BU-85/11

UNIVERSITÄT BONN

Physikalisches Institut

Konstruktion der Nicolai-Abbildung in supersymmetrischen Feldtheorien

受付 1985. 2. 13 越谷研図書室

受入 2000-30-157 高工研図書室

Inauguraldissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn

vorgelegt von
Olaf Lechtenfeld

Post address:
Nussallee 12
D-5300 Bonn 1
W-Germany

BONN-IR-84-42
Bonn University
November 1984
ISSN-0172-8741

UNIVERSITÄT BONN

Physikalisches Institut

Konstruktion der Nicolai-Abbildung in supersymmetrischen Feldtheorien

Inauguraldissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn

vorgelegt von
Olaf Lechtenfeld

Post address:
Nussallee 12
D-5300 Bonn 1
W-Germany

BONN-IR-84-42
Bonn University
November 1984
ISSN-0172-8741

angefertigt mit Genehmigung
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Bonn

Referent: Prof. Dr. K. Dietz
Koreferent: Prof. Dr. R. Flume

INHALT Seite

1. Einleitung 2

2. Konstruktion der Nicolai-Abbildung für skalare Theorien 4

a) Die Erzeugende des Parameterflusses 7

b) Die fermionische Baumgraphenentwicklung 11

c) Konstruktionsbeweis der Nicolai-Abbildung 15

d) Dimensionale Reduktion und Stochastizität 19

3. Konstruktion der Nicolai-Abbildung für Eichfeldtheorien 25

a) Die R-Operation in der Wess-Zumino-Eichung 28

b) Aufbau der Nicolai-Abbildung in beliebiger Eichung 32

c) Stochastizität in Lichtkegeleichungen 40

4. Stochastische Variablen 47

5. Zusammenfassung und offene Probleme 54

Abbildungen 56

Literaturverzeichnis 60

Lebenslauf 62

1. Kapitel

EINLEITUNG

Zusammenhänge zwischen stochastischer Quantisierung (1) und Supersymmetrie (2) haben zunehmend an Bedeutung gewonnen. Dies wird verständlich, wenn man die fermionischen Freiheitsgrade supersymmetrischer Feldtheorien als geschickte Parametrisierung der dynamischen Symmetrie einer rein bosonischen Theorie interpretiert.

Die Möglichkeit, supersymmetrische Systeme ohne Rückgriff auf Fermionen aus stochastischen Prozessen zu konstruieren, wurde zuerst von Parisi und Sourlas (3,4) beobachtet. Der Ansatz einer lokalen stochastischen Gleichung lieferte an Lorentz-invarianten Feldtheorien jedoch nur das N=2 Wess-Zumino-Modell in zwei Dimensionen. Auf der anderen Seite schlug Nicolai (5) vor, das Verschwinden der Vakuumsenergie (6) ungebrochener global supersymmetrischer Theorien zu deren Charakterisierung über ihr funktionales Integrationsmaß zu verwenden. Er zeigte die Existenz einer (nichtlokalen und nichtlinearen) Feldtransformation zu neuen bosonischen Variablen, in denen das Integrationsmaß das einer freien Theorie ist. Zusätzlich sollte die Jacobi-Determinante dieser sogenannten Nicolai-Abbildung mit der durch Ausintegration der Fermionen erzeugten Matthews-Salam-Determinante (7) übereinstimmen (8). Da sich die bosonischen Feldvariablen einer freien und einer Gaußschen Theorie ("stochastische Variablen") nur durch die Wurzel des kinetischen Differentialoperators unterscheiden, ist zur Nicolai-Transformation stets eine stochastische Gleichung assoziiert. Letztere ist jedoch im allgemeinen nichtlokal (vom integrodifferentiellen Typ) und muß störungstheoretisch konstruiert werden.

Von besonderem Interesse sind supersymmetrische Eichtheorien, weil unter ihnen endliche Feldtheorien auftreten (9). De Alfaro, Fubini, Furlan und Veneziano (10) haben kürzlich

gezeigt, daß die N=1 Yang-Mills-Theorie in vier Dimensionen in Lichtkegeleichungen ein zweites Beispiel eines stochastischen Modells darstellt, also durch eine lokale stochastische Gleichung erzeugt wird.

Vor diesem Hintergrund erscheint es wünschenswert, die allgemeine Struktur der Nicolai-Transformation besser kennenzulernen, um die Suche nach den Spezialfällen stochastischer (oder vielleicht teilweise stochastischer) Theorien systematisch voranzutreiben. Genau dies ermöglicht die vorliegende Arbeit: Sie präsentiert eine perturbative Konstruktion der Nicolai-Abbildung für global supersymmetrische skalare und Eichfeldtheorien. Ausgehend von der Tatsache, daß sich die Wirkung hier als Supervariation ausdrücken läßt (6), leiten wir einen Generator infinitesimaler Parameterverschiebungen für physikalische Observable ab. Mit dessen Hilfe erstellen wir dann die Nicolai-Transformation als endlichen Parameterfluß aus der freien Theorie. Hierbei erläutern wir den Effekt von Eichtransformationen auf die Nicolai-Abbildung. Eine graphische Darstellung der letzteren durch fermionische Baumdiagramme vermittelt eine neuartige Form der Störungsreihe für Vakuumerwartungswerte. Anschließend reproduzieren wir die Stochastizität der beiden eingangs erwähnten Spezialfälle aus den Fixpunkteigenschaften der Transformation. Dieser Zusammenhang liefert, wie angestrebt, ein allgemeines Kriterium für den stochastischen Sektor supersymmetrischer Theorien.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: Kapitel 2 und 3 enthalten das gerade skizzierte Konstruktionsverfahren der Nicolai-Abbildung für skalare beziehungsweise Eichfeldtheorien. Im 4. Kapitel wenden wir das angesprochene Kriterium an, um stochastische Funktionale der N=1 Yang-Mills-Theorie in vier Dimensionen aufzusuchen. Abschließend fassen wir die wesentlichen Ergebnisse der Dissertation zusammen und geben einen Ausblick auf offene Probleme. Teile dieser Arbeit sind bereits innerhalb des vergangenen Jahres publiziert worden (11-13).

2. Kapitel

KONSTRUKTION DER NICOLAI-ABBILDUNG FÜR SKALARE THEORIEN

Wir beginnen mit einer kurzen Beschreibung der allgemeinsten skalaren supersymmetrischen Feldtheorie im vierdimensionalen Minkowski-Raum. Diese wird durch eine Anzahl von chiralen Superfeldern $\Phi_i(x,\theta)$, $i=1,\dots,n$, aufgebaut, welche jeweils ein komplexes Skalarfeld $\varphi_i(x)$, ein Weyl-Spinorfeld $\psi_{i\alpha}(x)$ und ein komplexes skalares Hilfsfeld $F_i(x)$ enthalten. Die antichiralen Superfelder $\Phi_i^+(x,\bar\theta)$ bestehen aus den entsprechenden adjungierten Komponenten. Wir übernehmen hier und im folgenden die Notation von Wess und Bagger (14). Theorien mit eingeschränktem Wertebereich der Feldvariablen (wie nichtlineare σ-Modelle) werden von der Betrachtung ausgenommen. Dann lautet die allgemeine Lagrangedichte in Superfeldern

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta\, \Phi_i^+ \Phi_i + \int d^2\theta\, V(\Phi_i) + \int d^2\bar\theta\, V^*(\Phi_i^+) \tag{2.1}$$

und in Komponentenfeldern

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = {} & -\partial_\mu \varphi_i^* \partial^\mu \varphi_i + i\,\psi_i \not\partial \bar\psi_i + F_i^* F_i \\ & + V_i(\varphi_k) F_i + V_i^*(\varphi_k^*) F_i^* - \tfrac{1}{2}\psi_i\psi_j V_{ij}(\varphi_k) - \tfrac{1}{2}\bar\psi_i\bar\psi_j V_{ij}^*(\varphi_k^*)\,,\end{aligned} \tag{2.2}$$

wobei wir annehmen, daß das Superpotential V analytisch in allen Feldvariablen ist. V_i bezeichnet die Ableitung von V nach φ_i, während "*" für komplexe Konjugation steht. Die Massen m_{ij} und die Kopplungskonstanten g_{ijk}, h_{ijkl} etc. werden als reell angenommen und treten linear im Superpotential auf:

$$V(\varphi_i) = \ell_i\varphi_i + \tfrac{1}{2}m_{ij}\varphi_i\varphi_j + \tfrac{1}{3}g_{ijk}\varphi_i\varphi_j\varphi_k + \tfrac{1}{4}h_{ijkl}\varphi_i\varphi_j\varphi_k\varphi_l \tag{2.3}$$

letztere werden repräsentativ im Multiindex λ zusammengefaßt. Wir untersuchen nur ungebrochene Supersymmetrien; in diesem Fall können die Parameter ℓ_i gleich Null gewählt werden. Die Forderung nach Renormierbarkeit würde den Grad von V auf drei beschränken. Wir werden jedoch den Aspekt der Renormierung nicht diskutieren und nehmen im folgenden an, daß das Renormierungsprogramm die Struktur unserer formalen Gleichungen nicht durch Induktion von Anomalien verändert. Die Wirkung

$$S = \int d^4x\; \mathcal{L}(x) \tag{2.4}$$

ist invariant unter globalen Supersymmetrietransformationen

$$\begin{aligned}
&\delta_\alpha \varphi_i = \psi_{i\alpha} && \bar\delta^{\dot\alpha}\varphi_i = 0 \\
&\delta_\alpha \varphi_i^* = 0 && \bar\delta^{\dot\alpha}\varphi_i^* = \bar\psi_i^{\dot\alpha} \\
&\delta_\alpha \psi_i^\beta = \delta_\alpha^{\ \beta} F_i && \bar\delta^{\dot\alpha}\psi_i^\beta = i\,\bar\sigma^{\dot\alpha\beta}\varphi_i \\
&\delta_\alpha \bar\psi_{i\dot\beta} = -i\,\sigma_{\alpha\dot\beta}\varphi_i^* && \bar\delta^{\dot\alpha}\bar\psi_{i\dot\beta} = \delta^{\dot\alpha}_{\ \dot\beta} F_i^* \\
&\delta_\alpha F_i = 0 && \bar\delta^{\dot\alpha} F_i = i\,\bar\sigma^{\dot\alpha\alpha}\psi_{i\alpha} \\
&\delta_\alpha F_i^* = -i\,\sigma_{\alpha\dot\alpha}\bar\psi_i^{\dot\alpha} && \bar\delta^{\dot\alpha} F_i^* = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

In dieser Schreibweise ist der Weyl-Spinor-Parameter $\xi(\bar\xi)$ der bosonischen Transformation $\delta_\xi = \xi^\alpha\delta_\alpha + \bar\xi_{\dot\alpha}\bar\delta^{\dot\alpha}$ bereits

abgespalten.

Da die Nicolai-Transformation im bosonischen Sektor der Theorie operiert, unterscheidsn wir zwei Mittelungsvorschriften für Funktionale X allein der bosonischen Felder φ_i :

$$(2.6) \qquad \langle\langle X \rangle\rangle = \int D\varphi_i \int D\psi_i \int DF_i \; e^{iS} \; X$$

bezeichnet den Vakuumerwartungswert von X bezüglich der Wirkung S. Um die Notation einheitlich zu gestalten, arbeiten wir im Minkowski-Raum und implizieren eine Wick-Rotation ins euklidische Gebiet, wo immer wir Begriffe der statistischen Mechanik benutzen. Einfache Klammern bezeichnen die Mittelung mit Hilfe des Maßes der rein bosonischen (nichtlokalen) Theorie, die wir nach Integration der fermionischen und Hilfsfelder erhalten:

$$(2.7) \qquad \langle X \rangle = \int D\varphi_i \; e^{i(S_b + S_f)} \; X =: \int D\mu[\varphi_i] \; X$$

mit

$$S_b = -\int d^4x \left\{ \partial_\mu \varphi_i^* \partial^\mu \varphi_i + V_i^*(\varphi_k^*) \, V_i(\varphi_k) \right\}(x)$$

$$(2.8) \qquad S_f = -\frac{i}{2} \ln \mathrm{Det}\,(i\mathcal{F})$$

$$\mathcal{F}[\varphi_i ; m_{ij}, \lambda] = \begin{pmatrix} V_{ij} & -i\not{\partial}\,\delta_{ij} \\ i\not{\partial}\,\delta_{ij} & V_{ij}^* \end{pmatrix} .$$

Die fermionische Determinante $\mathrm{Det}(i\mathcal{F})$ kann als formaler Ausdruck verstanden werden; um sie zu regularisieren, empfiehlt es sich, die Funktionalintegrationen als Superspuren zu lesen und periodische Randbedingungen in der Zeitkoordinate zu stellen.

a) Die Erzeugende des Parameterflusses

Nach diesen Vorbemerkungen beginnen wir nun mit der Konstruktion des Generators R der infinitesimalen Parameterverschiebung. Zu diesem Zweck betrachten wir die Reaktion von Vakuumerwartungswerten von Funktionalen $X[\varphi_i]$ auf Veränderungen der Kopplungsparameter λ

$$(2.9) \qquad \frac{\partial}{\partial\lambda} \langle\langle X \rangle\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \frac{\partial X}{\partial \lambda} \right\rangle\!\!\right\rangle + i \left\langle\!\!\left\langle X \frac{\partial S}{\partial \lambda} \right\rangle\!\!\right\rangle \; (*) .$$

An diesem Punkt setzt eine Beobachtung von Zumino (6) an: Da die Wirkung S die letzte Komponente eines Superfeldes darstellt, läßt sie sich immer als Supervariation der vorletzten Komponente schreiben:

$$S = \delta_\alpha \Delta^\alpha + \bar\delta^{\dot\alpha} \bar\Delta_{\dot\alpha}$$

$$(2.10) \qquad \Delta^\alpha = \tfrac{1}{4} \int \left[i \bar\psi_{i\dot\alpha} \bar\sigma^{\dot\alpha\alpha} \varphi_i + F_i^* \psi_i^\alpha \right] + \tfrac{1}{2} \int V_i \psi_i^\alpha$$

$$\bar\Delta_{\dot\alpha} = \tfrac{1}{4} \int \left[-i \psi_i^\alpha \sigma_{\alpha\dot\alpha} \varphi_i^* + F_i \bar\psi_{i\dot\alpha} \right] + \tfrac{1}{2} \int V_i^* \bar\psi_{i\dot\alpha} .$$

Das gilt dann natürlich auch für beliebige Ableitungen nach den Parametern λ:

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \delta_\alpha \Delta^\alpha_{(\lambda)} + \bar\delta^{\dot\alpha} \bar\Delta^{(\lambda)}_{\dot\alpha}$$

$$(2.11) \qquad \Delta^\alpha_{(\lambda)} = \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial\lambda} V_i(\varphi_k(x)) \, \psi_i^\alpha(x) \; d^4x$$

$$\bar\Delta^{(\lambda)}_{\dot\alpha} = \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial\lambda} V_i^*(\varphi_k^*(x)) \, \bar\psi_{i\dot\alpha}(x) \; d^4x .$$

(*) Die Differenzierbarkeit setzt voraus, daß wir uns im Rahmen der Störungstheorie bewegen. Vergleiche dazu (15).

