

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Critères de représentabilité des foncteurs.*

Note (*) de M. JEAN BENABOU, présentée par M. Henri Villat.

On donne un critère « formel » de représentabilité de foncteurs F à valeurs dans les ensembles. Ce critère est utilisé pour obtenir des conditions suffisantes maniables, qui se ramènent à montrer que F n'est pas « trop grand ». Différents critères de majoration permettent de retrouver la plupart des cas « concrets » de représentabilité et d'existence d'adjoints.

1. CRITÈRE « FORMEL » DE REPRÉSENTABILITÉ. — Soit $\mathcal{U}$ un univers. Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ sont deux $\mathcal{U}$ -catégories, X un objet de $\mathcal{C}$ et $K : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ un foncteur, un système projectif de source X et de but $K : \xi = (\xi(S) : X \rightarrow K(S))$ ($S \in \text{Ob}(\mathcal{S})$) est un morphisme du foncteur constant K_X dans K . On note $\text{Proj}(X, K)$ l'ensemble de ces systèmes. Si $\mathcal{C}'$ est une $\mathcal{U}$ -catégorie et $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un foncteur, on note $F \circ \xi$ le système $(F(\xi(S))) \in \text{Proj}(F(X), F \circ K)$. Si $F \circ K$ a une limite projective $\xi' \in \text{Proj}(X', F \circ K)$, on note $\lambda(F\xi)$ le morphisme canonique $F(X) \rightarrow X'$. On dit que $\xi \in \text{Proj}(X, K)$ est *séparant* (resp. *recollant*) si, pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, le morphisme $\lambda(\text{Hom}(Y, \xi)) : \text{Hom}(Y, X) \rightarrow \varprojlim \text{Hom}(Y, K(.))$ est injectif (resp. surjectif). [En général $\varprojlim \text{Hom}(Y, K(.))$ n'est pas un $\mathcal{U}$ -ensemble.] Il est clair que ξ est recollant et séparant $\Leftrightarrow \xi = \varprojlim K$.

Soit $\mathcal{C}$ une $\mathcal{U}$ -catégorie et $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}(\mathcal{U})$ un foncteur de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des ensembles qui sont éléments de $\mathcal{U}$. On définit $[(\cdot)^1]$ ou $(\cdot)^1$ une $\mathcal{U}$ -catégorie $\mathcal{S}$ et un foncteur $K : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ de la façon suivante : Les objets de $\mathcal{S}$ sont les couples (X, x) où $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $x \in F(X)$; les flèches sont les couples (f, x) où $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{C}$ et $x \in F(X)$; la source de (f, x) est (X, x) et le but est $(Y, F(f)(x))$; la composition est

$$(g, F(f)(x)) \circ (f, x) = (gf, x).$$

Le foncteur K est défini par

$$K(X, x) = X; \quad K(f, x) = f.$$

THÉORÈME 1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}(\mathcal{U})$ est représentable;*
- (ii) *La catégorie $\mathcal{S}$ a un objet initial;*
- (iii) *Le foncteur K a une limite projective et F est compatible avec cette limite;*
- (iv) *Il existe un objet X de $\mathcal{C}$ et un système projectif séparant $\xi \in \text{Proj}(X, K)$ tel que $\lambda(F\xi) : F(X) \rightarrow \varprojlim F \circ K$ est surjective.*

2. MAJORATIONS. — Une $\mathcal{U}$ -catégorie $\mathcal{J}$ est $\mathcal{U}$ -petite, s'il existe une $\mathcal{U}$ -catégorie $\mathcal{K}$ équivalente à $\mathcal{J}$ et telle que $\text{Ob}(\mathcal{K}) \in \mathcal{U}$. Un foncteur

$\Phi : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C}$ est $\mathcal{U}$ -petit si $\mathcal{J}$ et $\mathcal{C}$ sont deux $\mathcal{U}$ -catégories et si $\mathcal{J}$ est $\mathcal{U}$ -petite. Un objet X d'une $\mathcal{U}$ -catégorie $\mathcal{C}$ est à sous-objets (resp. quotients) $\mathcal{U}$ -petits si la catégorie des sous-objets de X (resp. des quotients de X) est $\mathcal{U}$ -petite; il est $\mathcal{U}$ -petit s'il est à sous-objets et objets-quotients $\mathcal{U}$ -petits. $\mathcal{C}$ est à petits quotients (resp. sous-objets, resp. objets) si tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ est à quotients (resp. sous-objets, resp. quotients et sous-objets) $\mathcal{U}$ -petits. Les catégories « usuelles » sont toutes à petits objets. Une $\mathcal{U}$ -catégorie $\mathcal{C}$ est à $\mathcal{U}$ -lim si tout foncteur $\mathcal{U}$ -petit de but $\mathcal{C}$ admet une $\mathcal{U}$ -lim.

