{}_2 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^6 \tag{8.2.15h}$$

$$\omega^6{}_3 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^6 \tag{8.2.15i}$$

$$\omega^6{}_4 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}e^6 \tag{8.2.15j}$$

$$\omega^6{}_5 = \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}e^6 \tag{8.2.15k}$$

$$\omega^7{}_9 = \frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}e^7 \qquad \omega^8{}_7 = \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_1}e^8 \tag{8.2.15l}$$

$$\omega^{10}{}_9 = -\frac{1}{R_S}\tan\theta\, e^{10} \qquad \omega^8{}_9 = \frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}e^8 \tag{8.2.15m}$$

affine-spin connection の反対称性 $\omega^{A'}{}_B\,\eta_{A'A} + \omega^{B'}{}_A\,\eta_{B'B} = 0$ に注意する:

$$\omega^0{}_I = \omega^1{}_0 \,, \qquad \omega^I{}_J = -\omega^J{}_I \qquad (I, J = 1, 2, \cdots, 10)$$

exterior derivative of affine-spin connection:

$$\mathrm{d}\omega^0{}_1 = -\frac{1}{R_A^2}e^0\wedge e^1 \tag{8.2.16a}$$

$$\mathrm{d}\omega^2{}_1 = -\frac{1}{R_A^2}e^2\wedge e^1 \tag{8.2.16b}$$

$$\mathrm{d}\omega^3{}_1 = -\frac{1}{R_A^2}\Big\{e^3\wedge e^1 + \frac{\cosh\rho}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^3\wedge e^2\Big\} \tag{8.2.16c}$$

$$\mathrm{d}\omega^3{}_2 = \frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}e^3\wedge e^2 \tag{8.2.16d}$$

$$\begin{aligned}
d\omega^4{}_1 &= -\frac{1}{R_A^2}\Big\{ e^4 \wedge e^1 + \frac{\cosh\rho}{\sinh^2\rho}\Big(\frac{1}{\tan\phi_3}\, e^4 \wedge e^2 + \frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}\, e^4 \wedge e^3 \Big)\Big\} && (8.2.16e) \\
d\omega^4{}_2 &= \frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\Big\{ e^4 \wedge e^2 - \frac{\cos\phi_3}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}\, e^4 \wedge e^3 \Big\} && (8.2.16f) \\
d\omega^4{}_2 &= \frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\, e^4 \wedge e^3 && (8.2.16g) \\
d\omega^5{}_1 &= -\frac{1}{R_A^2}\Big\{ e^5 \wedge e^1 + \frac{\cosh\rho}{\sinh^2\rho}\Big(\frac{1}{\tan\phi_3}\, e^5 \wedge e^2 + \frac{1}{\sin\phi_3}\Big[\frac{1}{\tan\phi_4}\, e^5 \wedge e^3 + \frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}\, e^5 \wedge e^4 \Big]\Big)\Big\} && (8.2.16h) \\
d\omega^5{}_2 &= \frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\Big\{ e^5 \wedge e^2 - \frac{\cos\phi_3}{\sin^2\phi_3}\Big(\frac{1}{\tan\phi_4}\, e^5 \wedge e^3 + \frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}\, e^5 \wedge e^4 \Big)\Big\} && (8.2.16i) \\
d\omega^5{}_3 &= \frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\Big\{ e^5 \wedge e^3 - \frac{\cos\phi_4}{\sin^2\phi_4}\, e^5 \wedge e^4 \Big\} && (8.2.16j) \\
d\omega^5{}_4 &= \frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\sin^2\phi_4} e^5 \wedge e^4 && (8.2.16k) \\
d\omega^6{}_1 &= -\frac{1}{R_A^2}\Big\{ e^6 \wedge e^1 + \frac{\cosh\rho}{\sinh^2\rho}\Big(\frac{1}{\tan\phi_3}\, e^6 \wedge e^2 \\
&\qquad + \frac{1}{\sin\phi_3}\Big[\frac{1}{\tan\phi_4}\, e^6 \wedge e^3 + \frac{1}{\sin\phi_4}\Big\{ \frac{1}{\tan\phi_5}\, e^6 \wedge e^4 + \frac{1}{\sin\phi_5} + \frac{1}{\tan\phi_5}\, e^6 \wedge e^5 \Big\}\Big]\Big)\Big\} && (8.2.16l) \\
d\omega^6{}_2 &= \frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\Big\{ e^6 \wedge e^2 - \frac{\cos\phi_3}{\sin^2\phi_3}\Big(\frac{1}{\tan\phi_4}\, e^6 \wedge e^3 + \frac{1}{\sin\phi_4}\Big[\frac{1}{\tan\phi_5}\, e^6 \wedge e^4 + \frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}\, e^6 \wedge e^5 \Big]\Big)\Big\} \\
& && (8.2.16m) \\
d\omega^6{}_3 &= \frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\Big\{ e^6 \wedge e^3 - \frac{\cos\phi_4}{\sin^2\phi_4}\Big(\frac{1}{\tan\phi_5}\, e^6 \wedge e^4 + \frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}\, e^6 \wedge e^5 \Big)\Big\} && (8.2.16n) \\
d\omega^6{}_4 &= \frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\sin^2\phi_4}\Big\{ e^6 \wedge e^4 - \frac{\cos\phi_5}{\sin^2\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6} e^6 \wedge e^5 \Big\} && (8.2.16o) \\
d\omega^6{}_5 &= \frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\sin^2\phi_4}\frac{1}{\sin^2\phi_5} e^6 \wedge e^5 && (8.2.16p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\omega^7{}_9 &= \frac{1}{R_S^2}\, e^7 \wedge e^9 & d\omega^8{}_7 &= \frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta} e^8 \wedge e^7 && (8.2.17a) \\
d\omega^{10}{}_9 &= -\frac{1}{R_S^2}\, e^{10} \wedge e^9 & d\omega^8{}_9 &= \frac{1}{R_S^2}\Big\{ e^8 \wedge e^9 - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{1}{\tan\phi_1}\, e^8 \wedge e^7 \Big\} && (8.2.17b)
\end{aligned}$$

curvature 2-form $R^A{}_B = d\omega^A{}_B + \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B$ は次のようにまとめることが可能である:

$$R^a{}_b = -\frac{1}{R_A^2}\eta_{bc}\, e^a \wedge e^c \quad \text{for } AdS_7\,, \qquad R^{a'}{}_{b'} = \frac{1}{R_S^2}\delta_{b'c'}\, e^{a'} \wedge e^{c'} \quad \text{for } S^4 \qquad (8.2.18)$$

よって、Riemann tensor $R^A{}_{BCD}$, Ricci tensor $\mathcal{R}^A{}_B$, scalar curvature $\mathcal{R}_{7(4)}$ が具体的に計算される:

$$\begin{aligned}
R^a{}_{bcd} &= -\frac{1}{R_A^2}\big(\delta^a_c\,\eta_{bd} - \delta^a_d\,\eta_{bc}\big) & \mathcal{R}^a{}_b &= \mathcal{R}^a{}_{cbd}\,\eta^{cd} = -\frac{6}{R_A^2}\delta^a_b & \mathcal{R}_7 &= -\frac{42}{R_A^2} && (8.2.19a) \\
R^{a'}{}_{b'c'd'} &= \frac{1}{R_S^2}\big(\delta^{a'}_{c'}\,\delta^{b'}_{d'} - \delta_{d'a'}\,\delta_{c'b'}\big) & \mathcal{R}^{a'}{}_{b'} &= \mathcal{R}^{a'}{}_{c'b'd'}\,\eta^{c'd'} = \frac{3}{R_S^2}\delta^{a'}_{b'} & \mathcal{R}_4 &= \frac{12}{R_S^2} && (8.2.19b)
\end{aligned}$$

Penrose limit を取る際には $R_A = 2R_S$ に固定する。

8.2.3 Explicit Expression of Components of Affine-spin Connection

$AdS_4 \times S^7$ と同様の議論を行う。(inverse) vielbein の具体的表記を得るため、(8.2.6) の微分と、vielbein での再記述を列挙しよう:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^0 &= e^1 \sinh\rho \sin t + e^0 \cos t \\ &= E_1{}^0 e^1 + E_0{}^0 e^0 \end{aligned} \tag{8.2.20a}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^1 &= e^1 \cosh\rho \cos\phi_3 - e^2 \sin\phi_3 \\ &= E_1{}^1 e^1 + E_2{}^1 e^2 \end{aligned} \tag{8.2.20b}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^2 &= e^1 \cosh\rho \sin\phi_3 \cos\phi_4 + e^2 \cos\phi_3 \cos\phi_4 - e^3 \sin\phi_4 \\ &= E_1{}^2 e^1 + E_2{}^2 e^2 + E_3{}^2 e^3 \end{aligned} \tag{8.2.20c}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^3 &= e^1 \cosh\rho \sin\phi_3 \sin\phi_4 \cos\phi_5 + e^2 \cos\phi_3 \sin\phi_4 \cos\phi_5 + e^3 \cos\phi_4 \cos\phi_5 - e^4 \sin\phi_5 \\ &= E_1{}^3 e^1 + E_2{}^3 e^2 + E_3{}^3 e^3 + E_4{}^3 e^4 \end{aligned} \tag{8.2.20d}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^4 &= e^1 \cosh\rho \sin\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \cos\phi_6 + e^2 \cos\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \cos\phi_6 + e^3 \cos\phi_4 \sin\phi_5 \cos\phi_6 \\ &\quad + e^4 \cos\phi_5 \cos\phi_6 - e^5 \sin\phi_6 \\ &= E_1{}^4 e^1 + E_2{}^4 e^2 + E_3{}^4 e^3 + E_4{}^4 e^4 + E_5{}^4 e^5 \end{aligned} \tag{8.2.20e}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^5 &= e^1 \cosh\rho \sin\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \cos\phi_7 + e^2 \cos\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \cos\phi_7 \\ &\quad + e^3 \cos\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \cos\phi_7 + e^4 \cos\phi_5 \sin\phi_6 \cos\phi_7 + e^5 \cos\phi_6 \cos\phi_7 - e^6 \sin\phi_7 \\ &= E_1{}^5 e^1 + E_2{}^5 e^2 + E_3{}^5 e^3 + E_4{}^5 e^4 + E_5{}^5 e^5 + E_6{}^5 e^6 \end{aligned} \tag{8.2.20f}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x^6 &= e^1 \cosh\rho \sin\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \sin\phi_7 + e^2 \cos\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \sin\phi_7 \\ &\quad + e^3 \cos\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \sin\phi_7 + e^4 \cos\phi_5 \sin\phi_6 \sin\phi_7 + e^5 \cos\phi_6 \sin\phi_7 + e^6 \cos\phi_7 \\ &= E_1{}^6 e^1 + E_2{}^6 e^2 + E_3{}^6 e^3 + E_4{}^6 e^4 + E_5{}^6 e^5 + E_6{}^6 e^6 \end{aligned} \tag{8.2.20g}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y^7 &= e^9 \cos\theta \sin\phi_1 \cos\phi_2 + e^7 \cos\phi_1 \cos\phi_2 - e^8 \sin\phi_2 \\ &= E_9{}^7 e^9 + E_7{}^7 e^7 + E_8{}^7 e^8 \end{aligned} \tag{8.2.20h}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y^8 &= e^9 \cos\theta \sin\phi_1 \sin\phi_2 + e^7 \cos\phi_1 \sin\phi_2 + e^8 \cos\phi_2 \\ &= E_9{}^8 e^9 + E_7{}^8 e^7 + E_8{}^8 e^8 \end{aligned} \tag{8.2.20i}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y^9 &= e^9 \cos\theta \cos\phi_1 - e^7 \sin\phi_1 \\ &= E_9{}^9 e^9 + E_7{}^9 e^7 \end{aligned} \tag{8.2.20j}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y^{10} &= -e^9 \sin\theta \sin\varphi + e^{10} \cos\varphi \\ &= E_9{}^{10} e^9 + E_{10}{}^{10} e^{10} \end{aligned} \tag{8.2.20k}$$

この表記により inverse vielbein $E_A{}^M$ の具体的な記述が得られる。この inverse vielbein の逆行列を 求めることで、vielbein $e_M{}^A$ が求められる[6]:

$$\begin{aligned}
e^0 &= e_0{}^0\,\mathrm{d}x^0 + e_1{}^0\,\mathrm{d}x^1 + e_2{}^0\,\mathrm{d}x^2 + e_3{}^0\,\mathrm{d}x^3 + e_4{}^0\,\mathrm{d}x^4 + e_5{}^0\,\mathrm{d}x^5 + e_6{}^0\,\mathrm{d}x^6 \\
&= \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}x^0 - \tanh\rho\tan t\cos\phi_3\,\mathrm{d}x^1 - \tanh\rho\tan t\sin\phi_3\cos\phi_4\,\mathrm{d}x^2 - \tanh\rho\tan t\sin\phi_3\sin\phi_4\cos\phi_5\,\mathrm{d}x^3 \\
&\quad - \tanh\rho\tan t\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6\,\mathrm{d}x^4 - \tanh\rho\tan t\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7\,\mathrm{d}x^5 \\
&\quad - \tanh\rho\tan t\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.21a) \\
e^1 &= e_1{}^1\,\mathrm{d}x^1 + e_2{}^1\,\mathrm{d}x^2 + e_3{}^1\,\mathrm{d}x^3 + e_4{}^1\,\mathrm{d}x^4 + e_5{}^1\,\mathrm{d}x^5 + e_6{}^1\,\mathrm{d}x^6 \\
&= \frac{\cos\phi_3}{\cosh\rho}\,\mathrm{d}x^1 + \frac{\sin\phi_3\cos\phi_4}{\cosh\rho}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{\sin\phi_3\sin\phi_4\cos\phi_5}{\cosh\rho}\,\mathrm{d}x^3 + \frac{\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6}{\cosh\rho}\,\mathrm{d}x^4 \\
&\quad + \frac{\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7}{\cosh\rho}\,\mathrm{d}x^5 + \frac{\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7}{\cosh\rho}\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.21b) \\
e^2 &= e_1{}^2\,\mathrm{d}x^1 + e_2{}^2\,\mathrm{d}x^2 + e_3{}^2\,\mathrm{d}x^3 + e_4{}^2\,\mathrm{d}x^4 + e_5{}^2\,\mathrm{d}x^5 + e_6{}^2\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\sin\phi_3\,\mathrm{d}x^1 + \cos\phi_3\cos\phi_4\,\mathrm{d}x^2 + \cos\phi_3\sin\phi_4\cos\phi_5\,\mathrm{d}x^3 + \cos\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6\,\mathrm{d}x^4 \\
&\quad + \cos\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7\,\mathrm{d}x^5 + \cos\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.21c) \\
e^3 &= e_2{}^3\,\mathrm{d}x^2 + e_3{}^3\,\mathrm{d}x^3 + e_4{}^3\,\mathrm{d}x^4 + e_5{}^3\,\mathrm{d}x^5 + e_6{}^3\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\sin\phi_4\,\mathrm{d}x^2 + \cos\phi_4\cos\phi_5\,\mathrm{d}x^3 + \cos\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6\,\mathrm{d}x^4 + \cos\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7\,\mathrm{d}x^5 \\
&\quad + \cos\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.21d) \\
e^4 &= e_3{}^4\,\mathrm{d}x^3 + e_4{}^4\,\mathrm{d}x^4 + e_5{}^4\,\mathrm{d}x^5 + e_6{}^4\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\sin\phi_5\,\mathrm{d}x^3 + \cos\phi_5\cos\phi_6\,\mathrm{d}x^4 + \cos\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7\,\mathrm{d}x^5 + \cos\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.21e) \\
e^5 &= e_4{}^5\,\mathrm{d}x^4 + e_5{}^5\,\mathrm{d}x^5 + e_6{}^5\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\sin\phi_6\,\mathrm{d}x^4 + \cos\phi_6\cos\phi_7\,\mathrm{d}x^5 + \cos\phi_6\sin\phi_7\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.21f) \\
e^6 &= e_5{}^6\,\mathrm{d}x^5 + e_6{}^6\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\sin\phi_7\,\mathrm{d}x^5 + \cos\phi_7\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.21g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^7 &= e_7{}^7\,\mathrm{d}x^7 + e_8{}^7\,\mathrm{d}x^8 + e_9{}^7\,\mathrm{d}x^9 \\
&= \cos\phi_1\cos\phi_2\,\mathrm{d}x^7 + \cos\phi_1\sin\phi_2\,\mathrm{d}x^8 - \sin\phi_1\,\mathrm{d}x^9 \qquad (8.2.21h) \\
e^8 &= e_7{}^8\,\mathrm{d}x^7 + e_8{}^8\,\mathrm{d}x^8 \\
&= -\sin\phi_2\,\mathrm{d}x^7 + \cos\phi_2\,\mathrm{d}x^8 \qquad (8.2.21i) \\
e^9 &= e_7{}^9\,\mathrm{d}x^7 + e_8{}^9\,\mathrm{d}x^8 + e_9{}^9\,\mathrm{d}x^9 \\
&= \frac{\sin\phi_1\cos\phi_2}{\cos\theta}\,\mathrm{d}x^7 + \frac{\sin\phi_1\sin\phi_2}{\cos\theta}\,\mathrm{d}x^8 + \frac{\cos\phi_1}{\cos\theta}\,\mathrm{d}x^9 \qquad (8.2.21j) \\
e^{10} &= e_7{}^{10}\,\mathrm{d}x^7 + e_8{}^{10}\,\mathrm{d}x^8 + e_9{}^{10}\,\mathrm{d}x^9 + e_{10}{}^{10}\,\mathrm{d}x^{10}
\end{aligned}$$

[6] Maple による計算ファイルは/home/tetsuji/notes/tk-notes/sugra-ads/tk/maplefiles/030822/ads7s4-vielbein.mws にある。このlatex version は ./ads7s4-vielbein.tex である。

$$= \tan\theta\tan\varphi\sin\phi_1\cos\phi_2\,\mathrm{d}x^7 + \tan\theta\tan\varphi\sin\phi_1\sin\phi_2\,\mathrm{d}x^8 + \tan\theta\tan\varphi\cos\phi_1\,\mathrm{d}x^9 + \frac{1}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}x^{10} \tag{8.2.21k}$$

また、

$$\det(e_M{}^A) = \frac{1}{\cosh\rho\cos t\cos\theta\cos\varphi} \tag{8.2.22}$$

である。この結果は (8.2.11) と矛盾しない。

(8.2.15) と (8.2.21) から、affine connection $\omega_M{}^A{}_B$ が具体的に求められる:

$$\begin{aligned}
\omega^0{}_1 &= \omega_0{}^0{}_1\,\mathrm{d}x^0 + \omega_1{}^0{}_1\,\mathrm{d}x^1 + \omega_2{}^0{}_1\,\mathrm{d}x^2 + \omega_3{}^0{}_1\,\mathrm{d}x^3 + \omega_4{}^0{}_1\,\mathrm{d}x^4 + \omega_5{}^0{}_1\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^0{}_1\,\mathrm{d}x^6 \\
&= \frac{1}{R_A}\frac{\tanh\rho}{\cos t}\,\mathrm{d}x^0 - \frac{1}{R_A}\tanh^2\rho\tan t\cos\phi_3\,\mathrm{d}x^1 - \frac{1}{R_A}\tanh^2\rho\tan t\sin\phi_3\cos\phi_4\,\mathrm{d}x^2 \\
&\quad - \frac{1}{R_A}\tanh^2\rho\tan t\sin\phi_3\sin\phi_4\cos\phi_5\,\mathrm{d}x^3 - \frac{1}{R_A}\tanh^2\rho\tan t\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6\,\mathrm{d}x^4 \\
&\quad - \frac{1}{R_A}\tanh^2\rho\tan t\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7\,\mathrm{d}x^5 \\
&\quad - \frac{1}{R_A}\tanh^2\rho\tan t\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7\,\mathrm{d}x^6
\end{aligned} \tag{8.2.23a}$$

$$\begin{aligned}
\omega^2{}_1 &= \omega_1{}^2{}_1\,\mathrm{d}x^1 + \omega_2{}^2{}_1\,\mathrm{d}x^2 + \omega_3{}^2{}_1\,\mathrm{d}x^3 + \omega_4{}^2{}_1\,\mathrm{d}x^4 + \omega_5{}^2{}_1\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^2{}_1\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_3}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^1 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_3\cos\phi_4}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_3\sin\phi_4\cos\phi_5}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^3 \\
&\quad + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^4 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_4\sin\phi_6\cos\phi_7}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^5 \\
&\quad + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_4\sin\phi_6\sin\phi_7}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^6
\end{aligned} \tag{8.2.23b}$$

$$\begin{aligned}
\omega^3{}_1 &= \omega_2{}^3{}_1\,\mathrm{d}x^2 + \omega_3{}^3{}_1\,\mathrm{d}x^3 + \omega_4{}^3{}_1\,\mathrm{d}x^4 + \omega_5{}^3{}_1\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^3{}_1\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_4}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_4\cos\phi_5}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^3 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^4 \\
&\quad + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^5 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^6
\end{aligned} \tag{8.2.23c}$$

$$\begin{aligned}
\omega^3{}_2 &= \omega_2{}^3{}_2\,\mathrm{d}x^2 + \omega_3{}^3{}_2\,\mathrm{d}x^3 + \omega_4{}^3{}_2\,\mathrm{d}x^4 + \omega_5{}^3{}_2\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^3{}_2\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_4}{\sinh\rho\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_4\cos\phi_5}{\sinh\rho\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^3 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6}{\sinh\rho\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^4 \\
&\quad + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7}{\sinh\rho\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^5 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7}{\sinh\rho\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^6
\end{aligned} \tag{8.2.23d}$$

$$\begin{aligned}
\omega^4{}_1 &= \omega_3{}^4{}_1\,\mathrm{d}x^3 + \omega_4{}^4{}_1\,\mathrm{d}x^4 + \omega_5{}^4{}_1\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^4{}_1\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_5}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^3 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_5\cos\phi_6}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^4 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^5 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^6
\end{aligned} \tag{8.2.23e}$$

$$\begin{aligned}
\omega^4{}_2 &= \omega_3{}^4{}_2\,\mathrm{d}x^3 + \omega_4{}^4{}_2\,\mathrm{d}x^4 + \omega_5{}^4{}_2\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^4{}_2\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_5}{\sinh\rho\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^3 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_5\cos\phi_6}{\sinh\rho\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^4 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7}{\sinh\rho\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^5 \\
&\quad + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7}{\sinh\rho\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^6
\end{aligned} \tag{8.2.23f}$$

$$
\begin{aligned}
\omega^4{}_3 &= \omega_3{}^4{}_3\,\mathrm{d}x^3 + \omega_4{}^4{}_3\,\mathrm{d}x^4 + \omega_5{}^4{}_3\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^4{}_3\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_5}{\sinh\rho\sin\phi_3\tan\phi_4}\,\mathrm{d}x^3 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_5\cos\phi_6}{\sinh\rho\sin\phi_3\tan\phi_4}\,\mathrm{d}x^4 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7}{\sinh\rho\sin\phi_3\tan\phi_4}\,\mathrm{d}x^5 \\
&\quad + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7}{\sinh\rho\sin\phi_3\tan\phi_4}\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.23g)\\
\omega^5{}_1 &= \omega_4{}^5{}_1\,\mathrm{d}x^4 + \omega_5{}^5{}_1\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^5{}_1\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_6}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^4 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_6\cos\phi_7}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^5 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_6\sin\phi_7}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.23h)\\
\omega^5{}_2 &= \omega_4{}^5{}_2\,\mathrm{d}x^4 + \omega_5{}^5{}_2\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^5{}_2\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_6}{\sinh\rho\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^4 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_6\cos\phi_7}{\sinh\rho\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^5 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_6\sin\phi_7}{\sinh\rho\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.23i)\\
\omega^5{}_3 &= \omega_4{}^5{}_3\,\mathrm{d}x^4 + \omega_5{}^5{}_3\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^5{}_3\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_6}{\sinh\rho\sin\phi_3\tan\phi_4}\,\mathrm{d}x^4 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_6\cos\phi_7}{\sinh\rho\sin\phi_3\tan\phi_4}\,\mathrm{d}x^5 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_6\sin\phi_7}{\sinh\rho\sin\phi_3\tan\phi_4}\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.23j)\\
\omega^5{}_4 &= \omega_4{}^5{}_4\,\mathrm{d}x^4 + \omega_5{}^5{}_4\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^5{}_4\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_6}{\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\tan\phi_5}\,\mathrm{d}x^4 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_6\cos\phi_7}{\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\tan\phi_5}\,\mathrm{d}x^5 \\
&\quad + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_6\sin\phi_7}{\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\tan\phi_5}\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.23k)\\
\omega^6{}_1 &= \omega_5{}^6{}_1\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^6{}_1\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_7}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^5 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_7}{\tanh\rho}\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.23l)\\
\omega^6{}_2 &= \omega_5{}^6{}_2\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^6{}_2\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_7}{\sinh\rho\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^5 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_7}{\sinh\rho\tan\phi_3}\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.23m)\\
\omega^6{}_3 &= \omega_5{}^6{}_3\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^6{}_3\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_7}{\sinh\rho\sin\phi_3\tan\phi_4}\,\mathrm{d}x^5 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_7}{\sinh\rho\sin\phi_3\tan\phi_4}\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.23n)\\
\omega^6{}_4 &= \omega_5{}^6{}_4\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^6{}_4\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_7}{\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\tan\phi_5}\,\mathrm{d}x^5 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_7}{\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\tan\phi_5}\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.23o)\\
\omega^6{}_5 &= \omega_5{}^6{}_5\,\mathrm{d}x^5 + \omega_6{}^6{}_5\,\mathrm{d}x^6 \\
&= -\frac{1}{R_A}\frac{\sin\phi_7}{\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\tan\phi_6}\,\mathrm{d}x^5 + \frac{1}{R_A}\frac{\cos\phi_7}{\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\tan\phi_6}\,\mathrm{d}x^6 \qquad (8.2.23p)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega^7{}_9 &= \omega_7{}^7{}_9\,\mathrm{d}x^7 + \omega_8{}^7{}_9\,\mathrm{d}x^8 + \omega_9{}^7{}_9\,\mathrm{d}x^9 \\
&= \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_1\cos\phi_2}{\tan\theta}\,\mathrm{d}x^7 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_1\sin\phi_2}{\tan\theta}\,\mathrm{d}x^8 - \frac{1}{R_S}\frac{\sin\phi_1}{\tan\theta}\,\mathrm{d}x^9 \qquad (8.2.23q)\\
\omega^8{}_9 &= \omega_7{}^8{}_9\,\mathrm{d}x^7 + \omega_8{}^8{}_9\,\mathrm{d}x^8 \\
&= -\frac{1}{R_S}\frac{\sin\phi_2}{\tan\theta}\,\mathrm{d}x^7 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_2}{\tan\theta}\,\mathrm{d}x^8 \qquad (8.2.23r)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\omega^{8}{}_{7} &= \omega_7{}^{8}{}_{7}\,\mathrm{d}x^7 + \omega_8{}^{8}{}_{7}\,\mathrm{d}x^8 \\
&= -\frac{1}{R_S}\frac{\sin\phi_2}{\sin\theta\tan\phi_1}\,\mathrm{d}x^7 + \frac{1}{R_S}\frac{\cos\phi_2}{\sin\theta\tan\phi_1}\,\mathrm{d}x^8 \qquad (8.2.23\mathrm{s})\\
\omega^{10}{}_{9} &= \omega_7{}^{10}{}_{9}\,\mathrm{d}x^7 + \omega_8{}^{10}{}_{9}\,\mathrm{d}x^8 + \omega_9{}^{10}{}_{9}\,\mathrm{d}x^9 + \omega_{10}{}^{10}{}_{9}\,\mathrm{d}x^{10} \\
&= -\frac{1}{R_S}\tan^2\theta\tan\varphi\sin\phi_1\cos\phi_2\,\mathrm{d}x^7 - \frac{1}{R_S}\tan^2\theta\tan\varphi\sin\phi_1\sin\phi_2\,\mathrm{d}x^8 - \frac{1}{R_S}\tan^2\theta\tan\varphi\cos\phi_1\,\mathrm{d}x^8 \\
&\quad - \frac{1}{R_S}\frac{\tan\theta}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}x^{10} \qquad (8.2.23\mathrm{t})
\end{aligned}$$

Chapter 9

Coset Construction

9.1 General Theory

P. van Nieuwenhuizen [4] を参照。細かな定義 (real or complex, etc.) は具体的な計算で定義する。

coset manifold $M = G/H$ がある。isometry group H の generator を H_i で、G/H の generator を K_A で記述しよう (generator は anti-Hermitian で reductive)。これらは tangent space において次の algebra をみたす:

$$[H_i, H_j] = f_{ij}{}^k H_k \, , \tag{9.1.1a}$$

$$[H_i, K_A] = f_{iA}{}^B K_B \tag{9.1.1b}$$

$$[K_A, K_B] = f_{AB}{}^i H_i + f_{AB}{}^C K_C \tag{9.1.1c}$$

where

$i, j, \cdots$: unbroken generator index　　$A, B, \cdots$: G/H tangent space index

G/H の representative $L(x)$ (x: coordinates on M) は、例えば generator K_A を用いて

$$L(x) = \exp(x^A K_A) \, , \quad x^A = e_M{}^A x^M \tag{9.1.2}$$

と表現される ($M, N, \cdots$: curved spacetime index)。この representative の、isometry G による変換則 ($g \in G$) は

$$G \; : \; L(x) \to L(x') = g L(x) h^{-1}(x, g) \tag{9.1.3}$$

で与えられる。isotropy group H の元 $h(x, g)$ は、coset manifold M 上の点が G によって移動したとき再び M の上に乗るための、いわば「引き戻し」の操作を行うことによるので、x と g に依存している。

isometry group G の作用に対して left invariant 1-form、Maurer-Cartan 1-form α を次で定義する:

$$\alpha = L^{-1} \mathrm{d}L = \widehat{e}^A K_A + \Omega^i H_i \, . \tag{9.1.4}$$

但し右辺は representative $L(x)$ を展開すると得られる一般的な形式であり、generator の係数 $\widehat{e}^A, \Omega^i$ はそれぞれ vielbein, H-connection と呼ばれ[1]、

$$\widehat{e}^A(x) = \widehat{e}_M{}^A(x) \, \mathrm{d}x^M \, , \qquad \Omega^i(x) = \Omega_M{}^i(x) \, \mathrm{d}x^M \tag{9.1.5}$$

である。Maurer-Cartan 1-form α は、その定義から、

$$\mathrm{d}\alpha = -\alpha \wedge \alpha \tag{9.1.6}$$

が成立する。これを vielbein, H-connection に対してあてはめると

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\widehat{e}^A K_A + \mathrm{d}\Omega^i H_i &= -\big(\widehat{e}^B K_B + \Omega^j H_j\big) \wedge \big(\widehat{e}^C K_C + \Omega^k H_k\big) \\ &= -\frac{1}{2} \widehat{e}^B \wedge \widehat{e}^C [K_B, K_C] - \frac{1}{2} \Omega^j \wedge \Omega^k [H_j, H_k] - \Omega^j \wedge \widehat{e}^B [H_j, K_B] \end{aligned}$$

[1] 他のノートで登場する vielbein と notation が異なる。混同するのを避けるために hat 記号を付けておく。

である。algebra (9.1.1) を用いると

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\widehat{e}^B\wedge\widehat{e}^C\big(f_{BC}{}^A K_A + f_{BC}{}^i H_i\big) - \frac{1}{2}\Omega^j\wedge\Omega^k\big(f_{jk}{}^i H_i\big) - \Omega^j\wedge\widehat{e}^B\big(f_{jB}{}^A K_A\big) \\
&= -\Big(\frac{1}{2}f_{BC}{}^A\widehat{e}^B\wedge\widehat{e}^C + f_{jB}{}^A\Omega^j\wedge\widehat{e}^B\Big)K_A - \frac{1}{2}\Big(f_{BC}{}^i\widehat{e}^B\wedge\widehat{e}^C + f_{jk}{}^i\Omega^j\wedge\Omega^k\Big)H_i
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}e^A &= -\frac{1}{2}f_{BC}{}^A\,\widehat{e}^B\wedge\widehat{e}^C - f_{jB}{}^A\,\Omega^j\wedge\widehat{e}^B && (9.1.7a)\\
\mathrm{d}\Omega^i &= -\frac{1}{2}f_{BC}{}^i\,\widehat{e}^B\wedge\widehat{e}^C - \frac{1}{2}f_{jk}{}^i\,\Omega^j\wedge\Omega^k && (9.1.7b)
\end{aligned}
$$

が得られる。

ここで Cartan's structure equation を定義しよう:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\widehat{e}^A + \widehat{\omega}^A{}_B\wedge\widehat{e}^B &= 0\,, \qquad \widehat{\omega}^{A'}{}_B\,\eta_{A'A} + \widehat{\omega}^{B'}{}_A\,\eta_{B'B} = 0 && (9.1.8a)\\
\widehat{R}^A{}_B &= \mathrm{d}\widehat{\omega}^A{}_B + \widehat{\omega}^A{}_C\wedge\widehat{\omega}^C{}_B = \frac{1}{2}\widehat{R}^A{}_{BCD}\,\widehat{e}^C\wedge\widehat{e}^D && (9.1.8b)
\end{aligned}
$$

ここで $\widehat{\omega}^A{}_B = \widehat{\omega}_C{}^A{}_B\,\widehat{e}^C = \omega_M{}^A{}_B\,\mathrm{d}x^M$ である[2]。ここで安直に、

$$
\widetilde{\omega}^A{}_B = \frac{1}{2}f_{CB}{}^A\,\widehat{e}^C + f_{jB}{}^A\,\Omega^j \tag{9.1.9}
$$

と置いて、$\widetilde{\omega}^A{}_B$ を affine-spin connection $\widehat{\omega}^A{}_B$ とするのは誤りである。何故なら、structure constant $f_{AB}{}^C$ は、定義において A, B の交換で反対称であっても、B, C の交換で反対称とは限らず、結果として $\widetilde{\omega}_{AB} \neq -\widetilde{\omega}_{BA}$ となる場合があるからである。index の交換について反対称であるためには、(9.1.8a) に支障をもたらさない程度に、(9.1.9) に余分な項を手で付加すればよい。結果としては

$$
\begin{aligned}
\widehat{\omega}^A{}_B &= \widetilde{\omega}^A{}_B + \frac{1}{2}\widehat{e}^C\,\eta^{AA'}\big(f_{A'C}{}^{B'}\,\eta_{B'B} + f_{A'B}{}^{B'}\,\eta_{B'C}\big)\\
&= \frac{1}{2}\overline{f}_{CB}{}^A\,\widehat{e}^C + f_{jB}{}^A\Omega^j\,, && (9.1.10a)\\
\overline{f}_{CB}{}^A &= f_{CB}{}^A + \eta^{AA'}\big(f_{A'C}{}^{B'}\,\eta_{B'B} + f_{A'B}{}^{B'}\,\eta_{B'C}\big) && (9.1.10b)
\end{aligned}
$$

とすれば良い。このようにして、Cartan's structure equation を用いることで、affine-spin connection $\widehat{\omega}^A{}_B$, curvature 2-form $\widehat{R}^A{}_B$ は vielbein と H-connection から得られる。