Aus dieser Eigenschaft konnte Zumino auf das Verschwinden der Summe aller Vakuumdiagramme schließen. Wir setzen die gewonnenen Ausdrücke in (2.9) ein, führen eine partielle Integration durch

$$\langle\!\langle X\, \delta_\alpha \Delta^\alpha_{(\lambda)} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \Delta^\alpha_{(\lambda)}\, \delta_\alpha X \rangle\!\rangle + \langle\!\langle \delta_\alpha (\Delta^\alpha_{(\lambda)} X) \rangle\!\rangle \tag{2.12}$$

und benutzen die Ward-Identität der ungebrochenen Supersymmetrie

$$\langle\!\langle\, \delta_\alpha Y \rangle\!\rangle = 0 \tag{2.13}$$

um zu erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \langle\!\langle X \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \frac{\partial X}{\partial\lambda} \rangle\!\rangle + i \langle\!\langle \Delta^\alpha_{(\lambda)} \delta_\alpha X + \bar{\Delta}^{(\lambda)}_{\dot\alpha}\, \bar\delta^{\dot\alpha} X \rangle\!\rangle . \tag{2.14}$$

Für invariante Funktionale, die keine explizite Parameterabhängigkeit aufweisen, das heißt $\delta_\alpha X = \bar\delta^{\dot\alpha} X = \frac{\partial}{\partial\lambda} X = 0$, folgt, daß ihr Erwartungswert λ-unabhängig und damit gleich dem der freien Theorie ($\lambda=0$) ist. Der Fall $X=1$ reproduziert das ursprüngliche Resultat von Zumino ($\langle\!\langle 1 \rangle\!\rangle =: Z_{pert}$):

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \ln Z_{pert} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad Z_{pert}(\lambda) = Z_{pert}(0) = 1 , \tag{2.15}$$

also das Verschwinden der Vakuumsenergie innerhalb der Störungstheorie.

Weiter beobachten wir, daß die Supervariationen rein bosonischer Funktionale $X[\varphi_i]$ durch Funktionalableitungen ausgedrückt werden können,

$$\delta_\alpha X[\varphi_i] = \int d^4x\; \psi_{i\alpha}(x) \frac{\delta X[\varphi_i]}{\delta \varphi_i(x)} =: \int \psi_{i\alpha} X_i$$
$$\bar\delta^{\dot\alpha} X[\varphi_i] = \int d^4x\; \bar\psi_i^{\dot\alpha}(x) \frac{\delta X[\varphi_i]}{\delta \varphi_i^*(x)} =: \int \bar\psi_i^{\dot\alpha} X_i^* , \tag{2.16}$$

und schreiben (2.14) ganz explizit:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \langle\!\langle X \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \frac{\partial X}{\partial\lambda} \rangle\!\rangle + \frac{i}{2} \langle\!\langle \int \partial_\lambda V_i\, \psi_i^\alpha \int \psi_{j\alpha} X_j + \int \partial_\lambda V_i^*\, \bar\psi_{i\dot\alpha} \int \bar\psi_j^{\dot\alpha} X_j^* \rangle\!\rangle . \tag{2.17}$$

Hier ist die gesamte Wechselwirkung ersetzt durch die einfachere Struktur von $\Delta^\alpha_{(\lambda)}$. Dieser Gewinn würde durch Iteration der Gleichung in ihrer jetzigen Form wieder verlorengehen. Daher ist es notwendig, die Felder mit der komplizierteren Supervariation, also ψ_i^α und F_i, auszuintegrieren. Dies bereitet keine Probleme, da die Fermionen nur bilinear auftreten und nicht an die Hilfsfelder koppeln (im Gegensatz zu nichtlinearen σ-Modellen). Wegen

$$\int D\psi\; \psi(x)\, \psi(y)\; e^{-\frac{1}{2}\iint \psi(x)\, \sigma(x,y)\, \psi(y)} = \sigma^{-1}(x,y)\, [\mathrm{Det}\, \sigma]^{1/2} \tag{2.18}$$

finden wir

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \langle X \rangle = \langle R_\lambda X \rangle \quad ; \quad R_\lambda = \frac{\partial}{\partial\lambda} + \tilde R_\lambda$$

$$\tilde R_\lambda [\varphi_i, \frac{\delta}{\delta\varphi_i}] = \frac{1}{2} \int (\partial_\lambda V_i)(x)\, \psi_i^\alpha(x) \int \psi_{j\alpha}(y) \frac{\delta}{\delta\varphi_j(y)} + \text{h.c.} \tag{2.19}$$

wobei die Kontraktionen die Greensfunktionen der in den bosonischen Feldern φ_i propagierenden Fermionen andeuten:

(2.20) $$\mathcal{F}^{-1}_{ij}(x,y) = \begin{pmatrix} \psi_{i\alpha}(x)\,\psi_j^{\beta}(y) & \psi_{i\alpha}(x)\,\bar{\psi}_{j\dot{\beta}}(y) \\ \bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}}(x)\,\psi_j^{\beta}(y) & \bar{\psi}_i^{\dot{\alpha}}(x)\,\bar{\psi}_{j\dot{\beta}}(y) \end{pmatrix} .$$

Der bosonische nichtlokale (gewöhnliche und funktionale) Differentialoperator R_λ in (2.19) generiert also einen fermionischen Propagator von der "Quelle" $X_j(X_j^*)$ bis zur Einsetzung $\partial_\lambda V_i(\partial_\lambda V_i^*)$. Bezüglich der Spin-Indizes $\alpha, \dot{\alpha}$ ist dieser Propagator kurzgeschlossen, weist also eine Schleifenstruktur auf.

Es ist bekannt (16), daß für renormierbare Theorien des Typs (2.1)-(2.3) (Wess-Zumino-Modelle) eine Wellenfunktionsrenormierung Z_i ausreichend ist. Wir sehen, daß unter der üblichen Reskalierung

(2.21)
$$A_i = Z_i^{1/2} A_i^r \qquad A_i = \{\varphi_i, \psi_i, F_i\}$$
$$g_{ijk} = Z_i^{-1/2} Z_j^{-1/2} Z_k^{-1/2}\, g^r_{ijk}$$
$$m_{ij} = Z_i^{-1/2} Z_j^{-1/2}\, m^r_{ij}$$

$\Delta^{\alpha}_{(n)}$ und $\bar{\Delta}^{(n)}_{\dot{\alpha}}$ in (2.11) und damit die R_λ-Operation (2.19) in Σ homogen vom Grad 3/2 sind. Daher können wir die Parameterfluß-Gleichung (2.19) auch für die renormierten Größen schreiben. Der Operator R_λ kann damit als Erzeugender eines Flusses in den physikalischen Kopplungskonstanten $\lambda^r = \{g^r_{ijk}\}$ interpretiert werden. Die Analogie zur Diffusionsgleichung (λ^r übernimmt die Rolle des Zeitparameters) wird besonders deutlich, wenn wir das generierende Funktional

(2.22) $$Z[j_i] = \left\langle e^{\int d^4x\, [j_i(x)\,\varphi_i(x) + j_i^*(x)\,\varphi_i^*(x)]} \right\rangle$$

betrachten:

(2.23) $$\frac{\partial}{\partial\lambda} Z[j_i] = \tilde{R}_\lambda\left[\frac{\delta}{\delta j_i}, j_i\right] Z[j_i] .$$

b) Die fermionische Baumgraphenentwicklung

Die differentielle Beziehung (2.19) sollte uns in die Lage versetzen, den globalen Parameterfluß der Theorie durch Integration zu bestimmen, d.h., die Vakuumerwartungswerte bei unterschiedlichen Parameterwerten λ und λ_0 zueinander in Beziehung zu setzen. Wie bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung werden wir zu diesem Zweck (2.19) iterieren, um die Koeffizienten einer Taylor-Entwicklung von $\langle X\rangle(\lambda)$ um λ_0 zu ermitteln:

(2.24)
$$\langle X\rangle(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\lambda_0)^k}{k!} \left(\frac{\partial^k}{\partial\lambda'^k}\langle X\rangle(\lambda')\right)\Big|_{\lambda'=\lambda_0}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\lambda_0)^k}{k!} \left\langle \left(R^k_{\lambda'} X\right)\Big|_{\lambda'=\lambda_0}\right\rangle_0 .$$

Der Index "o" am Erwartungswert deutet an, daß hier über die bosonische Theorie bei $\lambda=\lambda_0$ zu mitteln ist:

(2.25)
$$\langle X\rangle_0 = \int D\varphi_i\, \mathrm{Det}\left(i\mathcal{F}^{(0)}\right)^{1/2} e^{iS_b^{(0)}} X =: \int D\mu_0[\varphi_i]\, X$$
$$\mathcal{F}^{(0)}_{ij} = \mathcal{F}_{ij}\big|_{\lambda=\lambda_0} \qquad S_b^{(0)} = S_b\big|_{\lambda=\lambda_0} .$$

Da diese Integration nur im Falle einer quadratischen Wirkung einfach auszuführen ist, werden wir im folgenden stets $\lambda_0 = 0$

setzen. Das entspricht einer Entwicklung um die freie massive Theorie

$$S_0^{(0)} = -\int d^4x \left\{ \partial_\mu \varphi_i^* \partial^\mu \varphi_i + m_{ij} m_{jk} \varphi_j^* \varphi_k \right\}(x)$$

(2.26)

$$\mathcal{F}_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} m_{ij} & -i\partial\!\!\!/\,\delta_{ij} \\ i\bar{\partial}\!\!\!/\,\delta_{ij} & m_{ij} \end{pmatrix} .$$

Um die Formeln nicht unnötig mit Indizes zu belasten, präsentieren wir den restlichen Teil der Konstruktion der Nicolai-Abbildung für ein einzelnes Superfeld (n=1). Der Leser kann bei Bedarf die Verallgemeinerung auf den Fall mehrer Superfelder problemlos vornehmen.

Um die R-Operation iterieren zu können, müssen wir uns zunächst Kenntnis über die implizite Abhängigkeit des Fermionpropagators $\mathcal{F}^{-1}$ von λ und φ verschaffen. Dazu ist es nützlich, die Spin-Spuren in (2.19) zu einer gemeinsamen Spur über die Indizes α und $\dot{\alpha}$ einer 4x4 Matrix zusammenzufassen ($V' = \frac{\partial V}{\partial \varphi}$, $V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$ etc.)

$$\widetilde{R} = -\frac{1}{2} t_r \int d^4x \int d^4y \begin{pmatrix} \partial_\lambda V' & 0 \\ 0 & \partial_\lambda V'^* \end{pmatrix}(x) \mathcal{F}^{-1}(x,y) \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta\varphi} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta\varphi^*} \end{pmatrix}(y) \qquad (2.27)$$

und in λ zu entwickeln

$$\mathcal{F}^{-1} = \begin{pmatrix} V'' & -i\partial\!\!\!/ \\ i\bar{\partial}\!\!\!/ & V''^* \end{pmatrix}^{-1} = \mathcal{F}^{(0)-1} - \int \mathcal{F}^{(0)-1} \begin{pmatrix} W'' & 0 \\ 0 & W''^* \end{pmatrix} \mathcal{F}^{(0)-1} + \ldots \qquad (2.28)$$

mit

$$\mathcal{F}^{(0)-1} = \begin{pmatrix} m & i\partial\!\!\!/ \\ -i\bar{\partial}\!\!\!/ & m \end{pmatrix} (\Box + m^2)^{-1}$$

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} m \varphi^2 + W(\varphi) \qquad (2.29)$$

Die Randbedingungen an $\mathcal{F}^{(0)-1}$ sind diejenigen, welche an die

Fermionen beim Mittelungsprozeß (2.5) gestellt werden. Eine graphische Darstellung dieser Entwicklung ist in Abbildung 1 für das Wess-Zumino-Modell wiedergegeben.

Um die Feynman-Diagramme abzuleiten, die sich bei wiederholter Anwendung von R ergeben, betrachten wir induktiv die Wirkung von R auf einen zu $R^k X$ gehörigen Graphen $\mathcal{G}[\varphi]$. Zunächst einmal wirkt $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ explizit auf die in W'' vorkommenden Parameter an den Vertizes der Propagatorwege (2.28) und verringert die Ordnung von $\mathcal{G}$ in λ. Dann erzeugt R die Diagramme eines neuen fermionischen Propagators $\mathcal{F}^{-1}$ mit Endpunkt $\partial_\lambda V'$ ($\partial_\lambda V'^*$) und heftet sie an folgenden Vertizes an $\mathcal{G}$ an:

a) an der "Quelle" $X^{(k)}$.

b) an den Endpunkten $\partial_\lambda V'^{(k)}$ oder $\partial_\lambda V'^{*(k)}$ der Propagatorwege von $\mathcal{G}$.

c) an den Vertices $W''^{(k)}$ oder $W''^{*(k)}$ der Propagatorwege von $\mathcal{G}$.

Der zusätzliche Ableitungsindex (k) deutet an, daß in früheren Anwendungen von R dort bereits nach φ differenziert worden sein mag. Sobald die Gesamtzahl der funktionalen Ableitungen an einem Vertex (Endpunkt) den Grad von V'' (V') erreicht, trägt dieser keine Feldabhängigkeit mehr und bietet natürlich keinen Ansatzpunkt für weitere Operationen von R. Die verschiedenen Wirkungen der R-Operation auf einen Ausschnitt von $\mathcal{G}$ sind in Abbildung 2 für ein einfaches Beispiel zusammengestellt.

Offenbar erzeugt die wiederholte Anwendung von R eine Vielzahl von Graphen, die aus freien fermionischen Propagatoren baumartig zusammengesetzt sind. Diese "fermionischen Bäume" wurzeln in den Ableitungen von X, weisen Verzweigungen auf und tragen an den Enden der "Äste" ein $\partial_\lambda V'$ bzw. $\partial_\lambda V'^*$. Die bosonischen Felder treten explizit an den Propagator-Nahtstellen und -Enden auf. Es kann jede mögliche Baumstruktur realisiert werden. In der Folge der Iterationen von R treten zudem für jedes Diagramm alle möglichen Spin-Spurbildungen entlang linear zusammenhängender Aststücke auf. Wertet man

nun gemäß (2.24) die derart gewonnenen Gebilde bei $\lambda'=0$ aus, so bleiben nur diejenigen Graphen, die genau so viele Vertizes besitzen wie die Ordnung k der Iteration beträgt. Das Ergebnis

$$\left(T_\lambda^{-1} X\right)[\varphi] = e^{\lambda R_{X'}} X[\varphi]\Big|_{\lambda'=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\, \mathcal{G}_k[\varphi]$$

(2.30)

$$\mathcal{G}_k[\varphi] = \left\{\text{fermionische Baumgraphen mit k Vertizes}\right\}$$

möchten wir als fermionische Baumgraphenentwicklung bezeichnen. Für ein generisches Beispiel sind ihre führenden Terme aus Abbildung 3 ablesbar.