Soit $\mathcal{C}$ une $\mathcal{U}$ -catégorie et $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}(\mathcal{U})$ un foncteur. En général, le foncteur K du paragraphe 1 n'est pas $\mathcal{U}$ -petit. Nous allons donner plusieurs « critères de majoration » permettant de ramener (iii) à la considération de $\mathcal{U}$ -lim de foncteurs $\mathcal{U}$ -petits.

Soit $f : X \rightarrow Y \in \mathcal{C}$, et $y \in F(Y)$ on dit que y passe par f s'il existe $x \in F(X)$ tel que $y = F(f)(x)$. On dit que $x \in F(X)$ engendre X si pour tout couple $f, g : X \rightarrow Y$, $F(f)(x) = F(g)(x) \Rightarrow f = g$. On dit que $x \in F(X)$ engendre strictement X si pour tout sous-objet $j : X' \rightarrow X$ de X , si x passe par j , j est un isomorphisme. F est $\mathcal{U}$ -borné s'il existe une famille $\mathcal{M} = (X_m)_{m \in M}$ avec $M \in \mathcal{U}$, $X_m \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ telle que pour tout $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $x \in F(X)$, il existe $f : X_m \rightarrow X$ tel que x passe par f . F est génériquement $\mathcal{U}$ -borné s'il existe une famille $\mathcal{G} = (X_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ avec $\Gamma \in \mathcal{U}$, $X_\gamma \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ telle que si $x \in F(X)$ engendre X , X est isomorphe à un des X_γ . F est strictement $\mathcal{U}$ -borné s'il existe une famille $\mathcal{L} = (X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ avec $\Lambda \in \mathcal{U}$, $X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ telle que si $x \in F(X)$ engendre strictement X , X est isomorphe à un X_λ .

La notion essentielle est celle de foncteur $\mathcal{U}$ -borné. En effet, si F est $\mathcal{U}$ -borné, on définit une catégorie $\mathcal{S}'$ et un foncteur $\Phi : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ de la manière suivante : Les objets de $\mathcal{S}'$ sont les couples (m, x) où $m \in M$ et $x \in F(X_m)$; les flèches sont les quadruples (n, f, m, x) où $f : X_m \rightarrow X_n \in \mathcal{C}$ et $x \in F(X_m)$, la source étant (m, x) et le but $(n, F(f)(x))$; la composition est donnée par

$$(p, g, n, F(f)(x)) \circ (n, f, m, x) = (p, gf, m, x);$$

le foncteur Φ est défini par

$$\Phi(m, x) = (X_m, x), \quad \Phi(n, f, m, x) = (f, x).$$

Avec ces notations, on a :

LEMME 1. — Si $\mathcal{C}$ est à produits fibrés et $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$ est $\mathcal{U}$ -borné et commute avec les produits fibrés; pour toute $\mathcal{U}$ -catégorie $\mathcal{C}'$ et tout foncteur $K' : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}'$, K' a une limite projective $\Leftrightarrow K' \circ \Phi$, petit foncteur, a une limite projective, et les deux sont canoniquement isomorphes.

On exprime ceci en disant que Φ fait de $\mathcal{S}'$ une catégorie cofinale dans $\mathcal{S}$.

THÉORÈME 2. — Soit $\mathcal{C}$ une $\mathcal{U}$ -catégorie ayant des $\mathcal{U}$ -lim. Un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}(\mathcal{U})$ est représentable $\Leftrightarrow$ il est $\mathcal{U}$ -borné et commute avec les $\mathcal{U}$ -lim.

Pour reconnaître qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}(\mathcal{U})$ est $\mathcal{U}$ -borné on dispose des critères suivants :

PROPOSITION 1. — Soit $\mathcal{J}$ une $\mathcal{U}$ -petite catégorie et

$$\Phi : \mathcal{J} \rightarrow \text{Fonct}(\mathcal{C}, \text{Ens}(\mathcal{U}));$$

$i \mapsto F_i : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}(\mathcal{U})$, un foncteur. Si les F_i sont tous $\mathcal{U}$ -bornés, $\varinjlim F_i$ est $\mathcal{U}$ -borné.

Supposons pour simplifier que $\mathcal{C}$ est à $\mathcal{U}$ -lim et que F commute aux $\mathcal{U}$ -lim.

PROPOSITION 2. — Si $\mathcal{C}$ est à petits sous-objets : génériquement $\mathcal{U}$ -borné $\Rightarrow$ strictement $\mathcal{U}$ -borné $\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ -borné.

PROPOSITION 3. — Si $\mathcal{C}$ est à petits objets quotients : $\mathcal{U}$ -borné $\Rightarrow$ génériquement $\mathcal{U}$ -borné $\Rightarrow$ strictement $\mathcal{U}$ -borné.