H-connection Ω^i は、representative $L(x)$ と Maurer-Cartan 1-form α の定義から原理的に書き下すことが可能である。ここでは $L(x) = \exp(x^A K_A)$ の表記からの展開を考えよう:

$$
\begin{aligned}
L(x) &= \exp(x^A K_A)\,,\\
L^{-1}\mathrm{d}L &= \exp(-x^A K_A)\,\mathrm{d}\exp(x^B K_B)\cdot 1\\
&= \Big\{\mathrm{d} + [-x^A K_A, \mathrm{d}] + \frac{1}{2!}\big[-x^A K_A, [-x^B K_B, \mathrm{d}]\big] + \cdots\Big\}\cdot 1
\end{aligned}
$$

[2] 一般には、$\mathrm{d}\widehat{e}^A + \widehat{\omega}^A{}_B\wedge\widehat{e}^B = \widehat{T}^A$ のように、torsion 2-form $\widehat{T}^A = \frac{1}{2}\widehat{T}^A{}_{BC}\widehat{e}^B\wedge\widehat{e}^C$ が導入されるが、coset space では torsion free であるので、導入されていない ([4] (6.6) 式参照。)。

$$= \mathrm{d}x^A K_A + \frac{1}{2}\mathrm{d}x^A x^B \left(f_{AB}{}^i H_i + f_{AB}{}^C K_C\right) + \cdots$$
$$= \left(\mathrm{d}x^A + \frac{1}{2} f_{CD}{}^A \,\mathrm{d}x^C x^D + \cdots\right) K_A + \left(\frac{1}{2} f_{AB}{}^i \,\mathrm{d}x^A x^B + \cdots\right) H_i$$

但しここで appendix にある展開公式を用いた。これにより、

$$e^A = \mathrm{d}x^A + \frac{1}{2} f_{CD}{}^A \,\mathrm{d}x^C x^D + \cdots = e_M{}^A \,\mathrm{d}x^M \tag{9.1.11a}$$
$$\Omega^i = \frac{1}{2} f_{AB}{}^i \,\mathrm{d}x^A x^B + \cdots \tag{9.1.11b}$$

と与えられる。

9.2 $AdS_{4(7)} \times S^{7(4)}$: bosonic part

$AdS_4 \times S^7$, $AdS_7 \times S^4$ は、それぞれ (super)coset では

$$AdS_4 \times S^7 \sim \frac{OSp(8|4)}{SO(7) \times SO(3,1)} \qquad AdS_7 \times S^4 \sim \frac{OSp(6,2|4)}{SO(6,1) \times SO(4)} \tag{9.2.1}$$

で表現される。11-dimensional supergravity を考える時には supergroup で考えて supervielbein を構成すると良いらしいが、まだ理解していないのでこの方法は用いない。bosonic part だけ考えると、

$$AdS_4 \times S^7 \sim \frac{SO(3,2)}{SO(3,1)} \times \frac{SO(8)}{SO(7)} \qquad AdS_7 \times S^4 \sim \frac{SO(6,2)}{SO(6,1)} \times \frac{SO(5)}{SO(4)} \tag{9.2.2}$$

である。

isometry group G の algebra を書いておこう [34]。anti-de Sitter space だったり sphere だったりするので、Poincaré algebra ではないが、それに近い形式を持つ[3]:

$$[P_a, P_b] = -4f^2 M_{ab} \,, \qquad [P_a, M_{bc}] = \eta_{ab} P_c - \eta_{ac} P_b \,, \tag{9.2.3a}$$
$$[M_{ab}, M_{cd}] = \eta_{ad} M_{bc} + \eta_{bc} M_{ad} - \eta_{ac} M_{bd} - \eta_{bd} M_{ac} \,, \tag{9.2.3b}$$
$$[P_{a'}, P_{b'}] = f^2 M_{a'b'} \,, \qquad [P_{a'}, M_{b'c'}] = \eta_{a'b'} P_{c'} - \eta_{a'c'} P_{b'} \,, \tag{9.2.3c}$$
$$[M_{a'b'}, M_{c'd'}] = \eta_{a'd'} M_{b'c'} + \eta_{b'c'} M_{a'd'} - \eta_{a'c'} M_{b'd'} - \eta_{b'd'} M_{a'c'} \,. \tag{9.2.3d}$$

この表記は reductive である。なお、prime なしの index を持つ algebra は 4-dimensional space の isometry group $SO(3,2)$ (for AdS_4) もしくは $SO(5)$ (for S^4) の algebra を表し、prime ありの index を持つ algebra は 7-dimensional space の isometry group $SO(8)$ (for S^7) もしくは $SO(6,2)$ (for AdS_7) の algebra を表す。ここでは全て tangent space index $a, b, \cdots$ で表しているが、index が contract しているので curved spacetime index $r, s, \cdots$ に書き直すのは容易である。(ただしその場合 $P_r = P_r(x)$ となることに注意。) また、"translation" generator P は coset space G/H の algebra $\mathcal{G} - \mathcal{H}$ に属し、"rotation" generator M は isotropy group H の

[3] すべて generator は anti-Hermitian である。自分のノートでは algebra は Hermitian で定義されているので、計算には注意を要する。なお、次の section では Hermitian で書き直している。

algebra $\mathcal{H}$ に属す。係数 f が purely imaginary の場合には $AdS_4 \times S^7$ が実現され、real の場合には $AdS_7 \times S^4$ が実現される[4]。なお、$f \to 0$ limit で flat 11-dimensional spacetime になる。

ではここで representative $L(x)$, Maurer-Cartan 1-form α を定義しよう:

$$L(x) \;=\; \exp\left(x^A P_A\right) , \qquad \alpha \;=\; L^{-1}\mathrm{d}L \;=\; \widehat{e}^A P_A + \frac{1}{2}\Omega^{AB} M_{AB} \tag{9.2.4}$$

ここで $A = \{a; a'\}$ である。Maurer-Cartan equation $\mathrm{d}\alpha = -\alpha \wedge \alpha$ より、この vielbein $\widehat{e}^A$ と H-connection Ω^{AB} の関係式が得られる:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\widehat{e}^a P_a + \frac{1}{2}\mathrm{d}\Omega^{ab} M_{ab} + \mathrm{d}\widehat{e}^{a'} P_{a'} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\Omega^{a'b'} M_{a'b'} \\
&\quad = -\frac{1}{2}\widehat{e}^C \wedge \widehat{e}^D [P_C, P_D] - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}\Omega^{CD} \wedge \frac{1}{2}\Omega^{AB}\Big)[M_{CD}, M_{AB}] - \widehat{e}^C \wedge \frac{1}{2}\Omega^{AB}[P_C, M_{AB}] \\
&\quad = 2f^2\, \widehat{e}^a \wedge \widehat{e}^b\, M_{ab} - \frac{1}{2}f^2\, \widehat{e}^{a'} \wedge \widehat{e}^{b'}\, M_{a'b'} \\
&\qquad - \frac{1}{8}\Omega^{cd} \wedge \Omega^{ab}\big(\eta_{cb} M_{da} + \eta_{da} M_{cb} - \eta_{ca} M_{db} - \eta_{db} M_{ca}\big) \\
&\qquad - \frac{1}{8}\Omega^{c'd'} \wedge \Omega^{a'b'}\big(\eta_{c'b'} M_{d'a'} + \eta_{d'a'} M_{c'b'} - \eta_{c'a'} M_{d'b'} - \eta_{d'b'} M_{c'a'}\big) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\widehat{e}^c \wedge \Omega^{ab}\big(\eta_{ca} P_b - \eta_{cb} P_a\big) - \frac{1}{2}\widehat{e}^{c'} \wedge \Omega^{a'b'}\big(\eta_{c'a'} P_{b'} - \eta_{c'b'} P_{a'}\big) \\
&\quad = -\eta_{bc}\, \widehat{e}^b \wedge \Omega^{ca} P_a - \eta_{b'c'}\, \widehat{e}^{b'} \wedge \Omega^{c'a'} P_{a'} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\Big(4f^2\, \widehat{e}^a \wedge \widehat{e}^b - \eta_{cd}\, \Omega^{ca} \wedge \Omega^{bd}\Big) M_{ab} - \frac{1}{2}\Big(f^2\, \widehat{e}^{a'} \wedge \widehat{e}^{b'} + \eta_{c'd'}\, \Omega^{c'a'} \wedge \Omega^{b'd'}\Big) M_{a'b'}
\end{aligned} \tag{9.2.5}$$

$$\therefore \quad \mathrm{d}\widehat{e}^a \;=\; \eta_{bc}\, \Omega^{ca} \wedge \widehat{e}^b , \qquad \mathrm{d}\Omega^{ab} \;=\; 4f^2\, \widehat{e}^a \wedge \widehat{e}^b - \eta_{cd}\, \Omega^{ca} \wedge \Omega^{bd} , \tag{9.2.6a}$$

$$\mathrm{d}\widehat{e}^{a'} \;=\; \eta_{b'c'}\, \Omega^{c'a'} \wedge \widehat{e}^{b'} , \qquad \mathrm{d}\Omega^{a'b'} \;=\; -f^2\, \widehat{e}^{a'} \wedge \widehat{e}^{b'} - \eta_{c'd'}\, \Omega^{c'a'} \wedge \Omega^{b'd'} . \tag{9.2.6b}$$

(9.2.3) には、(9.1.1) にある structure constant $f_{AB}{}^C$ に相当するものが存在しない。従って (9.1.9) に相当するような懸念が存在せず、上の式から直ちに affine-spin connection $\widehat{\omega}^A{}_B$ が

$$\widehat{\omega}^a{}_b \;=\; -\eta_{bc}\, \Omega^{ca} , \qquad \widehat{\omega}^a{}_b\, \eta_{ad} + \widehat{\omega}^a{}_d\, \eta_{ba} \;=\; 0 \tag{9.2.7a}$$

$$\widehat{\omega}^{a'}{}_{b'} \;=\; -\eta_{b'c'}\, \Omega^{c'a'} , \qquad \widehat{\omega}^{a'}{}_{b'}\, \eta_{a'd'} + \widehat{\omega}^{a'}{}_{d'}\, \eta_{b'a'} \;=\; 0 \tag{9.2.7b}$$

として得られる。つまり H-connection がそのまま affine-spin connection として得られることがわかる。curvature 2-form $\widehat{R}^A{}_B$, Ricci tensor $\widehat{\mathcal{R}}^A{}_B$, scalar curvature $\widehat{\mathcal{R}}_{4(7)}$ は、H-connection (affine-spin connection) の部分がうまくキャンセルして vielbein だけで全てを記述できる[5]:

$$\begin{aligned}
\widehat{R}^a{}_b \;&=\; \mathrm{d}\widehat{\omega}^a{}_b + \widehat{\omega}^a{}_c \wedge \widehat{\omega}^c{}_b \;=\; -\eta_{bc}\, \mathrm{d}\Omega^{ca} + \eta_{cd}\, \eta_{be}\, \Omega^{da} \wedge \Omega^{ec} \\
&=\; -4f^2\, \eta_{bc}\, \widehat{e}^c \wedge \widehat{e}^a
\end{aligned} \tag{9.2.8a}$$

$$\therefore \quad \widehat{R}^a{}_{bcd} \;=\; -4f^2\big(\eta_{bc}\, \delta^a_d - \eta_{bd}\, \delta^a_c\big) \tag{9.2.8b}$$

[4] f は flux F の係数。[34] では、Freund-Rubin ansatz を $F_{rstu} = 6fe\,\varepsilon_{rstu}$ としている。ここで $e = \det e_r{}^a$ であるが、後で自分の convention に書き直す。

[5] 一般論では、このキャンセルは algebra の (または structure constants の) Jacobi identity からの帰結である。

$$\widehat{\mathcal{R}}^a{}_c \;=\; \eta^{bd}\,\widehat{R}^a{}_{bcd} \;=\; 12 f^2 \delta^a_c \,, \qquad \widehat{\mathcal{R}}_4 \;=\; \widehat{\mathcal{R}}^a{}_a \;=\; 48 f^2 \tag{9.2.8c}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{R}^{a'}{}_{b'} \;&=\; \mathrm{d}\widehat{\omega}^{a'}{}_{b'} + \widehat{\omega}^{a'}{}_{c'} \wedge \widehat{\omega}^{c'}{}_{b'} \;=\; -\eta_{b'c'}\,\mathrm{d}\Omega^{c'a'} + \eta_{c'd'}\,\eta_{b'e'}\,\Omega^{d'a'} \wedge \Omega^{e'c'} \\
&=\; f^2\,\eta_{b'c'}\,\widehat{e}^{c'} \wedge \widehat{e}^{a'}
\end{aligned} \tag{9.2.8d}$$

$$\therefore \quad \widehat{R}^{a'}{}_{b'c'd'} \;=\; f^2 \big(\eta_{b'c'}\,\delta^{a'}_{d'} - \eta_{b'd'}\,\delta^{a'}_{c'} \big) \tag{9.2.8e}$$

$$\widehat{\mathcal{R}}^{a'}{}_{c'} \;=\; \eta^{b'd'}\,\widehat{R}^{a'}{}_{b'c'd'} \;=\; -6 f^2 \delta^{a'}_{c'} \,, \qquad \widehat{\mathcal{R}}_7 \;=\; \widehat{\mathcal{R}}^{a'}{}_{a'} \;=\; -42 f^2 \tag{9.2.8f}$$

で与えられる。

affine-spin connection $\widehat{\omega}^A{}_B$ そのものを知るためには H-connection Ω^{AB} を知る必要があるが、これは定義から、つまり Maurer-Cartan 1-form α から求めることができる。

9.3 Superalgebra

まずここで、$AdS_4 \times S^7$ background の Freund-Rubin ansatz を

$$F_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}} \;=\; f\,e\,E^{-1}_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}} \tag{9.3.1}$$

で与える。但し $\widetilde{M}, \widetilde{N}, \cdots$ は 4-dimensional curved indices であり、$e = \sqrt{|\det g_{MN}|}$ は 11-dimensional spacetime の vielbein determinant、f は **real** である。また $E^{-1}_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}}$ は 4-dimensional space での weight -1 の invariant tensor density であり、$E^{-1}_{0123} = 1$ と規格化されている。このもとでは

$$F^{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}} \;=\; -\frac{f}{e} E^{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}} \tag{9.3.2}$$

である。負号は、11-dimensional space が Minkowski であることに起因し、$E^{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}}$ は weight $+1$ の invariant tensor density ($E^{0123} = 1$) である。これらを用いると

$$F_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}}\,F^{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}} \;=\; f^2\,(e E^{-1}_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}}) \cdot \Big(\frac{-1}{e} E^{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}} \Big) \;=\; -4!\, f^2 \tag{9.3.3}$$

となることに注意する。この ansatz の下での 4-dimensional space, 7-dimensional space の Riemann curvature はそれぞれ

$$R_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}} \;=\; -\frac{1}{9} f^2 \big(g_{\widetilde{M}\widetilde{P}}\, g_{\widetilde{N}\widetilde{Q}} - g_{\widetilde{M}\widetilde{Q}}\, g_{\widetilde{N}\widetilde{P}} \big) \,, \tag{9.3.4a}$$

$$R_{M'N'P'Q'} \;=\; \frac{1}{36} f^2 \big(g_{M'P'}\, g_{N'Q'} - g_{M'Q'}\, g_{N'P'} \big) \,, \tag{9.3.4b}$$

で与えられる。但し indices $M', N', \cdots$ は 7-dimensional curved indices である。$f^2 > 0$ の場合は $AdS_4 \times S^7$ であり、$f^2 < 0$ の場合は $AdS_7 \times S^4$ である。

$AdS_4 \times S^7$ の isometry group から得られる algebra を用意する:

$$[P_{\widetilde{A}}, P_{\widetilde{B}}] \;=\; \frac{i}{9} f^2\, \Sigma_{\widetilde{A}\widetilde{B}} \,, \qquad [P_{A'}, P_{B'}] \;=\; -\frac{i}{36} f^2\, \Sigma_{A'B'} \,, \tag{9.3.5a}$$

$$[P_{\widetilde{A}}, \Sigma_{\widetilde{B}\widetilde{C}}] \;=\; i \big(\eta_{\widetilde{A}\widetilde{B}}\, P_{\widetilde{C}} - \eta_{\widetilde{A}\widetilde{C}}\, P_{\widetilde{B}} \big) \,, \qquad [P_{A'}, \Sigma_{B'C'}] \;=\; i \big(\eta_{A'B'}\, P_{C'} - \eta_{A'C'}\, P_{B'} \big) \,, \tag{9.3.5b}$$

$$i[\Sigma_{\widetilde{A}\widetilde{B}}, \Sigma_{\widetilde{C}\widetilde{D}}] = \eta_{\widetilde{A}\widetilde{C}}\,\Sigma_{\widetilde{B}\widetilde{D}} + \eta_{\widetilde{B}\widetilde{D}}\,\Sigma_{\widetilde{A}\widetilde{C}} - \eta_{\widetilde{A}\widetilde{D}}\,\Sigma_{\widetilde{B}\widetilde{C}} - \eta_{\widetilde{B}\widetilde{C}}\,\Sigma_{\widetilde{A}\widetilde{D}}\,, \tag{9.3.5c}$$

$$i[\Sigma_{A'B'}, \Sigma_{C'D'}] = \eta_{A'C'}\,\Sigma_{B'D'} + \eta_{B'D'}\,\Sigma_{A'C'} - \eta_{A'D'}\,\Sigma_{B'C'} - \eta_{B'C'}\,\Sigma_{A'D'}\,, \tag{9.3.5d}$$

$$[P_{\widetilde{A}}, Q_{aa'}] = -\frac{i}{6}f\,(\gamma_{\widetilde{A}}\gamma_5)_a{}^b\,Q_{ba'}\,, \qquad [P_{A'}, Q_{aa'}] = -\frac{i}{12}f\,(\Gamma_{A'})_{a'}{}^{b'}\,Q_{ab'}\,, \tag{9.3.5e}$$

$$[\Sigma_{\widetilde{A}\widetilde{B}}, Q_{aa'}] = -\frac{i}{2}(\gamma_{\widetilde{A}\widetilde{B}})_a{}^b\,Q_{ba'}\,, \qquad [\Sigma_{A'B'}, Q_{aa'}] = -\frac{i}{2}(\Gamma_{A'B'})_{a'}{}^{b'}\,Q_{ab'}\,, \tag{9.3.5f}$$

$$\begin{aligned}\{Q_{aa'}, Q_{bb'}\} &= -C'_{a'b'}\Big\{-2i\,(\gamma_{\widetilde{A}}C)_{ab}\,P^{\widetilde{A}} + \frac{i}{6}f\,(\gamma_{\widetilde{A}\widetilde{B}}\gamma_5 C)_{ab}\,\Sigma^{\widetilde{A}\widetilde{B}}\Big\} \\ &\quad - (\gamma_5 C)_{ab}\Big\{-2i\,(\Gamma_{A'}C')_{a'b'}\,P^{A'} - \frac{i}{3}f\,(\Gamma_{A'B'}C')_{a'b'}\,M^{A'B'}\Big\}\end{aligned} \tag{9.3.5g}$$

但し、indices a, b は spinor indices in 4-dimensional space、a', b' は spinor indices in 7-dimensional space である。また、$\gamma_{\widetilde{A}}$, γ_5, C_{ab} は gamma matrices and charge conjugation matrix in 4-dimensional space であり、$\Gamma_{A'}$, $C'_{a'b'}$ は gamma matrices and charge conjugation matrix in 7-dimensional space である。なお、$f^2 < 0$ のときは、この algebra は $AdS_7 \times S^4$ の coset construction で使用される。

(9.3.5) を元々の flux と 11-dimensional notation で記述すると、algebra (9.3.5) は

$$[P_{\widetilde{A}}, P_{\widetilde{B}}] = \frac{i}{9}f^2\,\Sigma_{\widetilde{A}\widetilde{B}}\,, \qquad [P_{A'}, P_{B'}] = -\frac{i}{36}f^2\,\Sigma_{A'B'}\,, \tag{9.3.6a}$$

$$[P_A, \Sigma_{CD}] = i\big(\eta_{AC}\,P_D - \eta_{AD}\,P_C\big)\,, \tag{9.3.6b}$$

$$i[\Sigma_{AB}, \Sigma_{CD}] = \eta_{AC}\,\Sigma_{BD} + \eta_{BD}\,\Sigma_{AC} - \eta_{AD}\,\Sigma_{BC} - \eta_{BC}\,\Sigma_{AD}\,, \tag{9.3.6c}$$

$$[P_A, \overline{Q}] = i\overline{Q}\,T_A{}^{BCDE}\,F_{BCDE}\,, \tag{9.3.6d}$$

$$[\Sigma_{AB}, \overline{Q}] = \frac{i}{2}\overline{Q}\,\widehat{\Gamma}_{AB}\,, \tag{9.3.6e}$$

$$\{Q, \overline{Q}\} = 2i\,\widehat{\Gamma}_A P^A - \frac{i}{144}\{\widehat{\Gamma}^{ABCDEF}\,F_{CDEF} + 24\,\widehat{\Gamma}_{CD}\,F^{ABCD}\}\Sigma_{AB}\,, \tag{9.3.6f}$$

という、簡単なものにまとめられる ($\overline{Q} = iQ^\dagger\widehat{\Gamma}^0 = Q^T C$)[6]。ただ、この表記ももちろん coset (とその smooth deformation された coset) にのみ有効なものである。KG solution は $AdS_{4(7)} \times S^{7(4)}$ の Penrose limit で与えられるので、KG solution でもこの表記は有効である。

9.4 Coset Space Representatives

algebra は (9.3.6) で与えられる。また、coordinates はここでは superspace coordinates $Z = (x^A, \theta)$ を (implicit に) 用いる。ここで θ は $SO(10,1)$ Majorana spinor coordinates (fermionic, anti-commuting coordinates) である。

さて、coset space なので、torsion free の関係式を構成しよう。まずは representative L を用いて Maurer-Cartan one-form α を

$$\alpha = i^{-1}\,L^{-1}\mathrm{d}L = \widehat{E} + \widehat{\Omega} \tag{9.4.1}$$

[6] $\bar{\theta}Q = -Q^T C^T\theta = Q^T\theta = \overline{Q}\theta$, $(\bar{\theta}Q)^\dagger = -iQ^\dagger(\widehat{\Gamma}^0)^\dagger\theta = iQ^\dagger\widehat{\Gamma}^0\theta = \overline{Q}\theta = \bar{\theta}Q$.

で定義する。ここで representative は後で登場する様に unitary である表記を用いる。また $\widehat{E}, \widehat{\Omega}$ は supervielbein と H-connection (に generator を付加したもの) である:

$$\widehat{E} \ = \ \widehat{E}^A P_A + \overline{\widehat{E}} Q \, , \qquad \widehat{\Omega} \ = \ \frac{1}{2} \widehat{\Omega}^{AB} \Sigma_{AB} \tag{9.4.2}$$

Maurer-Cartan one-form (9.4.1) はその定義から次の方程式をみたす:

$$\mathrm{d}\alpha + i \, \alpha \wedge \alpha \ = \ 0 \, , \tag{9.4.3}$$

これを具体的に書き下そう:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha \ &= \ \mathrm{d}\widehat{E}^A P_A + \overline{Q} \mathrm{d}\widehat{E} + \mathrm{d}\widehat{\Omega} \, , \\
i \, \alpha \wedge \alpha \ &= \ i \Big(\frac{1}{2} \widehat{E}^A \wedge \widehat{E}^B [P_A, P_B] + \widehat{\Omega} \wedge \widehat{\Omega} + \frac{1}{2} \widehat{E}^A \wedge \widehat{\Omega}^{CD} [P_A, \Sigma_{CD}] \\
&\qquad + [P_A, \overline{Q}] \widehat{E}^A \wedge \widehat{E} + \frac{1}{2} \widehat{\Omega}^{AB} \wedge [\Sigma_{AB}, \overline{Q}] \widehat{E} + \frac{1}{2} \overline{\widehat{E}} \wedge \{ Q, \overline{Q} \} \widehat{E} \Big) \\
&= \ \frac{i}{2} \widehat{E}^A \wedge \widehat{E}^B [P_A, P_B] + i \, \widehat{\Omega} \wedge \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}^A{}_B \wedge \widehat{E}^B P_A \\
&\qquad - \widehat{E}^A \wedge \overline{Q} T_A{}^{BCDE} \, \widehat{E} \, F_{BCDE} - \frac{1}{4} \widehat{\Omega}^{AB} \wedge \overline{Q} \widehat{\Gamma}_{AB} \widehat{E} - \overline{\widehat{E}} \wedge \widehat{\Gamma}^A \, \widehat{E} \, P_A \\
&\qquad + \frac{1}{288} \overline{\widehat{E}} \wedge \big\{ \widehat{\Gamma}^{ABCDEF} \, F_{CDEF} + 24 \, \widehat{\Gamma}_{CD} \, F^{ABCD} \big\} \widehat{E} \Sigma_{AB} \, , \\
\therefore \quad 0 \ &= \ \mathrm{d}\widehat{E}^A P_A + \overline{Q} \mathrm{d}\widehat{E} + \mathrm{d}\widehat{\Omega} + \frac{i}{2} \widehat{E}^A \wedge \widehat{E}^B [P_A, P_B] + i \, \widehat{\Omega} \wedge \widehat{\Omega} - \widehat{\Omega}^A{}_B \wedge \widehat{E}^B P_A \\
&\qquad - \widehat{E}^A \wedge \overline{Q} T_A{}^{BCDE} \, \widehat{E} \, F_{BCDE} - \frac{1}{4} \widehat{\Omega}^{AB} \wedge \overline{Q} \widehat{\Gamma}_{AB} \widehat{E} - \overline{\widehat{E}} \wedge \widehat{\Gamma}^A \, \widehat{E} \, P_A \\
&\qquad + \frac{1}{288} \overline{\widehat{E}} \wedge \big\{ \widehat{\Gamma}^{ABCDEF} \, F_{CDEF} + 24 \, \widehat{\Gamma}_{CD} \, F^{ABCD} \big\} \widehat{E} \Sigma_{AB} \, ,
\end{aligned} \tag{9.4.4}$$

(9.4.1), (9.4.2) を (9.4.4) に代入すると、Cartan's structure equations が得らえる:

$$\begin{aligned}
0 \ &= \ \mathrm{d}\widehat{\Omega} + i \, \widehat{\Omega} \wedge \widehat{\Omega} + \frac{i}{2} \widehat{E}^A \wedge \widehat{E}^B [P_A, P_B] \\
&\qquad + \frac{1}{288} \overline{\widehat{E}} \Big\{ \widehat{\Gamma}^{ABCDEF} \, F_{CDEF} + 24 \, \widehat{\Gamma}_{CD} \, F^{ABCD} \Big\} \widehat{E} \, \Sigma_{AB} \, , && (9.4.5\mathrm{a}) \\
0 \ &= \ \mathrm{d}\widehat{E}^A - \widehat{\Omega}^A{}_B \wedge \widehat{E}^B - \overline{\widehat{E}} \widehat{\Gamma}^A \wedge \widehat{E} \, , && (9.4.5\mathrm{b}) \\
0 \ &= \ \mathrm{d}\widehat{E} - \widehat{E}^A \wedge T_A{}^{BCDE} \, \widehat{E} \, F_{BCDE} - \frac{1}{4} \widehat{\Omega}^{AB} \wedge \widehat{\Gamma}_{AB} \, \widehat{E} \, . && (9.4.5\mathrm{c})
\end{aligned}$$

fermionic contribution をすべて neglect して、bosonic part だけ考察すると、きちんと Riemann tensor (9.3.4) を再現する。しかしここではこれを用いない。[43] の方法を用いよう。

さて、supervielbein E, E^A の計算を実際に進めるにあたり、representative $L(Z)$ を

$$L(Z) \ = \ \ell(x) \cdot \widehat{L}(\theta) \, , \qquad \ell(x) \ = \ \exp(i \, x^A P_A) \qquad \text{and} \qquad \widehat{L}(\theta) \ = \ \exp(i \, \overline{\theta} Q) \tag{9.4.6}$$

の様に、bosonic part と fermionic part に分離すると便利である。勿論、$[P, \overline{Q}] \neq 0$ であるので、$\ell(x)$ と $\widehat{L}(\theta)$ は commuting でなく、交換に対しておつりが出るが、それは追跡できるものである。その追跡の煩わしさを越えて、bosonic part だけの Maurer-Cartan, fermionic part の Maurer-Cartan を計算できる、という利点をこの分離方法は持つ。

また、ここで trick を使う。詳細は de Wit [35] の section 11 に任せるが、fermionic coordinates θ を $\theta \to t\theta$ のように rescale させておいて ($t \in [0,1]$)、Maurer-Cartain one-form (9.4.1) などを t で微分し、それを解く、という 方法を採る。rescale された (9.4.1) を t で微分すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha &= i^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{(\widehat{L}^{-1}\ell^{-1})\mathrm{d}(\ell\widehat{L})\Big\} \\
&= i^{-1}\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widehat{L}^{-1})\cdot(\ell^{-1}\mathrm{d}\ell)\widehat{L} + \widehat{L}^{-1}(\ell^{-1}\mathrm{d}\ell)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{L} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widehat{L}^{-1})\cdot\mathrm{d}\widehat{L} + \widehat{L}^{-1}\cdot\mathrm{d}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{L}\Big)\Big\} \\
&= -i\overline{\theta}Q\, i^{-1}\Big\{\widehat{L}^{-1}(\ell^{-1}\mathrm{d}\ell)\widehat{L} + \widehat{L}^{-1}\mathrm{d}\widehat{L}\Big\} + i^{-1}\Big\{\widehat{L}^{-1}(\ell^{-1}\mathrm{d}\ell)\widehat{L} + \widehat{L}^{-1}\mathrm{d}\widehat{L}\Big\}(i\,\overline{\theta}Q) + \overline{Q}\mathrm{d}\theta \\
&= -i\,\overline{\theta}Q\,\alpha + i\,\alpha\overline{\theta}Q + \mathrm{d}\overline{\theta}Q\,, \\
\therefore\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widehat{E}+\widehat{\Omega}) &= \mathrm{d}\overline{\theta}Q + i\,(\widehat{E}+\widehat{\Omega})\overline{\theta}Q - i\,\overline{\theta}Q(\widehat{E}+\widehat{\Omega})
\end{aligned}
\tag{9.4.7}
$$

が得られる。この各項をそれぞれ計算しよう:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\widehat{E}+\widehat{\Omega}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{E}^{A}P_{A} + \overline{Q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{E} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{\Omega}^{AB}\Sigma_{AB}\,, \\
(\widehat{E}+\widehat{\Omega})\overline{\theta}Q - \overline{\theta}Q(\widehat{E}+\widehat{\Omega}) &= [\widehat{E}^{A}P_{A},\overline{\theta}Q] + [\overline{Q}\widehat{E},\overline{\theta}Q] + \frac{1}{2}[\widehat{\Omega}^{AB}\Sigma_{AB},\overline{Q}\theta] \\
&= i\overline{Q}T_{A}{}^{BCDE}\theta\,F_{BCDE}\,\widehat{E}^{A} \\
&\quad -\overline{\theta}\Big[2i\widehat{\Gamma}^{A}P_{A} - \frac{i}{144}\{\widehat{\Gamma}^{ABCDEF}F_{CDEF} + 24\,\widehat{\Gamma}_{CD}\,F^{ABCD}\}\Sigma_{AB}\Big]\widehat{E} \\
&\quad + \frac{i}{4}\widehat{\Omega}^{AB}\overline{Q}\widehat{\Gamma}_{AB}\theta
\end{aligned}
$$

これを整理すると、

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{E}^{A} = 2\overline{\theta}\widehat{\Gamma}^{A}\widehat{E}\,, \tag{9.4.8a}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{E}^{a} = \Big(\mathrm{d}\theta - \widehat{E}^{A}\,T_{A}{}^{BCDE}\theta\,F_{BCDE} - \frac{1}{4}\widehat{\Omega}^{AB}\,\widehat{\Gamma}_{AB}\theta\Big)^{a}\,, \tag{9.4.8b}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{\Omega}^{AB} = -\frac{1}{72}\overline{\theta}\Big\{\widehat{\Gamma}^{ABCDEF}\,F_{CDEF} + 24\,\widehat{\Gamma}_{CD}\,F^{ABCD}\Big\}\widehat{E}\,, \tag{9.4.8c}
$$

が得られる。これは、連立の単振動方程式になることがわかるので、完全に解くことができる。その一般解は指数関数であるが、θ は 32 component Majorana spinor であるために上限があるので、指数関数を展開した形で、θ の all order で与えられる:

$$
\widehat{E}^{A}(x,\theta) = e^{A} + \overline{\theta}\widehat{\Gamma}^{A}D\theta + 2\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{(2n+2)!}\overline{\theta}\,\widehat{\Gamma}^{A}\mathcal{M}^{2n}\,D\theta\,, \tag{9.4.9a}
$$

$$
\widehat{E}(x,\theta) = D\theta + \sum_{n=1}^{16}\frac{1}{(2n+1)!}\mathcal{M}^{2n}D\theta\,, \tag{9.4.9b}
$$

$$
\widehat{\Omega}^{AB}(x,\theta) = -\omega^{AB} - \frac{1}{72}\sum_{n=0}^{15}\frac{1}{(2n+2)!}\overline{\theta}\{\widehat{\Gamma}^{ABCDEF}\,F_{CDEF} + 24\,\widehat{\Gamma}_{CD}\,F^{ABCD}\}\mathcal{M}^{2n}D\theta\,, \tag{9.4.9c}
$$

$$
D\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{E}\Big|_{t=0} = \mathrm{d}\theta - e^{A}T_{A}{}^{BCDE}\theta\,F_{BCDE} + \frac{1}{4}\omega^{AB}\widehat{\Gamma}_{AB}\theta\,. \tag{9.4.9d}
$$

但し e^{A}, ω^{AB} は積分定数であり、ここでは Riemann tensor を再現するように与えてある。また同時に 1-form なので、

$$
e^{A} = e_{M}{}^{A}\,\mathrm{d}x^{M}\,, \qquad \omega^{AB} = \omega_{M}{}^{AB}\,\mathrm{d}x^{M}\,, \tag{9.4.10}
$$

である。展開係数 $\mathcal{M}^2$ は

$$(\mathcal{M}^2)^a{}_b = -2\big(T_A{}^{BCDE}\,\theta\big)^a\,F_{BCDE}\,\big(\overline{\theta}\widehat{\Gamma}^A\big)_b + \frac{1}{288}\big(\widehat{\Gamma}_{AB}\,\theta\big)^a\Big(\overline{\theta}\Big[\widehat{\Gamma}^{ABCDEF}\,F_{CDEF} + 24\,\widehat{\Gamma}_{CD}\,F^{ABCD}\Big]\Big)_b\,. \tag{9.4.11}$$

Chapter 10

Penrose Limit of Anti-de Sitter Spaces

参考文献: [6, 7, 8, 9, 10, 11]。

10.1 Penrose Limit

10.1.1 Rosen Coordinates

D-dimensional spacetime metric:

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}U\mathrm{d}V + \alpha\mathrm{d}V\mathrm{d}V + \beta_i\mathrm{d}V\mathrm{d}Y^i + C_{ij}\mathrm{d}Y^i\mathrm{d}Y^j \tag{10.1.1}$$

where

$$\alpha = \alpha(U,V,Y^i) \qquad \text{arbitrary function} \tag{10.1.2a}$$
$$\beta_i = \beta_i(U,V,Y^i) \qquad \text{arbitrary function} \tag{10.1.2b}$$
$$C_{ij} = C_{ij}(U,V,Y^i) \qquad \text{symmetric and arbitrary function} \tag{10.1.2c}$$

We transform coordinates as

$$U = u \qquad V = \Omega^2 v \qquad Y^i = \Omega y^i$$
$$\mathrm{d}s_\Omega^2 = \Omega^{-2}\mathrm{d}s^2$$

where Ω is a positive constant. Then

$$\mathrm{d}s_\Omega^2 = -\mathrm{d}u\mathrm{d}v + C_{ij}\mathrm{d}y^i\mathrm{d}y^j + \Omega^2\alpha(\mathrm{d}v)^2 + \Omega\beta_i\mathrm{d}v\mathrm{d}y^i \tag{10.1.3}$$

Penrose limit ($\Omega \to 0$):

$$\mathrm{d}s_\Omega^2 \to \mathrm{d}s_\mathrm{P}^2 = -\mathrm{d}u\mathrm{d}v + C_{ij}\mathrm{d}y^i\mathrm{d}y^j \tag{10.1.4}$$

10.1.2 Brinkmann Coordinates

さらに座標変換:

$$u = 2x^+ \qquad v = x^- - \frac{1}{2}M_{ij}(x^+)x^ix^j \qquad y^i = Q^i{}_j(x^+)x^j \tag{10.1.5}$$

ここで [8] にあるように、

$$C_{ij}\,Q^i{}_k\,Q^j{}_l = \delta_{kl} \qquad C_{ij}\big(Q'^i{}_k\,Q^j{}_l - Q^i{}_k\,Q'^j{}_l\big) = 0 \qquad Q'^i{}_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^+}Q^i{}_j \qquad M_{ij} = C_{kl}Q'^k{}_i\,Q^l{}_j \tag{10.1.6}$$

をみたすように設定する。これより、計量は

$$\mathrm{d}s_\mathrm{P}^2 = -2\mathrm{d}x^+\mathrm{d}x^- + \big\{A_{ij}(x^+)x^ix^j\big\}(\mathrm{d}x^+)^2 + (\mathrm{d}x^i)^2 \qquad A_{ij} = -\big(C_{kl}\,Q'^l{}_j\big)'\,Q^k{}_i \tag{10.1.7}$$

If A_{ij} is constant and non-degenerate, the metric (10.1.7) is called *Lorentzian symmetric space* (Cahen-Wallach space) [9].