Um die Störungsreihe für den Vakuumerwartungswert $\langle X\rangle$ zu erhalten, sind die Baumdiagramme noch bezüglich der freien bosonischen Theorie zu integrieren:

$$\langle X\rangle(\lambda) = \langle T_\lambda^{-1} X\rangle_0 \quad . \tag{2.31}$$

Dies entspricht dem paarweisen Verbinden aller bosonischen Felder an den Vertizes eines Graphen durch freie bosonische Propagatoren $(a+m^2)^{-1}$, wobei alle möglichen Paarkombinationen (φ,φ^*) zu berücksichtigen sind. Einige Diagramme für die Zweipunktsfunktion $\langle\varphi^*(x)\,\varphi(y)\rangle$ sind in Abbildung 4 wiedergegeben. Das Resultat der Mittelung weist weder bosonische Ein-Punkt-Schleifen noch fermionische Schleifen überhaupt auf. Das letztere ist eine wichtige Veränderung gegenüber der gewöhnlichen Störungsreihe, da die Fermionen (abgesehen von den Spinkontraktionen) wie klassische Felder auftreten. Zudem verhalten sich die aus den Baumgraphen gewonnenen Diagramme weniger ultraviolett-divergent, wie z.B. an Abbildung 4 ersichtlich ist. Das ist darauf zurückzuführen, daß die neue Störungsreihe in jeder Ordnung eine systematische Umformulierung der altbekannten Feynman-Graphen

darstellt, in der das Wegheben der führenden Ultraviolett-Divergenzen automatisch ist. Wie Nicolai (15) hervorhebt, besitzt die Baumgraphenentwicklung (2.30) vermutlich einen endlichen Konvergenzradius. Dies würde bedeuten, daß die "kombinatorischen Divergenzen" der normalen Störungstheorie hier von der abschließenden Mittelung über die freie Theorie herrühren. Der Vollständigkeit halber geben wir in Abbildung 5 die genauen Feynman-Regeln für $T_\lambda^{-1}\varphi$ an.

c) Konstruktionsbeweis der Nicolai-Abbildung

Wir möchten nun zeigen, daß die Baumgraphenentwicklung (2.30) eine graphische Realisation (des perturbativen Teils) der Nicolai-Abbildung ist. Dazu beobachten wir, daß aufgrund der Derivationseigenschaft des R-Operators die globale Transformation T_λ^{-1} im Raum der bosonischen Feldfunktionale distributiv wirkt:

$$T_\lambda^{-1} X[\varphi] = X[T_\lambda^{-1}\varphi] \quad . \tag{2.32}$$

Wir unterdrücken hier die externen Superfeld-Indizes von (2.19). Mit dem Funktionalmaß der rein bosonischen Theorie $D\mu[\varphi]$ können wir (2.31) ausführlicher formulieren:

$$\int D\mu[\varphi]\, X[\varphi] = \int D\mu_0[\varphi]\, X[T_\lambda^{-1}\varphi] \quad . \tag{2.33}$$

Um die Maße auf beiden Seiten zu vergleichen, substituieren wir $\varphi'=T_\lambda^{-1}\varphi$ und finden

$$\int D\mu[\varphi]\, X[\varphi] = \int D\mu_0[T_\lambda\varphi']\, X[\varphi'] \quad . \tag{2.34}$$

Da diese Relation für beliebiges X gültig ist, folgt, daß T_λ das Maß der wechselwirkenden Theorie in das der freien Theorie transformiert,

$$D\mu[\varphi] = D\mu_0[T_\lambda\varphi] \quad , \tag{2.35}$$

oder, mit (2.7),(2.8),(2.25),(2.26) und der Substitutionsregel für Integrale,

$$\mathrm{Det}\left(i\mathcal{F}[\varphi]\right)^{1/2} e^{iS_b[\varphi]} = \left|\mathrm{Det}\left(\frac{\delta T_\lambda\varphi}{\delta\varphi}\right)\right| \mathrm{Det}\left(i\mathcal{F}^{(0)}\right)^{1/2} e^{iS_b^{(0)}[T_\lambda\varphi]} \quad . \tag{2.36}$$

Hiermit haben wir für T bereits eine wesentliche Eigenschaft der Nicolai-Abbildung wiederentdeckt.

Falls $\varphi \mapsto T_\lambda\varphi$ tatsächlich die gewünschte Transformation darstellt, muß darüber hinaus noch gelten (5):

$$\begin{aligned} S_b[\varphi] &= S_b^{(0)}[T_\lambda\varphi] \\ \mathrm{Det}\left(\frac{\mathcal{F}[\varphi]}{\mathcal{F}^{(0)}}\right)^{1/2} &= \mathrm{Det}\left(\frac{\delta T_\lambda\varphi}{\delta\varphi}\right) \quad . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Da nach (2.36) bereits eine dieser Relationen die jeweils andere impliziert (*), genügt es zu zeigen

$$T_\lambda^{-1} S_b[\varphi] = S_b^{(0)}[\varphi] \quad , \tag{2.38}$$

was aufgrund der Struktur von T_λ^{-1} äquivalent ist zu

(*) In den hier betrachteten Theorien sind beide Determinanten positiv.

$$R_\lambda S_b[\varphi] = 0 \quad (*) \quad . \tag{2.39}$$

Unter Benutzung der expliziten Form (2.19) von R finden wir

$$R_\lambda S_b = -\int(\partial_\lambda V_i)V_i^* + \tfrac{1}{2}\int(\partial_\lambda V_i)\underbrace{\psi_i^\alpha \int \psi_{j\alpha}}\left[\Box\varphi_j^* - V_k^* V_{kj}\right] + h.c. \quad . \tag{2.40}$$

Nun verwenden wir zweimal die Definitionsgleichung des fermionischen Propagators

$$\begin{pmatrix} V_{ij}\,\delta_\alpha{}^\beta & -i\mathcal{F}_{\alpha\dot\beta}\,\delta_{ij} \\ i\bar{\mathcal{F}}^{\dot\alpha\beta}\,\delta_{ij} & V_{ij}^*\,\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \end{pmatrix}(x) \begin{pmatrix} \underbrace{\psi_{j\beta}\psi_k^*} & \underbrace{\psi_{j\beta}\bar\psi_{k\dot\rho}} \\ \underbrace{\bar\psi_j^{\dot\beta}\psi_k^*} & \underbrace{\bar\psi_j^{\dot\beta}\bar\psi_{k\dot\rho}} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} \delta_\alpha{}^\rho & 0 \\ 0 & \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\rho} \end{pmatrix}\delta_{jk}\,\delta^{(4)}(x-y) \tag{2.41}$$

in folgender Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \underbrace{\psi_{i\alpha}\psi_j^\alpha}\,\Box\varphi_j^* &= \underbrace{\psi_{i\alpha}\psi_j^\beta}\,\partial_{\beta\dot\beta}\bar\partial^{\dot\beta\alpha}\varphi_j^* \\ &= -i\,\underbrace{\psi_{i\alpha}\bar\psi_{k\dot\beta}}\,V_{kj}^*\,\bar\partial^{\dot\beta\alpha}\varphi_j^* \\ &= -i\,\underbrace{\psi_{i\alpha}\bar\psi_{k\dot\beta}}\,\bar\partial^{\dot\beta\alpha}\,V_k^* \\ &= -\delta_\alpha{}^\alpha V_i^* + \underbrace{\psi_{i\alpha}\psi_j^\alpha}\,V_{jk}V_k^* \quad . \end{aligned} \tag{2.42}$$

Einsetzen in (2.40) liefert dann das gewünschte Ergebnis (2.39). Damit ist der Konstruktionsbeweis für die Nicolai-Abbildung formal vollständig. Insbesondere ist es uns gelungen, die Gleichheit der Determinanten in (2.37) nachzu-

(*) Ich danke H. Nicolai für diese Bemerkung.

weisen (vgl. (8)). Damit diese Ableitung nicht rein formal bleibt, ist nachzutragen, daß die störungstheoretische Existenz von T_λ als Inversen der Potenzreihe (2.30) wegen der Struktur $T_\lambda^{-1} = id + O(\lambda)$ gesichert ist. In der Praxis kann $T_\lambda \varphi_i$ iterativ durch rekursives Einsetzen von niedrigeren in höhere λ-Ordnungen aus $T_\lambda^{-1} \varphi_i$ erhalten werden. Das Resultat weist wiederum die fermionische Baumgraphenstruktur auf, was auch aus Abbildung 6 hervorgeht.

Natürlich können wir aus der perturbativen Konstruktion von T_λ nur sehr limitierte Informationen über die globalen Eigenschaften der Abbildung ableiten. Unter Ausnutzung der diskreten Symmetrien des Superpotentials

$$V'(\pi_k(\varphi_i)) = V'(\varphi_k) \qquad (2.43)$$

läßt sich T_λ auf die Umgebung der übrigen Nullstellen von V' ("supersymmetrische Vakua") erweitern:

$$T_\lambda \pi_k(\varphi_i) = T_\lambda \varphi_k \quad . \qquad (2.44)$$

Dies zeigt deutlich die Mehrdeutigkeit einer global definierten inversen Transformation. Der Witten-Index (17) der skalaren Theorie als Windungszahl ihrer Nicolai-Abbildung (18) kann durch dimensionale Reduktion von vier nach null Dimensionen gewonnen werden (19). Diese resultiert in der Durchführung der folgenden Ersetzungen:

$$\varphi_i(x) \longmapsto \varphi_i \qquad S_b \longmapsto -V_i^* V_i$$

$$\psi_i^\alpha(x)\, \psi_{j\alpha}(y) \longmapsto -2 V_{ij}^{-1} \qquad (2.45)$$

$$\widehat{R}_\lambda \longmapsto -\partial_\lambda V_i \; V_{ij}^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi_j} - \partial_\lambda V_i^* \; V_{ij}^{*-1} \frac{\partial}{\partial \varphi_j^*} \quad .$$

Die Baumgraphenentwicklung für T_λ^{-1} reduziert sich zu einer gewöhnlichen Potenzreihe, deren Inverses

$$T_\lambda \varphi_i = \varphi_i + \lambda\, m_{ij}^{-1} (\partial_\chi V_j)\big|_{\chi=0} = \varphi_i + m_{ij}^{-1} W_j \qquad (2.46)$$

nach dem zweiten Term abbricht! Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Baumgraphenentwicklung in diesem Fall einfach durch die lokale Umkehrung der (in λ) linearen algebraischen Nicolai-Funktion (2.46) um einer ihrer Nullstellen erzeugt wird. Am globalen Resultat (2.46) läßt sich die Windungszahl von T_λ direkt als Grad der Abbildung $\varphi_i \longmapsto V_i$ ablesen. Die Substitution $\eta_i = V_i(\varphi_k)$ in der auf ein gewöhnliches Integral reduzierten Zustandssumme liefert unmittelbar das gleiche Ergebnis und zeigt die Konsistenz unseres Verfahrens mit anderen Resultaten (19).

d) Dimensionale Reduktion und Stochastizität

Die Linearität (in λ) der auf d=0 reduzierten Nicolai-Abbildung (2.46) ist nicht überraschend, da bereits die Reduktion auf zwei Dimensionen - und damit natürlich auch auf die Quantenmechanik - eine derartige Transformation liefern muß, um Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Parisi und Sourlas (3) zu erzielen. Um das Auftreten dieses Effekts und, umgekehrt, die Nichtexistenz einer lokalen stochastischen Differentialgleichung in anderen Modellen zu verstehen, wenden wir uns zum Ende dieses Kapitels der auf zwei Dimensionen reduzierten Theorie, das heißt dem N=2 d=2 supersymmetrischen skalaren Modell, mit n=1 zu.

Es wird sich als wichtig erweisen, daß die Lorentzgruppe in zwei Dimensionen abelsch ist und somit Spinoren samt Dirac-Weyl-Operator auf eindimensionale Darstellungen reduzibel sind. Daher transformieren wir in der Darstellung

($\gamma_0 = i\sigma_1$, $\gamma_1 = \sigma_2$) auf Lichtkegelvariablen

$$x_\pm = x_0 \pm x_1 \qquad \partial_\pm = \partial_0 \pm \partial_1 \tag{2.47}$$

und identifizieren

$$\begin{array}{llll} \varphi_+ = \varphi & \psi_+ = \psi_1 & \bar\psi_+ = \bar\psi_2 & V_+ = \frac{\partial V}{\partial \varphi} \\ \varphi_- = \varphi^* & \psi_- = \bar\psi_1 & \bar\psi_- = \psi_2 & V_- = \frac{\partial V^*}{\partial \varphi^*} \end{array} \quad \text{etc.} \tag{2.48}$$

so daß die Lagrangedichte lautet:

$$\mathcal{L} = -\partial_+\varphi_+\partial_-\varphi_- + \bar\psi_+\partial_+\psi_+ + \bar\psi_-\partial_-\psi_- - V_+V_- - \bar\psi_+\psi_- V_{--} - \bar\psi_-\psi_+ V_{++} \,. \tag{2.49}$$

Die N=2 Supersymmetrie-Transformationen der Wirkung $S=\int d^4x\, \mathcal{L}(\omega)$ sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

(2.50)

	δ_+	δ_-	$\bar\delta_+$	$\bar\delta_-$	$\delta=\delta_++\delta_-$
φ_+	ψ_+	0	$\bar\psi_-$	0	ψ_+
φ_-	0	ψ_-	0	$\bar\psi_+$	ψ_-
ψ_+	0	0	V_-	$\partial_-\varphi_+$	0
ψ_-	0	0	$\partial_+\varphi_-$	V_+	0
$\bar\psi_+$	$\partial_-\varphi_-$	$-V_+$	0	0	$\partial_-\varphi_- - V_+$
$\bar\psi_-$	$-V_-$	$\partial_+\varphi_+$	0	0	$\partial_+\varphi_+ - V_-$

Wie in vier Dimensionen läßt sich nun schreiben:

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda} = \delta_+\Delta_-^{(\lambda)} + \delta_-\Delta_+^{(\lambda)} \;; \quad \Delta_\pm^{(\lambda)} = \int (\partial_\lambda V_\mp)\bar\psi_\pm \tag{2.51}$$

oder:

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda} = \bar\delta_+\bar\Delta_-^{(\lambda)} + \bar\delta_-\bar\Delta_+^{(\lambda)} \;; \quad \bar\Delta_\pm^{(\lambda)} = -\int (\partial_\lambda V_\mp)\psi_\mp \,. \tag{2.52}$$

Darüber hinaus besteht die Freiheit, auch Linearkombinationen zu verwenden:

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda} = \cos^2\alpha\,\delta_+\Delta_-^{(\lambda)} + \sin^2\alpha\,\bar\delta_+\bar\Delta_-^{(\lambda)} + \cos^2\beta\,\delta_-\Delta_+^{(\lambda)} + \sin^2\beta\,\bar\delta_-\bar\Delta_+^{(\lambda)} \;; \tag{2.53}$$

da diese jedoch nur rotierten Koordinaten entsprechen und alle zum selben R_λ-Operator führen, wählen wir hier $\alpha=\beta=0$. Auf der anderen Seite finden wir

$$\delta_\pm\Delta_\pm^{(\lambda)} = \int \partial_\mp(\partial_\lambda V_\mp) = 0 \quad (*) \,, \tag{2.54}$$

was uns die Darstellung

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda} = \delta\Delta^{(\lambda)} \;; \quad \delta=\delta_++\delta_- \;; \quad \Delta^{(\lambda)} = \Delta_+^{(\lambda)} + \Delta_-^{(\lambda)} \tag{2.55}$$

ermöglicht. Somit ergibt sich für den Generator $R_\lambda = \frac{\partial}{\partial\lambda} + \tilde R_\lambda$ der Parameterverschiebung

(*) Wir betrachten nur topologisch triviale Feldkonfigurationen.

$$\widetilde{R}_\lambda = -\,\mathrm{tr}\iint \partial_\lambda \begin{pmatrix} V_- & 0 \\ 0 & V_+ \end{pmatrix} \mathcal{F}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta\varphi_+} & \frac{\delta}{\delta\varphi_+} \\ \frac{\delta}{\delta\varphi_-} & \frac{\delta}{\delta\varphi_-} \end{pmatrix}$$

(2.56)

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \partial_+ & V_{+-} \\ V_{-+} & \partial_- \end{pmatrix} .$$

Mit Hilfe der Rekursionsgleichung (wir setzen m=0)

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{(0)-1} - \int \mathcal{F}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & V_{+-} \\ V_{-+} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{F}^{(0)-1}$$

(2.57)

$$\mathcal{F}^{(0)} = \begin{pmatrix} \partial_+ & 0 \\ 0 & \partial_- \end{pmatrix}$$

und der Abkürzung

$$\int \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta\varphi_+} & \frac{\delta}{\delta\varphi_+} \\ \frac{\delta}{\delta\varphi_-} & \frac{\delta}{\delta\varphi_-} \end{pmatrix} \varphi_\pm = \rho_\pm \qquad (2.58)$$

finden wir

$$\begin{aligned} R_\lambda \varphi_\pm &= -\,\mathrm{tr}\int \partial_\lambda \begin{pmatrix} V_- & 0 \\ 0 & V_+ \end{pmatrix} \mathcal{F}^{-1} \rho_\pm \\ &= -\,\mathrm{tr}\int \partial_\lambda \begin{pmatrix} V_- & 0 \\ 0 & V_+ \end{pmatrix} \mathcal{F}^{(0)-1} \rho_\pm + \mathrm{tr}\iint \partial_\lambda \begin{pmatrix} V_- & 0 \\ 0 & V_+ \end{pmatrix} \mathcal{F}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & V_{+-} \\ V_{-+} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{F}^{(0)-1} \rho_\pm \qquad (2.59) \\ &= -\,R_\lambda \left[\mathrm{tr}\int \begin{pmatrix} V_- & 0 \\ 0 & V_+ \end{pmatrix} \mathcal{F}^{(0)-1} \rho_\pm \right] , \end{aligned}$$

woraus folgt

$$R_\lambda \left[\varphi_\pm(x) - \int d^2y \; \partial_\pm^{-1}(x-y)\, V_\mp(\varphi_\mp(y)) \right] = 0 . \qquad (2.60)$$

Dies konstituiert einen Fixpunkt von T_λ^{-1},

$$T_\lambda^{-1}\left[\varphi_\pm - \int \partial_\pm^{-1} V_\mp\right] = \left[\varphi_\pm - \int \partial_\pm^{-1} V_\mp\right]\Big|_{\lambda=0} = \varphi_\pm , \qquad (2.61)$$

und damit eine in λ lineare Nicolai-Abbildung

$$T_\lambda \varphi_\pm(x) = \varphi_\pm(x) - \int d^2y \; \partial_\pm^{-1}(x-y)\, V_\mp(\varphi_\mp(y)) . \qquad (2.62)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Potenzreihe für $T_\lambda^{-1}\varphi_\pm$ aus der iterativen Inversion dieser Abbildung entsteht.