Les trois notions coïncident dans le cas où $\mathcal{C}$ est à petits objets, et l'on a alors :

PROPOSITION 4. — Si $\mathcal{C}$ est à petits objets et $G : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}(\mathcal{U})$ est un foncteur $\mathcal{U}$ -borné, tout sous-foncteur F de G , qui commute avec les $\varinjlim$, est $\mathcal{U}$ -borné.

Dans le cas où $\mathcal{C}$ admet un cogénérateur C , c'est-à-dire un objet tel que le foncteur $\text{Hom}(\cdot, C) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}(\mathcal{U})$ soit fidèle, on a un critère de majoration « indépendant du foncteur F ». En effet :

PROPOSITION 5. — Soit $\mathcal{C}$ une $\mathcal{U}$ -catégorie à $\mathcal{U}$ -limites projectives, ayant un cogénérateur C tel que pour tout $I \in \mathcal{U}$, C^I soit à sous-objets $\mathcal{U}$ -petits (c'est le cas si $\mathcal{C}$ est à sous-objets petits) un foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}(\mathcal{U})$ est représentable si et seulement si il commute aux limites projectives.

3. REMARQUES ET APPLICATIONS.

Remarque 1. — Toutes les définitions se dualisent au cas des foncteurs contravariants, et les résultats subsistent.

Remarque 2. — Avec des modifications évidentes, tout ce qui précède est valable si l'on ne se place pas dans le « contexte des univers », mais dans le formalisme où l'on distingue « classes » et « ensembles », « grosses catégories » et « petites catégories ».

Les critères de représentabilité donnés au paragraphe 2 permettent de retrouver, en général avec des hypothèses plus faibles, les théorèmes d'existence d'adjoints donnés par Freyd ⁽²⁾. Par exemple, du théorème 2, on déduit :

THÉORÈME 3. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à limites projectives et $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur, S a un adjoint à gauche si et seulement si il commute avec les limites projectives et pour tout objet D de $\mathcal{D}$, le foncteur $\text{Hom}(D, S(\cdot))$ est borné.

[Freyd obtient le même théorème en supposant, en outre, que $\mathcal{C}$ est à petits sous-objets et que pour tout $D \in \text{Ob}(\mathcal{O})$, $\text{Hom}(D, S(.))$ n'est pas le foncteur vide.]

La proposition 4 permet de construire des « objets définis par générateurs et relations » quand on sait construire des « objets libres ». De façon précise on a :

THÉORÈME 4. — Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des $\mathcal{U}$ -catégories et $S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$; $P : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, $Q : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ des foncteurs tels que :

- (i) $P \circ S = Q$ et P est fidèle;
- (ii) $\mathcal{A}$ est à petits objets;
- (iii) $\mathcal{A}$ est à $\mathcal{U}$ -limites projectives et Q a un adjoint à gauche.

Alors S admet un adjoint à gauche $\Leftrightarrow S$ commute avec les $\mathcal{U}$ -limites projectives.

Par exemple, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des catégories d'ensembles « munies de structures » $\mathcal{C}$ est la catégorie des ensembles, P et Q sont les foncteurs qui « oublient les structures » et S un foncteur qui « oublie une partie de la structure », (i) et (ii) sont satisfaits et il suffit de vérifier (iii) et de savoir que S commute aux $\lim_{\leftarrow}$, ce qui est en général assez facile, pour que S admette un adjoint à gauche.

De la proposition 4 on déduit encore :

THÉORÈME 5. — Soit $\mathcal{C}$ une $\mathcal{U}$ -catégorie à $\mathcal{U}$ - $\lim_{\leftarrow}$ et petits objets, $\mathcal{C}$ a des $\mathcal{U}$ -limites inductives si et seulement si il existe une $\mathcal{U}$ -catégorie $\mathcal{A}$ ayant des $\mathcal{U}$ -sommes directes et un foncteur fidèle $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$ ayant un adjoint à gauche.

[Les applications de ce théorème au cas où $\mathcal{A} = \text{Ens}(\mathcal{U})$ et P est le foncteur « oubli de structures » sont très nombreuses.]

(*) Séance du 11 janvier 1965.

(¹) EHRESMANN, *Gattungen von lokalen Strukturen* (Jahresberichte der Deutschen. Mat. Vereinigung, 60, 1957).

(²) FREYD, *Abelian Categories*, Harper et Row, New-York, 1964.

(³) GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie algébrique*, chap. 0, Presses Universitaires de France, 1961.

(⁴) KAN, *Adjoint Functors* (Trans. Amer. Mat. Soc., 1958).

(65, rue d'Hauteville, Paris, 5^e.)