10.2 $AdS_p \times S^q$

supersymmetry が乗る anti-de Sitter space AdS_p は $p = 2,3,4,5,6,7$ のみである。それを踏まえて、$p+q$-dimensional space $AdS_p \times S^q$ の計量を次の様に設定しよう:

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; R_A^2\Big\{-\cosh^2\rho\cdot \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \sinh^2\rho\cdot \mathrm{d}\Omega_{p-2}^2\Big\} + R_S^2\Big\{\cos^2\theta\cdot \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\cdot \mathrm{d}\Omega'^2_{q-2}\Big\} \tag{10.2.1}$$

この計量が唯一の表記ではないが、Penrose limit を採る際にはこの表記が便利であるために用いている。AdS_p と S^q はそれぞれ次で定義されている:

$$AdS_p \;:\; -R_A^2 \;=\; -(X^{-1})^2 - (X^0)^2 + \sum_{i=1}^{p-2}(X^i)^2 \qquad S^q \;:\; R_S^2 \;=\; \sum_{m=1}^{q}(Y^m)^2$$

$$X^{-1} \;=\; R_A\cosh\rho\cos t \qquad Y^1 \;=\; R_S\cos\theta\cos\varphi \tag{10.2.2a}$$

$$X^{0} \;=\; R_A\cosh\rho\sin t \qquad Y^2 \;=\; R_S\cos\theta\sin\varphi \tag{10.2.2b}$$

$$X^{i} \;=\; R_A\sinh\rho\cdot\Omega_i \qquad Y^m \;=\; R_S\sin\theta\cdot\Omega'_m \tag{10.2.2c}$$

さて、$\rho,\theta\sim 0$ 付近で φ 方向の boost を考えよう。次のように light-cone coordinates を採る:

$$x^+ \;\equiv\; \frac{1}{2}(t+\alpha\varphi) \qquad x^- \;\equiv\; R_A^2(t-\alpha\varphi) \tag{10.2.3a}$$

$$x \;\equiv\; R_A\rho \qquad y \equiv\; R_S\theta \qquad \alpha \;\equiv\; \frac{R_S}{R_A} \tag{10.2.3b}$$

ちなみにこれは Brinkmann coordinates と呼ばれる表記である。さらに α を固定したまま $R_A\to\infty$ 極限を採る (Penrose limit)。同時に $x^+\to\mu x^+$, $x^-\to\frac{1}{\mu}x^-$ と rescale を行う。すると計量が次の様になる:

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; -2\mathrm{d}x^+\mathrm{d}x^- - \mu^2(x^2+\alpha^{-2})(\mathrm{d}x^+)^2 + \big\{\mathrm{d}x^2 + x^2\mathrm{d}\Omega_{p-2}^2\big\} + \big\{\mathrm{d}y^2 + y^2\mathrm{d}\Omega'^2_{q-2}\big\} \tag{10.2.4}$$

10.3 $AdS_4 \times S^7$

11-dimensional spacetime の geometry は、M2-brane の near-horizon limit では $AdS_4\times S^7$ となる。この空間の isometry group は $SO(3,2)\times SO(8)$ である。計量を以下で与えよう:

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; R_A^2\big\{-\cosh^2\rho\cdot \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \sinh^2\rho\cdot \mathrm{d}\Omega_2^2\big\} + R_S^2\big\{\cos^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\Omega_5'^2\big\} \tag{10.3.1}$$

ここで Penrose limit を採るために次を採用する:

$$\alpha \;=\; \frac{R_S}{R_A} \;=\; 2 \qquad x^+ \;=\; \frac{1}{2}(t+2\varphi)\cdot\frac{3}{\mu} \qquad x^- \;=\; R_A^2(t-2\varphi)\cdot\frac{\mu}{3}$$

$$x \;=\; R_A\rho \qquad y \;=\; 2R_A\theta$$

但しここですでに rescale factor を内蔵させてある。ここから Penrose limit $\rho,\theta\sim 0$, $R_A\to\infty$ を採用する:

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; -2\mathrm{d}x^+\mathrm{d}x^- - \Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2\Big\{x^2 + \frac{1}{4}y^2\Big\}(\mathrm{d}x^+)^2 + \big\{\mathrm{d}x^2 + x^2\mathrm{d}\Omega_2^2\big\} + \big\{\mathrm{d}y^2 + y^2\mathrm{d}\Omega_5'^2\big\} \tag{10.3.2}$$

この計量は Kowalski-Gkilman solution と呼ばれる。この計量の上での flux の Freund-Rubin ansatz は $F_{+123}=\mu$ である。

10.4 $AdS_7 \times S^4$

11-dimensional spacetime の geometry は、M5-brane の near-horizon limit では $AdS_7 \times S^4$ となる。この空間の isometry group は $SO(6,2) \times SO(5)$ である。計量を以下で与えよう：

$$\mathrm{d}s^2 = R_A^2\Big\{ -\cosh^2\rho \cdot \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \sinh^2\rho \cdot \mathrm{d}\Omega_5^2\Big\} + R_S^2\Big\{\cos^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\Omega_2'^2\Big\} \tag{10.4.1}$$

ここで Penrose limit を採るために次を採用する：

$$\alpha = \frac{R_S}{R_A} = \frac{1}{2} \qquad x^+ = \frac{1}{2}\Big(t + \frac{1}{2}\varphi\Big)\cdot\frac{6}{\mu} \qquad x^- = R_A^2\Big(t - \frac{1}{2}\varphi\Big)\cdot\frac{\mu}{6}$$
$$x = R_A\rho \qquad y = \frac{1}{2}R_A\theta$$

但し、ここではすでに rescale などを取り込んでいる。さて、Penrose limit $\rho, \theta \sim 0$, $R_A \to \infty$ と、座標のラベルの再定義 $x \leftrightarrow y$ を採ろう。これにより計量が次のように書き変わる：

$$\mathrm{d}s^2 = -2\mathrm{d}x^+\mathrm{d}x^- - \Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2\Big\{x^2 + \frac{1}{4}y^2\Big\}(\mathrm{d}x^+)^2 + \Big\{\mathrm{d}x^2 + x^2\mathrm{d}\Omega_2^2\Big\} + \Big\{\mathrm{d}y^2 + y^2\mathrm{d}\Omega_5'^2\Big\} \tag{10.4.2}$$

となる。この background metric の上での Freund-Rubin ansatz を $F_{+123} = \mu$ とおく。これは (10.3.2) と同じである。

以上、大雑把にいうと、次の Figure 10.1 のような関係が得られる：

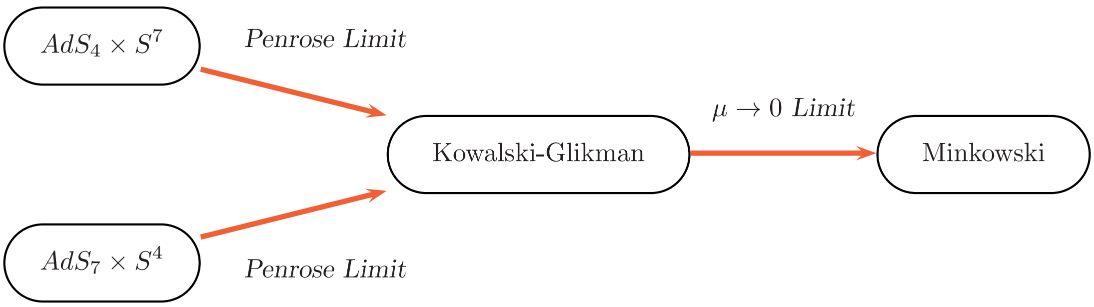

Figure 10.1: The relationships among the maximally supersymmetric spacetimes in eleven-dimensions.

Chapter 11

Comments

11.1 $AdS_p \times S^q$ 上では light-cone gauge-fixing は意味をなさない?

このノートの本題は、「KG solution 上の fluctuation fields の spectrum [2] と、$AdS_{4(7)} \times S^{7(4)}$ 上の fluctuation との、Penrose limit に於ける対応関係を考察したい。」であった。

$AdS_p \times S^q$ での fluctuation fields に対しては、de Donder gauge-fixing であり、KG background 上に対しては light-cone gauge-fixing $\Phi_{-MN\cdots} = 0$ を採用する。

それぞれの利点は以下の様になっている:

- de Donder gauge on $AdS_p \times S^q$: $\nabla^m h_{Mm}(x,y) = 0$

  de Donder gauge-fixing condition は

$$\nabla^m h_{\mu m}(x,y) \;\equiv\; 0 \tag{11.1.1}$$

  などで与えられる。この時、例えば fluctuation fields $h_{\mu m}(x,y)$ を S^q 球面調和関数で

$$h_{\mu m}(x,y) \;=\; \sum_I V_\mu^I(x) K_m^I(y) \tag{11.1.2}$$

  と展開した場合、de Donder gauge-fixing を採用していたら関数 $K_m^I(y)$ の性質が単に Laplace 方程式の固有関数というだけでなく、S^q の isometry group $SO(q+1)$ の Killing vector の性質も持つことができる。Killing vector は

$$\nabla_m K_n^I + \nabla_n K_m^I \;=\; 0 \tag{11.1.3}$$

  であるため、この条件と de Donder gauge-fixing condition は等価となる。この時、index I は Killing vector の個数を表すため、AdS_p で登場する field $V_\mu^I(x)$ の個数が直ちに分かる。

- light-cone gauge on KG background: $h_{M-}(x,y) = 0$

  KG background は light-cone coordinates を採用している。また、$x^\pm$ 方向以外は完全に flat で、$SO(3) \times SO(6)$ の回転対称性を持つ。これを最大限に活かすのはやはり light-cone gauge-fixing

$$\phi_{M=-}(x,y) \;\equiv\; 0 \tag{11.1.4}$$

  であろう。

Penrose limit でお互いを繋げたいと思うと、それぞれの background で上とは別の gauge-fixing を採りたくなる。Penrose limit の操作の前後で gauge-fixing condition はいじりたくないと考えるのは自然であろう。しかしそれでは解析が非常に困難になる可能性が生じる。難点を列挙しよう:

- light-cone gauge on $AdS_p \times S^q$

  例えば (11.1.2) と展開した場合、light-cone gauge-fixing を採用していたら関数 $K_m^I(y)$ の性質が単に Laplace 方程式の固有関数でしかない。さらに、その固有関数の個数に対する情報が他から得られないため、index I

は有効なものではなくなる。そのため、AdS_p に於ける massless field $V^I_\mu(x)$ がいくつ存在するのかが把握できない。もし de Donder gauge-fixing を採用していれば、$K^I_m(y)$ は isometry group $SO(q+1)$ の Killing vector とすることができるため、index I は意味を成す (Killing vector の個数、つまり algebra $\mathfrak{so}(q+1)$ の次元 $q(q+1)/2$ である)。

より具体的に説明しよう。light-cone coordinates $x^\pm$ を

$$x^+ \ = \ a(x^0 + y^\natural) \qquad\qquad x^- \ = \ b(x^0 - y^\natural) \tag{11.1.5}$$

で定義しておく。このとき light-cone gauge-fixing $h_{\mu -}(x,y) = 0$ は

$$0 \ = \ h_{\mu -}(x,y) \ = \ \frac{1}{2b}\big\{ h_{\mu 0}(x,y) - h_{\mu\natural}(x,y) \big\} \qquad\qquad \therefore \quad h_{\mu 0}(x,y) \ = \ h_{\mu\natural}(x,y) \tag{11.1.6}$$

となる。ここで、(11.1.2) にならって

$$h_{\mu 0}(x,y) \ = \ \sum_I h^I_{\mu 0}(x) K^I(y) \qquad\qquad h_{\mu\natural}(x,y) \ = \ \sum_J V^J_\mu(x) K^J_\natural(y) \tag{11.1.7}$$

と分解しよう。しかしこの分解は何も情報を与えない。$K^I(y)$ と $K^J_\natural(y)$ はそれぞれ S^q の球面調和関数であるが、de Donder gauge-fixing の時と異なり、これらは Killing vector でも何でも無いために、それぞれの index I, J がいくつ走るのかが定まらない。従って AdS_p 上の $h^I_{\mu 0}(x)$, $V^J_\mu(x)$ がそれぞれ何個存在するのか、どう関係付くのか、という事に関して、light-cone gauge-fixing $h_{M-} = 0$ は何ら答えを出さない。何ら制限を与えない。

$AdS_{4(7)} \times S^{7(4)}$ 上の spectrum は [1] にあるように de Donder gauge を採用するのが最良であろう。一方 KG background では light-cone gauge が最良である。これらが Penrose limit によって繋がるのか、

$$\text{de Donder gauge on } AdS_{4(7)} \times S^{7(4)} + \text{Penrose limit} \ \Longrightarrow \ \text{light-cone gauge on KG}$$

となるのか。これは相当に非自明な疑問である。確認方法は、$AdS_{4(7)} \times S^{7(4)}$ 上の fluctuation field $h_{M-}(x,y)$ が Penrose limit でゼロになるのかどうか、くらいであろうか。

Part II

de Wit Notations

Chapter 12

Introduction

先の Part では自分の convention を構築し、その下で supergravity を考察した。しかし 実際に他の文献と比べる時には非常に苦労する。何故なら自分のルールにはまだ full action が定義されてないし、superspace への拡張をする必要があるなど、まだまだやるべきことが沢山あるからである。それに比べ、現在 Matrix theory などである程度共通していると思われる表記があるので、これを身に付けると後々計算が進みやすいであろう。

supergravity を始めた当初は、いろんな約束が同時に現れて混乱していたが、現在は何が重要なのか、どこをいじればどう変更が加わるのか、などがある程度判ってきたつもりである。そこでここでは、de Wit [33, 34, 35] の notation and convention を紹介する。

この convention は、自分のそれとは次の点で相違がある:

- Lorentz algebra and representations of their generators
- covariant derivative for local Lorentz
- Cartan's structure equation
- sign of spin connection
- sign of curvature tensor for affine connection
- definition of curvature tensor for spin connection
- canonical scale for gravitino
- scale factor of terms in the Lagrangian

Chapter 13

Notations and Conventions defined by de Wit

13.1 The Convention Defined by de Wit [33, 34, 35]

Matrix theory [37] との convention の統一を計りたいなら、supergravity の convention をそれに合わせる方が手間が少ない。具体的な Lagrangian の構成手順はすでに理解しているので、Lorentz algebra の再定義、spin connection の再定義で結び付ける手段を確立するのは賢明であろう。

de Wit [35] の section 7 で登場する supergravity Lagrangian と covarianrt derivative などの規約、section 10 で登場する AdS algebra から読み取れる Lorentz algebra をここで列挙しよう:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}e\,R(e,\omega) - 2e\,\overline{\Psi}_M\Gamma^{MNP}D_N[\tfrac{1}{2}(\omega+\widehat{\omega})]\Psi_P - \frac{1}{96}eF_{MNPQ}F^{MNPQ} \\
&\quad - \frac{1}{2\cdot 12^4}\varepsilon^{MNPQRSUVWXY}F_{MNPQ}F_{RSUV}C_{WXY} \\
&\quad - \frac{1}{96}e\big(\overline{\Psi}_R\Gamma^{MNPQRS}\Psi_S + 12\overline{\Psi}^M\Gamma^{NP}\Psi^Q\big)(F+\widehat{F})_{MNPQ} && (13.1.1a) \\
\overline{\Psi}_M &= i\Psi^\dagger_M\Gamma^0 && (13.1.1b) \\
D_M(\omega)\epsilon &= \Big(\partial_M - \frac{1}{4}\omega_M{}^{AB}\Gamma_{AB}\Big)\epsilon && (13.1.1c) \\
\widehat{F}_{MNPQ} &= 4\partial_{[M}C_{NPQ]} + 12\overline{\Psi}_{[M}\Gamma_{NP}\Psi_{Q]} && (13.1.1d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\Gamma_A,\Gamma_B\} &= 2\eta_{AB}\,, \qquad \eta_{AB} \;=\; \mathrm{diag.}(-++\cdots+) && (13.1.1e) \\
\Gamma^{M_1M_2\cdots M_{11}} &= \mathbf{1}\varepsilon^{M_1M_2\cdots M_{11}} && (13.1.1f)
\end{aligned}$$

$$[M_{AB},M_{CD}] = \eta_{AD}M_{BC} + \eta_{BC}M_{AD} - \eta_{AC}M_{BD} - \eta_{BD}M_{AC} \qquad (13.1.1g)$$

$\widehat{\omega}_M{}^{AB}$ は次の equation の解として定義される:

$$D_{[M}(\widehat{\omega})e_{N]}{}^A - \overline{\Psi}_M\Gamma^A\Psi_N = 0 \qquad (13.1.2)$$

これを解こう。それには vielbein postulate $D_M(\omega)e_N{}^A = -\Gamma^P_{NM}e_P{}^A$ を用いればよい。まず、具体的に (13.1.2) を展開する:

$$0 = D_M(\widehat{\omega})e_N{}^A - D_N(\widehat{\omega})\,e_M{}^A - 2\overline{\Psi}_M\Gamma^A\Psi_N \qquad (13.1.3)$$

また、Lorentz generators M_{AB} の vector 表現を用いて

$$\begin{aligned}
D_M(\widehat{\omega})e_N{}^A &= \partial_M e_N{}^A - \widehat{\omega}_M{}^A{}_B\,e_N{}^B && (13.1.4a) \\
D_M(\omega)e_N{}^A &= \partial_M e_N{}^A - \omega_M{}^A{}_B\,e_N{}^B && (13.1.4b)
\end{aligned}$$

と展開する。vielbein postulate は

$$D_M(\omega)e_N{}^A = \partial_M e_N{}^A - \omega_M{}^A{}_B\,e_N{}^B = -\Gamma^P_{NM}\,e_P{}^A \qquad (13.1.5)$$

でなので、微分項は簡単に非微分項に書き換えられて、$D_M(\widehat{\omega})e_N{}^A$ は

$$D_M(\widehat{\omega})e_N{}^A = \omega_M{}^A{}_B\,e_N{}^B - \Gamma^P_{NM}\,e_P{}^A - \widehat{\omega}_M{}^A{}_B\,e_N{}^B \qquad (13.1.6)$$

となる。(13.1.6) を (13.1.3) に代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\omega_M{}^A{}_B\, e_N{}^B - \omega_N{}^A{}_B\, e_M{}^B\right) - \left(\widehat{\omega}_M{}^A{}_B\, e_N{}^B - \widehat{\omega}_N{}^A{}_B\, e_M{}^B\right) \\ &\quad - \left(\Gamma^P_{NM}\, e_P{}^A - \Gamma^P_{MN}\, e_P{}^A\right) - 2\overline{\Psi}_M \Gamma^A \Psi_N \end{aligned} \tag{13.1.7}$$

が得られる。これに $E_C{}^M$ と $E_D{}^N$ を作用させて、見易くすると、最終的に $\widehat{\omega}$ が得られる：

$$\widehat{\omega}_{[C}{}^A{}_{D]} = \omega_{[C}{}^A{}_{D]} + \Gamma^A_{[CD]} - \overline{\Psi}_C \Gamma^A \Psi_D \tag{13.1.8}$$

supersymmetry transformations も列挙しておこう：

$$\delta e_M{}^A = 2\overline{\varepsilon}\Gamma^A \Psi_M \tag{13.1.9a}$$

$$\delta \Psi_M = D_M(\widehat{\omega})\varepsilon + T_M{}^{NPQR}\varepsilon\, \widehat{F}_{NPQR} \tag{13.1.9b}$$

$$\delta C_{MNP} = -6\overline{\varepsilon}\Gamma_{[MN}\Psi_{P]} \tag{13.1.9c}$$

ここで

$$T_M{}^{NPQR} = \frac{1}{288}\left(\Gamma_M{}^{NPQR} - 8\delta^{[N}_M \Gamma^{PQR]}\right) \tag{13.1.9d}$$

である。

Clifford algebra から、Lorentz generator M_{AB} の spinor 表現が直ちにわかる：

$$M_{AB} = \frac{1}{2}\Gamma_{AB} \tag{13.1.10a}$$

また、M_{AB} の vector 表現も、実際に計算することで

$$(M_{CD})^A{}_B = \delta^A_C\, \eta_{BD} - \delta^A_D\, \eta_{BC} \tag{13.1.10b}$$

であることがわかる。

この表現を covariant derivative に代入すると、表現に依らない記述が

$$D_M(\omega) = \partial_M - \frac{1}{2}\omega_M{}^{AB} M_{AB} \tag{13.1.11}$$

で与えられることがわかる。よって、この covariant derivative の commutator から、spin connection 由来の curvature 2-form が得られる：

$$\begin{aligned} [D_M, D_N] &= -\frac{1}{2}M_{AB}\partial_M \omega_N{}^{AB} + \frac{1}{2}M_{AB}\partial_N \omega_M{}^{AB} + \frac{1}{4}\omega_M{}^{AB}\omega_N{}^{CD}[M_{AB}, M_{CD}] \\ &= -\frac{1}{2}M_{AB}\left\{\partial_M \omega_N{}^{AB} - \partial_N \omega_M{}^{AB} - \omega_M{}^A{}_C \omega_N{}^{CB} + \omega_N{}^A{}_C \omega_M{}^{CB}\right\} \\ &\equiv -\frac{1}{2}M_{AB}\widetilde{R}^{AB}{}_{MN} \end{aligned} \tag{13.1.12a}$$

$$\therefore \quad \widetilde{R}^{AB}{}_{MN} = \partial_M \omega_N{}^{AB} - \partial_N \omega_M{}^{AB} - \omega_M{}^A{}_C \omega_N{}^{CB} + \omega_N{}^A{}_C \omega_M{}^{CB} \tag{13.1.12b}$$

しかし、この定義は differential form からの curvature 2-form を

$$\widetilde{R}^A{}_B = \mathrm{d}\omega^A{}_B - \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B \tag{13.1.13}$$

とすべし、という要請が加わることになる。(13.1.11) より、vielbein の covariant derivative も計算できるようになって、

$$D_M e_N{}^A \;=\; \partial_M e_N{}^A - \omega_M{}^A{}_B e_N{}^B \tag{13.1.14}$$

であることがわかるので、vielbein postulate

$$0 \;=\; \widetilde{D}_M e_N{}^A \;=\; D_M e_N{}^A + \Gamma^P_{NM} e_P{}^A \tag{13.1.15}$$

から[1]、affine connection 由来の curvature と spin connection 由来の curvature に関係を付けることができる。これから、Cartan structure equation を見出そう。torsion free の場合を考えよう。(13.1.15) より、

$$E_A{}^P D_M e_N{}^A \;=\; -\Gamma^P_{NM} \;=\; -\Gamma^P_{MN} \;=\; E_A{}^P D_N e_M{}^A \tag{13.1.16}$$

なので、

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; D_M e_N{}^A + \Gamma^P_{NM} e_P{}^A \;=\; \partial_M e_N{}^A - \omega_M{}^A{}_B e_N{}^B - (E_B{}^P D_N e_M{}^B) e_P{}^A \\ &=\; \partial_M e_N{}^A - \partial_N e_M{}^A - \omega_M{}^A{}_B e_N{}^B + \omega_N{}^A{}_B e_M{}^B \end{aligned} \tag{13.1.17}$$

が得られる。これは、differential form で表すと

$$\mathrm{d}e^A - \omega^A{}_B \wedge e^B \;=\; 0 \tag{13.1.18}$$

にほかならない。(13.1.13), (13.1.18) は Cartan's structure equations である。

curvature from affine connection と curvature from spin connection の関係を付けておこう。但しここでも torsion free としておこう。まず affine connection から得られる curvature について。covariant derivative $\nabla_M A_N$ と、commutator $[\nabla_M, \nabla_N] A_P$ を定義、計算する[2]:

$$\nabla_N A_P \;=\; \partial_N A_P + \Gamma^Q_{PN}\, A_Q \tag{13.1.19a}$$

$$\begin{aligned} \nabla_M \nabla_N A_P \;&=\; \partial_M \big(\nabla_N A_P\big) + \Gamma^Q_{NM}\, \nabla_Q A_P + \Gamma^Q_{PM}\, \nabla_N A_Q \\ &=\; \partial_M \big(\partial_N A_P + \Gamma^Q_{PN}\, A_Q\big) + \Gamma^Q_{NM} \big(\partial_Q A_P + \Gamma^R_{PQ}\, A_R\big) + \Gamma^Q_{PM} \big(\partial_N A_Q + \Gamma^R_{QN}\, A_R\big) \end{aligned} \tag{13.1.19b}$$

$$\nabla_N \nabla_M A_P \;=\; \partial_N \big(\partial_M A_P + \Gamma^Q_{PM}\, A_Q\big) + \Gamma^Q_{MN} \big(\partial_Q A_P + \Gamma^R_{PQ}\, A_R\big) + \Gamma^Q_{PN} \big(\partial_M A_Q + \Gamma^R_{QM}\, A_R\big) \tag{13.1.19c}$$

$$\begin{aligned} [\nabla_M, \nabla_N] A_P \;&=\; \Big\{ \partial_M \Gamma^R_{PN} - \partial_N \Gamma^R_{PM} - \Gamma^R_{QM} \Gamma^Q_{PN} + \Gamma^R_{QN} \Gamma^Q_{PM} \Big\} A_R \\ &\equiv\; R^R{}_{PMN} A_R \end{aligned} \tag{13.1.20}$$

つまり

$$R^R{}_{PMN} \;=\; \partial_M \Gamma^R_{PN} - \partial_N \Gamma^R_{PM} - \Gamma^R_{QM}\, \Gamma^Q_{PN} + \Gamma^R_{QN}\, \Gamma^Q_{PM} \tag{13.1.21}$$

Riemann tensor $R^R{}_{PMN}$ にはいろんなルールがある:

$$R_{PQMN} \;=\; -R_{QPMN} \;=\; -R_{PQNM} \tag{13.1.22}$$

[1]ここまで触れなかったが、affine connection の定義も TK とは逆符号である。つまり $\nabla_M A_N = \partial_M A_N + \Gamma^P_{NM} A_P$ で定義される。
[2]affine connection の定義は、TK とは符号が反対である。

(13.1.15) より、$\Gamma^R_{PN} = -E_A{}^R(D_N e_M{}^A)$ なので、これを微分する:

$$\partial_M \Gamma^R_{PN} \;=\; -\big(\partial_M E_A{}^R\big)\big(D_N e_P{}^A\big) - E_A{}^R \partial_M\big(D_N e_P{}^A\big) \tag{13.1.23}$$

また

$$\partial_M E_A{}^R \;=\; -E_A{}^Q E_B{}^R \partial_M (e_Q{}^B) \;=\; -E_A{}^Q E_B{}^R D_M (e_Q{}^B) - \omega_M{}^R{}_A \tag{13.1.24}$$

であるので、

$$\partial_M \Gamma^R_{PN} \;=\; E_A{}^Q (D_N e_P{}^A) E_B{}^R (D_M e_Q{}^B) + \omega_M{}^R{}_A (D_N e_P{}^A) - E_A{}^R \partial_M (D_N e_P{}^A) \tag{13.1.25}$$

となる。vielbein postulate より $E_A{}^Q(D_N e_P{}^A) = -\Gamma^Q_{PN}$ なので、

$$\begin{aligned}
\partial_M \Gamma^R_{PN} - \Gamma^R_{QM}\Gamma^Q_{PN} \;&=\; \omega_M{}^R{}_A (D_N e_P{}^A) - E_A{}^R \partial_M (D_N e_P{}^A) \\
&=\; \omega_M{}^R{}_A \big(\partial_N e_P{}^A - \omega_N{}^A{}_B\, e_P{}^B\big) \\
&\quad - E_A{}^R \big(\partial_N \partial_M e_P{}^A - \partial_M \omega_N{}^A{}_B \cdot e_P{}^B - \omega_N{}^A{}_B \cdot \partial_M e_P{}^B\big)
\end{aligned} \tag{13.1.26}$$

であることがわかる。これを用いると affine curvature は

$$\begin{aligned}
R^R{}_{PMN} \;&=\; E_A{}^R e_P{}^B \Big\{\partial_M \omega_N{}^A{}_B - \partial_N \omega_M{}^A{}_B - \omega_M{}^A{}_C \omega_N{}^C{}_B + \omega_N{}^A{}_C \omega_M{}^C{}_B\Big\} \\
&=\; E_A{}^R e_{PB} \widetilde{R}^{AB}{}_{MN}
\end{aligned} \tag{13.1.27}$$

と、spin curvature で記述できる。符号に注意する必要がある。Ricci tensor, scalar curvature はそれぞれ次のように定義する:

$$R^M{}_N \;=\; g^{PR} R^M{}_{PNR} \;=\; E_A{}^M E_B{}^R \widetilde{R}^{AB}{}_{NR} \;=\; E_A{}^M e_N{}^B \widetilde{R}^{AC}{}_{BC} \;=\; E_A{}^M e_N{}^B \widetilde{R}^A{}_B \tag{13.1.28a}$$

$$\widetilde{R}^A{}_B \;=\; \widetilde{R}^{AC}{}_{BC} \tag{13.1.28b}$$

$$R \;=\; R^M{}_M \;=\; \widetilde{R}^A{}_A \tag{13.1.28c}$$

Ricci tensor を求める際、de Wit [35] も普通に 2 つめと 4 つめの index を contract している。そのため、sphere S^p の affine curvature は positive curvature として登場しない。しかしそれはそれでよい。**de Wit は、sphere の curvature を minus で定義しているのである。[35] の section 10 で登場する $AdS_4 \times S^7$ の Riemann curvature tensor も、そこから得られる Ricci tensor/scalar も、sphere のそれが負になるように定義されている。**Cartan's structure equation (13.1.18), (13.1.13) から得られる curvature は、sphere S^p が negative curvature ($\widetilde{R} < 0$) で登場する公式となっている。de Wit の Lagrangian (13.1.1) から得られる equations of motion、特に metric のそれから得られる background の特性も、それを反映した定義であることがわかる。

13.2 Summary of the Convention

de Wit の convention をまとめておこう:

algebras and representations:

$$[M_{AB}, M_{CD}] = \eta_{AD}M_{BC} + \eta_{BC}M_{AD} - \eta_{AC}M_{BD} - \eta_{BD}M_{AC} \tag{13.2.1a}$$

$$M_{AB} = 0 \qquad \text{scalar} \tag{13.2.1b}$$

$$(M_{CD})^A{}_B = \delta^A_C\eta_{BD} - \delta^A_D\eta_{BC} \qquad \text{vector} \tag{13.2.1c}$$

$$M_{AB} = \frac{1}{2}\Gamma_{AB} \qquad \text{spinor} \tag{13.2.1d}$$

$$\{\Gamma_A, \Gamma_B\} = 2\eta_{AB} = 2\cdot\mathbf{1}\cdot\text{diag.}(-+++\cdots+) \tag{13.2.1e}$$

$$\Gamma^{M_1M_2\cdots M_{11}} = \mathbf{1}\cdot\varepsilon^{M_1M_2\cdots M_{11}} \tag{13.2.1f}$$

affine/spin connections, curvatures:

$$\nabla_M A_N = \partial_M A_N + \Gamma^P_{NM}A_P \tag{13.2.2a}$$

$$D_M e_N{}^A = \partial_M e_N{}^A - \omega_M{}^A{}_B e_N{}^B = -\Gamma^P_{NM}e_P{}^A \tag{13.2.2b}$$

$$\partial_M e_N{}^A - \partial_N e_M{}^A - \omega_M{}^A{}_B e_N{}^B + \omega_N{}^A{}_B e_M{}^B = 0 \tag{13.2.2c}$$

$$[\nabla_M, \nabla_N]A_P = R^R{}_{PMN}A_R \tag{13.2.2d}$$

$$R^R{}_{PMN} = \partial_M\Gamma^R_{PN} - \partial_N\Gamma^R_{PM} - \Gamma^R_{QM}\Gamma^Q_{PN} + \Gamma^R_{QN}\Gamma^Q_{PM} \tag{13.2.2e}$$

$$[D_M, D_N]\phi = -\frac{1}{2}M_{AB}\widetilde{R}^{AB}{}_{MN}\phi \tag{13.2.2f}$$

$$\widetilde{R}^{AB}{}_{MN} = \partial_M\omega_N{}^{AB} - \partial_N\omega_M{}^{AB} - \omega_M{}^A{}_C\omega_N{}^{CB} + \omega_N{}^A{}_C\omega_M{}^{CB} \tag{13.2.2g}$$

$$R^R{}_{PMN} = E_A{}^R e_{PB}\widetilde{R}^{AB}{}_{MN} \tag{13.2.2h}$$

$$R^M{}_N = g^{PR}R^M{}_{PNR} = E_A{}^M e_N{}^B\widetilde{R}^A{}_B \tag{13.2.2i}$$

$$\widetilde{R}^A{}_B = \widetilde{R}^{AC}{}_{BC} \tag{13.2.2j}$$

$$R = R^M{}_M = \widetilde{R}^A{}_A = \widetilde{R} \tag{13.2.2k}$$

Cartan's structure equations:

$$T^A = \mathrm{d}e^A - \omega^A{}_B \wedge e^B \tag{13.2.3a}$$

$$R^A{}_B = \mathrm{d}\omega^A{}_B - \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B \tag{13.2.3b}$$