Beseitigen wir die Nichtlokalität in (2.62) durch Anwendung des Differentialoperators $\partial_\pm$, so erhalten wir die bekannte (lokale) stochastische Differentialgleichung (3)

$$\partial_\pm T_\lambda \varphi_\pm =: \eta_\pm = \partial_\pm \varphi_\pm - V_\mp(\varphi_\mp) . \qquad (2.63)$$

Die Baumgraphenentwicklung $T_\lambda^{-1}\varphi_\pm$, ausgedrückt in der stochastischen Variablen $\eta_\pm$,

$$\varphi_{\eta\pm} = T_\lambda^{-1}\left(\partial_\pm^{-1}\eta_\pm\right) \qquad (2.64)$$

ist identisch mit der von Cecotti und Girardello (4) vorgeschlagenen sogenannten infradiagrammatischen Entwicklung für die Lösung $\varphi_{\eta\pm}$ von (2.63) und zeigt am deutlichsten den stochastischen Prozeß, der in diesem Fall die Dynamik der Theorie bestimmt:

$$\langle X[\varphi_\pm] \rangle = \int D\eta_\pm \; X[\varphi_{\eta\pm}]\; e^{-i\int \eta_+\eta_-} . \qquad (2.65)$$

Wie generell bei stochastischen Gleichungen, so liefert auch hier die Zeitumkehr den rückwärts ablaufenden Prozeß

(2.66) $$\bar{\eta}_{\pm} = \partial_{\pm}\varphi_{\pm} + V_{\mp}(\varphi_{\mp}) \quad ,$$

den wir anstelle von (2.63), jedoch nicht gleichzeitig benutzen können. Gemischte Größen wie die bosonische Vakuumsenergie $\eta_{\pm}\bar{\eta}_{\mp}$ sind daher im allgemeinen nicht stochastisch.

Rückblickend ist festzustellen, daß für die Existenz eines solchen stochastischen Prozesses in skalaren Theorien sowohl die Trivialität des Spins als auch die komplexe Struktur von Basis- und Feldraum (vgl.(2.54)) notwendig erscheint: In N=1, d=2 und d=4, skalaren Theorien ist durch die Baumgraphenentwicklung insbesondere deshalb kein Markov-Prozeß gegeben, weil durch die Schleifenstruktur im Spinraum Anfang und Ende eines fermionischen Propagatorweges direkt miteinander verknüpft sind. Damit sind diese Modelle nicht durch lokale stochastische Gleichungen erzeugbar.

3. Kapitel

KONSTRUKTION DER NICOLAI-ABBILDUNG FÜR EICHFELDTHEORIEN

Es liegt nahe, die im zweiten Kapitel anhand skalarer Theorien vorgestellte Methode auf den phenomenologisch interessanteren Fall einer Eichfeldtheorie zu erweitern. Das einfachste nichttriviale Beispiel einer solchen ist durch eine N=1 supersymmetrische Yang-Mills-Theorie gegeben, und es wird genügen, dieses explizit zu behandeln, um die gegenüber den skalaren Modellen neu auftretenden Probleme zu diskutieren. Diese Vorgehensweise dient der Klarheit der Darstellung und ermöglicht es dem Leser, nahezu alle Ergebnisse dieses Abschnitts auf erweiterte supersymmetrische Eichtheorien oder Modelle mit eichinvariant angekoppelten Materiefeldern auszudehnen. Dazu wird nur die Voraussetzung benötigt, daß sich die Ableitungen der supersymmetrischen und eichinvarianten Wirkung S_{inv} nach allen Parametern λ als Supervariationen schreiben lassen, was bei Existenz einer "off-shell"-Formulierung der Supersymmetrie immer gewährleistet ist. Bei Wahl der Wess-Zumino-Eichung sind wir dann allerdings an eine bestimmte Skalierung der Eich-Kopplungskonstanten g gebunden, da die ursprünglich linearen Supersymmetrie-Transformationen durch Ergänzen einer speziellen Eichtransformation ("Kovariantisierung") nichtlinear werden. Von anderen Skalierungen wird später noch die Rede sein.

Die supersymmetrische N=1 Yang-Mills-Theorie in vier Dimensionen enthält Eichfelder A^a_μ, Weyl-Spinoren ψ^a_α und reelle skalare Hilfsfelder D^a. Der Farbindex a zählt die Felder in der adjungierten Darstellung der Eichgruppe und wird im folgenden unterdrückt. Bei bilinearen Feldausdrücken an einem Raum-Zeit-Punkt ist stets ein Skalarprodukt im Farbraum impliziert (Summe über a),

(3.1) $$\varphi(x)\,\psi(x) = \varphi^a(x)\,\psi^a(x) ,$$

es sei denn, ein diesbezügliches Kreuzprodukt ist ausdrücklich angedeutet (Summe über a,b,c),

(3.2) $$\varphi(x)\,\psi(x) \times \chi(x) = f^{abc}\,\varphi^a(x)\,\psi^b(x)\,\chi^c(x) ,$$

wobei f^{abc} für die Strukturkonstanten der Eichgruppe steht. Fermionische wie bosonische Freiheitsgrade sind Bestandteile eines chiralen Multipletts W_α, in Wess-Zumino-Eichung:

(3.3) $$W_\alpha = -i\psi_\alpha + \left[-i\sigma^{\mu\nu}_{\alpha}{}^{\beta}F_{\mu\nu} + \delta_\alpha{}^\beta D\right]\theta_\beta + \theta^2 \not{\partial}_{\alpha\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha} .$$

Wir führen hier den Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ und die kovariante Ableitung D_μ ein:

(3.4) $$F_{\mu\nu} = [D_\mu , D_\nu] = \partial_{[\mu}A_{\nu]} + A_\mu \times A_\nu$$
$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu{}^\times .$$

Aus W_α läßt sich leicht die explizite Form der Supervariationen ableiten,

(3.5)
$$\delta_\alpha A_\mu = -i\sigma_{\mu\alpha\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha} \qquad \bar\delta^{\dot\alpha}A_\mu = -i\bar\sigma_\mu^{\dot\alpha\alpha}\psi_\alpha$$
$$\delta_\alpha \psi^\beta = -\sigma^{\mu\nu}_{\alpha}{}^{\beta}F_{\mu\nu} - i\delta_\alpha{}^\beta D \qquad \bar\delta^{\dot\alpha}\psi^\beta = 0$$
$$\delta_\alpha \bar\psi_{\dot\beta} = 0 \qquad \bar\delta^{\dot\alpha}\bar\psi_{\dot\beta} = -\bar\sigma^{\mu\nu\dot\alpha}{}_{\dot\beta}F_{\mu\nu} - i\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta}D$$
$$\delta_\alpha D = \not{\partial}_{\alpha\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha} \qquad \bar\delta^{\dot\alpha}D = \not{\partial}^{\dot\alpha\alpha}\psi_\alpha$$

und die (eich- und super)invariante Lagrangedichte gewinnen:

(3.6) $$\mathcal{L}_{inv} = \frac{1}{4}\left\{\int d^2\theta\, W^\alpha W_\alpha + \int d^2\bar\theta\, \bar W_{\dot\alpha}\bar W^{\dot\alpha}\right\}$$
$$= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\psi\not{\partial}\bar\psi + \frac{1}{2}D^2 .$$

Die noch verbleibende Eichfreiheit behandeln wir nach Fadeev und Popov und addieren nach t'Hooft-Mittelung zur Lagrangedichte einen Eichfixierungsterm

(3.7) $$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\alpha}G^2(A) + g\,\bar c\,\frac{\partial G}{\partial A_\mu}D_\mu c ,$$

welcher die Eichfixierungsfunktion

(3.8) $$G(A) = G^\mu A_\mu + \mathcal{O}(A^2) ,$$

einen Mittelungsparameter $\alpha \in \mathbb{R}^+$ und die Fadeev-Popov-Geistfelder c enthält. Die Felder sind so skaliert, daß die Kopplungskonstante g in der Wirkung S (abgesehen von obigem Geist-Term) lediglich in einem generellen Faktor $1/g^2$ auftritt:

(3.9) $$S = \frac{1}{g^2}\int d^4x\,\left(\mathcal{L}_{inv}(x) + \mathcal{L}_{gf}(x)\right) .$$

Der Grund für die ungewöhnliche Wahl der Geistfeld-Skalierung wird später ersichtlich werden (in (3.12)). $\mathcal{L}_{gf}$ bricht die Supersymmetrie von $\mathcal{L}_{inv}$ explizit und reduziert die Eichinvarianz auf eine BRS-Invarianz unter folgenden (Slavnov-)Variationen:

$$
\begin{aligned}
s A_\mu &= \sqrt{g}\, D_\mu c & s\, \mathcal{D} &= \sqrt{g}\, \mathcal{D} \times c \\
s \psi &= \sqrt{g}\, \psi \times c & s\, c &= \tfrac{1}{2}\sqrt{g}\, c \times c \\
s \bar{\psi} &= \sqrt{g}\, \bar{\psi} \times c & s\, \bar{c} &= \tfrac{1}{\alpha}\tfrac{1}{\sqrt{g}}\, G(A)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

a) Die R-Operation in der Wess-Zumino-Eichung

Wir werden nun die Erzeugende R der g-Verschiebung für die N=1 Yang-Mills-Theorie ableiten. Wie im Falle skalarer Theorien schließen wir zunächst aus der Superfeld-Struktur:

$$
\int \mathcal{L}_{inv} = \tfrac{1}{2}\left(\delta_\alpha \Delta^\alpha + \bar{\delta}^{\dot\alpha} \bar{\Delta}_{\dot\alpha} \right)
$$

$$
\Delta^\alpha = -\tfrac{1}{4} \int d^4x \; \psi^\beta(x) \left(\sigma^{\mu\nu}{}_\beta{}^\alpha F_{\mu\nu}(x) - i\, \delta_\beta{}^\alpha \mathcal{D}(x) \right) \tag{3.11}
$$

$$
\bar{\Delta}_{\dot\alpha} = -\tfrac{1}{4} \int d^4x \; \bar{\psi}_{\dot\beta}(x) \left(\bar{\sigma}^{\mu\nu\dot\beta}{}_{\dot\alpha} F_{\mu\nu}(x) - i\, \delta^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} \mathcal{D}(x) \right)
$$

Vermöge

$$
\frac{\partial}{\partial g} \left(\tfrac{1}{g^2} \int \mathcal{L}_{gf} \right) = g^{-5/2}\, s \int \bar{c}\, G \tag{3.12}
$$

- hier geht die Skalierung der Geistfelder ein - finden wir

$$
\frac{\partial S}{\partial g} = -\frac{1}{g^3} \left(\delta_\alpha \Delta^\alpha + \bar{\delta}^{\dot\alpha} \bar{\Delta}_{\dot\alpha} - \sqrt{g}\, s \int \bar{c}\, G \right) \tag{3.13}
$$

Die g-Abhängigkeit der Vakuumerwartungswerte von Funktionalen X(A) des Eichfeldes allein,

$$
\langle\!\langle X \rangle\!\rangle = \int DA \int D\psi \int D\mathcal{D} \int Dc \;\; e^{iS}\, X \,, \tag{3.14}
$$

ergibt sich dann als

$$
\frac{\partial}{\partial g} \langle\!\langle X \rangle\!\rangle = \left\langle\!\!\left\langle \frac{\partial X}{\partial g} \right\rangle\!\!\right\rangle - \frac{i}{g^3} \left\langle\!\!\left\langle X \left(\delta_\alpha \Delta^\alpha + \bar{\delta}^{\dot\alpha} \bar{\Delta}_{\dot\alpha} - \sqrt{g}\, s \int \bar{c}\, G \right) \right\rangle\!\!\right\rangle . \tag{3.15}
$$

Um die Variationen auf das Funktional X wirken zu lassen, benötigen wir die Ward-Identitäten für Supersymmetrie und BRS-Invarianz (*). Während für die letztere gilt

$$
\langle\!\langle s\, Y \rangle\!\rangle = 0 \,, \tag{3.16}
$$

wird die Relation für die Supersymmetrie wegen

$$
\delta_\alpha \int \mathcal{L}_{gf} = -\sqrt{g}\, s \int \bar{c}\, \delta_\alpha G \tag{3.17}
$$

etwas modifiziert:

$$
\langle\!\langle \delta_\alpha Y \rangle\!\rangle = i g^{-3/2} \langle\!\langle \delta_\alpha \left(\int \bar{c}\, G \right) s\, Y \rangle\!\rangle . \tag{3.18}
$$

Damit erhalten wir aufgrund der Eichinvarianz von $\Delta^\alpha(\bar{\Delta}_{\dot\alpha})$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial g} \langle\!\langle X \rangle\!\rangle &= \left\langle\!\!\left\langle \frac{\partial X}{\partial g} \right\rangle\!\!\right\rangle - \frac{i}{g^3} \langle\!\langle \left(\Delta^\alpha \delta_\alpha + \bar{\Delta}_{\dot\alpha} \bar{\delta}^{\dot\alpha} \right) X \rangle\!\rangle \\
&\quad - \frac{i}{g^3} \left\langle\!\!\left\langle \left[-i g^{-1/2} \left(\Delta^\alpha \delta_\alpha + \bar{\Delta}_{\dot\alpha} \bar{\delta}^{\dot\alpha} \right) \int \bar{c}\, G - g^{1/2} \int \bar{c}\, G \right] s X \right\rangle\!\!\right\rangle .
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

(*) Wiederum geht die Annahme der Freiheit von Anomalien ein.