Lagrangian and its convention:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{2}e\,R(e,\omega) - 2e\,\overline{\Psi}_M\Gamma^{MNP}D_N[\tfrac{1}{2}(\omega+\widehat{\omega})]\Psi_P - \frac{1}{96}eF_{MNPQ}F^{MNPQ} \\ &- \frac{1}{2\cdot 12^4}\varepsilon^{MNPQRSUVWXY}F_{MNPQ}F_{RSUV}C_{WXY} \\ &- \frac{1}{96}e\big(\overline{\Psi}_R\Gamma^{MNPQRS}\Psi_S + 12\overline{\Psi}^M\Gamma^{NP}\Psi^Q\big)(F+\widehat{F})_{MNPQ}\end{aligned} \tag{13.2.4a}$$

$$\overline{\Psi}_M = i\Psi^\dagger_M\Gamma^0 \tag{13.2.4b}$$

$$D_M(\omega)\epsilon = \Big(\partial_M - \frac{1}{2}\omega_M{}^{AB}M_{AB}\Big)\epsilon \tag{13.2.4c}$$

$$\widehat{F}_{MNPQ} = 4\partial_{[M}C_{NPQ]} + 12\overline{\Psi}_{[M}\Gamma_{NP}\Psi_{Q]} \tag{13.2.4d}$$

$$\widehat{\omega}_{[C}{}^{A}{}_{D]} = \omega_{[C}{}^{A}{}_{D]} + \Gamma^{A}_{[CD]} - \overline{\Psi}_{C}\Gamma^{A}\Psi_{D} \tag{13.2.4e}$$

supersymmetry transformations:

$$\delta e_M{}^A = 2\overline{\varepsilon}\Gamma^A\Psi_M \tag{13.2.5a}$$

$$\delta\Psi_M = D_M(\widehat{\omega})\varepsilon + T_M{}^{NPQR}\varepsilon\,\widehat{F}_{NPQR} \tag{13.2.5b}$$

$$\delta C_{MNP} = -6\overline{\varepsilon}\Gamma_{[MN}\Psi_{P]} \tag{13.2.5c}$$

$$T_M{}^{NPQR} = \frac{1}{288}\left(\Gamma_M{}^{NPQR} - 8\delta^{[N}_M\Gamma^{PQR]}\right) \tag{13.2.5d}$$

TK notations との違い、変換則を列挙しておこう:

	TK	transformation rule	de Wit
gamma matrix	$\widehat{\Gamma}^A$	$\widehat{\Gamma}^A = \Gamma^A$	Γ^A
Lorentz generator	Σ_{AB}	$\Sigma_{AB} = iM_{AB}$	M_{AB}
covariant deriv.	$\nabla_M A_N = \partial_M - \Gamma^P_{NM} A_P$	$\Gamma^P_{NM}(\mathrm{TK}) = -\Gamma^P_{NM}(\mathrm{dW})$	$\nabla_M A_N = \partial_M + \Gamma^P_{NM} A_P$
	$D_M = \partial_M - \frac{i}{2}\omega_M{}^{AB}\Sigma_{AB}$		$D_M = \partial_M - \frac{1}{2}\omega_M{}^{AB} M_{AB}$
Cartan's str. eqs.	$T^A = \mathrm{d}e^A + \omega^A{}_B \wedge e^B$	$\omega^{AB}(\mathrm{TK}) = -\omega^{AB}(\mathrm{dW})$	$T^A = \mathrm{d}e^A - \omega^A{}_B \wedge e^B$
	$R^A{}_B = \mathrm{d}\omega^A{}_B + \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B$		$R^A{}_B = \mathrm{d}\omega^A{}_B - \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B$
Riemann tensor	$\frac{1}{2}R^R{}_{PMN} = \partial_M \Gamma^R_{PN} + \Gamma^R_{QM}\Gamma^Q_{PN}$		$\frac{1}{2}R^R{}_{PMN} = \partial_M \Gamma^R_{PN} - \Gamma^R_{QM}\Gamma^Q_{PN}$
	$\frac{1}{2}\widetilde{R}^{AB}{}_{MN} = \partial_M \omega_N{}^{AB} + \omega_M{}^A{}_C \omega_N{}^{CB}$		$\frac{1}{2}\widetilde{R}^{AB}{}_{MN} = \partial_M \omega_N{}^{AB} - \omega_M{}^A{}_C \omega_N{}^{CB}$
Ricci tensor	$\mathcal{R}^M{}_N = g^{PQ} R^M{}_{PNQ}$		$R^M{}_N = g^{PQ} R^M{}_{PNQ}$
	$\widetilde{\mathcal{R}}^A{}_B = \widetilde{R}^{AC}{}_{BC}$		$\widetilde{R}^A{}_B = \widetilde{R}^{AC}{}_{BC}$
Ricci scalar	$\mathcal{R} = \mathcal{R}^M{}_M$		$R = R^M{}_M$
	$\widetilde{\mathcal{R}} = \widetilde{\mathcal{R}}^A{}_A$		$\widetilde{R} = \widetilde{R}^A{}_A$
		$R_4(\mathrm{TK}) = -R_4(\mathrm{dW})$	
		$\mathcal{R}_2(\mathrm{TK}) = -R_2(\mathrm{dW})$	
		$\mathcal{R}(\mathrm{TK}) = -R(\mathrm{dW})$	
(ex.)	$\mathcal{R}(S^p) > 0$		$R(S^p) < 0$
scale of fermion	$\Psi(\mathrm{TK})$	$\Psi(\mathrm{TK}) = 2\sqrt{2}\Psi(\mathrm{dW})$	$\Psi(\mathrm{dW})$
SUSY parameter	$\varepsilon_{\mathrm{TK}}$	$\varepsilon_{\mathrm{TK}} = \sqrt{2}\varepsilon_{\mathrm{dW}}$	$\varepsilon_{\mathrm{dW}}$
Hilbert action	$e\mathcal{R}$		$-eR$
scale of Lagrangian	$\mathcal{L}(\mathrm{TK})$	$\mathcal{L}(\mathrm{TK}) = 2\mathcal{L}(\mathrm{dW})$	$\mathcal{L}(\mathrm{dW})$

Chapter 14

Properties of the PP-wave

de Wit の定義では spin connection が TK とは異なる。

14.1 Kowalski-Glikman background

Here we summarize several properties of the maximally supersymmetric pp-wave background. This solution was found by Kowalski-Glikman [6, 7] and often called the KG solution. This is the unique pp-wave type solution preserving maximal supersymmetries. The metric of this background is given by

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -2\mathrm{d}x^+\mathrm{d}x^- + G_{++}(\mathrm{d}x^+)^2 + \sum_{I=1}^{9}(\mathrm{d}x^I)^2 \,, & (14.1.1a) \\ G_{++} &= -\Big[\Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2 \sum_{\widetilde{I}=1}^{3}(x^{\widetilde{I}})^2 + \Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2 \sum_{I'=4}^{9}(x^{I'})^2\Big] \,, & (14.1.1b) \end{aligned}$$

or

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} G_{++} & -1 & \\ -1 & 0 & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} , \quad g^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ -1 & -G_{++} & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} , \quad \sqrt{-g} = e = 1 \,, \qquad (14.1.2a)$$

$$\eta_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ -1 & 0 & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} , \quad \eta^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ -1 & 0 & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} , \qquad (14.1.2b)$$

$$e_M{}^A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}G_{++} & \\ 0 & 1 & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} , \quad E_A{}^M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}G_{++} & \\ 0 & 1 & \\ & & \mathbf{1} \end{pmatrix} , \quad \textit{i.e.}, \quad e_+{}^- = -\frac{1}{2}G_{++} \,, \textit{etc.} \qquad (14.1.2c)$$

which is equipped with the constant flux

$$F_{+123} = \mu \neq 0 \,. \qquad (14.1.3)$$

この μ は mass dimension +1 の **real parameter** である。この変化は、Penrose limit を採る時に、light-cone coordinates に、scale factor や μ を weight として導入させると考えれば良いであろう (see, for example, chapter 6.1)。ちなみに、tangent space の metric η_{AB} は、light-cone coordinates $x^{\pm}$ を定義する時の weight の選び方に依らない。つまり $x^+ = \frac{1}{2a}(x^0 + x^\natural)$, $x^- = a(x^0 - x^\natural)$ とした時、metric η_{AB} の表示は “weight” a には依存しない。

In our consideration the contribution from torsion is not included, i.e., affine connection is symmetric under lower indices: $\Gamma^P_{MN} = \Gamma^P_{NM}$. For the KG metric, the above quantities are written as

$$\begin{aligned} \Gamma^{\widetilde{I}}_{++} &= \frac{1}{2}\partial^{\widetilde{I}}G_{++} = -\Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2 x^{\widetilde{I}} \,, & \Gamma^{I'}_{++} &= \frac{1}{2}\partial^{I'}G_{++} = -\Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2 x^{I'} \,, & (14.1.4a) \\ \Gamma^-_{+\widetilde{I}} &= \Gamma^-_{\widetilde{I}+} = \Gamma^{\widetilde{I}}_{++} = -\Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2 x^{\widetilde{I}} \,, & \Gamma^-_{+I'} &= \Gamma^-_{I'+} = \Gamma^{I'}_{++} = -\Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2 x^{I'} \,, & (14.1.4b) \\ R^{\widetilde{J}}{}_{+\widetilde{I}+} &= R_{\widetilde{J}+\widetilde{I}+} = -\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}}\Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2 \,, & R^{J'}{}_{+I'+} &= R_{J'+I'+} = -\delta_{I'J'}\Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2 \,, & (14.1.4c) \end{aligned}$$

curvature も先の Part とは異なる符号であることに注意。定義が逆の符号である。

spin connection を計算しよう。nontrivial な成分は $\omega_+{}^{I-}$ だけであるのは知っているので、それだけを見る。vielbein postulate (13.1.15) より、

$$\omega_P{}^{AB} = \eta^{BC} E_C{}^M \big(\partial_P e_M{}^A + \Gamma^Q_{MP} e_Q{}^A\big) \tag{14.1.5}$$

となる。$e_M{}^A$, $E_A{}^P$, Γ^Q_{MP} は上の値を用いよう。このとき、

$$\omega_+{}^{I-} = \eta^{-+} E_+{}^M \big(\partial_+ e_M{}^I + \Gamma^Q_{M+} e_Q{}^I\big) = -\Gamma^I_{++} = -\frac{1}{2}\partial^I G_{++} \tag{14.1.6}$$

となる。すなわち、

$$\omega_+{}^{\widetilde{I}-} = -\omega_+{}^{-\widetilde{I}} = \Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2 x^{\widetilde{I}} \,, \qquad \omega_+{}^{I'-} = -\omega_+{}^{-I'} = \Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2 x^{I'} \,. \tag{14.1.7}$$

It should be noted that the scalar curvature vanishes and the Ricci tensor is constant and proportional to μ^2. These are given by

$$\mathcal{R}_{++} = -\frac{1}{2}\mu^2 \,, \qquad \mathcal{R} = 0 \,. \tag{14.1.8}$$

つまり、Lorentz algebra、spin connection、affine connection の定義を変更しているので、spin connection の値の符号が反転される[1]。Riemann curvarture も符号が反転しているため、Ricci tensor/scalar も符号が反転する。

de Wit は、sphere S^p の curvature の符号を「負」で定義している。

14.2 Hamiltonian

Now let us discuss the Hamiltonian and its energy eigenvalue. We need to calculate and solve field equations for fluctuation modes around the KG background. Then we will encounter Klein-Gordon type equations of motion and have to evaluate its energy spectrum.

We shall consider a Klein-Gordon type equation of motion for a field $\phi(x)$:

$$(\Box + \alpha\,\mu\, i\partial_-)\phi(x^+, x^-, x^I) = 0 \,, \tag{14.2.1}$$

where α is an arbitrary constant and x^+ is an evolution parameter. The d'Alembertian $\Box$ on the KG background is given by

$$\begin{aligned} \Box &= -\nabla^P \nabla_P = -\partial^P \partial_P \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_M\big(\sqrt{-g} g^{MN}\partial_N\big) = 2\partial_+\partial_- + G_{++}\cdot(\partial_-)^2 - (\partial_K)^2 \,. \end{aligned} \tag{14.2.2}$$

The above Klein-Gordon type field equation will appear later as equations of motion of fluctuation modes. Fourier transformed expression of $\phi(x)$

$$\phi(x^+, x^-, x^I) = \int \frac{\mathrm{d}p_- \mathrm{d}^9 p_I}{\sqrt{(2\pi)^{10}}} \mathrm{e}^{i(p_- x^- + p_I x^I)}\, \widetilde{\phi}(x^+, p_-, p_I)$$

[1] ちなみに、[37] の spin connection (2.16) は、ここの convention とはまた若干異なる。$\mathrm{d}e^A - \omega^A{}_B \wedge e^B = 0$, $R^A{}_B = \mathrm{d}\omega^A{}_B - \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B$ はここと同じであるが、$\nabla_M A_N = \partial_M - \Gamma^P_{NM} A_P$, $R^R{}_{PMN} = \partial_N \Gamma^R_{PM} - \partial_M \Gamma^R_{PN} + \Gamma^R_{NQ}\Gamma^Q_{MP} - \Gamma^R_{MQ}\Gamma^Q_{NP}$ であっても合わない。

leads to the following expression:

$$0 \;=\; 2p_- \, i\partial_+ - \widetilde{G}_{++} \cdot (p_-)^2 + (p_I)^2 - \alpha\, \mu\, p_- \;, \qquad (14.2.3)$$

where $\widetilde{G}_{++}$ is defined as

$$\widetilde{G}_{++} \;\equiv\; \sum_{\widetilde{I}=1}^{3} \Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2 (\partial_{p_{\widetilde{I}}})^2 + \sum_{I'=4}^{9} \Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2 (\partial_{p_{I'}})^2 \;. \qquad (14.2.4)$$

By rewriting the above equation and $H = i\partial_+$, we can obtain the explicit expression of Hamiltonian:

$$H \;=\; \frac{1}{-2p_-} \big\{ (p_I)^2 - \widetilde{G}_{++} \cdot (p_-)^2 - \alpha\, \mu\, p_- \big\} \;. \qquad (14.2.5)$$

The energy spectrum of this Hamiltonian can be derived by using the standard technique of harmonic oscillators. Now we define "creation/annihilation" operators

$$a^{\widetilde{I}} \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{2\widetilde{m}}} \big\{ p_{\widetilde{I}} + \widetilde{m} \partial_{p_{\widetilde{I}}} \big\} \;, \qquad \overline{a}^{\widetilde{I}} \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{2\widetilde{m}}} \big\{ p_{\widetilde{I}} - \widetilde{m} \partial_{p_{\widetilde{I}}} \big\} \;, \qquad \widetilde{m} \;\equiv\; -\frac{1}{3} \mu\, p_- \;, \qquad (14.2.6a)$$

$$a^{I'} \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{2m'}} \big\{ p_{I'} + m' \partial_{p_{I'}} \big\} \;, \qquad \overline{a}^{I'} \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{2m'}} \big\{ p_{I'} - m' \partial_{p_{I'}} \big\} \;, \qquad m' \;\equiv\; -\frac{1}{6} \mu\, p_- \;, \qquad (14.2.6b)$$

whose commutation relations are represented by

$$[a^{\widetilde{I}}, \overline{a}^{\widetilde{J}}] \;=\; \delta^{\widetilde{I}\widetilde{J}} \;, \qquad [a^{I'}, \overline{a}^{J'}] \;=\; \delta^{I'J'} \;, \qquad [a^{\widetilde{I}}, \overline{a}^{J'}] \;=\; [a^{I'}, \overline{a}^{\widetilde{J}}] \;=\; 0 \;. \qquad (14.2.7)$$

Thus we express the Hamiltonian in terms of the above oscillators:

$$H \;=\; \frac{1}{3}\mu \sum_{\widetilde{I}} \overline{a}^{\widetilde{I}} a^{\widetilde{I}} + \frac{1}{6}\mu \sum_{I'} \overline{a}^{I'} a^{I'} + \frac{1}{2}\mu\, (2 + \alpha) \;. \qquad (14.2.8)$$

Note that the last term implies the zero-mode energy E_0 of the system, which is represented by

$$E_0 \;=\; \frac{1}{2} \mu\, \mathcal{E}_0(\phi) \;, \qquad \mathcal{E}_0(\phi) \;=\; 2 + \alpha \;. \qquad (14.2.9)$$

In the next section, we will use $\mathcal{E}_0$ to evaluate the energy of the zero-modes of fluctuation fields.

Chapter 15

Spectrum on the PP-wave with de Wit Rule

15.1 Supergravity on Classical Background

まずは classical background での supergravity を復習する。fluctuation については次の section で行う。なお、書き換えが面倒なので、gamma matrix の表記は TK と同じ記号にするが、定義と意味は de Wit [35] のものである。

15.1.1 Supergravity Action without Torsion

Lagrangian up to torsion from (13.1.1):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & -\frac{1}{2}e\,\mathcal{R} - 2e\,\overline{\Psi}_M\widehat{\Gamma}^{MNP}D_N\Psi_P - \frac{1}{96}e\,F_{MNPQ}F^{MNPQ} \\
& - \frac{1}{48}e\,\overline{\Psi}_M\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\Psi_N F_{PQRS} - \frac{1}{2\cdot(144)^2}\varepsilon^{MNPQRSUVWXY}F_{MNPQ}F_{RSUV}C_{WXY}\,,
\end{aligned} \tag{15.1.1a}
$$

where the covariant derivative for local Lorentz transformation are defined as

$$
D_N\Psi_P \;=\; \partial_N\Psi_P - \frac{1}{2}\omega_N{}^{AB}M_{AB}\Psi_P\,. \tag{15.1.2}
$$

また $\varepsilon^{MNPQRSUVWXY}$ は 11-dimensional spacetime における weight $+1$ の invariant tensor density であり、規格化を

$$
\varepsilon^{012\cdots\natural} \;=\; 1 \tag{15.1.3}
$$

と採る。weight を $+1$ にしておかないと Chern-Simons term が scalar density とならない。

$$
\widetilde{\Gamma}^{NPQR}{}_M \;=\; \widehat{\Gamma}^{NPQR}{}_M - 8\delta_M^{[N}\widehat{\Gamma}^{PQR]}\,, \tag{15.1.4a}
$$

$$
\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS} \;=\; \widehat{\Gamma}^{MNPQRS} + 12g^{M[P}\widehat{\Gamma}^{QR}g^{S]N}\,. \tag{15.1.4b}
$$

$$
M_{AB} \;=\; 0 \qquad \text{scalar} \tag{15.1.5a}
$$

$$
(M_{CD})^A{}_B \;=\; \delta_C^A\eta_{DB} - \delta_D^A\eta_{CB} \qquad \text{vector} \tag{15.1.5b}
$$

$$
M_{AB} \;=\; \frac{1}{2}\widehat{\Gamma}_{AB} \qquad \text{spinor} \tag{15.1.5c}
$$

15.1.2 Classical Field Equations

$$
0 \;=\; -\frac{1}{2}g_{MN}\mathcal{R} + \mathcal{R}_{MN} - \frac{1}{96}g_{MN}F_{PQRS}F^{PQRS} + \frac{1}{12}F_{MPQR}F_N{}^{PQR}\,, \tag{15.1.6a}
$$

$$
0 \;=\; \widehat{\Gamma}^{MNP}D_N\Psi_P + \frac{1}{96}\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\Psi_N F_{PQRS}\,, \tag{15.1.6b}
$$

$$
0 \;=\; \nabla^Q\{eF_{QMNP}\} - \frac{18}{(144)^2}\,g_{MZ}\,g_{NK}\,g_{PL}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}F_{QRSU}F_{VWXY}\,, \tag{15.1.6c}
$$

$$
0 \;=\; \nabla_{[M}F_{NPQR]}\,, \tag{15.1.6d}
$$

但し、fluctuation field の運動方程式において、2 次以上の寄与しかもたらさない項はここでは省略してある。またそれに伴い、metric の運動方程式は $e_M{}^A$ の変分ではなく g_{MN} の変分で与えてある。最後の式は Bianchi identity である。

注意であるが、Ricci tensor の変分は、TK の符号とは反対になる。何故なら、Riemann tensor の定義が TK と de Wit とは逆だからである。しかしこの classical field equation に寄与するのは、純粋に metric の変分だけであるので、そのことは気にならない。fluctuation field equation を考える時、$\delta\mathcal{R}_{MN}$ が寄与するので、符号の反転が起こる。

15.2 Fluctuations

fluctuations:

$$g_{MN} = \overset{\circ}{g}_{MN} + h_{MN} \,, \qquad g^{MN} = \overset{\circ}{g}{}^{MN} + \widetilde{h}^{MN} \tag{15.2.1a}$$

$$\Psi_M = 0 + \psi_M \tag{15.2.1b}$$

$$F_{MNPQ} = \overset{\circ}{F}_{MNPQ} + \mathcal{F}_{MNPQ} \,, \qquad \mathcal{F}_{MNPQ} = 4\partial_{[M}\mathcal{C}_{NPQ]} \tag{15.2.1c}$$

From now on we omit the circle, which is the symbol of classical background.

other representations:

$$h_{MN} = h_{NM} \qquad \text{(symmetric)} \,, \tag{15.2.2a}$$

$$\widetilde{h}^{MN} = -g^{MP}g^{NQ}h_{PQ} = -h^{MN} \,, \tag{15.2.2b}$$

$$\delta e = \frac{1}{2} e\, g^{MN} h_{MN} \,, \tag{15.2.2c}$$

$$\delta\Gamma^M_{NP} = -\frac{1}{2} g^{MR}\big(\nabla_N h_{PR} + \nabla_P h_{NR} - \nabla_R h_{NP}\big) \qquad \text{(torsion free)} \,, \tag{15.2.2d}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{R}_{MN} &= \frac{1}{2}\Big\{\nabla_N\nabla_M h_P{}^P - \nabla_N\nabla^P h_{MP} - \nabla_M\nabla^P h_{NP} + \nabla_P\nabla^P h_{MN}\Big\} \\ &\quad + R^Q{}_{MPN} h_Q{}^P - \frac{1}{2}\mathcal{R}_{PN} h_M{}^P - \frac{1}{2}\mathcal{R}_{PM} h_N{}^P \\ &= \frac{1}{2}\Big\{\nabla_N\nabla_M h_P{}^P - \nabla_N\nabla^P h_{MP} - \nabla_M\nabla^P h_{NP}\Big\} - \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{MN} \,, \end{aligned} \tag{15.2.2e}$$

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{R}^{MN} &= -\widetilde{h}^{MP} g^{NQ}\mathcal{R}_{PQ} - \widetilde{h}^{NQ} g^{MP}\mathcal{R}_{PQ} - g^{MP}g^{NQ}\delta\mathcal{R}_{PQ} \\ &= h_{RS}g^{MR}g^{PS}g^{NQ}\mathcal{R}_{PQ} + h_{RS}g^{NR}g^{QS}g^{MP}\mathcal{R}_{PQ} - g^{MP}g^{NQ}\delta\mathcal{R}_{PQ} \,, \end{aligned} \tag{15.2.2f}$$

$$\delta\mathcal{R} = -\widetilde{h}^{MN}\mathcal{R}_{MN} - g^{MN}\delta\mathcal{R}_{MN} = h_{PQ}g^{MP}g^{NQ}\mathcal{R}_{MN} - g^{MN}\delta\mathcal{R}_{MN} \,. \tag{15.2.2g}$$

Riemann tensor の定義が TK とは逆符号であるため、それから派生する Ricci tensor も逆符号になる。従って variation $\delta\mathcal{R}_{MN}$, $\delta\mathcal{R}$ も逆になる。また、ここで $\widehat{\Delta}$ は Lichnerowicz operator と呼ばれるものであり、rank-2 symmetric tensor や 11-dimensional space 上の 0-form ϕ, 1-form $\omega_M{}^{AB}$, 3-form C_{MNP} に次のように作用する [1]:

$$\widehat{\Delta} h_{MN} = -\nabla_P\nabla^P h_{MN} - 2R_{MPNQ}\,h^{PQ} + \mathcal{R}_M{}^P\,h_{PN} + \mathcal{R}_N{}^P\,h_{PM} \tag{15.2.3a}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\Delta}\phi &= -\nabla_P \nabla^P \phi && (15.2.3b) \\
\widehat{\Delta}\omega_M{}^{AB} &= -\nabla_P \nabla^P \omega_M{}^{AB} + \mathcal{R}_M{}^P\, \omega_P{}^{AB} && (15.2.3c) \\
\widehat{\Delta} C_{MNP} &= -\nabla_Q \nabla^Q C_{MNP} \\
&\quad - 2R_{MQNR}\, C^{QR}{}_P + 2R_{MQPR}\, C^{QR}{}_N - 2R_{NQPR}\, C^{QR}{}_M \\
&\quad + \mathcal{R}_M{}^Q\, C_{QNP} + \mathcal{R}_N{}^Q\, C_{MQP} + \mathcal{R}_P{}^Q\, C_{MNQ} && (15.2.3d)
\end{aligned}$$

但し、ここでは torsion が入っている場合も考慮してある。torsion free の場合は $\widehat{\Delta} C_{MNP}$ の右辺第 2 行はゼロになる。これらより、classical field equations (15.1.6) から得られる field equations for fluctuation fields は次のように与えられる:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\Big\{ h_{MN}\,\mathcal{R} - h_{PQ}\, g_{MN}\, g^{RP}\, g^{SQ}\, \mathcal{R}_{RS} + g_{MN}\big(\nabla_P \nabla_Q h^{QP} - \nabla_Q \nabla^Q h_P{}^P\big)\Big\} \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big\{ \nabla_N \nabla_M h_P{}^P - \nabla_N \nabla^P h_{PM} - \nabla_M \nabla^P h_{PN} \Big\} - \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{MN} \\
&\quad - \frac{1}{96} h_{MN}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} - \frac{1}{48}\mathcal{F}_{PQRS}\, g_{MN}\, F^{PQRS} + \frac{1}{24} h^{PU}\, g_{MN}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS} \\
&\quad + \frac{1}{12}\Big\{ \mathcal{F}_{MPQR}\, F_N{}^{PQR} + \mathcal{F}_{NPQR}\, F_M{}^{PQR} \Big\} - \frac{1}{4} h^{PS}\, F_{MPQR}\, F_{NS}{}^{QR} && (15.2.4a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \widehat{\Gamma}^{MNP}\, D_N \psi_P + \frac{1}{96}\widetilde{\Gamma}^{MNPQRS}\, F_{PQRS}\, \psi_N \\
&= \widehat{\Gamma}^{MNP}\Big(\partial_N \psi_P - \frac{1}{2}\omega_N{}^{AB}\, M_{AB}\, \psi_P\Big) + \frac{1}{96}\Big(\widehat{\Gamma}^{MNPQRS} + 12 g^{M[P}\widehat{\Gamma}^{QR} g^{S]N}\Big) F_{PQRS}\, \psi_N && (15.2.4b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= e\Big\{\frac{1}{2} h_U{}^U\, g^{QR} - h^{QR}\Big\} \nabla_R F_{QMNP} + e\, \nabla^Q \mathcal{F}_{QMNP} \\
&\quad - e\Big\{ F_{SMNP}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) + F_{QSNP}\nabla^Q h_M{}^S + F_{QMSP}\nabla^Q h_N{}^S + F_{QMNS}\nabla^Q h_P{}^S \Big\} \\
&\quad - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\, \mathcal{F}_{QRSU}\, g_{MZ}\, g_{NK}\, g_{PL}\, F_{VWXY} \\
&\quad - \frac{18}{(144)^2}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\big(h_{MZ}\, g_{NK}\, g_{PL} + h_{NK}\, g_{MZ}\, g_{PL} + h_{PL}\, g_{MZ}\, g_{NK}\big) F_{QRSU}\, F_{VWXY} && (15.2.4c)
\end{aligned}$$

$$0 = \nabla_{[M} \mathcal{F}_{NPQR]} = 4\partial_{[M}\partial_N \mathcal{C}_{PQR]} \qquad (15.2.4d)$$

見易くするために classical background であることを示す circle symbol は省略した。また Freund-Rubin ansatz を課すことで消える項は gray scale にしておいた[1]。また Bianchi identity については、affine connection の対称性 $\Gamma^P_{MN} = \Gamma^P_{NM}$ を用いることで、共変微分にまで格上げできる事を用いた。右辺は自明の式であろう。

これを実際に解く時には、classical equations (15.1.6) を用いると良いだろう。(15.1.6a) より、

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= -\frac{1}{144} F_{PQRS}\, F^{PQRS} && (15.2.5a) \\
\mathcal{R}_{MN} &= \frac{1}{144} g_{MN}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} - \frac{1}{12} F_{MPQR}\, F_N{}^{PQR} && (15.2.5b)
\end{aligned}$$

[1] Freund-Rubin ansatz を課さないでおけば、この 3 つの field equations は generic である。

が得られる。これは $\mathcal{R}(S^p) < 0$ の定義と consistent である。この (15.2.5b) からの揺らぎは

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{MN} &= \frac{1}{2}\Big\{\nabla_N\nabla_M h_P{}^P - \nabla_N\nabla^P h_{MP} - \nabla_M\nabla^P h_{NP}\Big\} - \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{MN} \\
&= \frac{1}{144} h_{MN}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} + \frac{1}{72} g_{MN}\, F^{PQRS}\, \mathcal{F}_{PQRS} - \frac{1}{36} h^{PU}\, g_{MN}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS} \\
&\quad - \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{MPQR}\, F_N{}^{PQR} + \mathcal{F}_{NPQR}\, F_M{}^{PQR}\Big) + \frac{1}{4} h^{PU}\, F_{MPQR}\, F_{NU}{}^{QR}
\end{aligned} \tag{15.2.6}$$

となる。(15.2.4a) も (15.2.6) も元々 classical field equation (15.1.6a) から得られたものであるので、どちらを用いても良い。また Duff, Pope [1] などはどうやら (15.2.6) を用いているようである。よってこれ以後、(15.2.4a) の代りにこの (15.2.6) を用いる。

gravitino equation (15.2.4b) も、もう少し計算しやすい表記にしよう：

$$\begin{aligned}
0 &= \widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \psi_P + \frac{1}{96}\widehat{\Gamma}^{MNPQRS} F_{PQRS}\, \psi_N \\
&\quad + \frac{1}{96}\Big\{ g^{MP}\big(\widehat{\Gamma}^{QR} g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS} g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS} g^{QN}\big) - g^{MQ}\big(\widehat{\Gamma}^{PR} g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{PS} g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS} g^{PN}\big) \\
&\qquad - g^{MR}\big(\widehat{\Gamma}^{QP} g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS} g^{PN} + \widehat{\Gamma}^{PS} g^{QN}\big) - g^{MS}\big(\widehat{\Gamma}^{QR} g^{PN} - \widehat{\Gamma}^{QP} g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RP} g^{QN}\big)\Big\} F_{PQRS}\, \psi_N
\end{aligned} \tag{15.2.7}$$

15.3 Light-cone Gauge Fixing

$$h_{-M} = 0 \qquad h^{+M} = 0 \qquad \mathcal{C}_{-MN} = 0 \qquad \psi_- = 0 \tag{15.3.1}$$

15.4 Field Equations for Fluctuations on the PP-wave Background

Here we write the field equations for fluctuation fields h_{MN}, ψ_M and $\mathcal{C}_{MNP}$ on the KG solution (14.1.1) and (14.1.4) under the light-cone gauge-fixing condition (15.3.1).

- Since field equation for fluctuation h_{MN} (15.2.6) has two uncontracted indices, we obtain six equations:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{++} &= \frac{1}{2}\Big\{\nabla_+\nabla_+ h_P{}^P - \nabla_+\nabla^P h_{+P} - \nabla_+\nabla^P h_{+P}\Big\} - \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{++} \\
&= \frac{1}{144} h_{++}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} + \frac{1}{72} g_{++}\, F^{PQRS}\, \mathcal{F}_{PQRS} - \frac{1}{36} h^{PU}\, g_{++}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS} \\
&\quad - \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{+PQR}\, F_+{}^{PQR} + \mathcal{F}_{+PQR}\, F_+{}^{PQR}\Big) + \frac{1}{4} h^{PU}\, F_{+PQR}\, F_{+U}{}^{QR}
\end{aligned} \tag{15.4.1a}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{+-} &= \frac{1}{2}\Big\{\nabla_-\nabla_+ h_P{}^P - \nabla_-\nabla^P h_{+P} - \nabla_+\nabla^P h_{-P}\Big\} - \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{+-} \\
&= \frac{1}{144} h_{+-}\, F_{PQRS}\, F^{PQRS} + \frac{1}{72} g_{+-}\, F^{PQRS}\, \mathcal{F}_{PQRS} - \frac{1}{36} h^{PU}\, g_{+-}\, F_{PQRS}\, F_U{}^{QRS} \\
&\quad - \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{+PQR}\, F_-{}^{PQR} + \mathcal{F}_{-PQR}\, F_+{}^{PQR}\Big) + \frac{1}{4} h^{PU}\, F_{+PQR}\, F_{-U}{}^{QR}
\end{aligned} \tag{15.4.1b}$$

$$\delta\mathcal{R}_{+\widetilde{I}} = \frac{1}{2}\Big\{\nabla_{\widetilde{I}}\nabla_+ h_P{}^P - \nabla_{\widetilde{I}}\nabla^P h_{+P} - \nabla_+\nabla^P h_{\widetilde{I}P}\Big\} - \frac{1}{2}\widehat{\Delta} h_{+\widetilde{I}}$$

$$\begin{aligned}
&= +\frac{1}{144}h_{+\widetilde{I}}\,F_{PQRS}\,F^{PQRS} + \frac{1}{72}g_{+\widetilde{I}}\,F^{PQRS}\,\mathcal{F}_{PQRS} - \frac{1}{36}h^{PU}\,g_{+\widetilde{I}}\,F_{PQRS}\,F_U{}^{QRS} \\
&\quad - \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{+PQR}\,F_{\widetilde{I}}{}^{PQR} + \mathcal{F}_{\widetilde{I}PQR}\,F_+{}^{PQR}\Big) + \frac{1}{4}h^{PU}\,F_{+PQR}\,F_{\widetilde{I}U}{}^{QR} \qquad (15.4.1c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{+I'} &= \frac{1}{2}\Big\{\nabla_{I'}\nabla_+ h_P{}^P - \nabla_{I'}\nabla^P h_{+P} - \nabla_+\nabla^P h_{I'P}\Big\} - \frac{1}{2}\widehat{\Delta}h_{+I'} \\
&= \frac{1}{144}h_{+I'}\,F_{PQRS}\,F^{PQRS} + \frac{1}{72}g_{+I'}\,F^{PQRS}\,\mathcal{F}_{PQRS} - \frac{1}{36}h^{PU}\,g_{+I'}\,F_{PQRS}\,F_U{}^{QRS} \\
&\quad - \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{+PQR}\,F_{I'}{}^{PQR} + \mathcal{F}_{I'PQR}\,F_+{}^{PQR}\Big) + \frac{1}{4}h^{PU}\,F_{+PQR}\,F_{I'U}{}^{QR} \qquad (15.4.1d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{--} &= \frac{1}{2}\Big\{\nabla_-\nabla_- h_P{}^P - \nabla_-\nabla^P h_{-P} - \nabla_-\nabla^P h_{-P}\Big\} - \frac{1}{2}\widehat{\Delta}h_{--} \\
&= \frac{1}{144}h_{--}\,F_{PQRS}\,F^{PQRS} + \frac{1}{72}g_{--}\,F^{PQRS}\,\mathcal{F}_{PQRS} - \frac{1}{36}h^{PU}\,g_{--}\,F_{PQRS}\,F_U{}^{QRS} \\
&\quad - \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{-PQR}\,F_-{}^{PQR} + \mathcal{F}_{-PQR}\,F_-{}^{PQR}\Big) + \frac{1}{4}h^{PU}\,F_{-PQR}\,F_{-U}{}^{QR} \qquad (15.4.1e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{-\widetilde{I}} &= \frac{1}{2}\Big\{\nabla_{\widetilde{I}}\nabla_- h_P{}^P - \nabla_{\widetilde{I}}\nabla^P h_{-P} - \nabla_-\nabla^P h_{\widetilde{I}P}\Big\} - \frac{1}{2}\widehat{\Delta}h_{-\widetilde{I}} \\
&= \frac{1}{144}h_{-\widetilde{I}}\,F_{PQRS}\,F^{PQRS} + \frac{1}{72}g_{-\widetilde{I}}\,F^{PQRS}\,\mathcal{F}_{PQRS} - \frac{1}{36}h^{PU}\,g_{-\widetilde{I}}\,F_{PQRS}\,F_U{}^{QRS} \\
&\quad - \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{-PQR}\,F_{\widetilde{I}}{}^{PQR} + \mathcal{F}_{\widetilde{I}PQR}\,F_-{}^{PQR}\Big) + \frac{1}{4}h^{PU}\,F_{-PQR}\,F_{\widetilde{I}U}{}^{QR} \qquad (15.4.1f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{-I'} &= \frac{1}{2}\Big\{\nabla_{I'}\nabla_- h_P{}^P - \nabla_{I'}\nabla^P h_{-P} - \nabla_-\nabla^P h_{I'P}\Big\} - \frac{1}{2}\widehat{\Delta}h_{-I'} \\
&= \frac{1}{144}h_{-I'}\,F_{PQRS}\,F^{PQRS} + \frac{1}{72}g_{-I'}\,F^{PQRS}\,\mathcal{F}_{PQRS} - \frac{1}{36}h^{PU}\,g_{-I'}\,F_{PQRS}\,F_U{}^{QRS} \\
&\quad - \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{-PQR}\,F_{I'}{}^{PQR} + \mathcal{F}_{I'PQR}\,F_-{}^{PQR}\Big) + \frac{1}{4}h^{PU}\,F_{-PQR}\,F_{I'U}{}^{QR} \qquad (15.4.1g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{\widetilde{I}\widetilde{J}} &= \frac{1}{2}\Big\{\nabla_{\widetilde{J}}\nabla_{\widetilde{I}} h_P{}^P - \nabla_{\widetilde{J}}\nabla^P h_{\widetilde{I}P} - \nabla_{\widetilde{I}}\nabla^P h_{\widetilde{J}P}\Big\} - \frac{1}{2}\widehat{\Delta}h_{\widetilde{I}\widetilde{J}} \\
&= \frac{1}{144}h_{\widetilde{I}\widetilde{J}}\,F_{PQRS}\,F^{PQRS} + \frac{1}{72}g_{\widetilde{I}\widetilde{J}}\,F^{PQRS}\,\mathcal{F}_{PQRS} - \frac{1}{36}h^{PU}\,g_{\widetilde{I}\widetilde{J}}\,F_{PQRS}\,F_U{}^{QRS} \\
&\quad - \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{\widetilde{I}PQR}\,F_{\widetilde{J}}{}^{PQR} + \mathcal{F}_{\widetilde{J}PQR}\,F_{\widetilde{I}}{}^{PQR}\Big) + \frac{1}{4}h^{PU}\,F_{\widetilde{I}PQR}\,F_{\widetilde{J}U}{}^{QR} \qquad (15.4.1h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{\widetilde{I}J'} &= \frac{1}{2}\Big\{\nabla_{J'}\nabla_{\widetilde{I}} h_P{}^P - \nabla_{J'}\nabla^P h_{\widetilde{I}P} - \nabla_{\widetilde{I}}\nabla^P h_{J'P}\Big\} - \frac{1}{2}\widehat{\Delta}h_{\widetilde{I}J'} \\
&= \frac{1}{144}h_{\widetilde{I}J'}\,F_{PQRS}\,F^{PQRS} + \frac{1}{72}g_{\widetilde{I}J'}\,F^{PQRS}\,\mathcal{F}_{PQRS} - \frac{1}{36}h^{PU}\,g_{\widetilde{I}J'}\,F_{PQRS}\,F_U{}^{QRS} \\
&\quad - \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{\widetilde{I}PQR}\,F_{J'}{}^{PQR} + \mathcal{F}_{J'PQR}\,F_{\widetilde{I}}{}^{PQR}\Big) + \frac{1}{4}h^{PU}\,F_{\widetilde{I}PQR}\,F_{J'U}{}^{QR} \qquad (15.4.1i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{R}_{I'J'} &= \frac{1}{2}\Big\{\nabla_{J'}\nabla_{I'} h_P{}^P - \nabla_{J'}\nabla^P h_{I'P} - \nabla_{I'}\nabla^P h_{J'P}\Big\} - \frac{1}{2}\widehat{\Delta}h_{I'J'} \\
&= \frac{1}{144}h_{I'J'}\,F_{PQRS}\,F^{PQRS} + \frac{1}{72}g_{I'J'}\,F^{PQRS}\,\mathcal{F}_{PQRS} - \frac{1}{36}h^{PU}\,g_{I'J'}\,F_{PQRS}\,F_U{}^{QRS} \\
&\quad - \frac{1}{12}\Big(\mathcal{F}_{I'PQR}\,F_{J'}{}^{PQR} + \mathcal{F}_{J'PQR}\,F_{I'}{}^{PQR}\Big) + \frac{1}{4}h^{PU}\,F_{I'PQR}\,F_{J'U}{}^{QR} \qquad (15.4.1j)
\end{aligned}$$

- Field equation for fluctuation ψ_M (15.2.4b) has one uncontracted indices. So we obtain four equations:

$$\begin{aligned}
0 &= \widehat{\Gamma}^{+NP}D_N\psi_P + \frac{1}{96}\widehat{\Gamma}^{+NPQRS}F_{PQRS}\,\psi_N \\
&\quad + \frac{1}{96}\Big\{g^{+P}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS}g^{QN}\big) - g^{+Q}\big(\widehat{\Gamma}^{PR}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{PS}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS}g^{PN}\big)
\end{aligned}$$

$$- g^{+R}\big(\widehat{\Gamma}^{QP}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS}g^{PN} + \widehat{\Gamma}^{PS}g^{QN}\big) - g^{+S}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{PN} - \widehat{\Gamma}^{QP}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RP}g^{QN}\big)\Big\} F_{PQRS}\,\psi_N \tag{15.4.2a}$$

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \widehat{\Gamma}^{-NP}D_N\psi_P + \frac{1}{96}\widehat{\Gamma}^{-NPQRS}F_{PQRS}\,\psi_N \\ & + \frac{1}{96}\Big\{ g^{-P}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS}g^{QN}\big) - g^{-Q}\big(\widehat{\Gamma}^{PR}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{PS}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS}g^{PN}\big) \\ & \quad - g^{-R}\big(\widehat{\Gamma}^{QP}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS}g^{PN} + \widehat{\Gamma}^{PS}g^{QN}\big) - g^{-S}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{PN} - \widehat{\Gamma}^{QP}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RP}g^{QN}\big)\Big\} F_{PQRS}\,\psi_N \end{aligned} \tag{15.4.2b}$$

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \widehat{\Gamma}^{\widetilde{I}NP}D_N\psi_P + \frac{1}{96}\widehat{\Gamma}^{\widetilde{I}NPQRS}F_{PQRS}\,\psi_N \\ & + \frac{1}{96}\Big\{ g^{\widetilde{I}P}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS}g^{QN}\big) - g^{\widetilde{I}Q}\big(\widehat{\Gamma}^{PR}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{PS}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS}g^{PN}\big) \\ & \quad - g^{\widetilde{I}R}\big(\widehat{\Gamma}^{QP}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS}g^{PN} + \widehat{\Gamma}^{PS}g^{QN}\big) - g^{\widetilde{I}S}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{PN} - \widehat{\Gamma}^{QP}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RP}g^{QN}\big)\Big\} F_{PQRS}\,\psi_N \end{aligned} \tag{15.4.2c}$$

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \widehat{\Gamma}^{I'NP}D_N\psi_P + \frac{1}{96}\widehat{\Gamma}^{I'NPQRS}F_{PQRS}\,\psi_N \\ & + \frac{1}{96}\Big\{ g^{I'P}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS}g^{QN}\big) - g^{I'Q}\big(\widehat{\Gamma}^{PR}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{PS}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RS}g^{PN}\big) \\ & \quad - g^{I'R}\big(\widehat{\Gamma}^{QP}g^{SN} - \widehat{\Gamma}^{QS}g^{PN} + \widehat{\Gamma}^{PS}g^{QN}\big) - g^{I'S}\big(\widehat{\Gamma}^{QR}g^{PN} - \widehat{\Gamma}^{QP}g^{RN} + \widehat{\Gamma}^{RP}g^{QN}\big)\Big\} F_{PQRS}\,\psi_N \end{aligned} \tag{15.4.2d}$$

- Field equation for fluctuation $\mathcal{C}_{MNP}$ (15.2.4c) has three uncontracted indices.

  - $M = +$ case:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \nabla^Q\mathcal{F}_{Q+-\widetilde{I}} \\ & - F_{S+-\widetilde{I}}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QS-\widetilde{I}}\nabla^Q h_+{}^S - F_{Q+S\widetilde{I}}\nabla^Q h_-{}^S - F_{Q+-S}\nabla^Q h_{\widetilde{I}}{}^S \\ & - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{+Z}\,g_{-K}\,g_{\widetilde{I}L}\,F_{VWXY} \end{aligned} \tag{15.4.3a}$$

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \nabla^Q\mathcal{F}_{Q+-I'} \\ & - F_{S+-I'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QS-I'}\nabla^Q h_+{}^S - F_{Q+SI'}\nabla^Q h_-{}^S - F_{Q+-S}\nabla^Q h_{I'}{}^S \\ & - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{+Z}\,g_{-K}\,g_{I'L}\,F_{VWXY} \end{aligned} \tag{15.4.3b}$$

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \nabla^Q\mathcal{F}_{Q+\widetilde{I}\widetilde{J}} \\ & - F_{S+\widetilde{I}\widetilde{J}}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QS\widetilde{I}\widetilde{J}}\nabla^Q h_+{}^S - F_{Q+S\widetilde{J}}\nabla^Q h_{\widetilde{I}}{}^S - F_{Q+\widetilde{I}S}\nabla^Q h_{\widetilde{J}}{}^S \\ & - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{+Z}\,g_{\widetilde{I}K}\,g_{\widetilde{J}L}\,F_{VWXY} \end{aligned} \tag{15.4.3c}$$

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \nabla^Q\mathcal{F}_{Q+\widetilde{I}J'} \\ & - F_{S+\widetilde{I}J'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QS\widetilde{I}J'}\nabla^Q h_+{}^S - F_{Q+SJ'}\nabla^Q h_{\widetilde{I}}{}^S - F_{Q+\widetilde{I}S}\nabla^Q h_{J'}{}^S \\ & - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{+Z}\,g_{\widetilde{I}K}\,g_{J'L}\,F_{VWXY} \end{aligned} \tag{15.4.3d}$$

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \nabla^Q \mathcal{F}_{Q+I'J'} \\
& - F_{S+I'J'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QSI'J'}\nabla^Q h_+{}^S - F_{Q+SJ'}\nabla^Q h_{I'}{}^S - F_{Q+I'S}\nabla^Q h_{J'}{}^S \\
& - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{+Z}\,g_{I'K}\,g_{J'L}\,F_{VWXY} \qquad (15.4.3e)
\end{aligned}
$$

– $M = -$ case:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \nabla^Q \mathcal{F}_{Q-\tilde{I}\tilde{J}} \\
& - F_{S-\tilde{I}\tilde{J}}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QS\tilde{I}\tilde{J}}\nabla^Q h_-{}^S - F_{Q-S\tilde{J}}\nabla^Q h_{\tilde{I}}{}^S - F_{Q-\tilde{I}S}\nabla^Q h_{\tilde{J}}{}^S \\
& - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{-Z}\,g_{\tilde{I}K}\,g_{\tilde{J}L}\,F_{VWXY} \qquad (15.4.4a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \nabla^Q \mathcal{F}_{Q-\tilde{I}J'} \\
& - F_{S-\tilde{I}J'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QS\tilde{I}J'}\nabla^Q h_-{}^S - F_{Q-SJ'}\nabla^Q h_{\tilde{I}}{}^S - F_{Q-\tilde{I}S}\nabla^Q h_{J'}{}^S \\
& - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{-Z}\,g_{\tilde{I}K}\,g_{J'L}\,F_{VWXY} \qquad (15.4.4b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \nabla^Q \mathcal{F}_{Q-I'J'} \\
& - F_{S-I'J'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QSI'J'}\nabla^Q h_-{}^S - F_{Q-SJ'}\nabla^Q h_{I'}{}^S - F_{Q-I'S}\nabla^Q h_{J'}{}^S \\
& - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{-Z}\,g_{I'K}\,g_{J'L}\,F_{VWXY} \qquad (15.4.4c)
\end{aligned}
$$

– $M = I$ case:

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \nabla^Q \mathcal{F}_{Q\tilde{I}\tilde{J}\tilde{K}} \\
& - F_{S\tilde{I}\tilde{J}\tilde{K}}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QS\tilde{J}\tilde{K}}\nabla^Q h_{\tilde{I}}{}^S - F_{Q\tilde{I}S\tilde{K}}\nabla^Q h_{\tilde{J}}{}^S - F_{Q\tilde{I}\tilde{J}S}\nabla^Q h_{\tilde{K}}{}^S \\
& - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{\tilde{I}Z}\,g_{\tilde{J}K}\,g_{\tilde{K}L}\,F_{VWXY} \qquad (15.4.5a)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \nabla^Q \mathcal{F}_{Q\tilde{I}\tilde{J}K'} \\
& - F_{S\tilde{I}\tilde{J}K'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QS\tilde{J}K'}\nabla^Q h_{\tilde{I}}{}^S - F_{Q\tilde{I}SK'}\nabla^Q h_{\tilde{J}}{}^S - F_{Q\tilde{I}\tilde{J}S}\nabla^Q h_{K'}{}^S \\
& - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{\tilde{I}Z}\,g_{\tilde{J}K}\,g_{K'L}\,F_{VWXY} \qquad (15.4.5b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \nabla^Q \mathcal{F}_{Q\tilde{I}J'K'} \\
& - F_{S\tilde{I}J'K'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QSJ'K'}\nabla^Q h_{\tilde{I}}{}^S - F_{Q\tilde{I}SK'}\nabla^Q h_{J'}{}^S - F_{Q\tilde{I}J'S}\nabla^Q h_{K'}{}^S \\
& - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{\tilde{I}Z}\,g_{J'K}\,g_{K'L}\,F_{VWXY} \qquad (15.4.5c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 \;=\; & \nabla^Q \mathcal{F}_{QI'J'K'} \\
& - F_{SI'J'K'}\Big(\nabla^Q h_Q{}^S - \frac{1}{2}\partial^S h_Q{}^Q\Big) - F_{QSJ'K'}\nabla^Q h_{I'}{}^S - F_{QI'SK'}\nabla^Q h_{J'}{}^S - F_{QI'J'S}\nabla^Q h_{K'}{}^S \\
& - \frac{1}{576}\,\varepsilon^{ZKLQRSUVWXY}\mathcal{F}_{QRSU}\,g_{I'Z}\,g_{J'K}\,g_{K'L}\,F_{VWXY} \qquad (15.4.5d)
\end{aligned}
$$

light-cone gauge, Freund-Rubin ansatz を代入した後:

$$
0 \;=\; \frac{1}{2}\Big\{\nabla_+\nabla_+ h_P{}^P - \nabla_+\nabla^P h_{+P} - \nabla_+\nabla^P h_{+P} - \Box\, h_{++}\Big\} - \Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2 h_{\tilde{K}\tilde{K}} - \Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2 h_{L'L'}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{3}\mu\, G_{++}\, \partial_- \mathcal{C}_{123} + \mu\, \mathcal{F}_{+123} - \frac{1}{2}\mu^2\, h_{\widetilde{L}\widetilde{L}} && (15.4.6a)\\
0 \;&=\; \Big\{ \partial_-\partial_+ h_P{}^P - \partial_-\partial^P h_{+P} \Big\} + \frac{1}{3}\mu\, \partial_- \mathcal{C}_{123} && (15.4.6b)\\
0 \;&=\; \Big\{ \nabla_{\widetilde{I}}\nabla_+ h_P{}^P - \partial_{\widetilde{I}}\partial^P h_{+P} - \partial_+\partial^P h_{\widetilde{I}P} - \Box\, h_{+\widetilde{I}} \Big\} - \frac{1}{2}\mu\, \epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}}\, \partial_- \mathcal{C}_{+\widetilde{J}\widetilde{K}} && (15.4.6c)\\
0 \;&=\; \Big\{ \nabla_{I'}\nabla_+ h_P{}^P - \partial_{I'}\partial^P h_{+P} - \partial_+\partial^P h_{I'P} - \Box\, h_{+I'} \Big\} + \frac{1}{6}\mu\, \epsilon_{\widetilde{J}\widetilde{K}\widetilde{L}} \mathcal{F}_{I'\widetilde{J}\widetilde{K}\widetilde{L}} && (15.4.6d)\\
0 \;&=\; \partial_-\partial_- h_P{}^P && (15.4.6e)\\
0 \;&=\; \partial_I \partial_- h_P{}^P - \partial_-\partial^P h_{IP} && (15.4.6f)\\
0 \;&=\; \Big\{ \partial_{\widetilde{J}}\partial_{\widetilde{I}} h_P{}^P - \partial_{\widetilde{J}}\partial^P h_{\widetilde{I}P} - \partial_{\widetilde{I}}\partial^P h_{\widetilde{J}P} - \Box\, h_{\widetilde{I}\widetilde{J}} \Big\} - \frac{4}{3}\mu\, \delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}}\, \partial_- \mathcal{C}_{123} && (15.4.6g)\\
0 \;&=\; \Big\{ \partial_{J'}\partial_{\widetilde{I}} h_P{}^P - \partial_{J'}\partial^P h_{\widetilde{I}P} - \partial_{\widetilde{I}}\partial^P h_{J'P} - \Box\, h_{\widetilde{I}J'} \Big\} - \frac{1}{2}\mu\, \epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{K}\widetilde{L}}\, \partial_- \mathcal{C}_{J'\widetilde{K}\widetilde{L}} && (15.4.6h)\\
0 \;&=\; \Big\{ \partial_{J'}\partial_{I'} h_P{}^P - \partial_{J'}\partial^P h_{I'P} - \partial_{I'}\partial^P h_{J'P} - \Box\, h_{I'J'} \Big\} + \frac{2}{3}\mu\, \delta_{I'J'}\, \partial_- \mathcal{C}_{123} && (15.4.6i)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 \;&=\; \widehat{\Gamma}^{+NP} D_N \psi_P && (15.4.7a)\\
0 \;&=\; \widehat{\Gamma}^{-NP} D_N \psi_P - \frac{1}{4}\mu\, \widehat{\Gamma}^{+-123I'}\, \psi_{I'} - \frac{1}{8}\mu\, \epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}} \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}\widetilde{J}} \psi_{\widetilde{K}} && (15.4.7b)\\
0 \;&=\; \widehat{\Gamma}^{\widetilde{I}NP} D_N \psi_P + \frac{1}{4}\mu\, \widehat{\Gamma}^{+123} \big(\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}} - \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}} \widehat{\Gamma}_{\widetilde{J}} \big) \psi_{\widetilde{J}} && (15.4.7c)\\
0 \;&=\; \widehat{\Gamma}^{I'NP} D_N \psi_P - \frac{1}{4}\mu\, \widehat{\Gamma}^{+123} \big(\delta_{I'J'} - \widehat{\Gamma}_{I'} \widehat{\Gamma}_{J'} \big) \psi_{J'} && (15.4.7d)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 \;&=\; \partial_- \partial^Q \mathcal{C}_{Q+I} && (15.4.8a)\\
0 \;&=\; \partial^Q \mathcal{F}_{Q+\widetilde{I}\widetilde{J}} - \partial_K G_{++} \partial_- \mathcal{C}_{K\widetilde{I}\widetilde{J}} \\
&\quad + \mu\, \epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{L}} \Big(\partial^Q h_{Q\widetilde{L}} - \frac{1}{2} \partial_{\widetilde{L}} h_{KK} \Big) - \mu\, \epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{L}} \partial^+ h_{+\widetilde{L}} + \mu\, \epsilon_{\widetilde{J}\widetilde{K}\widetilde{L}} \partial_{\widetilde{K}} h_{\widetilde{I}\widetilde{L}} - \mu\, \epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{K}\widetilde{L}} \partial_{\widetilde{K}} h_{\widetilde{J}\widetilde{L}} && (15.4.8b)\\
0 \;&=\; \partial^Q \mathcal{F}_{Q+\widetilde{I}J'} - \partial_K G_{++} \partial_- \mathcal{C}_{K\widetilde{I}J'} - \mu\, \epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{K}\widetilde{L}} \partial_{\widetilde{K}} h_{J'\widetilde{L}} && (15.4.8c)\\
0 \;&=\; \partial^Q \mathcal{F}_{Q+I'J'} - \partial_K G_{++} \partial_- \mathcal{C}_{KI'J'} - \frac{1}{24}\mu\, \varepsilon^{I'J'Q'R'S'U'} \mathcal{F}_{Q'R'S'U'} && (15.4.8d)\\
0 \;&=\; -\partial_- \partial^Q \mathcal{C}_{QIJ} && (15.4.8e)\\
0 \;&=\; \partial^Q \mathcal{F}_{Q\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}} + \frac{1}{2}\mu\, \epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}} \partial^+ h_{LL} - \mu\, \epsilon_{\widetilde{J}\widetilde{K}\widetilde{L}} \partial^+ h_{\widetilde{I}\widetilde{L}} + \mu\, \epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{K}\widetilde{L}} \partial^+ h_{\widetilde{J}\widetilde{L}} - \mu\, \epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{L}} \partial^+ h_{\widetilde{K}\widetilde{L}} && (15.4.8f)\\
0 \;&=\; \partial^Q \mathcal{F}_{Q\widetilde{I}\widetilde{J}K'} - \mu\, \epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{L}} \partial^+ h_{K'\widetilde{L}} && (15.4.8g)\\
0 \;&=\; \partial^Q \mathcal{F}_{Q\widetilde{I}J'K'} && (15.4.8h)\\
0 \;&=\; \partial^Q \mathcal{F}_{QI'J'K'} - \frac{1}{6}\mu\, \varepsilon^{I'J'K'R'S'U'} \partial_- \mathcal{C}_{R'S'U'} && (15.4.8i)
\end{aligned}
$$

15.5 Bosonic Spectrum

15.5.1 Non-dynamical Fields

From (15.4.6e):

$$0 \;=\; h_P{}^P \tag{15.5.1}$$

さらにこの下で (15.4.6f) から

$$\partial^P h_{IP} \;=\; 0 \qquad \to \qquad h_{I+} \;=\; \frac{1}{\partial_-}\partial_J h_{IJ} \tag{15.5.2}$$

さらに上の (15.5.1) だけを用いて (15.4.6b) を書き換えると、

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \partial_-\Big\{\partial^P h_{+P} - \frac{1}{3}\mu\mathcal{C}_{123}\Big\} \\ \to \qquad \partial^P h_{+P} \;&=\; \frac{1}{3}\mu\mathcal{C}_{123} \qquad \to \qquad h_{++} \;=\; \frac{1}{\partial_-}\Big\{\partial_I h_{+I} - \frac{1}{3}\mu\mathcal{C}_{123}\Big\} \end{aligned} \tag{15.5.3}$$

が得られる。

(15.4.8a) より

$$0 \;=\; \partial^Q\mathcal{C}_{Q+I} \qquad \to \qquad \partial_J\mathcal{C}_{+IJ} \;=\; 0 \tag{15.5.4}$$

(15.4.8e) より

$$0 \;=\; \partial^Q\mathcal{C}_{QIJ} \qquad \to \qquad \mathcal{C}_{+IJ} \;=\; \frac{1}{\partial_-}\partial_K\mathcal{C}_{KIJ} \tag{15.5.5}$$

$$-\frac{1}{\partial_-}\Box\,\partial_K\mathcal{C}_{IJK} - \partial_K G_{++}\partial_-\mathcal{C}_{IJK} \;=\; -\frac{1}{\partial_-}\partial_K\big(\Box\,\mathcal{C}_{IJK}\big) \tag{15.5.6}$$

$$\mathcal{C}_{\widetilde{I}J'} \;\equiv\; \frac{1}{2}\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{K}\widetilde{L}}\mathcal{C}_{\widetilde{K}\widetilde{L}J'} \qquad \mathcal{C} \;\equiv\; 2\mathcal{C}_{123} \tag{15.5.7}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\widetilde{J}\widetilde{K}\widetilde{L}}\mathcal{F}_{I'\widetilde{J}\widetilde{K}\widetilde{L}} \;&=\; 4\partial_{[I'}\mathcal{C}_{\widetilde{J}\widetilde{K}\widetilde{L}]}\,\epsilon_{\widetilde{J}\widetilde{K}\widetilde{L}} \\ &=\; \big(\partial_{I'}\mathcal{C}_{\widetilde{J}\widetilde{K}\widetilde{L}} - \partial_{\widetilde{J}}\mathcal{C}_{\widetilde{K}\widetilde{L}I'} + \partial_{\widetilde{K}}\mathcal{C}_{\widetilde{L}I'\widetilde{J}} - \partial_{\widetilde{L}}\mathcal{C}_{I'\widetilde{J}\widetilde{K}}\big)\,\epsilon_{\widetilde{J}\widetilde{K}\widetilde{L}} \\ &=\; 6\partial_{I'}\mathcal{C}_{123} - 6\partial_{\widetilde{J}}\mathcal{C}_{\widetilde{J}I'} \end{aligned} \tag{15.5.8}$$

先程の条件を再代入すると field equations は次のように reduce される:

$$0 \;=\; \frac{1}{2}\Big\{-\nabla_+\nabla^P h_{+P} - \nabla_+\nabla^P h_{+P} - \Box\, h_{++}\Big\} - \Big(\frac{\mu}{3}\Big)^2 h_{\widetilde{K}\widetilde{K}} - \Big(\frac{\mu}{6}\Big)^2 h_{L'L'}$$

$$
\begin{aligned}
& + \frac{1}{6}\mu\, G_{++}\,\partial_-\mathcal{C} + \mu\,\mathcal{F}_{+123} - \frac{1}{2}\mu^2\, h_{\widetilde{L}\widetilde{L}} && (15.5.9a)\\
0 &= \frac{2}{3}\mu\,\partial_{\widetilde{I}}\mathcal{C} + \frac{1}{\partial_-}\Box\,\partial_{\widetilde{J}} h_{\widetilde{I}\widetilde{J}} + \frac{1}{\partial_-}\Box\,\partial_{J'} h_{\widetilde{I}J'} + \mu\,\partial_{J'}\mathcal{C}_{\widetilde{I}J'} && (15.5.9b)\\
0 &= -\frac{1}{3}\mu\,\partial_{I'}\mathcal{C} + \frac{1}{\partial_-}\Box\,\partial_{\widetilde{J}} h_{\widetilde{J}I'} + \frac{1}{\partial_-}\Box\,\partial_{J'} h_{I'J'} + \partial_{\widetilde{J}}\mathcal{C}_{\widetilde{J}I'} && (15.5.9c)\\
0 &= \Box\, h_{\widetilde{I}\widetilde{J}} + \frac{2}{3}\mu\,\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}}\,\partial_-\mathcal{C} && (15.5.9d)\\
0 &= \Box\, h_{\widetilde{I}J'} + \mu\,\partial_-\mathcal{C}_{\widetilde{I}J'} && (15.5.9e)\\
0 &= \Box\, h_{I'J'} - \frac{1}{3}\mu\,\delta_{I'J'}\,\partial_-\mathcal{C} && (15.5.9f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2\partial_-}\partial_{\widetilde{I}}(\Box\mathcal{C}) - \frac{1}{\partial_-}\partial_{J'}(\Box\mathcal{C}_{\widetilde{I}J'}) + \mu\,\partial_{J'} h_{\widetilde{I}J'} + \mu\,\partial_{\widetilde{I}} h_{\widetilde{J}\widetilde{J}} && (15.5.10a)\\
0 &= \frac{1}{\partial_-}\partial_{\widetilde{K}}(\Box\mathcal{C}_{\widetilde{K}\widetilde{I}J'}) - \frac{1}{\partial_-}\partial_{K'}(\Box\mathcal{C}_{\widetilde{I}K'J'}) + \mu\,\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{K}\widetilde{L}}\partial_{\widetilde{K}} h_{J'\widetilde{L}} && (15.5.10b)\\
0 &= -\frac{1}{\partial_-}\partial_{\widetilde{K}}(\Box\mathcal{C}_{\widetilde{K}I'J'}) - \frac{1}{\partial_-}\partial_{K'}(\Box\mathcal{C}_{K'I'J'}) - \frac{1}{6}\mu\,\varepsilon^{I'J'Q'R'S'U'}\partial_{Q'}\mathcal{C}_{R'S'U'} && (15.5.10c)\\
0 &= \Box\mathcal{C} - 2\mu\,\partial_- h_{\widetilde{I}\widetilde{I}} && (15.5.10d)\\
0 &= \Box\mathcal{C}_{\widetilde{I}J'} - \mu\,\partial_- h_{\widetilde{I}J'} && (15.5.10e)\\
0 &= \Box\mathcal{C}_{\widetilde{I}J'K'} && (15.5.10f)\\
0 &= \Box\mathcal{C}_{I'J'K'} + \frac{1}{6}\mu\,\varepsilon^{I'J'K'R'S'U'}\partial_-\mathcal{C}_{R'S'U'} && (15.5.10g)
\end{aligned}
$$

但し (15.4.8b) に $SO(3)$ Levi-Civita symbol $\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}}$ を作用させてある。さらに $h_P{}^P = 0$ から $h_{\widetilde{K}\widetilde{K}} = -h_{L'L'}$ も用いている。同様に (15.4.8f), (15.4.8g) にも $\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}}$ を作用させている。

15.5.2 Spectrum

ここは簡単にまとめておくに留める。Field re-definition を行おう:

$$
\begin{aligned}
H_{\widetilde{I}J'} &= h_{\widetilde{I}J'} + i\mathcal{C}_{\widetilde{I}J'} \qquad & \overline{H}_{\widetilde{I}J'} &= h_{\widetilde{I}J'} - i\mathcal{C}_{\widetilde{I}J'} && (15.5.11a)\\
h^{\perp}_{\widetilde{I}\widetilde{J}} &= h_{\widetilde{I}\widetilde{J}} - \frac{1}{3}\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}} h_{\widetilde{K}\widetilde{K}} \qquad & h^{\perp}_{I'J'} &= h_{I'J'} - \frac{1}{6}\delta_{I'J'} h_{K'K'} && (15.5.11b)\\
h &= h_{\widetilde{K}\widetilde{K}} + i\mathcal{C} \qquad & \overline{h} &= h_{\widetilde{K}\widetilde{K}} - i\mathcal{C} && (15.5.11c)\\
\mathcal{C}^{\oplus}_{I'J'K'} &= \frac{i}{6}\varepsilon^{I'J'K'W'X'Y'}\mathcal{C}^{\oplus}_{W'X'Y'} \qquad & \mathcal{C}^{\ominus}_{I'J'K'} &= -\frac{i}{6}\varepsilon^{I'J'K'W'X'Y'}\mathcal{C}^{\ominus}_{W'X'Y'} && (15.5.11d)
\end{aligned}
$$

このとき、

$$
\begin{aligned}
(\Box - \mu i\partial_-)H_{\widetilde{I}J'} &= 0 \qquad & (\Box + \mu i\partial_-)\overline{H}_{\widetilde{I}J'} &= 0 && (15.5.12a)\\
\Box h^{\perp}_{\widetilde{I}\widetilde{J}} &= 0 \qquad & \Box h^{\perp}_{I'J'} &= 0 && (15.5.12b)\\
(\Box - 2\mu i\partial_-)h &= 0 \qquad & (\Box + 2\mu i\partial_-)\overline{h} &= 0 && (15.5.12c)\\
(\Box - \mu i\partial_-)\mathcal{C}^{\oplus}_{I'J'K'} &= 0 \qquad & (\Box + \mu i\partial_-)\mathcal{C}^{\ominus}_{I'J'K'} &= 0 && (15.5.12d)
\end{aligned}
$$

をみたす。

よって、spectrum を Table 15.1 に与える。

energy $\mathcal{E}_0$	bosonic fields ($\mathcal{D}$)			degrees of freedom
4	$\overline{h}(1)$			1
3	$\overline{H}_{\widetilde{I}J'}(18)$	$\mathcal{C}^{\ominus}_{I'J'K'}(10)$		28
2	$\mathcal{C}_{\widetilde{I}J'K'}(45)$	$h^{\perp}_{\widetilde{I}\widetilde{J}}(5)$	$h^{\perp}_{I'J'}(20)$	70
1	$H_{\widetilde{I}J'}(18)$	$\mathcal{C}^{\oplus}_{I'J'K'}(10)$		28
0	$h(1)$			1

Table 15.1: *Bosonic zero-modes in eleven-dimensional supergravity on pp-wave background.*

15.6 Fermionic Spectrum

boson 同様、fermion についてもまとめておく。まずは non-dynamical field をみる。そのために、(15.4.7) を便宜的に次のように書き直すと便利である:

$$\widehat{\Gamma}^{MNP} D_N \psi_P \;=\; J^M \tag{15.6.1}$$

ただし J^M は次のように表されている:

$$J^+ \;=\; -J_- \;=\; 0 \tag{15.6.2a}$$
$$J^- \;=\; \frac{1}{4}\mu\,\widehat{\Gamma}^{+-123I'}\psi_{I'} + \frac{1}{8}\mu\,\epsilon_{\widetilde{I}\widetilde{J}\widetilde{K}}\,\widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}\widetilde{J}}\,\psi_{\widetilde{K}} \tag{15.6.2b}$$
$$J^{\widetilde{I}} \;=\; J_{\widetilde{I}} \;=\; -\frac{1}{4}\mu\,\widehat{\Gamma}^{+123}\big(\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}} - \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{J}}\big)\psi_{\widetilde{J}} \tag{15.6.2c}$$
$$J^{I'} \;=\; J_{I'} \;=\; \frac{1}{4}\mu\,\widehat{\Gamma}^{+123}\big(\delta_{I'J'} - \widehat{\Gamma}_{I'}\widehat{\Gamma}_{J'}\big)\psi_{J'} \tag{15.6.2d}$$

さらに (15.6.1) から次の関係式が得られる:

$$\widehat{\Gamma}^N D_N \psi_M - \widehat{\Gamma}^N D_M \psi_N \;=\; J_M - \frac{1}{9}\widehat{\Gamma}_M \widehat{\Gamma}_N J^N \tag{15.6.3}$$

(15.6.3) を用いると (15.4.7b) と同等な関係式は

$$\widehat{\Gamma}^N D_N \psi_- - \widehat{\Gamma}^N D_- \psi_N \;=\; J_- - \frac{1}{9}\widehat{\Gamma}_- \widehat{\Gamma}_N J^n \tag{15.6.4}$$

となる。ただし light-cone gauge-fixing (15.3.1), spin connection (14.1.4) や $J_- = 0$ (15.6.2a) を用いるとさらに簡単に

$$\partial_-\big(\widehat{\Gamma}^N \psi_N\big) \;=\; \frac{1}{9}\widehat{\Gamma}_- \widehat{\Gamma}_N J^N \tag{15.6.5}$$

となる。途中、(14.1.1) からわかるように、$\partial_- e_M{}^A = 0$ を用いている。この右辺はさらに変形できる:

$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma}_-\widehat{\Gamma}_N J^N &= \widehat{\Gamma}_-\Big\{\widehat{\Gamma}_+ J^+ + \widehat{\Gamma}_- J^- + \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}} J^{\widetilde{I}} + \widehat{\Gamma}_{I'} J^{I'}\Big\} \\ &= \frac{1}{4}\mu\,\widehat{\Gamma}^+\Big\{\widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}}\widehat{\Gamma}^{+123}(\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}} - \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{J}})\psi_{\widetilde{J}} - \widehat{\Gamma}_{I'}\widehat{\Gamma}^{+123}(\delta^{I'J'} - \widehat{\Gamma}_{I'}\widehat{\Gamma}_{J'})\psi_{J'}\Big\} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{15.6.6}$$

但し $\widehat{\Gamma}_-\widehat{\Gamma}_- = \widehat{\Gamma}^+\widehat{\Gamma}^+ = 0$ を用いている。これより $\partial_-(\widehat{\Gamma}^M\psi_M) = 0$、つまり

$$\widehat{\Gamma}^M\psi_M = 0 \tag{15.6.7}$$

が得られる。

spinor の covariant derivative $D_N\psi_P$ を整理しておこう。KG solution (14.1.4) を用いると、これは以下の様に書き表すことができる:

$$D_+\psi_P = \partial_+\psi_P - \frac{1}{2}\Big(\omega_+{}^{\widetilde{I}-}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}-} + \omega_+{}^{I'-}\widehat{\Gamma}_{I'-}\Big)\psi_P = \partial_+\psi_P + \frac{1}{4}\partial_I G_{++}\widehat{\Gamma}_{I-}\psi_P \tag{15.6.8a}$$

$$D_-\psi_P = \partial_-\psi_P \tag{15.6.8b}$$

$$D_I\psi_P = \partial_I\psi_P \tag{15.6.8c}$$

では (15.4.7) を個別に考察しよう。まずは (15.4.7a) である。ここで $\widehat{\Gamma}^{+NP}$ を書き換える:

$$\widehat{\Gamma}^{+NP} = g^{P+}\widehat{\Gamma}^N - g^{PN}\widehat{\Gamma}^+ + \frac{1}{2}(\widehat{\Gamma}^+\widehat{\Gamma}^N - \widehat{\Gamma}^N\widehat{\Gamma}^+)\widehat{\Gamma}^P\,. \tag{15.6.9}$$

So (15.4.7a) is rewritten as

$$0 = g^{P+}\widehat{\Gamma}^N D_N\psi_P - g^{PN}\widehat{\Gamma}^+ D_N\psi_P + \frac{1}{2}(\widehat{\Gamma}^+\widehat{\Gamma}^N - \widehat{\Gamma}^N\widehat{\Gamma}^+)\widehat{\Gamma}^P D_N\psi_P\,. \tag{15.6.10}$$

We find that the first and third term are deleted by light-cone gauge-fixing and (15.6.7). Thus we can reduce (15.6.10) to $0 = \widehat{\Gamma}^+(-\partial_-\psi_+ + \partial_I\psi_I)$. So ψ_+ can be expressed as

$$\psi_+ = \frac{1}{\partial_-}\partial_I\psi_I\,, \tag{15.6.11}$$

and we see that ψ_+ is a non-dynamical field.