Für reine Eichfeldfunktionale X(A) gilt

$$\delta_\alpha X = -i \int d^4x \; \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} \bar\psi^{\dot\alpha}(x) \frac{\delta X}{\delta A^\mu(x)}$$

$$\bar\delta^{\dot\alpha} X = -i \int d^4x \; \bar\sigma_\mu^{\dot\alpha\alpha} \psi_\alpha(x) \frac{\delta X}{\delta A_\mu(x)} \qquad (3.20)$$

$$s X = \sqrt{q} \int d^4x \; D_\mu c(x) \frac{\delta X}{\delta A_\mu(x)} \; .$$

Weil die Fermionen (Geister eingeschlossen) nur bilinear auftreten und nicht an das Hilfsfeld $\mathcal{D}$ koppeln, lassen sich alle Integrationen außer der über das Eichfeld leicht ausführen. Dies liefert Erwartungswerte

$$\langle X \rangle = \int DA \; \mathrm{Det}\left(-\frac{i}{q}\frac{\partial G}{\partial A_\mu} D_\mu\right) \mathrm{Det}\left(-\frac{1}{q^2}\mathcal{D}\right) e^{iS_b} X$$

(3.21)

$$S_b = -\frac{1}{q^2}\int d^4x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\alpha} G(A)^2 \right\}$$

und fermionische Propagatoren

$$\bar\psi^{\dot\alpha}(x) \; \psi^\beta(y) = (i\mathcal{D})^{-1\,\dot\alpha\beta}(x,y)$$

$$\psi_\alpha(x) \; \bar\psi_{\dot\beta}(y) = (-i\bar{\mathcal{D}})^{-1}_{\alpha\dot\beta}(x,y) \qquad (3.22)$$

$$c(x) \; \bar c(y) = \left(-\frac{\partial G}{\partial A_\mu} D_\mu\right)^{-1}(x,y)$$

und erlaubt uns zu schreiben

$$\frac{\partial}{\partial g}\langle X\rangle = \langle RX\rangle \qquad (3.23)$$

mit

$$R = R_{inv} + R_{gf}$$

$$R_{inv} = \frac{\partial}{\partial g} - \frac{i}{g}\int d^4x \left(\Delta^\alpha \sigma_{\mu\alpha\dot\alpha}\bar\psi^{\dot\alpha}(x) + \bar\Delta_{\dot\alpha}\bar\sigma_\mu^{\dot\alpha\alpha}\psi_\alpha(x)\right)\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \qquad (3.24)$$

$$R_{gf} = g\int d^4x \int d^4y \; R_{inv}\left(\tfrac{1}{g}G\right)(x)\, \bar c(x)\, D_\mu c(y) \frac{\delta}{\delta A_\mu(y)} \; ,$$

$\Delta^\alpha(\bar\Delta_{\dot\alpha})$ resultiert aus der Integration über das Hilfsfeld $\mathcal{D}$:

$$\Delta^\alpha = -\frac{1}{4}\int d^4x \; \psi^\beta(x)\, \sigma^{\mu\nu}{}_\beta{}^\alpha F_{\mu\nu}(x)$$

$$\bar\Delta_{\dot\alpha} = -\frac{1}{4}\int d^4x \; \bar\psi_{\dot\beta}(x)\, \bar\sigma^{\mu\nu\,\dot\beta}{}_{\dot\alpha} F_{\mu\nu}(x) \; . \qquad (3.25)$$

Zwei Bemerkungen sind angebracht. Der Generator R besteht aus einem eichinvarianten Supervariationsteil R_{inv} und einem eichvarianten Slavnov-Variationsteil R_{gf}, dessen Effekt darin besteht, daß die gewählte Eichklasse G(A)=0 bei g-Verschiebung erhalten bleibt:

$$R\left(\frac{1}{g}G\right) = 0 \; . \qquad (3.26)$$

Wählen wir ein eichinvariantes Funktional X_{inv}, entfällt die (feldabhängige) Eichrotation R_{gf}, und wir erhalten eine eichinvariante Fluß-Gleichung

(3.27) $$\frac{\partial}{\partial g}\langle X_{inv}\rangle = \langle R_{inv}\, X_{inv}\rangle .$$

Diese ist auch ohne Einführung von $\mathcal{L}_{g,\xi}$ ableitbar: Da die Fadeev-Popov-Prozedur mit $\partial/\partial g$ und $\delta_\omega(\bar\delta A)$ kommutiert, brauchen wir das Volumen der Eichgruppe erst nach Ausnutzung der Ward-Identität $\ll\delta_\omega Y_{inv}\gg = 0$ abzuspalten und finden so für X_{inv} eine Analogie zu den skalaren Modellen. Für (nichtobservable) Erwartungswerte eichvarianter Funktionale jedoch läßt sich das Gruppenvolumen nicht abspalten; sie sind daher von der Wahl der Funktion G abhängig.

b) Aufbau der Nicolai-Abbildung in beliebiger Eichung

Mit der expliziten Kenntnis des Generators R haben wir jetzt die Möglichkeit, (3.23) aufzuintegrieren und die Nicolai-Abbildung der N=1 d=4 Yang-Mills-Theorie zu konstruieren. Zu diesem Zweck entwickeln wir den Vakuumerwartungswert $\langle X\rangle(g)$ um die freie Theorie (g=0):

(3.28)
$$\langle X\rangle(g) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^k}{k!}\left(\frac{\partial^k}{\partial g'^k}\langle X\rangle(g')\right)\Big|_{g'=0} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^k}{k!}\langle R^k(g')\,X\rangle(g')\Big|_{g'=0} .$$

Die Mittelwerte $\langle R^k(g')X\rangle$ sind wohldefiniert bei $g'=0$, nicht aber der Integrand oder das Maß $D\mu[A]$ separat, da

(3.29) $$R^k(g') = \mathcal{O}(g'^{-k}) \quad ; \quad S_b = \mathcal{O}(g'^{-2}) .$$

Um eine Feldtransformation $A \longmapsto T(g)A$ zu definieren, ist es

daher notwendig, eine Reskalierung

(3.30) $$A \longmapsto gA$$

vorzunehmen und skalierte Mittelungen einzuführen:

(3.31)
$$\langle X\rangle' = \int DA\ \mathrm{Det}\left(-i\frac{\partial G}{\partial A_\mu}D_\mu\right)'\mathrm{Det}(-\not\partial)'\, e^{iS_b'}X =: \int D\mu[A]\,X$$
$$\langle X\rangle_0' = \int DA\ \mathrm{Det}\left(-i\frac{\partial G}{\partial A_\mu}D_\mu\right)'\Big|_{g=0}\mathrm{Det}(-\not\partial)\, e^{iS_b'^{(\omega)}}X =: \int D\mu_0[A]\,X ,$$

wobei gestrichene Größen als nach (3.30) reskaliert zu verstehen sind, z.B.

(3.32)
$$G'(A) = G(gA) \qquad D_\mu' = \partial_\mu + g A_\mu^\kappa$$
$$S_b'[A] = S_b[gA] \qquad S_b'^{(\omega)}[A] = S_b[gA]\Big|_{g=\omega} .$$

Weil $DA\ D\psi\ D\bar\psi\ Dc$ invariant ist unter der Reskalierung

(3.33)
$$A \longmapsto gA$$
$$\psi \longmapsto g\psi$$
$$\bar\psi \longmapsto g\bar\psi$$
$$c \longmapsto \sqrt{g}\,c ,$$

haben wir die Jacobi-Determinante der Substitution (3.30) durch entsprechende Skalierung der Fadeev-Popov- und der Fermion-Determinante kompensiert, so daß die Zustandssumme g-unabhängig bleibt. Dann liest sich (3.28):

$$\langle X[A]\rangle'(g) = \langle X[g^{-1}A]\rangle(g)$$

$$= \Big\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k}{k!} R^k(g') X[g'^{-1}A] \Big\rangle(g')\Big|_{g'=0}$$

(3.34)

$$= \Big\langle \exp\big(g R(g')\big) X[g'^{-1}A]\Big|_{A\to g'A}\Big|_{g'=0} \Big\rangle_0'$$

$$=: \langle T^{-1}(g)\, X[A]\rangle_0' \quad .$$

Wie in skalaren Theorien wirkt $T^{-1}(g)$ distributiv:

$$T^{-1}(g)\, X[A] = X[T^{-1}(g)\, A] \quad , \tag{3.35}$$

woraus folgt

$$T^{-1}(g)\, A_\mu = \frac{1}{g} \exp\big(g R(g')\big) A_\mu\Big|_{A\to g'A}\Big|_{g'=0} \quad . \tag{3.36}$$

Wegen

$$\bar\delta^{\dot\alpha}\bar\Delta_{\dot\alpha} - \delta_\alpha \Delta^\alpha = -\frac{i}{2}\int F_{\mu\nu}\tilde F^{\mu\nu} = i\,\partial_\mu H^\mu$$

(3.37)

$$\tilde F^{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda}\ ; \quad H^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda}\big(A_\nu \partial_\rho A_\lambda + \tfrac{1}{3} A_\nu A_\rho A_\lambda\big)$$

macht es, da wir störungstheoretisch arbeiten, für (3.36) keinen Unterschied, in R ((3.24)) zu ersetzen

$$\tfrac{1}{2}\big(\underline{\Delta^\alpha}\delta_\alpha + \underline{\bar\Delta_{\dot\alpha}}\bar\delta^{\dot\alpha}\big) \longmapsto \cos^2\omega\ \underline{\Delta^\alpha}\delta_\alpha + \sin^2\omega\ \underline{\bar\Delta_{\dot\alpha}}\bar\delta^{\dot\alpha} \quad , \tag{3.38}$$

zum Beispiel also allein mit Δ^α $(\omega=0)$ oder $\bar\Delta_{\dot\alpha}$ $(\omega=\frac{\pi}{2})$ zu arbeiten. Für den Rest dieses Kapitels setzen wir $\omega=0$. Für eichinvariante Funktionale X_{inv} vereinfacht sich (3.36) zu

$$\langle X_{inv}[A]\rangle'(g) = \langle X[T_{inv}^{-1}(g)\, A]\rangle_0'$$

(3.39)

$$T_{inv}^{-1}(g) A_\mu = \frac{1}{g}\exp\big(g R_{inv}(g')\big) A_\mu\Big|_{A\to g'A}\Big|_{g'=0} \quad .$$

Nur die eichvarianten Funktionale X bilden eine genügend große Klasse, um aus (3.34) und (3.35), d.h.

$$\int D\mu[A]\, X[A] = \int D\mu_0[A]\, X[T^{-1}(g)A] \quad , \tag{3.40}$$

zu schließen

$$D\mu[A] = D\mu_0[T(g)A] \quad . \tag{3.41}$$

T(g) ist eine Nicolai-Abbildung, wenn separat gilt

$$S_b'[A] = S_b'^{(0)}[T(g)A]$$

(3.42)

$$\mathrm{Det}\Big(\mathcal{F}^{-1}\big(\mathcal{F}+g\mathcal{A}(x)\big)\Big)\,\mathrm{Det}\Big((G^\nu\partial_\nu)^{-1}\big(\tfrac{\partial G}{\partial A_\mu}D_\mu\big)^t\Big) = \Big|\mathrm{Det}\Big(\tfrac{\delta T(g)A}{\delta A}\Big)\Big| \quad .$$

Es kann gezeigt werden, daß T_{inv} beide Bedingungen nicht erfüllt und somit nur im Zusammenhang mit eichinvarianten Funktionalen die Rolle von T übernimmt. Die Eichrotation R_{inv} ist also notwendig, um (3.42) zu befriedigen. Da die zweite Bedingung mit (3.41),(3.32) aus der ersten folgt, genügt es zu zeigen:

$$RS_b[A] = 0 \tag{3.43}$$

Mit (3.26) ist bereits eine Hälfte bewiesen,

$$R\left(\frac{1}{g^2}\int \frac{1}{2\alpha} G^2\right) \quad ; \tag{3.44}$$

für den zweiten Teil,

$$R\left(\frac{1}{g^2}\int \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = 0 \quad , \tag{3.45}$$

verweisen wir auf das nächste Kapitel, wo diese Relation aus dem Kontext stochastischer Variablen resultiert.

Wie im Falle skalarer Theorien erlaubt die Potenzreihe (3.36) für $T^{-1}(g)A_\mu$ eine graphische Darstellung. Dazu beobachten wir, daß die Iteration des Generators

$$\begin{aligned} R &= R_{inv} + R_{gf} \\ \overleftarrow{R}_{inv} &= \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial g} - \frac{i}{2g}\int \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta A_\mu}\, \sigma_{\mu\dot\alpha}\, \underbrace{\bar\psi^{\dot\alpha}\int}\psi^\beta\, \sigma^{\rho\lambda}{}_\beta{}^\alpha F_{\rho\lambda} \\ \overleftarrow{R}_{gf} &= -g\int \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta A_\mu} D_\mu c \underbrace{\int \bar c}\left(\frac{1}{g}G\right)\overleftarrow{R}_{inv} \end{aligned} \tag{3.46}$$

fermionische Baumgraphen liefert, deren Äste sowohl aus Fermion- als auch aus Geist-Propagatoren zusammengesetzt sind und jeweils in $\sigma^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda}$ oder G enden. Eine gewisse Komplikation gegenüber dem Wess-Zumino-Modell wird durch die Farbspur und das Auftreten von σ-Matrizen an den Vertizes verursacht. Wir wenden uns nun dem Grundbaustein $T^{-1}(g)A_\mu$ zu (vgl. (3.35)). Aus der Eichinvarianz von R_{inv} und aus

$$R\left(\frac{1}{g}G\right) = 0 \quad ; \quad R_{inv}\left(\frac{1}{g}\sigma^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda}\right) = 0 \tag{3.47}$$

schließen wir, daß jede Iteration genau einen neuen Ast erzeugt, welcher an einem anderen Ast, jedoch niemals an dessen Ende, ansetzt. Damit besitzt jedes Diagramm von $R^k A_\mu$ genau k Äste und ist von der Ordnung g^{-k}. Bei der Propagation der Fermionen und Geister von der "Quelle" A_μ zu den Astenden können außerdem keine Geister von Fermionlinien abzweigen. Alle Graphen bauen sich also aus einem zusammenhängenden Geistpropagator-Grundgerüst mit angehefteten fermionischen Teilbäumen auf. Um Feynman-Regeln abzuleiten, haben wir den Effekt der Reskalierung $A \mapsto g'A$ und des Einsetzens in die freie Theorie $g'=0$ zu untersuchen: Propagatoren werden dabei durch diejenigen der freien Theorie ersetzt:

$$\begin{aligned} \underbrace{\bar\psi^{\dot\alpha}(x)\quad \psi^\beta(y)} &\longmapsto i\,\bar\partial^{\dot\alpha\beta}\,\Box^{-1}(x-y) \\ \underbrace{c(x)\quad \bar c(y)} &\longmapsto \left(-G^\mu\partial_\mu\right)^{-1}(x-y) \end{aligned} \tag{3.48}$$

lineare Fermion- und Geist-Bäume ergeben

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2g'}\,\mathrm{tr}\,\sigma^\mu\,\underbrace{\bar\psi\int}\psi\,\sigma^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda}\Big|_{A\to g'A}\Big|_{g'=0} &= A_\mu^T \\ -g'\,D_\mu c\underbrace{\int \bar c}\left(\frac{1}{g'}G\right)\overleftarrow{R}_{inv}\Big|_{A\to g'A}\Big|_{g'=0} &= A_\mu^L \quad , \end{aligned} \tag{3.49}$$

während (in linearen Eichungen) für allgemeine Astenden resultiert:

(*) Diese Relation wird in Kapitel 4 bewiesen und eingehend erläutert.

$$-\frac{i}{2g'}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}\,\bar\Psi^{\dot\alpha}\underbrace{\int\Psi^{\beta}\sigma^{\rho\lambda}{}_{\beta}{}^{\gamma}F_{\rho\lambda}}\Big|_{A\to g'A}\Big|_{g'=0} = -\tfrac{1}{2}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}\,\bar\sigma^{\lambda\dot\alpha\gamma}A^{T}_{\lambda}$$

(3.50)

$$-g'\frac{\partial G}{\partial A_{\mu}}\,\bar c\underbrace{\int c\,(\tfrac{1}{g'}G)}\,\overleftarrow{R}_{inv}\Big|_{A\to g'A}\Big|_{g'=0} = G^{\mu}\int\Box^{-1}(\partial\cdot A)\quad ;$$

A^{T}_{μ} und A^{L}_{μ} bezeichnen transversale und longitudinale Eichfeldkomponenten

$$A^{T}_{\mu} = A_{\mu} - \partial_{\mu}\int\Box^{-1}(\partial\cdot A)$$

(3.51)

$$A^{L}_{\mu} = \partial_{\mu}\int\Box^{-1}(\partial\cdot A)\quad .$$

Für den Aufbau von $T^{-1}_{inv}(g)$ mag man A^{T}_{μ} durch A_{μ} ersetzen, was der Wahl einer Landau-Eichung entspricht. Ein generisches Diagramm aus $T^{-1}(g)A_{\mu}$ ist in Abbildung 7 dargestellt; Feynman-Regeln für $T^{-1}_{inv}(g)$ finden sich in Abbildung 8.