Here we shall reduce (15.4.7c) to

$$0 = \widehat{\Gamma}^+\Big(\partial_+ + \frac{1}{2}G_{++}\partial_-\Big)\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} + \widehat{\Gamma}^-\partial_-\psi^{\ominus}_{\widetilde{I}} + \widehat{\Gamma}^K\partial_K(\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} + \psi^{\ominus}_{\widetilde{I}}) + \frac{1}{4}\mu\widehat{\Gamma}^{+123}(\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}} - \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}}\widehat{\Gamma}_{\widetilde{J}})\psi^{\oplus}_{\widetilde{J}}\,, \tag{15.6.12}$$

where we decomposed gravitino as $\psi_{\widetilde{I}} \equiv \psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} + \psi^{\ominus}_{\widetilde{I}}$. The $\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}}$ and $\psi^{\ominus}_{\widetilde{I}}$ are defined as

$$\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} \equiv -\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}^-\widehat{\Gamma}^+\psi_{\widetilde{I}}\,, \qquad \psi^{\ominus}_{\widetilde{I}} \equiv -\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}^+\widehat{\Gamma}^-\psi_{\widetilde{I}}\,, \tag{15.6.13}$$

which satisfy the projection conditions: $\widehat{\Gamma}^-\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} = \widehat{\Gamma}^+\psi^{\ominus}_{\widetilde{I}} = 0$. When we act $\widehat{\Gamma}^+$ on (15.6.12) from the left, $\psi^{\ominus}_{\widetilde{I}}$ can be expressed in terms $\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}}$ as follows:

$$\psi^{\ominus}_{\widetilde{I}} = \frac{1}{2\partial_-}\widehat{\Gamma}^+\widehat{\Gamma}^K\partial_K\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}}\,. \tag{15.6.14}$$

Thus $\psi^{\ominus}_{\widetilde{I}}$ is not independent of $\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}}$. Similarly, when we act $\widehat{\Gamma}^{-}$ on (15.6.12) from the left and utilize (15.6.14), we obtain the following equation:

$$0 \;=\; \Box \psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} + \frac{1}{2}\mu \widehat{\Gamma}^{123} (\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}} - \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}} \widehat{\Gamma}_{\widetilde{J}}) \partial_{-} \psi^{\oplus}_{\widetilde{J}} \, . \tag{15.6.15}$$

In order to solve this equation, we shall introduce the following fields:

$$\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}} \;\equiv\; \Big(\delta_{\widetilde{I}\widetilde{J}} - \frac{1}{3} \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}} \widehat{\Gamma}_{\widetilde{J}} \Big) \psi^{\oplus}_{\widetilde{J}} \, , \qquad \psi^{\oplus\|}_{1} \;\equiv\; \widehat{\Gamma}^{\widetilde{I}} \psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} \;=\; \widehat{\Gamma}^{\widetilde{I}} \psi^{\oplus}_{\widetilde{I}} \, , \tag{15.6.16}$$

and decompose $\psi^{\oplus}_{\widetilde{I}}$ in to the $\widehat{\Gamma}$-transverse mode and $\widehat{\Gamma}$-parallel mode. Acting $\widehat{\Gamma}^{\widetilde{I}}$ on (15.6.15) from the left and contracting the index $\widetilde{I}$, we get

$$0 \;=\; \Box \psi^{\oplus\|}_{1} + \mu \widehat{\Gamma}^{123} \partial_{-} \psi^{\oplus\|}_{1} \, . \tag{15.6.17}$$

On the other hand, when we act $(\delta_{\widetilde{K}\widetilde{I}} - \frac{1}{3} \widehat{\Gamma}_{\widetilde{K}} \widehat{\Gamma}_{\widetilde{I}})$ on (15.6.15), we find

$$0 \;=\; \Box \psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{K}} + \frac{1}{2}\mu \widehat{\Gamma}^{123} \partial_{-} \psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{K}} \, . \tag{15.6.18}$$

Moreover, in order to solve (15.6.17) and (15.6.18), we decompose $\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}}$ and $\psi^{\oplus\|}_{1}$ according to the chirality in terms of $i\widehat{\Gamma}^{123}$ as follows:

$$\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{R}} \;\equiv\; \frac{1 + i\widehat{\Gamma}^{123}}{2} \psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}} \, , \qquad \psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{L}} \;\equiv\; \frac{1 - i\widehat{\Gamma}^{123}}{2} \psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}} \, , \tag{15.6.19a}$$

$$\psi^{\oplus\|}_{1\mathrm{R}} \;\equiv\; \frac{1 + i\widehat{\Gamma}^{123}}{2} \psi^{\oplus\|}_{1} \, , \qquad \psi^{\oplus\|}_{1\mathrm{L}} \;\equiv\; \frac{1 - i\widehat{\Gamma}^{123}}{2} \psi^{\oplus\|}_{1} \, . \tag{15.6.19b}$$

These variables satisfy the following chirality conditions:

$$i\widehat{\Gamma}^{123} \psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{R}} \;=\; +\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{R}} \, , \qquad i\widehat{\Gamma}^{123} \psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{L}} \;=\; -\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{L}} \, , \tag{15.6.20a}$$

$$i\widehat{\Gamma}^{123} \psi^{\oplus\|}_{1\mathrm{R}} \;=\; +\psi^{\oplus\|}_{1\mathrm{R}} \, , \qquad i\widehat{\Gamma}^{123} \psi^{\oplus\|}_{1\mathrm{L}} \;=\; -\psi^{\oplus\|}_{1\mathrm{L}} \, . \tag{15.6.20b}$$

Multiplying $\frac{1}{2}(1 \pm i\widehat{\Gamma}^{123})$ to (15.6.17) on the left, we get

$$0 \;=\; \Big(\Box - \mu \, i\partial_{-} \Big) \psi^{\oplus\|}_{1\mathrm{R}} \, , \qquad 0 \;=\; \Big(\Box + \mu \, i\partial_{-} \Big) \psi^{\oplus\|}_{1\mathrm{L}} \, . \tag{15.6.21}$$

Similarly, when we multiply $\frac{1}{2}(1 \pm i\widehat{\Gamma}^{123})$ to (15.6.18) on the left, we obtain

$$0 \;=\; \Big(\Box - \frac{1}{2}\mu \, i\partial_{-} \Big) \psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{R}} \, , \qquad 0 \;=\; \Big(\Box + \frac{1}{2}\mu \, i\partial_{-} \Big) \psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{L}} \, . \tag{15.6.22}$$

From these equations, we can read off the zero-mode energies and degrees of freedom of $\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{R}}$ and $\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{L}}$:

$$\mathcal{E}_0(\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{R}}) \;=\; \frac{3}{2} \, , \qquad \mathcal{E}_0(\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{L}}) \;=\; \frac{5}{2} \, , \qquad \mathcal{D}(\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{R}}) \;=\; \mathcal{D}(\psi^{\oplus\perp}_{\widetilde{I}\mathrm{L}}) \;=\; 8 \times (3-1) \;=\; 16 \, . \tag{15.6.23}$$

We will discuss these quantities of $\psi^{\oplus\|}_{1\mathrm{R}}$ and $\psi^{\oplus\|}_{1\mathrm{L}}$ later.

Then let us investigate (15.4.7d):

$$0 \;=\; \Big\{ \widehat{\Gamma}^{+} \Big(\partial_{+} + \frac{1}{2} G_{++} \partial_{-} \Big) + \widehat{\Gamma}^{-} \partial_{-} + \widehat{\Gamma}^{K} \partial_{K} \Big\} \psi_{I'} - \frac{1}{4} \mu \widehat{\Gamma}^{+123} \Big(\delta_{I'J'} - \widehat{\Gamma}_{I'} \widehat{\Gamma}_{J'} \Big) \psi_{J'} \, . \tag{15.6.24}$$

In the same way as the case of $\psi_{\widetilde{I}}$, we decompose $\psi_{I'}$ into the $\widehat{\Gamma}$-parallel mode and $\widehat{\Gamma}$-transverse mode, and obtain

$$0 \;=\; \Big(\Box + \frac{5}{2}\mu\, i\partial_{-}\Big)\psi_{2\mathrm{R}}^{\oplus\|} \,, \qquad 0 \;=\; \Big(\Box - \frac{5}{2}\mu\, i\partial_{-}\Big)\psi_{2\mathrm{L}}^{\oplus\|} \,, \tag{15.6.25a}$$

$$0 \;=\; \Big(\Box + \frac{1}{2}\mu\, i\partial_{-}\Big)\psi_{I'\mathrm{R}}^{\oplus\perp} \,, \qquad 0 \;=\; \Big(\Box - \frac{1}{2}\mu\, i\partial_{-}\Big)\psi_{I'\mathrm{L}}^{\oplus\perp} \,, \tag{15.6.25b}$$

where the $\widehat{\Gamma}$-transverse mode and $\widehat{\Gamma}$-parallel mode are defined as

$$\psi_{I'}^{\oplus} \;=\; -\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}^{-}\widehat{\Gamma}^{+}\psi_{I'} \,, \tag{15.6.26a}$$

$$\psi_{I'\mathrm{R}}^{\oplus\perp} \;=\; \frac{1+i\widehat{\Gamma}^{123}}{2}\psi_{I'}^{\oplus\perp} \,, \qquad \psi_{I'\mathrm{L}}^{\oplus\perp} \;=\; \frac{1-i\widehat{\Gamma}^{123}}{2}\psi_{I'}^{\oplus\perp} \,, \tag{15.6.26b}$$

$$\psi_{2\mathrm{R}}^{\oplus\|} \;=\; \frac{1+i\widehat{\Gamma}^{123}}{2}\psi_{2}^{\oplus\|} \,, \qquad \psi_{2\mathrm{L}}^{\oplus\|} \;=\; \frac{1-i\widehat{\Gamma}^{123}}{2}\psi_{2}^{\oplus\|} \,. \tag{15.6.26c}$$

From (15.6.25b), we find that the zero-mode energies and degrees of freedom of are given by $\psi_{\widetilde{I}\mathrm{R}}^{\oplus\perp}$ and $\psi_{\widetilde{I}\mathrm{L}}^{\oplus\perp}$:

$$\mathcal{E}_0(\psi_{I'\mathrm{R}}^{\oplus\perp}) \;=\; \frac{5}{2} \,, \quad \mathcal{E}_0(\psi_{I'\mathrm{L}}^{\oplus\perp}) \;=\; \frac{3}{2} \,, \quad \mathcal{D}(\psi_{I'\mathrm{R}}^{\oplus\perp}) \;=\; \mathcal{D}(\psi_{I'\mathrm{L}}^{\oplus\perp}) \;=\; 8\times(6-1) \;=\; 40 \,. \tag{15.6.27}$$

Now we have finished the study of the $\widehat{\Gamma}$-transverse part. The remaining task is to analyze the $\widehat{\Gamma}$-parallel mode. In order to investigate the $\widehat{\Gamma}$-parallel mode, we perform a linear combination of (15.6.21) and (15.6.25a), and define new $\widehat{\Gamma}$-parallel modes as

$$\psi_{\mathrm{R}}^{\oplus\|} \;\equiv\; \frac{2}{5}\psi_{1\mathrm{R}}^{\oplus\|} - \psi_{2\mathrm{R}}^{\oplus\|} \,, \qquad \psi_{\mathrm{L}}^{\oplus\|} \;\equiv\; \frac{2}{5}\psi_{1\mathrm{L}}^{\oplus\|} - \psi_{2\mathrm{L}}^{\oplus\|} \,. \tag{15.6.28}$$

Then, by the use of (15.6.11), we can easily see that the re-defined fermions satisfy the equations:

$$0 \;=\; \Big(\Box + \frac{3}{2}\mu\, i\partial_{-}\Big)\psi_{\mathrm{R}}^{\oplus\|} \,, \qquad 0 \;=\; \Big(\Box - \frac{3}{2}\mu\, i\partial_{-}\Big)\psi_{\mathrm{L}}^{\oplus\|} \,. \tag{15.6.29}$$

Thus the zero-mode energies and degrees of freedom of them are represented by

$$\mathcal{E}_0(\psi_{\mathrm{R}}^{\oplus\|}) \;=\; \frac{7}{2} \,, \quad \mathcal{E}_0(\psi_{\mathrm{L}}^{\oplus\|}) \;=\; \frac{1}{2} \,, \quad \mathcal{D}(\psi_{\mathrm{R}}^{\oplus\|}) \;=\; \mathcal{D}(\psi_{\mathrm{L}}^{\oplus\|}) \;=\; 8 \,. \tag{15.6.30}$$

Now we have fully solved the field equations for fermionic fluctuations, and have derived the spectrum of gravitino in the case of pp-wave. As a result, we have found that the spectrum is splitting with a certain energy difference in the same manner with the spectrum of bosons. Summarizing (15.6.23), (15.6.27) and (15.6.30), we obtain the spectrum of gravitino as in Table 15.2:

energy $\mathcal{E}_0$	fermionic fields ($\mathcal{D}$)		degrees of freedom
$\frac{7}{2}$	$\psi^{\oplus\parallel}_{\mathrm{R}}(8)$		8
$\frac{5}{2}$	$\psi^{\oplus\perp}_{\tilde{I}\mathrm{L}}(16)$	$\psi^{\oplus\perp}_{I'\mathrm{R}}(40)$	56
$\frac{3}{2}$	$\psi^{\oplus\perp}_{\tilde{I}\mathrm{R}}(16)$	$\psi^{\oplus\perp}_{I'\mathrm{L}}(40)$	56
$\frac{1}{2}$	$\psi^{\oplus\parallel}_{\mathrm{L}}(8)$		8

Table 15.2: *Fermionic zero-modes in eleven-dimensional supergravity on pp-wave background.*

Chapter 16

Differential Forms with de Wit Notations

chapter 8 とは若干異なる。それは Lorentz algebra, spin connection, Cartan's structure equations の定義の変更に起因する。

大雑把にいうと、spin connection と Riemann tensor の各成分の符号が反転する。Ricci tensor/scalar は不変である。

16.1 $AdS_4 \times S^7$

16.1.1 Curved Spacetime Coordinates and Metric

Supergravity on PP-wave background を見越して、$AdS_4 \times S^7$ の計量として次のもの (global coordinates) を採用する [32]:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_{11}^2 &= R_A^2 \Big\{ -\cosh^2\rho \cdot \mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \sinh^2\rho \cdot \mathrm{d}\Omega_2^2 \Big\} + R_S^2 \Big\{ \cos^2\theta \cdot \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \cdot \mathrm{d}\Omega_5'^2 \Big\} \\ &= \Big\{ -(\mathrm{d}X^{-1})^2 - (\mathrm{d}X^0)^2 + \sum_{i=1}^{3} (\mathrm{d}X^i)^2 \Big\} + \Big\{ \sum_{m=1}^{8} (\mathrm{d}Y^m)^2 \Big\} \, . \end{aligned} \tag{16.1.1}$$

ここで、AdS_4, S^7 はそれぞれ

$$AdS_4 \ : \quad -R_A^2 = -(X^{-1})^2 - (X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 \tag{16.1.2a}$$

$$S^7 \ : \quad R_S^2 = (Y^4)^2 + (Y^5)^2 + (Y^6)^2 + (Y^7)^2 + (Y^8)^2 + (Y^9)^2 + (Y^{10})^2 + (Y^{11})^2 \tag{16.1.2b}$$

で代数的に定義されている (13-dimensional flat space への埋め込み)。座標 $\{X^A; Y^B\}$ を polar coordinates を用いて表す。まず AdS_4 については

$$X^{-1} = R_A \cosh\rho \cos t \qquad X^2 = R_A \sinh\rho \sin\phi_1 \cos\phi_2 \tag{16.1.3a}$$

$$X^0 = R_A \cosh\rho \sin t \qquad X^3 = R_A \sinh\rho \sin\phi_1 \sin\phi_2 \tag{16.1.3b}$$

$$X^1 = R_A \sinh\rho \cos\phi_1 \tag{16.1.3c}$$

ここで $0 \le \phi_1 \le \pi$, $0 \le \phi_2 \le 2\pi$ であり、S^7 については

$$Y^4 = R_S \sin\theta \sin\phi_3 \cos\phi_4 \qquad Y^8 = R_S \sin\theta \sin\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \sin\phi_7 \tag{16.1.3d}$$

$$Y^5 = R_S \sin\theta \sin\phi_3 \sin\phi_4 \cos\phi_5 \qquad Y^9 = R_S \sin\theta \cos\phi_3 \tag{16.1.3e}$$

$$Y^6 = R_S \sin\theta \sin\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \cos\phi_6 \qquad Y^{10} = R_S \cos\theta \sin\varphi \tag{16.1.3f}$$

$$Y^7 = R_S \sin\theta \sin\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \cos\phi_7 \qquad Y^{11} = R_S \cos\theta \cos\varphi \tag{16.1.3g}$$

ただし $0 \le \phi_i \le \pi$ $(i = 3, \cdots, 6)$, $0 \le \phi_7 \le 2\pi$ である。この座標系の時、立体角 $\mathrm{d}\Omega_2^2$, $\mathrm{d}\Omega_5'^2$ を表そう:

$$\mathrm{d}\Omega_2^2 = \sum_{i=1}^{2} \prod_{k=1}^{i-1} \sin^2\phi_k \, \mathrm{d}\phi_i^2 \, , \qquad \mathrm{d}\Omega_5'^2 = \sum_{j=3}^{7} \prod_{k=3}^{j-1} \sin^2\phi_k \, \mathrm{d}\phi_j^2 \, . \tag{16.1.4}$$

Freund-Rubin ansatz や Penrose limit を用いるので、各座標の役割をまとめておこう:

coordinates	ρ	Ω_2	t	φ	Ω_5'	θ
before Penrose limit	AdS_4			S^7		
after Penrose limit	flat $(SO(3))$		light-cone $(+,-)$		flat $(SO(6))$	

また、11-dimensional curved spacetime coordinates を、Penrose limit を採った時に flat space などが見やすいもので記述しよう。(16.1.3) は 13-dimensional flat space $\mathbb{R}^{2,11}$ への埋め込みなので、11-dimensional にするには次の constraint が必要である：

$$(X^{-1})^2 = R_A^2 - (X^0)^2 + \sum_{i=1}^{3}(X^i)^2 \qquad X^{-1}\mathrm{d}X^{-1} = -X^0\mathrm{d}X^0 + \sum_i X^i\mathrm{d}X^i \tag{16.1.5a}$$

$$(Y^{11})^2 = R_S^2 - \sum_{m=4}^{10}(Y^m)^2 \qquad Y^{11}\mathrm{d}Y^{11} = -\sum_m Y^m\mathrm{d}Y^m \tag{16.1.5b}$$

この下で、座標と計量を次で与えよう：

$$x^0 = X^0 = R_A\cosh\rho\sin t \qquad y^4 = Y^4 = R_S\sin\theta\sin\phi_3\cos\phi_4 \tag{16.1.6a}$$

$$x^1 = X^1 = R_A\sinh\rho\cos\phi_1 \qquad y^5 = Y^5 = R_S\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\cos\phi_5 \tag{16.1.6b}$$

$$x^2 = X^2 = R_A\sinh\rho\sin\phi_1\cos\phi_2 \qquad y^6 = Y^6 = R_S\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6 \tag{16.1.6c}$$

$$x^3 = X^3 = R_A\sinh\rho\sin\phi_1\sin\phi_2 \qquad y^7 = Y^7 = R_S\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7 \tag{16.1.6d}$$

$$y^8 = Y^8 = R_S\sin\theta\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7 \tag{16.1.6e}$$

$$y^9 = Y^9 = R_S\sin\theta\cos\phi_3 \tag{16.1.6f}$$

$$y^{10} = Y^{10} = R_S\cos\theta\sin\varphi \tag{16.1.6g}$$

(16.1.5), (16.1.6) を (16.1.1) に代入しよう：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s_{11}^2 &= -\Big\{1+\Big(\frac{x^0}{X^{-1}}\Big)^2\Big\}(\mathrm{d}x^0)^2 + \sum_{i=1}^{3}\Big\{1-\Big(\frac{x^i}{X^{-1}}\Big)^2\Big\}(\mathrm{d}x^i)^2 + \sum_{i=1}^{3}\frac{2x^0x^i}{(X^{-1})^2}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^i - \sum_{i,j=1}^{3}\frac{2x^ix^j}{(X^{-1})^2}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \\ &\quad + \sum_{m=4}^{10}\Big\{1+\Big(\frac{y^m}{Y^{11}}\Big)^2\Big\}(\mathrm{d}y^m)^2 + \sum_{m,n=4}^{10}\frac{2y^my^n}{(Y^{11})^2}\mathrm{d}y^m\mathrm{d}y^n \\ &\equiv g_{MN}\mathrm{d}x^M\mathrm{d}x^N \equiv g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + g_{mn}\,\mathrm{d}y^m\mathrm{d}y^n\end{aligned} \tag{16.1.7}$$

つまり計量の各成分は次のように与えられる：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu\rho}\,\eta_{\nu\sigma}\frac{x^\rho x^\sigma}{(X^{-1})^2} \qquad g_{mn} = \delta_{mn} + \delta_{mp}\,\delta_{nq}\frac{y^py^q}{(Y^{11})^2} \tag{16.1.8}$$

ここで $x^\mu \in AdS_4$, $y^m \in S^7$ である[1]。これらをまとめて $x^M = \{x^\mu; y^m\}$ と書き表すことがある。さらに g^{MN} は

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \frac{x^\mu x^\nu}{R_A^2} \qquad g^{mn} = \delta^{mn} - \frac{y^my^n}{R_S^2} \tag{16.1.9}$$

となる[2]。metric の determinant はそれぞれ

$$\det(g_{\mu\nu}) = -\frac{R_A^2}{(X^{-1})^2} \qquad \det(g_{mn}) = \frac{R_S^2}{(Y^{11})^2} \tag{16.1.10}$$

となる。11-dimensional spacetime 全体ではこの積

$$\det(g_{MN}) = -\frac{R_A^2R_S^2}{(X^{-1})^2(Y^{11})^2} = -\Big(\frac{1}{\cosh\rho\cos t\cos\theta\cos\varphi}\Big)^2 \tag{16.1.11}$$

[1] vielbein (16.1.3), (16.1.13) を意識してこの順序にしてある。

[2] /notes/tk-notes/sugra-ads/tk/maplefiles/030824/affine-ads4s7-030824.tex 参照。

となる。また、この座標系での affine connection が求められる:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{R_A^2}\frac{x^{\rho}}{X}\big\{\eta_{\mu\sigma}\,\eta_{\nu\lambda}\,x^{\sigma}x^{\lambda} - \eta_{\mu\nu}X\big\} \qquad X = (X^{-1})^2 = R_A^2 + \eta_{\mu\nu}\,x^{\mu}x^{\nu} \tag{16.1.12a}$$

$$\Gamma^{p}_{mn} = \frac{1}{R_S^2}\frac{y^{p}}{Y}\big\{\delta_{mq}\,\delta_{nr}\,y^{q}y^{r} + \delta_{mn}Y\big\} \qquad Y = (Y^{11})^2 = R_S^2 - \delta_{mn}y^{m}y^{n} \tag{16.1.12b}$$

16.1.2 Differential Forms, Vielbein, Affine-spin Connection, Curvature

metric (16.1.1) ($\mathrm{d}s^2_{11} = \eta_{AB}e^{A}\,e^{B}$, $\eta_{AB} = \mathrm{diag.}(-++\cdots+)$) から、vielbein を次のように定義しよう:

$$e^{0} = R_A\cosh\rho\,\mathrm{d}t \qquad e^{6} = R_S\sin\theta\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\mathrm{d}\phi_5 \tag{16.1.13a}$$

$$e^{1} = R_A\mathrm{d}\rho \qquad e^{7} = R_S\sin\theta\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\sin\phi_5\,\mathrm{d}\phi_6 \tag{16.1.13b}$$

$$e^{2} = R_A\sinh\rho\,\mathrm{d}\phi_1 \qquad e^{8} = R_S\sin\theta\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\sin\phi_5\,\sin\phi_6\,\mathrm{d}\phi_7 \tag{16.1.13c}$$

$$e^{3} = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_1\,\mathrm{d}\phi_2 \qquad e^{9} = R_S\mathrm{d}\theta \tag{16.1.13d}$$

$$e^{4} = R_S\sin\theta\,\mathrm{d}\phi_3 \qquad e^{10} = R_S\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi \tag{16.1.13e}$$

$$e^{5} = R_S\sin\theta\,\sin\phi_3\,\mathrm{d}\phi_4 \tag{16.1.13f}$$

この exterior derivative $\mathrm{d}e^{A}$ を列挙しよう:

$$\mathrm{d}e^{0} = -\frac{1}{R_A}\tanh\rho\,e^{0}\wedge e^{1} \tag{16.1.14a}$$

$$\mathrm{d}e^{1} = 0 \tag{16.1.14b}$$

$$\mathrm{d}e^{2} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}\,e^{2}\wedge e^{1} \tag{16.1.14c}$$

$$\mathrm{d}e^{3} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}\,e^{3}\wedge e^{1} - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_1}\,e^{3}\wedge e^{2} \tag{16.1.14d}$$

$$\mathrm{d}e^{4} = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}\,e^{4}\wedge e^{9} \tag{16.1.14e}$$

$$\mathrm{d}e^{5} = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}\,e^{5}\wedge e^{9} - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_3}\,e^{5}\wedge e^{4} \tag{16.1.14f}$$

$$\mathrm{d}e^{6} = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}\,e^{6}\wedge e^{9} - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_3}\,e^{6}\wedge e^{4} - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}\,e^{6}\wedge e^{5} \tag{16.1.14g}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e^{7} &= -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}\,e^{7}\wedge e^{9} - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_3}\,e^{7}\wedge e^{4} - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}\,e^{7}\wedge e^{5} \\ &\quad - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}\,e^{7}\wedge e^{6}\end{aligned} \tag{16.1.14h}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e^{8} &= -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}\,e^{8}\wedge e^{9} - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_3}\,e^{8}\wedge e^{4} - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}\,e^{8}\wedge e^{5} \\ &\quad - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}\,e^{8}\wedge e^{6} - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}\,e^{8}\wedge e^{7}\end{aligned} \tag{16.1.14i}$$

$$\mathrm{d}e^{9} = 0 \tag{16.1.14j}$$

$$\mathrm{d}e^{10} = \frac{1}{R_S}\tan\theta\,e^{10}\wedge e^{9} \tag{16.1.14k}$$

Cartan's structure equation $\mathrm{d}e^A - \omega^A{}_B \wedge e^B = 0$ より [3]、affine-spin connection $\omega^A{}_B$ が与えられる:

$$\omega^0{}_1 = -\frac{1}{R_A} \tanh\rho \, e^0 \qquad \omega^3{}_1 = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho} e^3 \tag{16.1.15a}$$
$$\omega^2{}_1 = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho} e^2 \qquad \omega^3{}_2 = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_1} e^3 \tag{16.1.15b}$$

$$\omega^4{}_9 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta} e^4 \qquad \omega^6{}_9 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta} e^6 \tag{16.1.15c}$$
$$\omega^5{}_9 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta} e^5 \qquad \omega^6{}_4 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_3} e^6 \tag{16.1.15d}$$
$$\omega^5{}_4 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_3} e^5 \qquad \omega^6{}_5 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4} e^6 \tag{16.1.15e}$$

$$\omega^7{}_9 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta} e^7 \qquad \omega^8{}_9 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta} e^8 \tag{16.1.15f}$$
$$\omega^7{}_4 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_3} e^7 \qquad \omega^8{}_4 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_3} e^8 \tag{16.1.15g}$$
$$\omega^7{}_5 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4} e^7 \qquad \omega^8{}_5 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4} e^8 \tag{16.1.15h}$$
$$\omega^7{}_6 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5} e^7 \qquad \omega^8{}_6 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5} e^8 \tag{16.1.15i}$$
$$\omega^8{}_7 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6} e^8 \tag{16.1.15j}$$
$$\omega^{10}{}_9 = \frac{1}{R_S}\tan\theta \, e^{10} \tag{16.1.15k}$$

affine-spin connection の反対称性 $\omega^C{}_B \, \eta_{CA} + \omega^C{}_A \, \eta_{CB} = 0$ に注意する:

$$\omega^0{}_I = \omega^1{}_0 \, , \qquad \omega^I{}_J = -\omega^J{}_I \qquad (I, J = 1, 2, \cdots, 10)$$

exterior derivative of affine-spin connection: $\mathrm{d}\omega^A{}_B$

$$\mathrm{d}\omega^0{}_1 = \frac{1}{R_A^2} e^0 \wedge e^1 \qquad \mathrm{d}\omega^3{}_1 = \frac{1}{R_A^2}\Big\{ e^3 \wedge e^1 + \frac{\cosh\rho}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\tan\phi_1} e^3 \wedge e^2 \Big\} \tag{16.1.16a}$$
$$\mathrm{d}\omega^2{}_1 = \frac{1}{R_A^2} e^2 \wedge e^1 \qquad \mathrm{d}\omega^3{}_2 = -\frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho} e^3 \wedge e^2 \tag{16.1.16b}$$

$$\mathrm{d}\omega^4{}_9 = -\frac{1}{R_S^2} e^4 \wedge e^9 \tag{16.1.17a}$$
$$\mathrm{d}\omega^5{}_9 = -\frac{1}{R_S^2}\Big\{ e^5 \wedge e^9 - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{1}{\tan\phi_3} e^5 \wedge e^4 \Big\} \tag{16.1.17b}$$
$$\mathrm{d}\omega^5{}_4 = -\frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta} e^5 \wedge e^4 \tag{16.1.17c}$$
$$\mathrm{d}\omega^6{}_9 = -\frac{1}{R_S^2}\Big\{ e^6 \wedge e^9 - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\Big(\frac{1}{\tan\phi_3} e^6 \wedge e^4 + \frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4} e^6 \wedge e^5 \Big) \Big\} \tag{16.1.17d}$$

[3]注意!

$$\mathrm{d}\omega^6{}_4 = -\frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\Big\{e^6\wedge e^4 - \frac{\cos\phi_3}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^6\wedge e^5\Big\} \tag{16.1.17e}$$

$$\mathrm{d}\omega^6{}_5 = -\frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\sin^2\phi_3}e^6\wedge e^5 \tag{16.1.17f}$$

$$\mathrm{d}\omega^7{}_9 = -\frac{1}{R_S^2}\Big\{e^7\wedge e^9 - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\Big(\frac{1}{\tan\phi_3}e^7\wedge e^4 + \frac{1}{\sin\phi_3}\Big[\frac{1}{\tan\phi_4}e^7\wedge e^5 + \frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}e^7\wedge e^6\Big]\Big)\Big\} \tag{16.1.17g}$$

$$\mathrm{d}\omega^7{}_4 = -\frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\Big\{e^7\wedge e^4 - \frac{\cos\phi_3}{\sin^2\phi_3}\Big(\frac{1}{\tan\phi_4}e^7\wedge e^5 + \frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}e^7\wedge e^6\Big)\Big\} \tag{16.1.17h}$$

$$\mathrm{d}\omega^7{}_5 = -\frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\Big\{e^7\wedge e^5 - \frac{\cos\phi_4}{\sin^2\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}e^7\wedge e^6\Big\} \tag{16.1.17i}$$

$$\mathrm{d}\omega^7{}_6 = -\frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\sin^2\phi_4}e^7\wedge e^6 \tag{16.1.17j}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^8{}_9 = -\frac{1}{R_S^2}\Big\{e^8\wedge e^9 - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\Big(&\frac{1}{\tan\phi_3}e^8\wedge e^4 \\ &+\frac{1}{\sin\phi_3}\Big[\frac{1}{\tan\phi_4}e^8\wedge e^5 + \frac{1}{\sin\phi_4}\Big\{\frac{1}{\tan\phi_5}e^8\wedge e^6 + \frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}e^8\wedge e^7\Big\}\Big]\Big)\Big\}\end{aligned} \tag{16.1.17k}$$

$$\mathrm{d}\omega^8{}_4 = -\frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\Big\{e^8\wedge e^4 - \frac{\cos\phi_3}{\sin^2\phi_3}\Big(\frac{1}{\tan\phi_4}e^8\wedge e^5 + \frac{1}{\sin\phi_4}\Big[\frac{1}{\tan\phi_5}e^8\wedge e^6 + \frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}e^8\wedge e^7\Big]\Big)\Big\} \tag{16.1.17l}$$

$$\mathrm{d}\omega^8{}_5 = -\frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\Big\{e^8\wedge e^5 - \frac{\cos\phi_4}{\sin^2\phi_4}\Big(\frac{1}{\tan\phi_5}e^8\wedge e^6 + \frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}e^8\wedge e^7\Big)\Big\} \tag{16.1.17m}$$

$$\mathrm{d}\omega^8{}_6 = -\frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\sin^2\phi_4}\Big\{e^8\wedge e^6 - \frac{\cos\phi_5}{\sin^2\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}e^8\wedge e^7\Big\} \tag{16.1.17n}$$

$$\mathrm{d}\omega^8{}_7 = -\frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\sin^2\phi_4}\frac{1}{\sin^2\phi_5}e^8\wedge e^7 \tag{16.1.17o}$$

$$\mathrm{d}\omega^{10}{}_9 = -\frac{1}{R_S^2}e^{10}\wedge e^9 \tag{16.1.17p}$$

curvature 2-form $R^A{}_B = \mathrm{d}\omega^A{}_B - \omega^A{}_C\wedge\omega^C{}_B$ を求める[4]:

$$R^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}} = \frac{1}{R_A^2}\eta_{\tilde{B}\tilde{C}}\,e^{\tilde{A}}\wedge e^{\tilde{C}} \quad \text{for } AdS_4\,, \qquad R^{A'}{}_{B'} = -\frac{1}{R_S^2}\delta_{B'C'}\,e^{A'}\wedge e^{C'} \quad \text{for } S^7 \tag{16.1.18}$$

よって、Riemann tensor $R^A{}_{BCD}$, Ricci tensor $\mathcal{R}^A{}_B$, scalar curvature $\mathcal{R}_{4(7)}$ が具体的に計算される:

$$R^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}} = \frac{1}{R_A^2}(\delta^{\tilde{A}}_{\tilde{C}}\eta_{\tilde{B}\tilde{D}} - \delta^{\tilde{A}}_{\tilde{D}}\eta_{\tilde{B}\tilde{C}}) \qquad \mathcal{R}^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}} = \mathcal{R}^{\tilde{A}}{}_{\tilde{C}\tilde{B}\tilde{D}}\,\eta^{\tilde{C}\tilde{D}} = \frac{3}{R_A^2}\delta^{\tilde{A}}_{\tilde{B}} \qquad \mathcal{R}_4 = \frac{12}{R_A^2} \tag{16.1.19a}$$

$$R^{A'}{}_{B'C'D'} = -\frac{1}{R_S^2}(\delta^{A'}_{C'}\delta_{D'B'} - \delta^{A'}_{D'}\delta_{C'B'}) \qquad \mathcal{R}^{A'}{}_{B'} = \mathcal{R}^{A'}{}_{C'B'D'}\,\eta^{C'D'} = -\frac{6}{R_S^2}\delta^{A'}_{B'} \qquad \mathcal{R}_7 = -\frac{42}{R_S^2} \tag{16.1.19b}$$

curvature の定義が先の Part と異なるため、ここでは S^7 が negative curvature を持つ定義となっていることに注意。また、Penrose limit を取る際には $R_S = 2R_A$ に固定する。

[4]注意!

16.2 $AdS_7 \times S^4$

16.2.1 Curved Spacetime Coordinates, Metric

先の計算を応用して $AdS_7 \times S^4$ の global coordinates を見る [32]:

$$\begin{aligned} ds_{11}^2 &= R_A^2 \Big\{ -\cosh^2\rho \cdot dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2\rho \cdot d\Omega_5^2 \Big\} + R_S^2 \Big\{ \cos^2\theta \cdot d\varphi^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\Omega_2'^2 \Big\} \\ &= \Big\{ -(dX^{-1})^2 - (dX^0)^2 + \sum_{i=1}^{6}(dX^i)^2 \Big\} + \Big\{ \sum_{m=7}^{11}(dY^m)^2 \Big\} . \end{aligned} \tag{16.2.1}$$

ここで、AdS_7, S^4 はそれぞれ

$$AdS_7 \ : \quad -R_A^2 = -(X^{-1})^2 - (X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 + (X^4)^2 + (X^5)^2 + (X^6)^2 \tag{16.2.2a}$$

$$S^4 \ : \quad R_S^2 = (Y^7)^2 + (Y^8)^2 + (Y^9)^2 + (Y^{10})^2 + (Y^{11})^2 \tag{16.2.2b}$$

で代数的に定義されている (13-dimensional flat space への埋め込み)。座標 $\{X^A; Y^B\}$ を polar coordinates を用いて表す。AdS_7 については

$$X^{-1} = R_A \cosh\rho \cos t \qquad X^3 = R_A \sinh\rho \sin\phi_3 \sin\phi_4 \cos\phi_5 \tag{16.2.3a}$$

$$X^0 = R_A \cosh\rho \sin t \qquad X^4 = R_A \sinh\rho \sin\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \cos\phi_6 \tag{16.2.3b}$$

$$X^1 = R_A \sinh\rho \cos\phi_3 \qquad X^5 = R_A \sinh\rho \sin\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \cos\phi_7 \tag{16.2.3c}$$

$$X^2 = R_A \sinh\rho \sin\phi_3 \cos\phi_4 \qquad X^6 = R_A \sinh\rho \sin\phi_3 \sin\phi_4 \sin\phi_5 \sin\phi_6 \sin\phi_7 \tag{16.2.3d}$$

ただし $0 \le \phi_i \le \pi$ $(i = 3, \cdots, 6)$, $0 \le \phi_7 \le 2\pi$ である。S^4 については

$$Y^7 = R_S \sin\theta \sin\phi_1 \cos\phi_2 \qquad Y^{10} = R_S \cos\theta \sin\varphi \tag{16.2.3e}$$

$$Y^8 = R_S \sin\theta \sin\phi_1 \sin\phi_2 \qquad Y^{11} = R_S \cos\theta \cos\varphi \tag{16.2.3f}$$

$$Y^9 = R_S \sin\theta \cos\phi_1 \tag{16.2.3g}$$

ここで $0 \le \phi_1 \le \pi$, $0 \le \phi_2 \le 2\pi$ である。この座標系の時、立体角 $d\Omega_2'^2$, $d\Omega_5{}^2$ は

$$d\Omega_2^2 = \sum_{i=1}^{2}\prod_{k=1}^{i-1} \sin^2\phi_k \, d\phi_i^2 , \qquad d\Omega_5'^2 = \sum_{j=3}^{7}\prod_{k=3}^{j-1} \sin^2\phi_k \, d\phi_j^2 , \tag{16.2.4}$$

で表される $(\sin\phi_0 \equiv 1)$。

Freund-Rubin ansatz や Penrose limit を用いるので、各座標の役割をまとめておこう:

coordinates	ρ	Ω_5	t	φ	Ω_2'	θ
before Penrose limit	AdS_7			S^4		
after Penrose limit	flat $(SO(6))$		light-cone $(+,-)$		flat $(SO(3))$	

なおここで、Penrose limit で flat space が見えやすくなる座標系を用意しよう。11-dimensional space は、先に記述されるように 13-dimensional flat space $\mathbb{R}^{2,13}$ の埋め込みで記述される。13-dim. coordinates は (16.2.3) で与えられているので、これに constraint を課して 11-dimensional space に埋め込もう:

$$(X^{-1})^2 = R_A^2 - (X^0)^2 + \sum_{i=1}^{6}(X^i)^2 \qquad X^{-1}\mathrm{d}X^{-1} = -X^0\mathrm{d}X^0 + \sum_i X^i\mathrm{d}X^i \tag{16.2.5a}$$

$$(Y^{11})^2 = R_S^2 - \sum_{m=7}^{10}(Y^m)^2 \qquad Y^{11}\mathrm{d}Y^{11} = -\sum_m Y^m\mathrm{d}Y^m \tag{16.2.5b}$$

この下で座標と計量を与えよう:

$$x^0 = X^0 = R_A\cosh\rho\sin t \qquad y^7 = Y^7 = R_S\sin\theta\sin\phi_1\cos\phi_2 \tag{16.2.6a}$$

$$x^1 = X^1 = R_A\sinh\rho\cos\phi_3 \qquad y^8 = Y^8 = R_S\sin\theta\sin\phi_1\sin\phi_2 \tag{16.2.6b}$$

$$x^2 = X^2 = R_A\sinh\rho\sin\phi_3\cos\phi_4 \qquad y^9 = Y^9 = R_S\sin\theta\cos\phi_1 \tag{16.2.6c}$$

$$x^3 = X^3 = R_A\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\cos\phi_5 \qquad y^{10} = Y^{10} = R_S\cos\theta\sin\varphi \tag{16.2.6d}$$

$$x^4 = X^4 = R_A\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\cos\phi_6 \tag{16.2.6e}$$

$$x^5 = X^5 = R_A\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\cos\phi_7 \tag{16.2.6f}$$

$$x^6 = X^6 = R_A\sinh\rho\sin\phi_3\sin\phi_4\sin\phi_5\sin\phi_6\sin\phi_7 \tag{16.2.6g}$$

(16.2.5), (16.2.6) を (16.2.1) に代入しよう:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s_{11}^2 &= -\Big\{1+\Big(\frac{x^0}{X^{-1}}\Big)^2\Big\}(\mathrm{d}x^0)^2 + \sum_{i=1}^{6}\Big\{1-\Big(\frac{x^i}{X^{-1}}\Big)^2\Big\}(\mathrm{d}x^i)^2 + \sum_{i=1}^{6}\frac{2x^0x^i}{(X^{-1})^2}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^i - \sum_{i,j=1}^{6}\frac{2x^ix^j}{(X^{-1})^2}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \\ &\quad + \sum_{m=7}^{10}\Big\{1+\Big(\frac{y^m}{Y^{11}}\Big)^2\Big\}(\mathrm{d}y^m)^2 + \sum_{m,n=7}^{10}\frac{2y^my^n}{(Y^{11})^2}\mathrm{d}y^m\mathrm{d}y^n \\ &\equiv g_{MN}\mathrm{d}x^M\mathrm{d}x^N \equiv g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu + g_{mn}\,\mathrm{d}y^m\mathrm{d}y^n\end{aligned} \tag{16.2.7}$$

つまり計量の各成分は次のようになる:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}\frac{x^\rho x^\sigma}{(X^{-1})^2} \qquad g_{mn} = \delta_{mn} + \delta_{mp}\delta_{nq}\frac{y^py^q}{(Y^{11})^2} \tag{16.2.8}$$

ここで $x^\mu \in AdS_7$, $y^m \in S^4$ である[5]。これらをまとめて $x^M = \{x^\mu; y^m\}$ と書き表すことがある。また、これから得られる g^{MN} は

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \frac{x^\mu x^\nu}{R_A^2} \qquad g^{mn} = \delta^{mn} - \frac{y^my^n}{R_S^2} \tag{16.2.9}$$

である。metric の determinant はそれぞれ

$$\det(g_{\mu\nu}) = -\frac{R_A^2}{(X^{-1})^2} \qquad \det(g_{mn}) = \frac{R_S^2}{(Y^{11})^2} \tag{16.2.10}$$

となる。11-dimensional spacetime 全体では

$$\det(g_{MN}) = -\frac{R_A^2R_S^2}{(X^{-1})^2(Y^{11})^2} = -\Big(\frac{1}{\cosh\rho\cos t\cos\theta\cos\varphi}\Big)^2 \tag{16.2.11}$$

[5]vielbein (16.2.13) を意識してこの順序にしてある。

である。affine connection は

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{R_A^2}\frac{x^\rho}{X}\{\eta_{\mu\sigma}\,\eta_{\nu\lambda}\,x^\sigma x^\lambda - \eta_{\mu\nu}X\} \qquad X = (X^{-1})^2 = R_A^2 + \eta_{\mu\nu}\,x^\mu x^\nu \tag{16.2.12a}$$

$$\Gamma^{p}_{mn} = \frac{1}{R_S^2}\frac{y^p}{Y}\{\delta_{mq}\,\delta_{nr}\,y^q y^r + \delta_{mn}Y\} \qquad Y = (Y^{11})^2 = R_S^2 - \delta_{mn}y^m y^n \tag{16.2.12b}$$

である[6]。

16.2.2 Differential Form, Vielbein, Affine-spin Connection, Curvature

metric (16.2.1) ($\mathrm{d}s_{11}^2 = \eta_{AB}\,e^A\,e^B$, $\eta_{AB} = \mathrm{diag.}(-++\cdots+)$) から vielbein を書き下そう：

$$e^0 = R_A\cosh\rho\,\mathrm{d}t \qquad e^6 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\sin\phi_5\,\sin\phi_6\,\mathrm{d}\phi_7 \tag{16.2.13a}$$

$$e^1 = R_A\mathrm{d}\rho \qquad e^7 = R_S\sin\theta\,\mathrm{d}\phi_1 \tag{16.2.13b}$$

$$e^2 = R_A\sinh\rho\,\mathrm{d}\phi_3 \qquad e^8 = R_S\sin\theta\,\sin\phi_1\,\mathrm{d}\phi_2 \tag{16.2.13c}$$

$$e^3 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_3\,\mathrm{d}\phi_4 \qquad e^9 = R_S\mathrm{d}\theta \tag{16.2.13d}$$

$$e^4 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\mathrm{d}\phi_5 \qquad e^{10} = R_S\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi \tag{16.2.13e}$$

$$e^5 = R_A\sinh\rho\,\sin\phi_3\,\sin\phi_4\,\sin\phi_5\,\mathrm{d}\phi_6 \tag{16.2.13f}$$

この exterior derivative $\mathrm{d}e^A$ を列挙しよう：

$$\mathrm{d}e^0 = -\frac{1}{R_A}\tanh\rho\,e^0\wedge e^1 \tag{16.2.14a}$$

$$\mathrm{d}e^1 = 0 \tag{16.2.14b}$$

$$\mathrm{d}e^2 = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^2\wedge e^1 \tag{16.2.14c}$$

$$\mathrm{d}e^3 = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^3\wedge e^1 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^3\wedge e^2 \tag{16.2.14d}$$

$$\mathrm{d}e^4 = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^4\wedge e^1 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^4\wedge e^2 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^4\wedge e^3 \tag{16.2.14e}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e^5 = &-\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^5\wedge e^1 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^5\wedge e^2 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^5\wedge e^3\\ &-\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}e^5\wedge e^4\end{aligned} \tag{16.2.14f}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}e^6 = &-\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^6\wedge e^1 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^6\wedge e^2 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^6\wedge e^3\\ &-\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}e^6\wedge e^4 - \frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_6}e^6\wedge e^5\end{aligned} \tag{16.2.14g}$$

$$\mathrm{d}e^7 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}e^7\wedge e^9 \tag{16.2.14h}$$

$$\mathrm{d}e^8 = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}e^8\wedge e^9 - \frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_1}e^8\wedge e^7 \tag{16.2.14i}$$

$$\mathrm{d}e^9 = 0 \tag{16.2.14j}$$

[6] /notes/tk-notes/sugra-ads/tk/maplefiles/030824/affine-ads7s4-030824.tex を参照。

$$\mathrm{d}e^{10} = \frac{1}{R_S}\tan\theta\, e^{10}\wedge e^{9}\,. \tag{16.2.14k}$$

$\mathrm{d}e^{A} - \omega^{A}{}_{B}\wedge e^{B} = 0$ より[7]、affine-spin connection $\omega^{A}{}_{B}$ が得られる:

$$\omega^{0}{}_{1} = -\frac{1}{R_A}\tanh\rho\, e^{0} \qquad \omega^{3}{}_{1} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^{3} \tag{16.2.15a}$$

$$\omega^{2}{}_{1} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^{2} \qquad \omega^{3}{}_{2} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^{3} \tag{16.2.15b}$$

$$\omega^{4}{}_{1} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^{4} \qquad \omega^{5}{}_{1} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^{5} \tag{16.2.15c}$$

$$\omega^{4}{}_{2} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^{4} \qquad \omega^{5}{}_{2} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^{5} \tag{16.2.15d}$$

$$\omega^{4}{}_{3} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^{4} \qquad \omega^{5}{}_{3} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^{5} \tag{16.2.15e}$$

$$\omega^{5}{}_{4} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}e^{5} \tag{16.2.15f}$$

$$\omega^{6}{}_{1} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\tanh\rho}e^{6} \tag{16.2.15g}$$

$$\omega^{6}{}_{2} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^{6} \tag{16.2.15h}$$

$$\omega^{6}{}_{3} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^{6} \tag{16.2.15i}$$

$$\omega^{6}{}_{4} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}e^{6} \tag{16.2.15j}$$

$$\omega^{6}{}_{5} = -\frac{1}{R_A}\frac{1}{\sinh\rho}\frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}e^{6} \tag{16.2.15k}$$

$$\omega^{7}{}_{9} = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}e^{7} \qquad \omega^{8}{}_{7} = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\tan\phi_1}e^{8} \tag{16.2.15l}$$

$$\omega^{10}{}_{9} = \frac{1}{R_S}\tan\theta\, e^{10} \qquad \omega^{8}{}_{9} = -\frac{1}{R_S}\frac{1}{\tan\theta}e^{8} \tag{16.2.15m}$$

affine-spin connection の反対称性 $\omega^{C}{}_{B}\,\eta_{CA} + \omega^{C}{}_{A}\,\eta_{CB} = 0$ に注意する:

$$\omega^{0}{}_{I} = \omega^{1}{}_{0}\,, \qquad \omega^{I}{}_{J} = -\omega^{J}{}_{I} \qquad (I, J = 1, 2, \cdots, 10)$$

exterior derivative of affine-spin connection:

$$\mathrm{d}\omega^{0}{}_{1} = \frac{1}{R_A^2}e^{0}\wedge e^{1} \tag{16.2.16a}$$

$$\mathrm{d}\omega^{2}{}_{1} = \frac{1}{R_A^2}e^{2}\wedge e^{1} \tag{16.2.16b}$$

$$\mathrm{d}\omega^{3}{}_{1} = \frac{1}{R_A^2}\Big\{e^{3}\wedge e^{1} + \frac{\cosh\rho}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\tan\phi_3}e^{3}\wedge e^{2}\Big\} \tag{16.2.16c}$$

$$\mathrm{d}\omega^{3}{}_{2} = -\frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}e^{3}\wedge e^{2} \tag{16.2.16d}$$

[7] 注意!定義が異なる。

$$\mathrm{d}\omega^4{}_1 = \frac{1}{R_A^2}\Big\{e^4\wedge e^1 + \frac{\cosh\rho}{\sinh^2\rho}\Big(\frac{1}{\tan\phi_3}e^4\wedge e^2 + \frac{1}{\sin\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^4\wedge e^3\Big)\Big\} \tag{16.2.16e}$$

$$\mathrm{d}\omega^4{}_2 = -\frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\Big\{e^4\wedge e^2 - \frac{\cos\phi_3}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\tan\phi_4}e^4\wedge e^3\Big\} \tag{16.2.16f}$$

$$\mathrm{d}\omega^4{}_2 = -\frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\sin^2\phi_3}e^4\wedge e^3 \tag{16.2.16g}$$

$$\mathrm{d}\omega^5{}_1 = \frac{1}{R_A^2}\Big\{e^5\wedge e^1 + \frac{\cosh\rho}{\sinh^2\rho}\Big(\frac{1}{\tan\phi_3}e^5\wedge e^2 + \frac{1}{\sin\phi_3}\Big[\frac{1}{\tan\phi_4}e^5\wedge e^3 + \frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}e^5\wedge e^4\Big]\Big)\Big\} \tag{16.2.16h}$$

$$\mathrm{d}\omega^5{}_2 = -\frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\Big\{e^5\wedge e^2 - \frac{\cos\phi_3}{\sin^2\phi_3}\Big(\frac{1}{\tan\phi_4}e^5\wedge e^3 + \frac{1}{\sin\phi_4}\frac{1}{\tan\phi_5}e^5\wedge e^4\Big)\Big\} \tag{16.2.16i}$$

$$\mathrm{d}\omega^5{}_3 = -\frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\Big\{e^5\wedge e^3 - \frac{\cos\phi_4}{\sin^2\phi_4}e^5\wedge e^4\Big\} \tag{16.2.16j}$$

$$\mathrm{d}\omega^5{}_4 = -\frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\sin^2\phi_4}e^5\wedge e^4 \tag{16.2.16k}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega^6{}_1 &= \frac{1}{R_A^2}\Big\{e^6\wedge e^1 + \frac{\cosh\rho}{\sinh^2\rho}\Big(\frac{1}{\tan\phi_3}e^6\wedge e^2 \\ &\qquad + \frac{1}{\sin\phi_3}\Big[\frac{1}{\tan\phi_4}e^6\wedge e^3 + \frac{1}{\sin\phi_4}\Big\{\frac{1}{\tan\phi_5}e^6\wedge e^4 + \frac{1}{\sin\phi_5} + \frac{1}{\tan\phi_5}e^6\wedge e^5\Big\}\Big]\Big)\Big\}\end{aligned} \tag{16.2.16l}$$

$$\mathrm{d}\omega^6{}_2 = -\frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\Big\{e^6\wedge e^2 - \frac{\cos\phi_3}{\sin^2\phi_3}\Big(\frac{1}{\tan\phi_4}e^6\wedge e^3 + \frac{1}{\sin\phi_4}\Big[\frac{1}{\tan\phi_5}e^6\wedge e^4 + \frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}e^6\wedge e^5\Big]\Big)\Big\} \tag{16.2.16m}$$

$$\mathrm{d}\omega^6{}_3 = -\frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\Big\{e^6\wedge e^3 - \frac{\cos\phi_4}{\sin^2\phi_4}\Big(\frac{1}{\tan\phi_5}e^6\wedge e^4 + \frac{1}{\sin\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}e^6\wedge e^5\Big)\Big\} \tag{16.2.16n}$$

$$\mathrm{d}\omega^6{}_4 = -\frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\sin^2\phi_4}\Big\{e^6\wedge e^4 - \frac{\cos\phi_5}{\sin^2\phi_5}\frac{1}{\tan\phi_6}e^6\wedge e^5\Big\} \tag{16.2.16o}$$

$$\mathrm{d}\omega^6{}_5 = -\frac{1}{R_A^2}\frac{1}{\sinh^2\rho}\frac{1}{\sin^2\phi_3}\frac{1}{\sin^2\phi_4}\frac{1}{\sin^2\phi_5}e^6\wedge e^5 \tag{16.2.16p}$$

$$\mathrm{d}\omega^7{}_9 = -\frac{1}{R_S^2}e^7\wedge e^9 \qquad \mathrm{d}\omega^8{}_7 = -\frac{1}{R_S^2}\frac{1}{\sin^2\theta}e^8\wedge e^7 \tag{16.2.17a}$$

$$\mathrm{d}\omega^{10}{}_9 = \frac{1}{R_S^2}e^{10}\wedge e^9 \qquad \mathrm{d}\omega^8{}_9 = -\frac{1}{R_S^2}\Big\{e^8\wedge e^9 - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{1}{\tan\phi_1}e^8\wedge e^7\Big\} \tag{16.2.17b}$$

curvature 2-form $R^A{}_B = \mathrm{d}\omega^A{}_B - \omega^A{}_C\wedge\omega^C{}_B$ は次のようにまとめることが可能である[8]:

$$R^{A'}{}_{B'} = \frac{1}{R_A^2}\eta_{B'C'}e^{A'}\wedge e^{C'} \quad \text{for } AdS_7\,, \qquad R^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}} = -\frac{1}{R_S^2}\delta_{\tilde{B}\tilde{C}}e^{\tilde{A}}\wedge e^{\tilde{C}} \quad \text{for } S^4 \tag{16.2.18}$$

よって、Riemann tensor $R^A{}_{BCD}$, Ricci tensor $\mathcal{R}^A{}_B$, scalar curvature $\mathcal{R}_{7(4)}$ が具体的に計算される:

$$R^{A'}{}_{B'C'D'} = \frac{1}{R_A^2}\big(\delta^{A'}_{C'}\eta_{B'D'} - \delta^{A'}_{D'}\eta_{B'C'}\big) \quad \mathcal{R}^{A'}{}_{B'} = \mathcal{R}^{A'}{}_{C'B'D'}\eta^{C'D'} = \frac{6}{R_A^2}\delta^{A'}_{B'} \quad \mathcal{R}_7 = \frac{42}{R_A^2} \tag{16.2.19a}$$

$$R^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}} = -\frac{1}{R_S^2}\big(\delta^{\tilde{A}}_{\tilde{C}}\delta^{\tilde{B}}_{\tilde{D}} - \delta_{\tilde{D}\tilde{A}}\delta_{\tilde{C}\tilde{B}}\big) \quad \mathcal{R}^{\tilde{A}}{}_{\tilde{B}} = \mathcal{R}^{\tilde{A}}{}_{\tilde{C}\tilde{B}\tilde{D}}\eta^{\tilde{C}\tilde{D}} = -\frac{3}{R_S^2}\delta^{\tilde{A}}_{\tilde{B}} \quad \mathcal{R}_4 = -\frac{12}{R_S^2} \tag{16.2.19b}$$

curvature の定義が先の Part と異なるため、ここでは S^7 が negative curvature を持つ定義となっていることに注意。また、Penrose limit を取る際には $R_A = 2R_S$ に固定する。

[8]注意。定義が異なる。

Chapter 17

Coset Construction

In this appendix we discuss the coset construction of $AdS_{4(7)} \times S^{7(4)}$ spacetime, which leads to the KG solution in the Penrose limit. In this construction we define supervielbeins to all order in θ, the superspace coordinates ($SO(10,1)$ Majorana spinor coordinates) in eleven dimensions[33, 34, 35].

なお、ここでは KG solution の coset representation は構成しない。また、$AdS \times S$ spacetime の “cosmological constant” f と KG solution の parameter μ の関係は議論しない。

17.1 Superalgebra

まずここで、de Wit [35] を真似て、$AdS_4 \times S^7$ background の Freund-Rubin ansatz を

$$F_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}} = 6f\,e\,E^{-1}_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}} \tag{17.1.1}$$

で与える。但し $\widetilde{M}, \widetilde{N}, \cdots$ は 4-dimensional curved indices であり、$e = \sqrt{|\det g_{MN}|}$ は 11-dimensional spacetime の vielbein determinant、f は **real** である[1]。また $E^{-1}_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}}$ は 4-dimensional space での weight -1 の invariant tensor density であり、$E^{-1}_{0123} = 1$ と規格化されている。このもとでは

$$F^{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}} = -\frac{6f}{e}E^{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}} \tag{17.1.2}$$

である。負号は、11-dimensional space が Minkowski であることに起因し、$E^{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}}$ は weight $+1$ の invariant tensor density ($E^{0123} = 1$) である。invariant tensor density の議論は、例えば chapter 6.1 を参照せよ。これらを用いると

$$F_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}}F^{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}} = (6f)^2\,(eE^{-1}_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}})\cdot\left(\frac{-1}{e}E^{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}}\right) = -36\cdot 4!\,f^2 \tag{17.1.3}$$

となることに注意する。この ansatz の下での 4-dimensional space, 7-dimensional space の Riemann curvature はそれぞれ

$$R_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}} = 4f^2\big(g_{\widetilde{M}\widetilde{P}}\,g_{\widetilde{N}\widetilde{Q}} - g_{\widetilde{M}\widetilde{Q}}\,g_{\widetilde{N}\widetilde{P}}\big)\,, \tag{17.1.4a}$$

$$R_{M'N'P'Q'} = -f^2\big(g_{M'P'}\,g_{N'Q'} - g_{M'Q'}\,g_{N'P'}\big)\,, \tag{17.1.4b}$$

で与えられる (see (16.1.19))。但し、de Wit [35] の (86) とは逆符号である。[35] では、"**Pauli-Källén convention**" という物を用いている。それは、**completely antisymmetric tensor の縮約をする際などに、spacetime signature** を気にしない、というものである。つまり、(17.1.3) ではなく、$F_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}}F^{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}\widetilde{Q}} = (6f)^2\cdot 4!$ としている。この点が大きく異なるため、Riemann tensor の符号が [35] (86) の様になる。しかし、現時点 (2003 10/27) では、この "Pauli-Källén convention" が非常に不自然に感じられる。何故なら、spacetime signature は非常に重要な factor だからであるが、それを無視しているからである。

説明を続けよう。(17.1.4) に登場する indices $M', N', \cdots$ は 7-dimensional curved indices である。$f^2 > 0$ の場合は $AdS_4 \times S^7$ であり、$f^2 < 0$ の場合は $AdS_7 \times S^4$ である。

coset construction を議論する前に、$AdS_4 \times S^7$ (適当に変更させれば $AdS_7 \times S^4$ にもなる) を準備しよう。$AdS_4 \times S^7$ は

$$AdS_4 \times S^7 \simeq \frac{SO(3,2)}{SO(3,1)} \times \frac{SO(8)}{SO(7)}$$

であるので、この coset の generator の algebra を定義すればよい。ただ、全部を一から導出するには理解が足りない。ここでは de Wit [35] に登場する式を引用しておこう。generator はすべて anti-Hermitian であるとする (Pauli-Källén sense)。なお、M_{AB} は isotropy group の generator であると同定することができる。symmetry

[1] $\mathcal{R}(S^7) < 0$ の定義である。de Wit [35] では f は pure imaginary で与えれば $\mathcal{R}(S^7) < 0$ を与える。[35] の (86) は我々の与える curvature とはどこか定義が異なるのだろうか。

breaking の言葉を借用すると、M_{AB} は unbroken generator であり、P_A は broken generator である。それぞれ、$SO(3,2)\times SO(8)$, $SO(3,1)\times SO(6)$ の generator である。

まず、本文では Lorentz algebra (1.1.1) を用いているので、これは変更しない。de Wit [35] では Pauli-Källén convention を用いているが、ここではそれを用いないため、f の役割が変わる。そのため Riemann tensor は (17.1.4) である。これを後で議論する coset construction で与えるためには、次のような algebra を用意すればよい[2]:

$$[P_{\widetilde{A}},P_{\widetilde{B}}] \;=\; 4f^2\,M_{\widetilde{A}\widetilde{B}}\;, \qquad [P_{A'},P_{B'}] \;=\; -f^2\,M_{A'B'}\;, \tag{17.1.5a}$$

$$[P_{\widetilde{A}},M_{\widetilde{B}\widetilde{C}}] \;=\; \eta_{\widetilde{A}\widetilde{B}}\,P_{\widetilde{C}}-\eta_{\widetilde{A}\widetilde{C}}\,P_{\widetilde{B}}\;, \qquad [P_{A'},M_{B'C'}] \;=\; \eta_{A'B'}\,P_{C'}-\eta_{A'C'}\,P_{B'}\;, \tag{17.1.5b}$$

$$[M_{\widetilde{A}\widetilde{B}},M_{\widetilde{C}\widetilde{D}}] \;=\; \eta_{\widetilde{A}\widetilde{D}}\,M_{\widetilde{B}\widetilde{C}}+\eta_{\widetilde{B}\widetilde{C}}\,M_{\widetilde{A}\widetilde{D}}-\eta_{\widetilde{A}\widetilde{C}}\,M_{\widetilde{B}\widetilde{D}}-\eta_{\widetilde{B}\widetilde{D}}\,M_{\widetilde{A}\widetilde{C}}\;, \tag{17.1.5c}$$

$$[M_{A'B'},M_{C'D'}] \;=\; \eta_{A'D'}\,M_{B'C'}+\eta_{B'C'}\,M_{A'D'}-\eta_{A'C'}\,M_{B'D'}-\eta_{B'D'}\,M_{A'C'}\;, \tag{17.1.5d}$$

$$[P_{\widetilde{A}},Q_{aa'}] \;=\; -i\,f\,(\gamma_{\widetilde{A}}\gamma_5)_a{}^b\,Q_{ba'}\;, \qquad [P_{A'},Q_{aa'}] \;=\; -\frac{i}{2}f\,(\Gamma_{A'})_{a'}{}^{b'}\,Q_{ab'}\;, \tag{17.1.5e}$$

$$[M_{\widetilde{A}\widetilde{B}},Q_{aa'}] \;=\; -\frac{1}{2}(\gamma_{\widetilde{A}\widetilde{B}})_a{}^b\,Q_{ba'}\;, \qquad [M_{A'B'},Q_{aa'}] \;=\; -\frac{1}{2}(\Gamma_{A'B'})_{a'}{}^{b'}\,Q_{ab'}\;, \tag{17.1.5f}$$

$$\begin{aligned}\{Q_{aa'},Q_{bb'}\} \;=\; &-C'_{a'b'}\Big\{2(\gamma_{\widetilde{A}}C)_{ab}\,P^{\widetilde{A}}+2i\,f\,(\gamma_{\widetilde{A}\widetilde{B}}\gamma_5C)_{ab}\,M^{\widetilde{A}\widetilde{B}}\Big\}\\ &-(\gamma_5C)_{ab}\Big\{2(\Gamma_{A'}C')_{a'b'}\,P^{A'}-i\,f\,(\Gamma_{A'B'}C')_{a'b'}\,M^{A'B'}\Big\}\end{aligned} \tag{17.1.5g}$$

但し、indices a,b は spinor indices in 4-dimensional space、a',b' は spinor indices in 7-dimensional space である。また、$\gamma_{\widetilde{A}}$, γ_5, C_{ab} は gamma matrices and charge conjugation matrix in 4-dimensional space であり、$\Gamma_{A'}$, $C'_{a'b'}$ は gamma matrices and charge conjugation matrix in 7-dimensional space である。なお、$f^2<0$ のときは、この algebra は $AdS_7\times S^4$ の coset construction で使用される。

ただ、どうしても気になるのは (17.1.5) の中の、f が入っている項である。上にも書いている様に、de Wit [35] とここの本文とでは、f^2 の符号が互いに逆になっている。だからといって、algebra の中の符号を変更すればそれで事足りるのだろうか。

“momentum generator” P_A は anti-Hermitian であると定義されるとする。このとき、この微分表現は $P_A=\partial_A$ である ($i\partial_A$ とすると、それは Hermitian となる)。微分 ∂_A と covariant derivative D_A はほとんど同じなので、momentum generator の微分表現を

$$P_A \;\simeq\; D_A \tag{17.1.6}$$

としよう。このとき、(13.1.12) より、

$$[P_A,P_B] \;=\; [D_A,D_B] \;=\; -\frac{1}{2}\widetilde{R}^{CD}{}_{AB}\,M_{CD} \tag{17.1.7}$$