Es besteht die Möglichkeit, die Reskalierung in (3.34) mit der Exponentiation des Generators zu vertauschen, das heißt, eine reskalierte R-Operation $R'(g)$ zu definieren, wobei jedoch die Eichinvarianz von R_{inv} verlorengeht. Dazu schreiben wir mit $\bar R[g;A] := \tilde R[g;gA]$:

$$\begin{aligned}
\langle X[g;A]\rangle'(g) &= \langle \exp g\Big(\frac{\partial}{\partial g'}+\tilde R[g';A]\Big)X[g';\tfrac{1}{g'}A]\Big|_{A\to g'A}\Big|_{g'=0}\rangle_0' \\
&= \langle \exp g\Big(\frac{\partial}{\partial g'}+\frac{\partial}{\partial g''}+\bar R[g'';\tfrac{1}{g'}A]\Big)X[g'';\tfrac{1}{g'}A]\Big|_{A\to g'A}\Big|_{g''=g'}\Big|_{g'=0}\rangle_0' \\
&= \langle \exp g\Big(-\int\frac{A_{\mu}}{g'^{2}}\frac{\delta}{\delta(\frac{1}{g'}A_{\mu})}+\frac{\partial}{\partial g''}+\bar R[g'';\tfrac{1}{g'}A]\Big)X[g'';\tfrac{1}{g'}A]\Big|_{A\to g'A}\Big|_{g''=g'}\Big|_{g'=0}\rangle_0' \\
&= \langle \exp g\Big(-\tfrac{1}{g'}[A_{\mu}\frac{\delta}{\delta A_{\mu}}+\frac{\partial}{\partial g'}+\tilde R[g';g'A]\Big)X[g';A]\Big|_{g'=0}\rangle_0' \\
&=: \langle \exp\big(g\,R'(g')\big)X[g';A]\Big|_{g'=0}\rangle_0' = \langle T^{-1}(g)X[g;A]\rangle_0' \quad .
\end{aligned}$$

(3.52)

Um auch in dieser Formulierung die Vereinfachungen (3.49)-(3.51) zu implementieren, benutzen wir

$$\sigma^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda} = \not\partial\not A - \partial\cdot A - \sigma^{\rho\lambda}A_{\rho}\times A_{\lambda}$$

(3.53)

und ermitteln $R'(g)$ für $\omega=0$:

$$\begin{aligned}
R'(g) &= \overleftarrow{R}'_{inv}(g) + \overleftarrow{R}'_{gf}(g) \\
\overleftarrow{R}'_{inv}(g) &= \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial g} - \frac{1}{g'}\int\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta A_{\mu}}\Big[A_{\mu}+\tfrac{i}{2}\,\mathrm{tr}\,\sigma_{\mu}\bar\Psi\underbrace{\int\Psi\,\sigma^{\rho\lambda}F'_{\rho\lambda}}\Big] \\
&= \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial g} + \frac{i}{2g}\,\mathrm{tr}\int\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta A_{\mu}}\sigma_{\mu}\bar\Psi\underbrace{\int\Psi}\Big[\partial\cdot A + g\,\sigma^{\rho\lambda}A_{\rho}\times A_{\lambda}\Big] \\
\overleftarrow{R}'_{gf}(g) &= -\int\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta A_{\mu}}D'_{\mu}c\underbrace{\int\bar c}\;G'\overleftarrow{R}'_{inv}(g)\quad ,
\end{aligned}$$

(3.54)

wobei "'" an die durchgeführte Reskalierung erinnern soll:

$$D'_{\mu} = \partial_{\mu} + g\,A_{\mu}\times\quad ;\quad F'_{\mu\nu} = \tfrac{1}{g}[D'_{\mu},D'_{\nu}]\quad ;\quad G'(A) = \tfrac{1}{g}\,G(gA)$$

$$\bar\Psi\underbrace{\quad}\Psi = (i\not D')^{-1}\quad ,\quad c\underbrace{\quad}\bar c = \Big(-\frac{\partial G}{\partial A_{\mu}}D_{\mu}\Big)'^{-1}\quad .$$

(3.55)

Man kann sich leicht überzeugen, daß $R'(g')$ bei $g'=0$ wohldefiniert ist und die Eichklasse erhält ($R'G'=0$).

$$T^{-1}(g)\,X = \exp\big(g\,R'(g')\big)\,X\Big|_{g'=0}$$

(3.56)

erzeugt eine alternative Baumgraphenentwicklung, welche Fermion- und Geist-Äste in beliebiger Abfolge enthält und der

Struktur der Entwicklung in skalaren Theorien recht nahekommt. Die zugehörigen Feynman-Regeln sind in Abbildung 9 zusammengefaßt. Die Landau-Eichung $G(A) = \partial \cdot A$, $\alpha \to 0$ führt zu der bemerkenswerten Vereinfachung

$$\overleftarrow{R'_{i\omega\nu}} = \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q} + \frac{i}{2} t_\tau \int \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta A_\mu} \sigma_\mu \bar{\Psi} \underbrace{\int \Psi \, \sigma^{\beta\lambda} A_\beta \times A_\lambda}_{\quad} \quad , \tag{3.57}$$

ein Resultat, das auf etwas anderem Wege bereits in (11) abgeleitet wurde. Ein wichtiger Unterschied der beiden Formulierungen (3.36) und (3.56) von $T^{-1}(g)$ zeigt sich bei der Diskussion eichinvarianter Funktionale $X_{i\omega\nu}$: Während es in der ersten Darstellung (mit R) genügte, $T_{i\omega\nu}^{-1}$ aus $R_{i\omega\nu}$ allein aufzubauen und somit keine Geist-Propagatoren auftreten, verlieren wir bei der zweiten Methode (mit R′) die Eichinvarianz bereits bei $R'_{i\omega\nu}$ $X_{i\omega\nu}$ und sind gezwungen, die Geister miteinzubeziehen.

Es bleibt nachzutragen, daß die Mittelung über die freie (abelsche) Theorie die übliche Störungsreihe in einer neuen Form reproduziert, in der weder Fermion- noch Geistschleifen auftreten. Wiederum ist das Verschwinden der führenden Ultraviolett-Divergenz eingebaut. Die nichtabelschen Eigenschaften der Theorie sind bereits vollständig in $T^{-1}(g)$ enthalten.

c) Stochastizität in Lichtkegeleichungen

Der vielleicht größte Unterschied zwischen den Generatoren R in der skalaren und der Eichtheorie besteht im Auftreten des Eichtransformationsterms R_{gf} in der letzteren. Da dieser von der generellen Nichtinvarianz der Eichfixierung G=0 unter Supersymmetrie in Wess-Zumino-Eichung herrührt, liegt es nahe, nach der Existenz einer mit Supersymmetrie verträglichen Eichung zu suchen. Dieses Problem wurde bereits von Mandelstam (9) erörtert mit dem Ergebnis, daß zwar keine Eichfixierung mit der vollen (eich-kovariantisierten) N=1 Supersymmetrie kompatibel ist, Lichtkegeleichungen jedoch von einer eingeschränkten Klasse von Supervariationen respektiert werden. Parametrisiert man die Super-Transformationen durch Weyl-Spinoren ε^α und wählt

$$G(A) = n \cdot A \quad ; \quad n^2 = 0 \quad , \tag{3.58}$$

so stellt die Invarianzforderung

$$\delta_\varepsilon G(A) = -i \varepsilon^\alpha n^\mu \sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}} \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}} = 0 \tag{3.59}$$

eine lineare Bedingung an ε^α dar. Um explizit zu werden, entscheiden wir uns für

$$n = (1,0,0,1) \quad \leftrightsquigarrow \quad G(A) = A_0 - A_3 \tag{3.60}$$

und lösen die Bedingung (3.59) durch $\varepsilon_S^\alpha = \delta_{\alpha S} \varepsilon$. Die durch ε_S^α vermittelten Supervariationen bezeichnen wir mit δ_S; sie realisieren eine mit der Eichwahl verträgliche "N=1/2" Supersymmetrie, die es uns erlaubt, nach dem Beispiel der skalaren Theorien fortzufahren.

Es ist sinnvoll, zu Lichtkegelvariablen

$$\begin{aligned} A_L &= A_0 - A_3 & \partial_L &= \partial_0 - \partial_3 \\ A_R &= A_0 + A_3 & \partial_R &= \partial_0 + \partial_3 \\ A_\pm &= A_1 \pm i A_2 & \partial_\pm &= \partial_1 \pm i \partial_2 \end{aligned} \tag{3.61}$$

überzugehen und "selbstduale" Feldstärken

$$F_i = -\left(F_{0i} + \tfrac{i}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,F_{jk}\right)$$

$$F_+ = F_1 + i\,F_2 = \tfrac{1}{g}\,[D_+, D_L]$$

(3.62)
$$F_- = F_1 - i\,F_2 = \tfrac{1}{g}\,[D_-, D_R]$$

$$F_3 = \tfrac{1}{2g}\left([D_R, D_L] + [D_+, D_-]\right)$$

mit

(3.63) $$D_\mu = \partial_\mu + g\,A_\mu{}^\times$$

einzuführen. Die reskalierte Wirkung lautet dann (nach Elimination der Hilfsfelder) unter Mißachtung von topologischen Randtermen:

(3.64) $$S_0 = \int d^4x \left\{\tfrac{1}{2}F_3^2 + \tfrac{1}{2}F_+F_- - i\,\psi^\alpha \not{D}_{\alpha\dot\alpha}\,\bar\psi^{\dot\alpha}\right\} .$$

Die Wahl der axialen Eichung $A_L=0$ ermöglicht es, die Eichbedingung anstelle über das Fadeev-Popov-Verfahren direkt durch ihr Einsetzen in die Wirkung und Weglassen des longitudinalen Freiheitsgrades in der Funktionalintegration zu implementieren. $S := S_0|_{A_L=0}$ ist damit invariant unter

(3.65)
$$\delta_s A_+ = 0 \qquad \delta_s \psi_1 = -F_3$$
$$\delta_s A_- = 2i\,\bar\psi_2 \qquad \delta_s \psi_2 = -F_+$$
$$\delta_s A_R = 2i\,\bar\psi_1 \qquad \delta_s \bar\psi_{\dot\alpha} = 0 .$$

Die Wirkung S läßt sich nicht als Supervariation schreiben; mit Hilfe von

(3.66)
$$\delta_s F_+ = 0 \qquad \delta_s F_3 = -i\,(\not{D}\bar\psi)_2$$
$$\delta_s F_- = 2i\,(\not{D}\bar\psi)_1 \qquad \delta_s (\not{D}\bar\psi)_\alpha = 0$$

ist dies aber für $\frac{\partial S}{\partial g}$ möglich (obwohl $\delta_s \frac{\partial S}{\partial g} \neq 0$):

$$\frac{\partial S}{\partial g} = \int d^4x \left\{F_3 \frac{\partial F_3}{\partial g} + \tfrac{1}{2}F_+\frac{\partial F_-}{\partial g} + i\,\psi_1 \frac{\partial}{\partial g}(\not{D}\bar\psi)_2 - i\,\psi_2 \frac{\partial}{\partial g}(\not{D}\bar\psi)_1\right\}$$

(3.67)
$$= \delta_s \Delta$$

$$\Delta = -\int\left[\frac{\partial F_3}{\partial g}\psi_1 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial F_-}{\partial g}\psi_2\right] = -\tfrac{1}{2}\int\left[A_+ \times A_-\psi_1 + A_- \times A_R\,\psi_2\right] .$$

Unter Benutzung der Ward-Identität der "N=1/2" Supersymmetrie ergibt sich für Vakuumerwartungswerte von Funktionalen $X[A]$ des Eichfeldes

(3.68) $$\frac{\partial}{\partial g}\langle\!\langle X\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \frac{\partial X}{\partial g}\rangle\!\rangle + i\,\langle\!\langle \Delta\,\delta_s X\rangle\!\rangle$$

und nach Integration über die fermionischen Freiheitsgrade

(3.69) $$\frac{\partial}{\partial g}\langle X\rangle = \langle R' X\rangle$$

$$R' = \frac{\partial}{\partial g} + \int\left[\frac{\partial F_3}{\partial g}\psi_1 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial F_-}{\partial g}\psi_2\right]\delta_s .$$

δ_ς ist hier als funktionaler Differentialoperator zu verstehen,

$$\delta_\varsigma = 2i \int \left[\bar{\psi}_1 \frac{\delta}{\delta A_R} + \bar{\psi}_2 \frac{\delta}{\delta A_-} \right] \quad , \tag{3.70}$$

und die fermionischen Propagatoren sind aus der Wirkung ablesbar:

$$\psi_\alpha(x) \left(i \not{\partial} \bar{\psi} \right)_\beta (y) = \varepsilon_{\alpha\beta} \delta^{(4)}(x-y) \quad . \tag{3.71}$$

Nach Entwicklung der Propagatoren $\psi_\alpha \bar{\psi}_\dot{\alpha}$ um die freie Theorie (g=0) können wir die fermionische Baumgraphenentwicklung

$$T^{-1}(g) X = \exp\left(g R'(g') \right) X \Big|_{g'=0} \tag{3.72}$$

ableiten ($\Box = \partial_L \partial_R - \partial_+ \partial_-$):

$$\begin{aligned} T^{-1} A_+ &= A_+ \\ T^{-1} A_- &= A_- + g \int \frac{\partial_-}{\Box} A_+ \times A_- + g \int \frac{\partial_L}{\Box} A_- \times A_R + O(g^2) \\ T^{-1} A_R &= A_R + g \int \frac{\partial_R}{\Box} A_+ \times A_- + g \int \frac{\partial_+}{\Box} A_- \times A_R + O(g^2) \end{aligned} \tag{3.73}$$

A_+ liegt im Kern von δ_ς und zeigt daher ein triviales Transformationsverhalten.

Bei der Inversion der Potenzreihe (3.73) stellen wir fest, daß die Transformation T(g) bereits nach dem zweiten Glied abbricht! Wir erhalten demnach eine (in g) lineare Nicolai-Abbildung

$$\begin{aligned} T A_+ &= A_+ \\ T A_- &= A_- - g \int \frac{\partial_-}{\Box} A_+ \times A_- - g \int \frac{\partial_L}{\Box} A_- \times A_R \\ T A_R &= A_R - g \int \frac{\partial_R}{\Box} A_+ \times A_- - g \int \frac{\partial_+}{\Box} A_- \times A_R \end{aligned} \tag{3.74}$$

Wie im Falle des N=2 d=2 Wess-Zumino-Modells (*) liefert die Differentiation, welche (A_+, A_-, A_R) nach $(F_+, F_-, F_3)|_{g=0}$ abbildet, eine lokale stochastische Differentialgleichung

$$\eta_i = F_i[A] \qquad i \in \{+,-,3\} \text{ oder } \{1,2,3\} \tag{3.75}$$

Die Existenz dieses stochastischen Prozesses wurde zuerst von de Alfaro, Fubini, Furlan und Veneziano (10) gezeigt. Man beachte, daß nicht nur die quadratische Form der bosonischen Wirkung (3.64) den richtigen Ansatz liefert, sondern auch die Übereinstimmung der Jacobi-Determinante der Transformation A↦F mit dem Produkt aus Fermion- und (trivialer) Fadeev-Popov-Determinante offenkundig ist:

$$\operatorname{Det} \begin{pmatrix} -\partial_L & 0 & 0 \\ 0 & -D_R & D_- \\ -D_- & D_+ & -\partial_L \end{pmatrix} = \operatorname{Det}(-\partial_L) \cdot \operatorname{Det} \begin{pmatrix} -D_R & D_- \\ D_+ & -\partial_L \end{pmatrix} \tag{3.76}$$

Dieses Argument ist rein formaler Natur, da die betrachteten Operatoren nicht hermitesch sind und somit die Regularisierung der Determinanten fragwürdig erscheint. Die Autoren von (10) haben vorgeschlagen, dieses Problem durch Übergang zu einer

(*) Diese Analogie ist besonders transparent in der dimensional reduzierten Version, der N=2 d=2 Yang-Mills-Theorie in Lichtkegeleichung.