[2] de Wit [35] (88), (89), (90) で登場する f を if に置き換える。

である。さらに、Freund-Rubin ansatz (17.1.1) の下での Riemann tensor は (17.1.4) で与えられるので、これを代入すると、

$$[P_{\widetilde{A}}, P_{\widetilde{B}}] \;=\; -\frac{1}{2}\cdot 4f^2\big(\delta_{\widetilde{A}}^{\widetilde{C}}\,\delta_{\widetilde{B}}^{\widetilde{D}} - \delta_{\widetilde{B}}^{\widetilde{C}}\,\delta_{\widetilde{A}}^{\widetilde{D}}\big)M_{\widetilde{C}\widetilde{D}} \;=\; -4f^2 M_{\widetilde{A}\widetilde{B}}\,, \tag{17.1.8a}$$

$$[P_{A'}, P_{B'}] \;=\; -\frac{1}{2}\cdot(-f^2)\big(\delta_{A'}^{C'}\,\delta_{B'}^{D'} - \delta_{B'}^{C'}\,\delta_{A'}^{D'}\big)M_{C'D'} \;=\; f^2 M_{A'B'} \tag{17.1.8b}$$

が得られる。これは、f^2 の符号が de Wit とは逆であっても、安易に algebra の中の符号まで変更してはいけない、ということを物語り、さらに、algebra は de Wit [35] の (88), (89), (90) がここでも通用することを示すのではなかろうか。

しかし、この convention を採用すると、coset construction で正しい curvature を導出しない。そのため、この疑問はここでは解決していないが、(17.1.5) を採用して (super)vielbein を構成しよう。

---

de Wit [35] では、Freund-Rubin ansatz (17.1.1) を用いる時に Pauli-Källén convention を用いているため、係数 f が pure imaginary でないと $AdS_4\times S^7$ の curvature を正しく出さなかったが、Pauli-Källén convention なしのときは、f は real である。そのため algebra (17.1.5) に登場する f は de Wit [35] とは異なる。しかし、それは convention によるものでしかない。TK の f を f_{TK}, de Wit のそれを f_{dW} と書いておけば、

$$f_{\mathrm{dW}} \;=\; i f_{\mathrm{TK}}$$

であれば事足りる。

整理しよう。Freund-Rubin ansatz (17.1.1) でもし Pauli-Källén convention を採用しなければ、algebra は (17.1.5) となり、採用すれば (17.1.1) の係数を $f_{\mathrm{TK}}\to f_{\mathrm{dW}}$ に「手で」置き換え、de Wit [35] で与えられる (88), (89), (90) になる。それだけである。

Pauli-Källén convention を採用するしないに関らず、(17.1.5) を元々の flux と 11-dimensional notation で記述すると (Pauli-Källén convention に関係のない表記に戻すと)、algebra (17.1.5) は

$$[P_A, \overline{Q}] \;=\; \overline{Q}\,T_A{}^{BCDE}F_{BCDE}\,, \tag{17.1.9a}$$

$$[M_{AB}, \overline{Q}] \;=\; \frac{1}{2}\overline{Q}\,\widehat{\Gamma}_{AB}\,, \tag{17.1.9b}$$

$$\{Q, \overline{Q}\} \;=\; -2\widehat{\Gamma}_A P^A + \frac{1}{144}\{\widehat{\Gamma}^{ABCDEF}F_{CDEF} + 24\,\widehat{\Gamma}_{CD}F^{ABCD}\}M_{AB}\,, \tag{17.1.9c}$$

という、簡単なものにまとめられる ($\overline{Q} = iQ^\dagger\widehat{\Gamma}^0$)。ただ、この表記ももちろん coset (とその smooth deformation された coset) にのみ有効なものである。KG solution は $AdS_{4(7)}\times S^{7(4)}$ の Penrose limit で与えられるので、KG solution でもこの表記は有効である。

17.2 Coset Space Representatives

17.2.1 General Discussion

まずは一般論の復習を挙げておこう。P. van Nieuwenhuizen [4] を参照。

coset manifold $M = G/H$ がある。isometry group H の generator を H_i で、G/H の generator を K_A で記述しよう (generator は anti-Hermitian で reductive)。これらは tangent space において次の algebra をみたす:

$$[H_i, H_j] \;=\; f_{ij}{}^k H_k \,, \tag{17.2.1a}$$
$$[H_i, K_A] \;=\; f_{iA}{}^B K_B \tag{17.2.1b}$$
$$[K_A, K_B] \;=\; f_{AB}{}^i H_i + f_{AB}{}^C K_C \tag{17.2.1c}$$

where

$i, j, \cdots$: unbroken generator index　　$A, B, \cdots$: G/H tangent space index

G/H の representative $L(x)$ (x: coordinates on M) は、例えば generator K_A を用いて

$$L(x) \;=\; \exp(x^A K_A) \,, \quad x^A \;=\; e_M{}^A \, x^M \tag{17.2.2}$$

と表現される ($M, N, \cdots$: curved spacetime index)。この representative の、isometry G による変換則 ($g \in G$) は

$$G \;:\; L(x) \;\to\; L(x') \;=\; g L(x) h^{-1}(x, g) \tag{17.2.3}$$

で与えられる。isotropy group H の元 $h(x, g)$ は、coset manifold M 上の点が G によって移動したとき再び M の上に乗るための、いわば「引き戻し」の操作を行うことによるので、x と g に依存している。

isometry group G の作用に対して left invariant 1-form、Maurer-Cartan 1-form α を次で定義する[3]:

$$\alpha \;=\; L^{-1} \mathrm{d} L \;=\; \widehat{e}^A K_A - \Omega^i H_i \,. \tag{17.2.4}$$

但し右辺は representative $L(x)$ を展開すると得られる一般的な形式であり、generator の係数 $\widehat{e}^A, \Omega^i$ はそれぞれ vielbein, H-connection と呼ばれ、

$$\widehat{e}^A(x) \;=\; \widehat{e}_M{}^A(x)\, \mathrm{d}x^M \,, \qquad \Omega^i(x) \;=\; \Omega_M{}^i(x)\, \mathrm{d}x^M \tag{17.2.5}$$

である。Maurer-Cartan 1-form α は、その定義から、

$$\mathrm{d}\alpha \;=\; -\alpha \wedge \alpha \tag{17.2.6}$$

が成立する。これを vielbein, H-connection に対してあてはめると

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\widehat{e}^A K_A - \mathrm{d}\Omega^i H_i \;&=\; -\big(\widehat{e}^B K_B - \Omega^j H_j\big) \wedge \big(\widehat{e}^C K_C - \Omega^k H_k\big) \\
&=\; -\frac{1}{2} \widehat{e}^B \wedge \widehat{e}^C [K_B, K_C] - \frac{1}{2} \Omega^j \wedge \Omega^k [H_j, H_k] + \Omega^j \wedge \widehat{e}^B [H_j, K_B]
\end{aligned}$$

である。algebra (17.2.1) を用いると

$$\begin{aligned}
&=\; -\frac{1}{2} \widehat{e}^B \wedge \widehat{e}^C \big(f_{BC}{}^A K_A + f_{BC}{}^i H_i\big) - \frac{1}{2} \Omega^j \wedge \Omega^k \big(f_{jk}{}^i H_i\big) + \Omega^j \wedge \widehat{e}^B \big(f_{jB}{}^A K_A\big) \\
&=\; -\Big(\frac{1}{2} f_{BC}{}^A \widehat{e}^B \wedge \widehat{e}^C - f_{jB}{}^A \Omega^j \wedge \widehat{e}^B\Big) K_A - \frac{1}{2}\Big(f_{BC}{}^i \widehat{e}^B \wedge \widehat{e}^C + f_{jk}{}^i \Omega^j \wedge \Omega^k\Big) H_i
\end{aligned}$$

[3] $\mathrm{d}e^A - \omega^A{}_B \wedge e^B = 0$, $R^A{}_B = \mathrm{d}\omega^A{}_B - \omega^A{}_C \wedge \omega^C{}_B$ の定義に沿うように符号が定義される。

となるので、

$$\mathrm{d}e^A = -\frac{1}{2} f_{BC}{}^A \, \widehat{e}^B \wedge \widehat{e}^C + f_{jB}{}^A \, \Omega^j \wedge \widehat{e}^B \tag{17.2.7a}$$

$$\mathrm{d}\Omega^i = \frac{1}{2} f_{BC}{}^i \, \widehat{e}^B \wedge \widehat{e}^C + \frac{1}{2} f_{jk}{}^i \, \Omega^j \wedge \Omega^k \tag{17.2.7b}$$

が得られる。ここで Cartan's structure equation を定義しよう：

$$\mathrm{d}\widehat{e}^A - \widehat{\omega}^A{}_B \wedge \widehat{e}^B = 0 \,, \qquad \widehat{\omega}^{A'}{}_B \, \eta_{A'A} + \widehat{\omega}^{B'}{}_A \, \eta_{B'B} = 0 \tag{17.2.8a}$$

$$\widehat{R}^A{}_B = \mathrm{d}\widehat{\omega}^A{}_B - \widehat{\omega}^A{}_C \wedge \widehat{\omega}^C{}_B = \frac{1}{2} \widehat{R}^A{}_{BCD} \, \widehat{e}^C \wedge \widehat{e}^D \tag{17.2.8b}$$

ここで $\widehat{\omega}^A{}_B = \widehat{\omega}_C{}^A{}_B \, \widehat{e}^C = \omega_M{}^A{}_B \, \mathrm{d}x^M$ である[4]。ここで安直に、

$$\widetilde{\omega}^A{}_B = -\frac{1}{2} f_{CB}{}^A \, \widehat{e}^C + f_{jB}{}^A \, \Omega^j \tag{17.2.9}$$

と置いて、$\widetilde{\omega}^A{}_B$ を affine-spin connection $\widehat{\omega}^A{}_B$ とするのは誤りである。何故なら、structure constant $f_{AB}{}^C$ は、定義において A, B の交換で反対称であっても、B, C の交換で反対称とは限らず、結果として $\widetilde{\omega}_{AB} \neq -\widetilde{\omega}_{BA}$ となる場合があるからである。index の交換について反対称であるためには、(17.2.8a) に支障をもたらさない程度に、(17.2.9) に余分な項を手で付加すればよい。結果としては

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}^A{}_B &= \widetilde{\omega}^A{}_B - \frac{1}{2} \widehat{e}^C \, \eta^{AA'} \big(f_{A'C}{}^{B'} \, \eta_{B'B} + f_{A'B}{}^{B'} \, \eta_{B'C} \big) \\ &= -\frac{1}{2} \overline{f}_{CB}{}^A \, \widehat{e}^C + f_{jB}{}^A \Omega^j \,, \end{aligned} \tag{17.2.10a}$$

$$\overline{f}_{CB}{}^A = f_{CB}{}^A + \eta^{AA'} \big(f_{A'C}{}^{B'} \, \eta_{B'B} + f_{A'B}{}^{B'} \, \eta_{B'C} \big) \tag{17.2.10b}$$

とすれば良い。このようにして、Cartan's structure equation を用いることで、affine-spin connection $\widehat{\omega}^A{}_B$, curvature 2-form $\widehat{R}^A{}_B$ は vielbein と H-connection から得られる。

H-connection Ω^i は、representative $L(x)$ と Maurer-Cartan 1-form α の定義から原理的に書き下すことが可能である。ここでは $L(x) = \exp(x^A K_A)$ の表記からの展開を考えよう：

$$\begin{aligned} L(x) &= \exp(x^A K_A) \,, \\ L^{-1} \mathrm{d}L &= \exp(-x^A K_A) \, \mathrm{d} \exp(x^B K_B) \cdot 1 \\ &= \Big\{ \mathrm{d} + [-x^A K_A, \mathrm{d}] + \frac{1}{2!} \big[-x^A K_A, [-x^B K_B, \mathrm{d}] \big] + \cdots \Big\} \cdot 1 \\ &= \mathrm{d}x^A K_A + \frac{1}{2} \mathrm{d}x^A \, x^B \, \big(f_{AB}{}^i H_i + f_{AB}{}^C K_C \big) + \cdots \\ &= \Big(\mathrm{d}x^A + \frac{1}{2} f_{CD}{}^A \, \mathrm{d}x^C \, x^D + \cdots \Big) K_A - \Big(-\frac{1}{2} f_{AB}{}^i \, \mathrm{d}x^A \, x^B + \cdots \Big) H_i \end{aligned}$$

但しここで appendix にある展開公式を用いた。これにより、

$$e^A = \mathrm{d}x^A + \frac{1}{2} f_{CD}{}^A \, \mathrm{d}x^C \, x^D + \cdots = e_M{}^A \, \mathrm{d}x^M \tag{17.2.11a}$$

$$\Omega^i = -\frac{1}{2} f_{AB}{}^i \, \mathrm{d}x^A \, x^B + \cdots \tag{17.2.11b}$$

と与えられる。

[4] 一般には、$\mathrm{d}\widehat{e}^A - \widehat{\omega}^A{}_B \wedge \widehat{e}^B = \widehat{T}^A$ のように、torsion 2-form $\widehat{T}^A = \frac{1}{2} \widehat{T}^A{}_{BC} \widehat{e}^B \wedge \widehat{e}^C$ が導入されるが、coset space では torsion free であるので、導入されていない ([4] (6.6) 式参照。)。

17.2.2 Representatives and Supervielbein

先の subsection を踏まえ、本題に戻す。algebra は (17.1.9) で与えられるものである。また、coordinates はここでは superspace coordinates $Z = (x^A, \theta)$ を (implicit に) 用いる。ここで θ は $SO(10,1)$ Majorana spinor coordinates (fermionic, anti-commuting coordinates) である。

さて、coset space なので、torsion free の関係式を構成しよう。まずは representative L を用いて Maurer-Cartan one-form α を

$$\alpha \ = \ L^{-1}\mathrm{d}L \ = \ E - \Omega \tag{17.2.12}$$

で定義する。ここで E, Ω は supervielbein と H-connection (に generator を付加したもの) である:

$$E \ = \ E^A\,P_A + \overline{E}Q \,, \qquad \Omega \ = \ \frac{1}{2}\Omega^{AB}\,M_{AB} \tag{17.2.13}$$

Maurer-Cartan one-form (17.2.12) はその定義から次の方程式をみたす:

$$\mathrm{d}\alpha + \alpha \wedge \alpha \ = \ 0 \,, \tag{17.2.14}$$

(17.2.12), (17.2.13) を (17.2.14) に代入すると、Cartan's structure equations が得らえる:

$$0 \ = \ \mathrm{d}\Omega - \Omega \wedge \Omega - \frac{1}{2}E^A \wedge E^B[P_A, P_B] - \frac{1}{288}\overline{E}\left\{\widehat{\Gamma}^{ABCDEF}\,F_{CDEF} + 24\,\widehat{\Gamma}_{CD}\,F^{ABCD}\right\}E\,M_{AB} \,, \tag{17.2.15a}$$

$$0 \ = \ \mathrm{d}E^A - \Omega^A{}_B \wedge E^B - \overline{E}\,\widehat{\Gamma}^A \wedge E \,, \tag{17.2.15b}$$

$$0 \ = \ \mathrm{d}E + E^A \wedge T_A{}^{BCDE}\,E\,F_{BCDE} - \frac{1}{4}\Omega^{AB} \wedge \widehat{\Gamma}_{AB}\,E \,. \tag{17.2.15c}$$

fermionic contribution をすべて neglect して、bosonic part だけ考察すると、きちんと Riemann tensor (17.1.4) を再現する。

さて、supervielbein E, E^A の計算を実際に進めるにあたり、representative $L(Z)$ を

$$L(Z) \ = \ \ell(x)\cdot\widehat{L}(\theta) \,, \qquad \ell(x) \ = \ \exp(x^A P_A) \qquad \text{and} \qquad \widehat{L}(\theta) \ = \ \exp(\overline{\theta}Q) \tag{17.2.16}$$

の様に、bosonic part と fermionic part に分離すると便利である。勿論、$[P,\overline{Q}] \neq 0$ であるので、$\ell(x)$ と $\widehat{L}(\theta)$ は commuting でなく、交換に対しておつりが出るが、それは追跡できるものである。その追跡の煩わしさを越えて、bosonic part だけの Maurer-Cartan, fermionic part の Maurer-Cartan を計算できる、という利点をこの分離方法は持つ。

また、ここで trick を使う。詳細は de Wit [35] の section 11 に任せるが、fermionic coordinates θ を $\theta \to t\theta$ のように rescale させておいて ($t \in [0,1]$)、Maurer-Cartain one-form (17.2.12) などを t で微分し、それを解く、という方法を採る。rescale された (17.2.12) を t で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E - \Omega) \ = \ \mathrm{d}\overline{\theta}Q + (E - \Omega)\overline{\theta}Q - \overline{\theta}Q(E - \Omega) \tag{17.2.17}$$

が得られるので、これを整理すると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E^A \ = \ 2\overline{\theta}\widehat{\Gamma}^A E \,, \tag{17.2.18a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E^a = \big(\mathrm{d}\theta + E^A \, T_A{}^{BCDE} \theta \, F_{BCDE} - \frac{1}{4} \Omega^{AB} \, \widehat{\Gamma}_{AB} \theta\big)^a , \tag{17.2.18b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Omega^{AB} = \frac{1}{72} \overline{\theta} \Big\{ \widehat{\Gamma}^{ABCDEF} \, F_{CDEF} + 24 \, \widehat{\Gamma}_{CD} \, F^{ABCD} \Big\} E , \tag{17.2.18c}$$

が得られる。これは first-ordered linear differential equation なので解くことができる。その解は θ の all order で与えられる:

$$E^A(x,\theta) = e^A + \overline{\theta} \widehat{\Gamma}^A D\theta + 2 \sum_{n=1}^{15} \frac{1}{(2n+2)!} \overline{\theta} \, \widehat{\Gamma}^A \mathcal{M}^{2n} \, D\theta , \tag{17.2.19a}$$

$$E(x,\theta) = D\theta + \sum_{n=1}^{16} \frac{1}{(2n+1)!} \mathcal{M}^{2n} D\theta , \tag{17.2.19b}$$

$$\Omega^{AB}(x,\theta) = \omega^{AB} + \frac{1}{72} \sum_{n=0}^{15} \frac{1}{(2n+2)!} \overline{\theta} \{ \widehat{\Gamma}^{ABCDEF} \, F_{CDEF} + 24 \, \widehat{\Gamma}_{CD} \, F^{ABCD} \} \mathcal{M}^{2n} D\theta , \tag{17.2.19c}$$

$$D\theta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E \Big|_{t=0} = \mathrm{d}\theta + e^A T_A{}^{BCDE} \theta \, F_{BCDE} - \frac{1}{4} \omega^{AB} \widehat{\Gamma}_{AB} \theta , \tag{17.2.19d}$$

where

$$e^A = e_M{}^A \, \mathrm{d}x^M , \qquad \omega^{AB} = \omega_M{}^{AB} \, \mathrm{d}x^M , \tag{17.2.20}$$

and

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}^2)^a{}_b &= 2 \big(T_M{}^{NPQR} \, \theta \big)^a \, F_{NPQR} \, \big(\overline{\theta} \widehat{\Gamma}^M \big)_b \\ &\quad - \frac{1}{288} \big(\widehat{\Gamma}_{MN} \, \theta \big)^a \Big(\overline{\theta} \big[\widehat{\Gamma}^{MNPQRS} \, F_{PQRS} + 24 \, \widehat{\Gamma}_{PQ} \, F^{MNPQ} \big] \Big)_b . \end{aligned} \tag{17.2.21}$$

Part III

Appendix

Appendix A

Others

notation がまた別のもの、もしくは notation に依存しない物理の話を挙げておく。

A.1 Field Contents, Clifford Algebra

この section は、TK, de Wit に共通の convention である。

11-dim. spacetime signature: $(-,+,+,+,+,+,+,+,+,+,+)$

field contents:

$$
\begin{aligned}
e_M{}^A &: \text{ vielbein} , \qquad E_A{}^M \ : \ \text{inverse vielbein} && \text{(A.1.1a)} \\
\Psi_M &: \text{ gravitino (Majorana spinor)} && \text{(A.1.1b)} \\
C_{MNP} &: \text{ completely antisymmetric tensor} && \text{(A.1.1c)} \\
\omega_M{}^{AB} &: \text{ spin connection} && \text{(A.1.1d)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{MN} &= e_M{}^A e_N{}^B \eta_{AB} \, , \qquad \eta_{AB} \ = \ E_A{}^M E_B{}^N g_{MN} \, , \qquad e \ = \ \det e_M{}^A && \text{(A.1.2a)} \\
\overline{\Psi} &= i \Psi^\dagger \widehat{\Gamma}^0 && \text{(A.1.2b)}
\end{aligned}
$$

We are using the convention that $M, N, P, \cdots$ refer to 11-dim. world indices and $A, B, C, \cdots$ refer to 11-dim. tangent space indices. $\varepsilon^{MNPQRSTUVWX}$ is an invariant tensor density in 11-dimensional spacetime (weight 1), and

$$
\varepsilon^{012\cdots \natural} \ = \ 1 \, . \tag{A.1.3}
$$

任意の時空次元での spinor の構成方法は Polchinski [25] appendix B を参照。自分の supergravity note [27] もこれに従っている。但し、本文ではここの表示まで忠実に従う 必要はない。The eleven-dimensional gamma matrices are satisfied

$$
\begin{aligned}
\{ \widehat{\Gamma}^A , \widehat{\Gamma}^B \} &= 2 \eta^{AB} && \text{(A.1.4a)} \\
(\widehat{\Gamma}^A)^\dagger &= \widehat{\Gamma}_A \ = \ - \widehat{\Gamma}^0 \widehat{\Gamma}^A (\widehat{\Gamma}^0)^{-1} && \text{(A.1.4b)} \\
\widehat{\Gamma}_{M_1 M_2 \cdots M_n} &\equiv \widehat{\Gamma}_{[M_1} \widehat{\Gamma}_{M_2} \cdots \widehat{\Gamma}_{M_n]} \ = \ \frac{1}{n!} \mathrm{sgn}(\sigma) \widehat{\Gamma}_{M_{\sigma_1}} \widehat{\Gamma}_{M_{\sigma_2}} \cdots \widehat{\Gamma}_{M_{\sigma_n}} && \text{(A.1.4c)}
\end{aligned}
$$

where η_{AB} is the metric in the tangent space. なお、$\widehat{\Gamma}^{AB}$ は anti-Hermitian である:

$$
\begin{aligned}
(\widehat{\Gamma}^{AB})^\dagger &= \frac{1}{2} (\widehat{\Gamma}^A \widehat{\Gamma}^B - \widehat{\Gamma}^B \widehat{\Gamma}^A)^\dagger \ = \ - \frac{1}{2} \big(\widehat{\Gamma}^{A\dagger} \widehat{\Gamma}^{B\dagger} - \widehat{\Gamma}^{B\dagger} \widehat{\Gamma}^{A\dagger} \big) \\
&= - \frac{1}{2} \widehat{\Gamma}^0 \big(\widehat{\Gamma}^A \widehat{\Gamma}^B - \widehat{\Gamma}^B \widehat{\Gamma}^A \big) (\widehat{\Gamma}^0)^{-1} \ = \ - \widehat{\Gamma}^{AB} && \text{(A.1.4d)}
\end{aligned}
$$

The spinors appearing in the above action are anti-commuted and satisfied the Majorana condition

$$
\overline{\Psi} \ = \ \Psi^T C \, , \tag{A.1.5}
$$

where the charge conjugation matrix C is antisymmetric and defined by

$$
C \widehat{\Gamma}^A C^{-1} \ = \ - (\widehat{\Gamma}^A)^T \, , \tag{A.1.6a}
$$

$$C\widehat{\Gamma}^{A_1\cdots A_n}C^{-1} \;=\; (-1)^{[\frac{n+1}{2}]}(\widehat{\Gamma}^{A_1\cdots A_n})^T\,, \tag{A.1.6b}$$

$$[\tfrac{n+1}{2}] \;=\; \{1,1,2,2,3,3,\cdots\} \qquad \text{where} \;\; n=1,2,3,\cdots\,, \tag{A.1.6c}$$

$$C \;=\; B_1\widehat{\Gamma}^0 \;=\; \widehat{\Gamma}^3\widehat{\Gamma}^5\widehat{\Gamma}^7\widehat{\Gamma}^9\widehat{\Gamma}^0 \;=\; -C^{-1} \;=\; -C^T \tag{A.1.6d}$$

Polchinski [25] における charge conjugation matrix C とは定義が同じであるが、fermion $\overline{\Psi}$ の定義が異なる。つまり $(\overline{\Psi})_{\rm TK} = i(\overline{\Psi})_{\rm Polchinski}$ である。これは問題はない。[25] は、$\overline{\psi}$ と $\psi^T C$ が同じ変換則に従うとはいっているが、一致するとは言っていない。つまり phase は自由に採ってよい。[25] では $\overline{\psi}\psi$ を anti-Hermitian として定義しているが、我々はこれを Hermitian で定義したいため、Dirac bar を $\overline{\psi} = i\psi^\dagger\widehat{\Gamma}^0$ と定義仕直している。なお、d-dimensional spacetime における charge conjugation matrix の定義の詳細は [25] を参照すべし。

$d = 2k+2$-dimensional spacetime での chirality operator $\widehat{\Gamma}$ は

$$\widehat{\Gamma} \;\equiv\; i^{-k}\widehat{\Gamma}^0\widehat{\Gamma}^1\cdots\widehat{\Gamma}^{d-1} \tag{A.1.7}$$

で定義される。すなわち、$d=4$ では

$$\gamma_5 \;=\; i^{-1}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{A.1.8}$$

である。

A.2 Identity

$$\begin{aligned}
&\widehat{\Gamma}^{M_1M_2\cdots M_p}\widehat{\Gamma}_{N_1N_2\cdots N_q} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\min(p,q)} (-1)^{\frac{1}{2}k(2p-k-1)}\frac{p!\,q!}{(p-k)!(q-k)!k!}\delta^{[M_1}_{[N_1}\cdots\delta^{M_k}_{N_k}\widehat{\Gamma}^{M_{k+1}\cdots M_p]}{}_{N_{k+1}\cdots N_q]}\,,
\end{aligned} \tag{A.2.1}$$

where

$$\widehat{\Gamma}^{M_1\cdots M_p} \;=\; \widehat{\Gamma}^{[M_1}\widehat{\Gamma}^{M_2}\cdots\widehat{\Gamma}^{M_p]} \;=\; \frac{1}{p!}\,\mathrm{sgn}(\sigma)\widehat{\Gamma}^{M_{\sigma(1)}}\widehat{\Gamma}^{M_{\sigma(2)}}\cdots\widehat{\Gamma}^{M_{\sigma(p)}} \tag{A.2.2}$$

A.3 Killing Vectors, Killing Spinors

[21] に概略がある。

A.4 Supersymmetry in Anti-de Sitter Space and its Algebra

[19]

Bibliography

[1] M.J. Duff and C.N. Pope, "*Kaluza-Klein Supergravity and the Seven Sphere*", `ICTP/82/83-7`, Lectures given at September School on Supergravity and Supersymmetry, Trieste, Italy, Sep 6-18, 1982.

[2] T. Kimura and K. Yoshida, "*Spectrum of Eleven-dimensional Supergravity on a PP-wave Background*", to appear in Phys. Rev. **D**, `hep-th/0307193`.

[3] H.J. Kim, L.J. Romans and P. van Nieuwenhuizen, "*Mass Spectrum of Chiral Ten-dimensional $N = 2$ Supergravity on S^5*", Phys. Rev. **D32** (1985) 389.

[4] P. van Nieuwenhuizen, "*General Theory of Coset Manifolds and Antisymmetric Tensors Applied to Kaluza-Klein Supergravity*", `ITP-SB-84-57`, published in Trieste School 1984, *Supersymmetry and Supergravity '84*.

[5] R.R. Metsaev and A.A. Tseytlin, "*Exactly solvable model of superstring in Ramond-Ramond plane wave background*", Phys. Rev. **D65** (2002) 126004, `hep-th/0202109`.

[6] J. Kowalski-Glikman, "*Vacuum States in Supersymmetric Kaluza-Klein Theory*", Phys. Lett. **B134** (1984) 194.

[7] P.T. Chrusciel and J. Kowalski-Glikman, "*The Isometry Group and Killing Spinors for the PP-wave Space-time in $D = 11$ Supergravity*", Phys. Lett. **B149** (1984) 107.

[8] R. Güven, "*Plane Wave Limits and T-duality*", Phys. Lett. **B482** (2000) 255, `hep-th/0005061`.

[9] J. Figueroa-O'Farrill and G. Papadopoulos, "*Homogeneous fluxes, branes and a maximally supersymmetric solution of M-theory*", JHEP **0108** (2001) 036, `hep-th/0105308`.

[10] M. Blau, J. Figueroa-O'Farrill and G. Papadopoulos, "*Penrose limits, supergravity and brane dynamics*", Class. Quant. Grav. **19** (2002) 4753, `hep-th/0202111`.

[11] "*Maximally supersymmetric solutions of ten- and eleven-dimensional supergravities*", JHEP **0303** (2003) 048, `hep-th/0211089`.

[12] M.J. Duff, B.E.W. Nilsson and C.N. Pope, "*Kaluza-Klein Supergravity*", Phys. Rept. **130** (1986) 1.

[13] M. Nakahara, "*Geometry, Topology and Physics*", Institute of Physics Publishing.

[14] 内山 龍雄, "一般相対性理論", 裳華房.

[15] R.A. Bertlmann, "*Anomalies in quantum field theory*," Oxford Science Publications.

[16] K. Pilch, P. van Nieuwenhuizen and P.K. Townsend, "*Compactification of $d = 11$ Supergravity on S^4 (or $11 = 7 + 4$, too)*", Nucl. Phys. **B242** (1984) 377.

[17] M.J. Duff, "*Supergravity, the Seven-sphere, and Spontaneous Symmetry Breaking*", Nucl. Phys. **219** (1983) 389.

[18] B. de Wit and H. Nicolai, "*The Consistency of the S^7 Truncation in $d = 11$ Supergravity*", Nucl. Phys. **B281** (1987) 211.

[19] B. de Wit and I. Herger, "*Anti-de Sitter Supersymmetry*", Lect. Notes Phys. **541** (2000) 79, `hep-th/9908005`.

[20] M.J. Duff, B.E.W. Nilsson, C.N. Pope and N. Warner, "*On the Consistency of the Kaluza-Klein Ansatz*", Phys. Lett. **B149** (1984) 90.

[21] M.J. Duff, "*TASI Lectures on Branes, Black Holes and Anti-de Sitter Space*", `hep-th/9912164`.

[22] H. Nastase, D. Vaman and P. van Nieuwenhuizen, "*Consistency of the $AdS_7 \times S^4$ Reduction and the Origin of Self-duality in Odd Dimensions*", Nucl. Phys. **B581** (2000) 179, `hep-th/9911238`.

[23] P. Hoxha, R.R. Martinez-Acosta and C.N. Pope, "*Kaluza-Klein Consistency, Killing Vectors and Kähler Spaces*", Class. Quant. Grav. **17** (2000) 4207, `hep-th/0005172`.

[24] M.J. Duff, "*Supermembranes*", published in *FIELDS, STRINGS AND DUALITY: TASI 96*, `hep-th/9611203`.

[25] J. Polchinski, "*String Theory*", Cambridge University Press.

[26] M.B. Green, J.H. Schwarz and E. Witten, "*Superstring Theory*", Cambridge University Press.

[27] T. Kimura, "*Eleven-dimensional Supergravity*", TK-NOTE/03-11, unpublished (written by hand).

[28] T. Kimura, "*Spinors in Various Dimensions II*", unpublished.

[29] T. Kugo and P.K. Townsend, "*Supersymmetry and the Divison Algebras*", Nucl. Phys. **221** (1983) 357.

[30] S. Fernando, M. Günaydin and O. Pavlyk, "*Spectra of PP-wave limits of M-/Superstring theory on $AdS_p \times S^q$ spaces*", JHEP **0210** (2002) 007, `hep-th/0207175`.

[31] 藤井 保憲, "超重力理論入門", マグロウヒル出版.

[32] 今村 洋介, "超重力理論ノート", in `http://www2.yukawa.kyoto-u.ac.jp/~imamura/notes/index.html`.

[33] B. de Wit, K. Peeters and J. Plefka, "*Superspace Geometry for Supermembrane Backgrounds*", Nucl. Phys. **B532** (1998) 99, `hep-th/9803209`.

[34] B. de Wit, K. Peeters, J. Plefka and A. Sevrin, "*The M-theory Two-brane in $AdS_4 \times S^7$ and $AdS_7 \times S^4$*", Phys. Lett. **B443** (1998) 153, `hep-th/9808052`.

[35] B. de Wit, "*Supermembranes and Super Matrix Models*", `hep-th/9902051`.

[36] D. Berenstein, J. Maldacena and H. Nastase, "*Strings in Flat Space and PP-waves from $\mathcal{N} = 4$ Super Yang Mills*", JHEP **0204** (2002) 013, `hep-th/0202021`.

[37] K. Dasgupta, M.M. Sheikh-Jabbari and M. Van Raamsdonk, "*Matrix Perturbation Theory for M-theory on a PP-wave*", JHEP **0205** (2002) 056, `hep-th/0205185`.

[38] N. Kim and J. Plefka, "*On the Spectrum of PP-wave Matrix Theory*", Nucl. Phys. **B643** (2002) 31, `hep-th/0207034`.

[39] E. Bergsoeff, E. Sezgin and P.K. Townsend, "*Supermembranes and Eleven-dimensional Supergravity*", Phys. Lett. **B189** (1987) 75.

E. Bergsoeff, E. Sezgin and P.K. Townsend, "*Properties of the Eleven-dimensional Supermembrane Theory*", Ann. Phys. **185** (1988) 330.

[40] B. de Wit, Hoppe and H. Nicolai, "*On the Quantum Mechanics of Supermembranes*", Nucl. Phys. **B305** (1988) 545.

[41] B. de Wit, M. Lüscher and H. Nicolai, "*The Supermembrane is Unstable*", Nucl. Phys. **B320** (1989) 135.

[42] N. Nakayama, K. Sugiyama and K. Yoshida, "*Ground State of Supermembrane on PP-wave*", Phys. Rev. **D68** (2003) 026001, `hep-th/0209081`.

[43] R. Kallosh, J. Rahmfeld and A. Rajaraman, "*Near Horizen Superspace*," JHEP 9809 (1998) 002, `hep-th/9805217`.

[44] P.K. Townsend, "*p-brane Democracy*," in particles, Strings and Cosmology, `hep-th/9507048`.

[45] M.B. Green and J.H. Schwarz, "*Covariant Description of Superstrings*," Phys. Lett. B180 (1984) 370.

[46] E. Bergsoeff, E. Sezgin and P.K. Townsend, "*Supermembranes and Eleven-dimensional Supergravity*," Phys. Lett. B189 (1987) 75.

[47] A. Achúcarro, J.M. Evans, P.K. Townsend and D.L. Wiltshire, "*Super p-branes*," Phys. Lett. B198 (1987) 441.

[48] G. Sierra, "*An Application to the Theories of Jordan Algebras and Freudenthal Triple Systems to Particles and Strings*," Class. Quant. Grav. 4 (1987) 227.

[49] J.M. Evans, "*Supersymmetric Yang-Mills Theories and Division Algebras*," Nucl. Phys. B298 (1988) 92.

[50] I. Bars, "*First Massive Level and Anomalies in the Supermembrane*," Nucl. Phys. B308 (1988) 462.

[51] I. Bars and C.N. Pope, "*Anomalies in Super p-branes*," Class. Quant. Grav. 5 (1988) 1157.

[52] J. Polchinski, "*Dirichlet-branes and Ramond-Ramond Charges*," Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 4724, hep-th/9510017.

[53] T. Kimura, "*Zero-mode Spectrum of Eleven-dimensional Theory on the Plane-wave Background*," Ph.D thesis, hep-th/0402054.