O(2,2)-invarianten Metrik zu umgehen.

Die stochastische Gleichung (3.75) läßt sich auch aus den Fixpunkt-Eigenschaften von $T^{-1}(g)$ ableiten. Eine kurze Rechnung (12) führt mit (3.69),(3.66) und (3.71) auf

$$R' F_i[A] = 0 \qquad i \in \{+,-,3\} \quad , \tag{3.77}$$

was (3.75) impliziert. Wie im N=2 d=2 Wess-Zumino-Modell sind diese Resultate perturbativer Natur, da wir zu ihrer Ableitung die Wirkung in topologisch nichttrivialen Sektoren abändern mußten.

Der zeitlich umgekehrte stochastische Prozeß korrespondiert zur Benutzung der "anti-selbstdualen" Feldstärken F_i^* und wird durch

$$\bar{\eta}_i = F_i^*[A] \tag{3.78}$$

generiert. Entscheidend ist, daß jeweils nur drei der sechs unabhängigen Linearkombinationen der elektrischen und magnetischen Feldstärken Fixpunkte von T^{-1} bilden.

Gleichung (3.75) läßt sich natürlich auch in anderen Eichungen formulieren. Sie beschreibt dann allerdings keinen der gesamten Theorie zugrundeliegenden stochastischen Prozeß mehr, und die Rückführung auf eine lineare Nicolai-Abbildung ist wegen der Komplexität der Eichbedingung im Konfigurationsraum nicht mehr möglich. Vielmehr zeigen die Resultate in einer allgemeinen Eichung, daß T(g) ausschließlich in Lichtkegeleichungen polynomial ist. Auf den Nutzen der selbstdualen Feldstärken im Kontext beliebiger Eichungen werden wir im nächsten Kapitel noch zu sprechen kommen.

4. Kapitel

STOCHASTISCHE VARIABLEN

Nachdem wir die Nicolai-Abbildung konstruiert haben, sind wir in der Lage, eine Methode zur Bestimmung stochastischer Sektoren supersymmetrischer Theorien zu etablieren. Der stochastische Sektor wird aufgespannt von rein bosonischen Funktionalen K, deren Vakuumerwartungswerte $\langle K \rangle$ nicht von den Parametern λ der Theorie abhängen, also Invarianten des λ-Flusses sind,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \langle K \rangle = \langle R_\lambda X \rangle = 0 \quad , \tag{4.1}$$

und damit in der freien Theorie $\lambda = 0$ berechnet werden können:

$$\langle K \rangle(\lambda) = \langle K|_{\lambda=0} \rangle_0 \quad . \tag{4.2}$$

Ein solches Funktional bezeichnen wir als stochastisch, wenn der entsprechende Operator die Quantenzahlen des Vakuums trägt. Dadurch sind die Fälle trivial verschwindender Erwartungswerte ausgeschlossen. Eine hinreichende Bedingung für (4.1) ist offensichtlich die Annihilation durch den Generator R_λ der Parameterverschiebung

$$R_\lambda K = 0 \quad . \tag{4.3}$$

Diese wird beispielsweise erfüllt durch die bosonische Wirkung (vgl.(2.39)) oder die Nicolai-Transformierten beliebiger Funktionale X:

$$(4.4)\quad T_\lambda^{-1}\left(T_\lambda X\right) = X\big|_{\lambda=0} \;\leftrightarrow\; R_\lambda\left(T_\lambda X\right) = 0 \,.$$

Die Menge dieser Funktionale schöpft jedoch den stochastischen Sektor nicht aus, wie wir noch sehen werden.

Von besonderem Interesse sind lokale stochastische Variable, das heißt Funktionale

$$(4.5)\quad K[\varphi;x] = K(\varphi(x),x) \,.$$

In den durch stochastische Prozesse erzeugten Theorien lagen über die stochastische Gleichung

$$(4.6)\quad \eta(x) = K(\varphi(x),x)$$

bereits derartige stochastische Variablen vor. Ihre Greensfunktionen stellen Korrelationen von sogenanntem weißen Rauschen dar:

$$(4.7)\quad \left\langle \prod_{i=1}^{2n} \eta(x_i) \right\rangle = \sum_{j>k=1}^{2n} \delta(x_j - x_k) \left\langle \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j,k}}^{2n} \eta(x_i) \right\rangle \,.$$

Diese Relationen werden in (10) als stochastische Identitäten bezeichnet. Weiterhin fanden wir in der Eichfixierungsfunktion G(A) eine lokale stochastische Variable der Yang-Mills-Theorie vor, eine Beobachtung, die auf unsere Behandlung der Eichfreiheit zurückgeht.

Um Aussagen über physikalische Observablen zu gewinnen, widmen wir den Rest des Kapitels der systematischen Suche nach eichinvarianten stochastischen Variablen der N=1 d=4 Yang-Mills-Theorie. Dazu werten wir zunächst die hinreichende Bedingung (4.3) für eichinvariante Funktionale K[A] aus:

$$(4.8)\quad R_{inv}K = \left(\frac{\partial}{\partial q} + \frac{i}{4q}\,tr\int \psi\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\int \bar\sigma_f \bar\psi \frac{\delta}{\delta A_f} + \frac{i}{4q}\,tr\int \bar\psi\bar\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\int \sigma_f \psi \frac{\delta}{\delta A_f}\right)K = 0.$$

Da die stochastischen Funktionale einen linearen Raum bilden, genügt es, in g homogene Funktionale vom Grad p zu betrachten,

$$(4.9)\quad \frac{\partial K}{\partial g} = \frac{p}{g}K \,.$$

Dies führt zu einer homogenen Funktionaldifferentialgleichung, die ein Iterationsschema zuläßt:

$$(4.10)\quad K^{(n+1)} = \frac{i}{4p}\,tr\int \bar\sigma_f \frac{\delta K^{(n)}}{\delta A_f}\bar\psi\int\psi\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{i}{4p}\,tr\int\bar\sigma_f\frac{\delta K^{(n)}}{\delta A_f}\psi\int\bar\psi\bar\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \,.$$

Hier entsteht abermals eine Baumgraphenentwicklung, diesmal jedoch direkt für die Nicolai-Transformierte eines eichinvarianten K

$$(4.11)\quad K[gA] = \lim_{n\to\infty} K^{(n)}[gA] = T(g)\,K^{(0)}[gA] \,,$$

wie leicht nachzuprüfen ist.

In diesem Zusammenhang kommen wir zu einer wichtigen Beobachtung:

$$(4.12)\quad \begin{aligned} \sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\cdot\tfrac{i}{2}\,tr\int\bar\sigma_f\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta A_f}\bar\psi\int\psi\,\sigma^{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} &= -\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ \bar\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\cdot\tfrac{i}{2}\,tr\int\bar\sigma_f\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta A_f}\psi\int\bar\psi\,\bar\sigma^{\lambda\tau}F_{\lambda\tau} &= -\bar\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \,, \end{aligned}$$

ohne daß eine entsprechende Relation für die gemischten Produkte gilt. Bei Beschränkung auf Konfigurationen verschwindender topologischer Ladung sehen wir deshalb, daß nur für

$\omega=0$ oder $\omega=\frac{\pi}{2}$ mit $p=-1$ sofort ein stationärer Punkt der Iteration (4.10) eingefangen wird:

$$K_\alpha{}^\beta(x) = \frac{1}{g}\,\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta\, F_{\mu\nu}(x) \qquad [\omega=0]$$

(4.13)

$$\bar{K}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}(x) = \frac{1}{g}\,\bar\sigma^{\mu\nu\,\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\, F_{\mu\nu}(x) \qquad [\omega=\tfrac{\pi}{2}]\,,$$

also

$$R_{inv}(\omega=0)\; K_\alpha{}^\beta(x) = 0$$

(4.14)

$$R_{inv}(\omega=\tfrac{\pi}{2})\; \bar{K}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}(x) = 0\,.$$

In $K_\alpha{}^\beta$ und $\bar{K}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}$ verbergen sich gerade die selbstdualen beziehungsweise anti-selbstdualen Feldstärken

$$M_{\mu\nu} := -\,t_r\,\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda} = F_{\mu\nu} + i\,\tilde F_{\mu\nu}$$

(4.15)

$$M^*_{\mu\nu} := -\,t_r\,\bar\sigma_{\mu\nu}\bar\sigma^{\rho\lambda}F_{\rho\lambda} = F_{\mu\nu} - i\,\tilde F_{\mu\nu}\,,$$

welche in der Lichtkegeleichung mit den in (10) gefundenen stochastischen Variablen identisch sind (vgl.(3.75)).

Da $\frac{1}{g}M_{\mu\nu}$ und $\frac{1}{g}M^*_{\mu\nu}$ eichkovariante Größen sind, haben wir aus ihnen eichinvariante Ausdrücke zu bilden. Dabei sind wir nach Wahl von ω aber jeweils auf $\frac{1}{g}M_{\mu\nu}$ oder $\frac{1}{g}M^*_{\mu\nu}$ beschränkt, so daß sich alle eichinvarianten Funktionale

(4.16) $\quad K\left[\frac{1}{g}M_{\mu\nu}\right]\;;\quad \bar K\left[\frac{1}{g}M^*_{\mu\nu}\right]$

als stochastisch erweisen. Hinzu kommen dann auch beliebige Linearkombinationen von von K und $\bar K$, insbesondere die in $\tilde F_{\mu\nu}$ geraden und ungeraden Anteile der Zerlegung von K in Produkte gewöhnlicher Feldstärken $F_{\mu\nu}$ und $\tilde F_{\mu\nu}$:

$$K = K_{even} + K_{odd}$$

(4.17)

$$\frac{\partial}{\partial g}\langle K_{even}\rangle = \frac{\partial}{\partial g}\langle K_{odd}\rangle = 0\,.$$

Hier haben wir Beispiele stochastischer Funktionale vor uns, die durch kein $R(\omega)$ annihiliert werden. Der einfachste Fall dieser Art ist durch die bosonische invariante Lagrangedichte

$$-\frac{1}{4g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}(x) = \left(-\frac{1}{8g^2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)_{even}$$

(4.18)

gegeben, da mit $\omega=0$ gilt (siehe (3.37))

$$\begin{aligned} R\left(\frac{1}{g^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) &= R\left(\frac{1}{2g^2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)_{even} \\ &= -R\left(\frac{1}{2g^2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right)_{odd} \\ &= R\left(-\frac{i}{g^2}F_{\mu\nu}\tilde F^{\mu\nu}\right) \\ &= R\left(\frac{2i}{g^2}\partial_\mu H^\mu\right) \\ &= 2i\,\partial_\mu\left(R\,\frac{1}{g^2}H^\mu\right)\,, \end{aligned}$$

(4.19)

also

$$\frac{\partial}{\partial g}\left\langle \frac{1}{g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(x) \right\rangle = 0 \tag{4.20}$$

für einen homogenen und isotropen Grundzustand. Weil $\int (M_{\mu\nu} M^{\mu\nu})_{odd}$ demnach lediglich ein (topologisch signifikanter) Oberflächenterm ist, haben wir sogar

$$R\left(\frac{1}{g^2}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right) = R\left(\frac{1}{2g^2}\int M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\right) = 0 \,. \tag{4.21}$$

Dies vervollständigt den Beweis, daß T(g) aus (3.36) tatsächlich die Nicolai-Abbildung der Yang-Mills-Theorie ist. Weitere stochastische Variablen sind gerade und ungerade Anteile höherer Potenzen von $M_{\mu\nu}$ mit beliebiger Kontraktion der Lorentz- und Farbindizes, solange sie eichinvariant bleiben. Ihre Zerlegung in $F_{\mu\nu}$ und $\tilde{F}_{\mu\nu}$ zeigt, daß sie spezielle Linearkombinationen aller eichinvarianten Produkte einer festen Anzahl von Feldstärken sind, zum Beispiel

$$\begin{array}{ll} FFF & FF\tilde{F} \\ 6FFFF + 3(FF)^2 - 2F\tilde{F}F\tilde{F} & (FF)^2 - (F\tilde{F})^2 \\ FFF\tilde{F} & (F\tilde{F})(FF) \end{array} \tag{4.22}$$

Andere Linearkombinationen entstehen aus der Aufspaltung gemischter Produkte von $M_{\mu\nu}$ und $M^*_{\mu\nu}$, weshalb sie im allgemeinen nicht stochastisch sein können. Wiederum ein Beispiel: der Energie-Impuls-Tensor des Eichfeldes

$$\theta_\mu{}^\rho = \frac{1}{2} M^*_{\mu\nu} M^{\nu\rho} = F_{\mu\nu}F^{\nu\rho} + \frac{1}{4}\delta_\mu{}^\rho F_{\lambda\tau}F^{\lambda\tau} \tag{4.23}$$

ist genausowenig stochastisch wie die bosonische Energiedichte des N=2 d=2 Wess-Zumino-Modells.

Selbstverständlich bleiben beliebige Korrelationen

$$\left\langle K_{i_1}(x_1)\, K_{i_2}(x_2) \ldots K_{i_n}(x_n) \right\rangle \tag{4.24}$$

stochastischer Variablen g-unabhängig. Demgegenüber besitzen die eichkovarianten Greensfunktionen der selbstdualen Feldstärken $M_{\mu\nu}$ eine g-Abhängigkeit, die jedoch in einer Eichrotation enthalten ist:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial g}\left\langle \frac{1}{g} M_{\mu_1\nu_1}(x_1) \ldots \frac{1}{g} M_{\mu_n\nu_n}(x_n) \right\rangle \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \left\langle \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{1}{g} M_{\mu_i\nu_i}(x_i) \right) M_{\mu_k\nu_k}(x_k) \times \underbrace{C(x_k)} \int \bar{c}(y) \left(\frac{1}{g} G\right) \overleftarrow{R}_{imv} \right\rangle . \end{aligned} \tag{4.25}$$

In Lichtkegeleichungen verschwindet diese Eichtransformation, und die Greensfunktionen genügen stochastischen Identitäten (10), da dort $M_{\mu\nu}$ im strengen Sinne (4.3) eine stochastische Variable ist. In allgemeinen Eichungen finden wir dagegen offenbar nur einen eichinvarianten stochastischen Gehalt.

Nicht alle eichinvarianten Funktionale können aus $F_{\mu\nu}$ aufgebaut werden. Für den Wilson-Loop beispielsweise beobachten wir eine g-Abhängigkeit des Vakuumerwartungswertes:

$$\frac{\partial}{\partial g} tr \left\langle P\, e^{i\oint_C dz^\mu A_\mu} \right\rangle = i\, tr \left\langle \oint_C dz^\mu R_{imv} A_\mu(z)\, P\, e^{i\oint_{C_z} dz'^\mu A_\mu} \right\rangle , \tag{4.26}$$

die Spur bezieht sich auf den Farbraum, P bedeutet Pfadordnung entlang der Schleife C und z in C_z gibt den Ort der Farbkontraktion an.

5. Kapitel

ZUSAMMENFASSUNG UND OFFENE PROBLEME

Ausgehend vom Verschwinden der Vakuumsenergie (6) in global supersymmetrischen Feldtheorien gaben wir erstmalig ein vollständiges konstruktives Verfahren zur Erstellung der (perturbativen) Nicolai-Abbildung (5) in skalaren und Eichtheorien an. Die Nicolai-Transformation resultierte aus der Integration eines Parameterflusses mit dem Anfangswert der freien Theorie. Der Generator dieses Flusses wurde aus der Wirkung des betrachteten Modells konstruiert. Er erlaubt eine einfache Interpretation als gemittelte Super- und Eichtransformation und zeigt die Art der Abhängigkeit der Nicolai-Abbildung von der Wahl der Eichung.

Nicolai-transformierte Funktionale besitzen eine transparente graphische Entwicklung in fermionischen Baumdiagrammen. Aus dieser gewannen wir eine neuartige Störungstheorie, in der keine Fermion- oder Geistschleifen auftreten. Das durch Supersymmetrie verbesserte Ultraviolett-Verhalten ist bereits in den Graphen eingebaut.

Die stochastischen Eigenschaften des N=2 d=2 Wess-Zumino-Modells und der N=1 d=4 Yang-Mills-Theorie in Lichtkegeleichung erwiesen sich als Spezialfall eines allgemeinen Zusammenhangs zwischen stochastischen Variablen und Fixpunkten der Nicolai-Transformation. Diese Fixpunkte wurden konstruiert, um eine Klasse eichinvarianter stochastischer Variablen in der N=1 d=4 Yang-Mills-Theorie abzuleiten.

Verschiedene interessante Fragen bleiben offen: Für den Fall skalarer Theorien wurde die Verträglichkeit der Parameterfluß-Gleichung mit dem Renormierungsprogramm gezeigt; dies muß für Eichtheorien noch untersucht werden. Die Baumgraphenentwicklung verspricht, einen endlichen Konvergenzradius zu besitzen, was Aufschlüsse über den nichtperturbativen Bereich ergäbe. Ebenfalls nicht diskutiert wurde die physikalische

Interpretation der stochastischen Sektoren supersymmetrischer Theorien.

Schließlich lassen sich verschiedene Erweiterungen des vorgestellten Konzepts denken: nichtlineare σ-Modelle (20), Theorien mit gebrochener oder mit erweiterter Supersymmetrie. Der letzte Aspekt erscheint besonders verlockend im Hinblick auf die Endlichkeit der N=4 d=4 Yang-Mills-Theorie (9).

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. K. Dietz für die Themenstellung der Dissertation und seine wertvolle Unterstützung und Kritik während ihrer Entstehungszeit. Ich habe von zahlreichen Diskussionen mit ihm profitiert.

Bei Prof. Dr. R. Flume möchte ich mich herzlich für die Zusammenarbeit und wichtige Anregungen in der Anfangsphase der Dissertation bedanken.

Weiterhin danke ich P. Christe, S. Fubini, W. Nahm, H. Nicolai und D. Pottinger für wichtige Hinweise und anregende Diskussionen.

ABBILDUNGEN

Abb.1 Die Entwicklung des Fermion-Propagators $\mathcal{F}^{-1}$ um die freie Theorie für das N=1 d=4 Wess-Zumino-Modell.

Abb.2 Wirkungen von $\tilde{R}_\lambda$ auf einen typischen Abschnitt von $\mathcal{G}$ für das N=1 d=4 Wess-Zumino-Modell. Spin-Spuren sind entlang der Äste zu erstrecken und enden, wo eine Fermion-Linie in einen Kreis mündet. Für Feynman-Regeln siehe auch Abb.1.

Abb.3 Die führenden Terme der Baumgraphenentwicklung $T_g^{-1} X$ für das N=1 d=4 Wess-Zumino-Modell. Für graphische Regeln siehe Abb.1,2.

Abb.4 Führende Beiträge zur Störungsreihe für $\langle \varphi^*(x)\varphi(y)\rangle$ im N=1 d=4 Wess-Zumino-Modell.

Abb.5 Feynman-Regeln für die Baumgraphenentwicklung $T_g^{-1}\varphi$ des N=1 d=4 Wess-Zumino-Modells. Spin-Spuren sind gemäß Abb.2 zu nehmen.

Abb.6 Graphische Darstellung der Nicolai-Abbildung des N=1 d=4 Wess-Zumino-Modells bis $O(g^3)$.

Abb.7 Typisches Diagramm aus der Baumgraphenentwicklung der N=1 d=4 Yang-Mills-Theorie. Für Feynman-Regeln siehe Abb.8,9.

Abb.8 Feynman-Regeln für fermionische Bäume aus $T^{-1}_{\text{int}}(g)$. Spin-Spuren verlaufen gemäß Abb.2.

Abb.9 Feynman-Regeln für fermionische Bäume aus $T^{-1}(g)$. Spin-Spuren verlaufen gemäß Abb.2. Eine lineare Eichung ist gewählt.

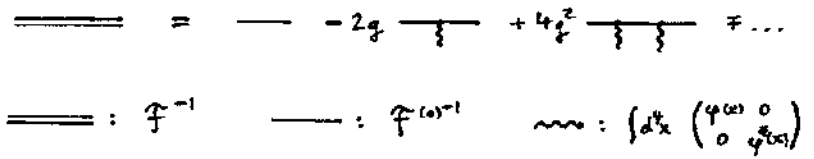

Abbildung 1

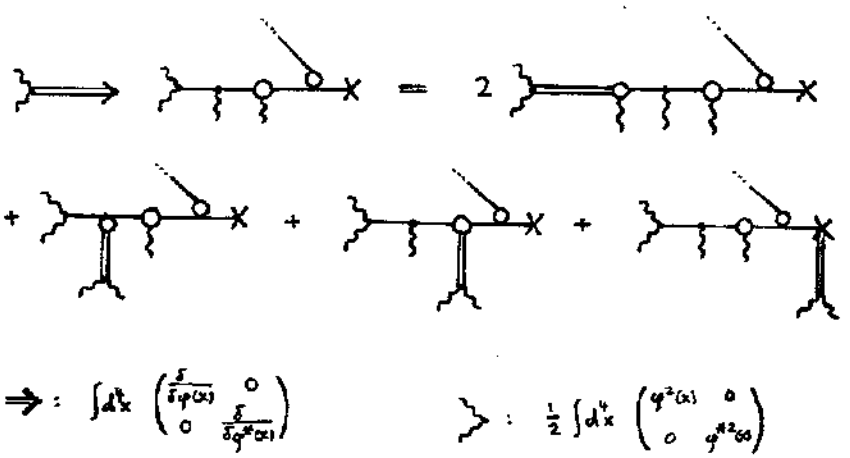

Abbildung 2

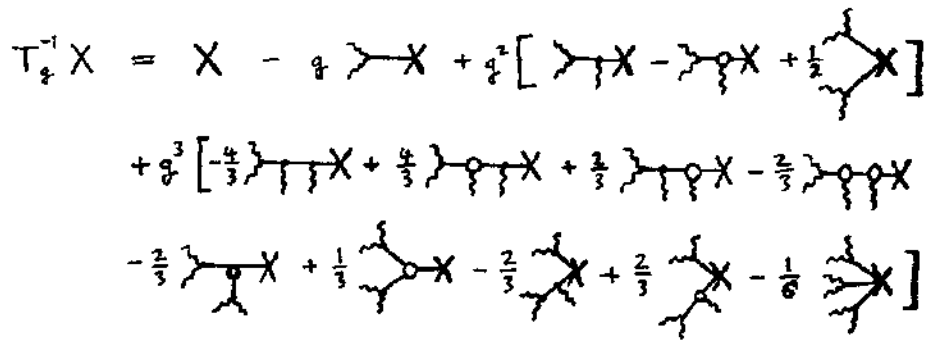

Abbildung 3

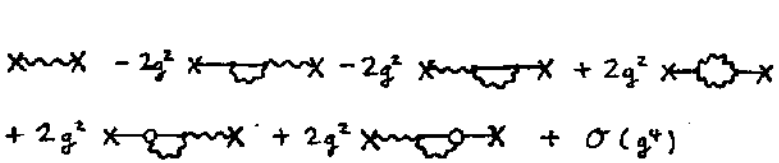

Abbildung 4

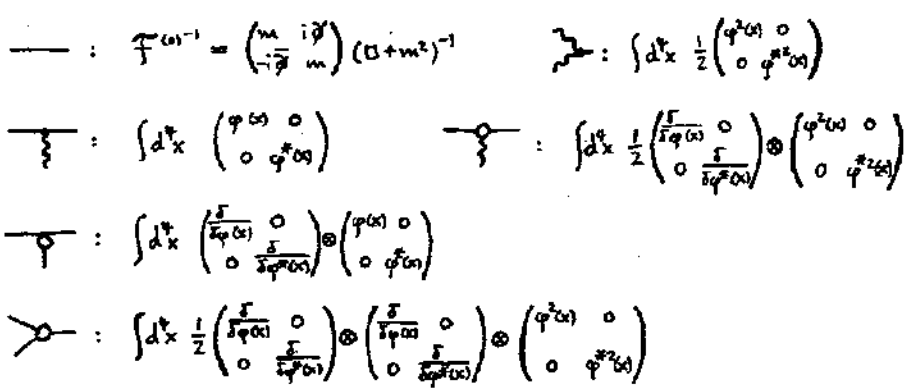

Abbildung 5

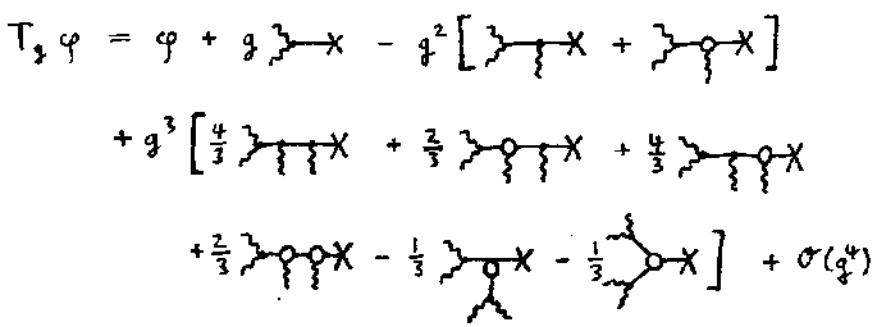

Abbildung 6

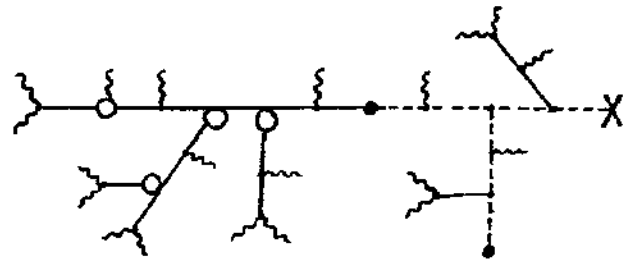

Abbildung 7

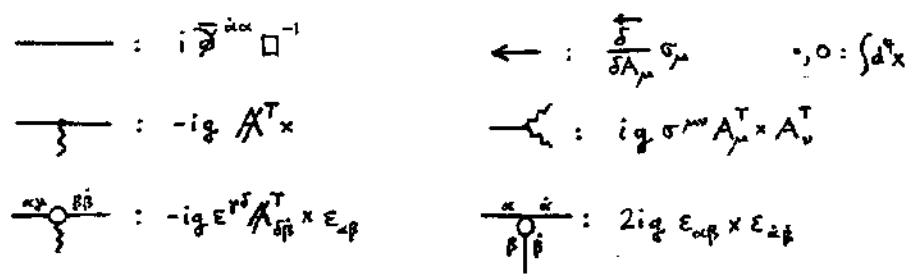

Abbildung 8

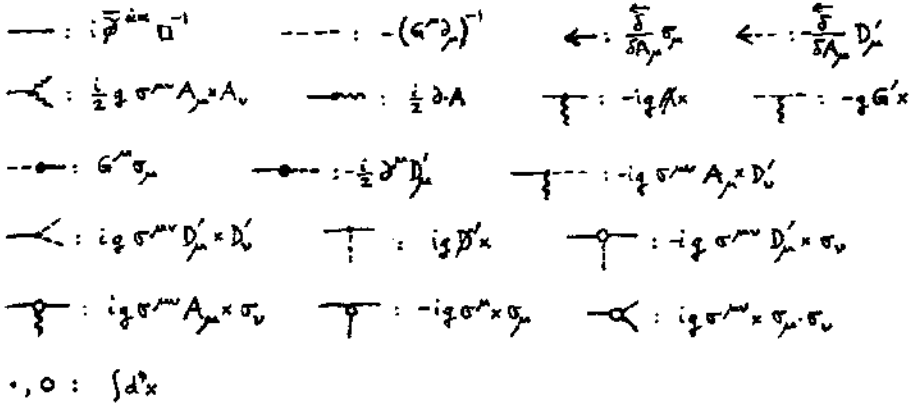

Abbildung 9

LITERATURVERZEICHNIS

(1) G.Parisi und Wu Yong-shi, Sci.Sin.24 (1981) 483.

(2) P.Fayet und S.Ferrara, Phys.Rep.C32 (1977) 249.

(3) G.Parisi und N.Sourlas, Phys.Rev.Lett.43 (1979) 244; Nucl.Phys.B206 (1983) 321.

(4) S.Cecotti und L.Girardello, Ann.Phys.145 (1983) 81.

(5) H.Nicolai, Phys.Lett.89B (1980) 341; Nucl.Phys.B176 (1980) 419.

(6) B.Zumino, Nucl.Phys.B89 (1975) 535.

(7) T.Matthews und A.Salam, Nuovo Cim.12 (1954) 563; F.A.Berezin, "The Method of Second Quantization" (Academic Press, New York 1966); E.Seiler, Comm.Math.Phys.42 (1975) 163.

(8) M.Goltermann, Phys.Lett.124B (1983) 51.

(9) S.Mandelstam, Nucl.Phys.B213 (1983) 149; L.Brink, O.Lindgren und B.Nilsson, Phys.Lett.123B (1983) 323.

(10) V.de Alfaro, S.Fubini, G.Furlan und G.Veneziano, Phys.Lett.142B (1984) 399; CERN-preprint TH.4021/84 (Sept.84).

(11) R.Flume und O.Lechtenfeld, Phys.Lett.135B (1984) 91.

(12) O.Lechtenfeld, Bonn-preprint HE-84-9 (Juni 1984), erscheint in Phys.Lett..

(13) K.Dietz und O.Lechtenfeld, Bonn-preprint HE-84-26 (Okt.1984).

(14) J.Wess und J.Bagger, "Supersymmetry and Supergravity" (Princeton University Press, 1982).

(15) H.Nicolai in: Proceedings of the NATO Summer School "Supersymmetry" at Bonn (1984).

(16) J.Iliopoulos und B.Zumino, Nucl.Phys.B76 (1974) 310; H.S.Tsao, Phys.Lett.53B (1974) 381); O.Piguet und M.Schweda, Nucl.Phys.B92 (1975) 334.

(17) E.Witten, Nucl.Phys.B202 (1982) 253.

(18) S.Cecotti und L.Girardello, Phys.Lett.110B (1982) 39.

(19) L.Girardello, C.Imbimbo und S.Mukhi, Phys.Lett.132B (1983) 69.

(20) M.Claudson und M.B.Halpern, Berkeley-preprint UCB-PTH-84/24 (Sept.1984).

LEBENSLAUF

Am 30. Oktober 1959 wurde ich als Sohn der Eheleute Gerd und Elfriede Lechtenfeld in 5400 Koblenz geboren. In der Zeit von 1966 bis 1969 besuchte ich dort die Freiherr von Stein-Grundschule. Von dort wechselte ich auf das Staatliche Görresgymnasium Koblenz, wo ich nach acht Jahren am 15.6.1977 meine schulische Laufbahn mit dem Abitur abschloß. Am 19.9.1977 immatrikulierte ich mich an der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn im Fach "Physik"-Studiengang Diplom. Nach neun Semestern bestand ich am 1.2.1982 die Diplomprüfung. Seitdem promoviere ich an der Universität Bonn.